arXiv:2303.00796v1 [math.NT] 1 Mar 2023

分数有限和理论：研究动机与一些新结果

LEONARDOF. BIELINSKI蓬塔格罗萨州立大学，巴西蓬塔格罗萨，PR，84030-900，BIELINSKILF@GMAIL.COM，GIULIANO G. LA GUARDIA蓬塔格罗萨州立大学，巴西蓬塔格罗萨，PR，84030-900，GGUARDIA@UEPG.BR，以及 JOCEMAR Q. CHAGAS蓬塔格罗萨州立大学，巴西蓬塔格罗萨，PR，84030-900，JOCEMARCHAGAS@UEPG.BR

摘要。本文研究分数有限和理论。我们介绍了能够刻画与分数和的导数相关的常数（称为函数本质）的函数类别。文中给出了函数本质的例子，其中包括伯努利数；这些数是函数 $f(x) = x^a, a \in \mathbb{N}^*$ 的本质。基于这些新结果，我们可以将欧拉-麦克劳林求和公式推广至实数，而不再仅考虑自然数。此外，我们利用函数本质的概念，提出了一种新的发散级数正则化方法。

数学主题分类（2020）：40D05 · 40G99

1. 引言

$\sum_{i=m}^{n} f(i)$ 由 L. Euler 在 1755 [8], 创立的简洁优雅的求和记号（适用于 $m,n \in \mathbb{N}$）在文献中广为人知。几年前，一些数论研究者也探讨了符号 $\sum_{i=x}^{y} f(i)$ 的含义，特别是在 x、y 为实数甚至复数时的情形（见 [13, 14, 15]）。如今，这类求和称为分数有限和。已知最早的分数有限和例子由 L. Euler 给出 [9], ，即恒等式

$$\sum_{k=1}^{-1/2} \frac{1}{k} = -2\ln(2). \tag{1}$$

S. Ramanujan 也写下了一些关于分数和的想法 [17, 4]（例如，参见第二本笔记的第六章）。然而，直到 2005 [13, 14, 15], ，在 D. Schleicher 和 M. Müller 的推动下，分数和理论才有了系统性的研究。近来，I. Alabdulmohsin 出版了一本论述分数有限和理论的著作 [2], ，其中介绍了一种处理可能使信号振荡的函数之分数和的方法。分数有限和理论也在 [12, 10, 6] 中得到研究，并应用于 [11, 18]。[16] 中运用了示性演算的技巧，以解决 [14] 中提出的一个未决问题。

本文对分数有限和理论作出了一些贡献。第2节通过一个简单的例子，展示了研究分数阶和的动机。第3节回顾了 M. Müller 和 D. Schleicher 所确立的这一理论的基本概念。第4节介绍了一些新结果，其中包括对 [14] 中提出的一个开放问题的解答。第5节给出了若干示例与应用，包括：（i）推导适用于一大类函数的分数有限和欧拉-麦克劳林求和公式；（ii）提出一种正则化发散级数的新方法，这是物理学中的一个重要问题。最后，第6节作出总结，并提出了一些开放问题。

2. 分数有限和理论的研究动机

有些求和具有闭式表达式，也就是说，可以通过固定n次运算求出其值。例如，前 n 个正整数之和 $S_1(n) = \sum_{i=1} i$，可以表示为 $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$。我们可以考虑将 $n \in \mathbb{N}$ 替换为 $x \in \mathbb{R}$，甚至替换为 $z \in \mathbb{C}$，此时表达式 $S_1(x)$ 或 $S_1(z)$ 仍然有明确的含义。于是我们可以写作

$$\frac{\pi(\pi+1)}{2} = S_1(\pi) := \sum_{i=1}^{\pi} i,$$

意为“前 π 个整数之和”。类似地，也可以为其他具有闭式表达式的求和提出“连续$n$$n$推广”，以及 $\sum i^2, \sum i^3$ 和 $\sum q^i$。遗憾的是，并非所有求和都具有闭式表达式（或者，即使存在闭式表达式，计算起来也非常困难）。对于这类求和，有必要采用不同的方法。

一个没有闭式表达式的有限和例子是调和数，其定义为 $H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$。本节将介绍一种初步方法，用于获得一个表达式，以计算从 1 到实数（或复数）求和边界值 x（或 z）的“连续”调和数。给定一个固定的正整数 n，对于每个

整数 $m > n$，考虑

$$\begin{aligned} A(m) &:= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} &&= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} &&+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m} \\ B(m) &:= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i+n} &&= &&\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m} &&+\cdots+\frac{1}{m+n}, \end{aligned}$$

我们得到

$$A(m)-B(m)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+n}\right)=H(n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+i}.$$

然而，由于

$$L(m)=\frac{n}{m+n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+1}=\frac{n}{m+1}=U(m), \tag{2}$$

在 (2) 中取 $m \to \infty$，我们有 $\lim_{m\to\infty} L(m) = \lim_{m\to\infty} U(m) = 0$。由夹逼定理可知，$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\quad} \frac{1}{m+i}\right) = 0$。因此，在 $(A(m) - B(m))$ 中取 $m \to \infty$，我们得出结论：对于每个正整数 n，下列等式成立：

$$H(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+n}\right). \tag{3}$$

注意，对于每个指标 i，如果考虑 $n \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$，公式 (3) 中的函数 $f_i(n) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+n}$ 也有意义。因此，我们提出以下公式：

$$\mathscr{H}(z)=\sum_{i=1}^{z}\frac{1}{i}:=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+z}\right) \tag{4}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{-}$ 均成立。

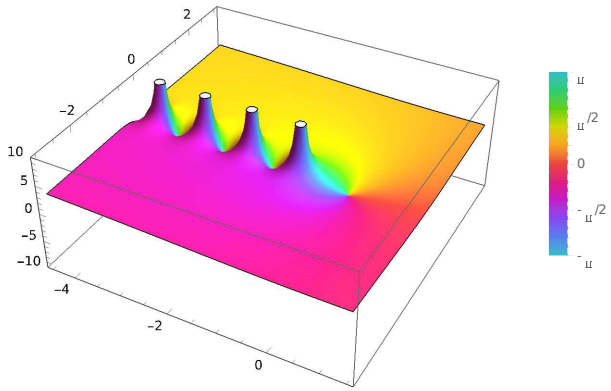

图1. $\mathscr{H}(z)$，其中 $z \in [-4.5, 1.5] \times [-3i, 3i]$。

为了说明公式（4），图1展示了当 $\mathrm{z} \in [-4.5, 1.5] \times [-3\mathrm{i}、3\mathrm{i}]$ 时的 $\mathscr{H}(\mathrm{z})$。例如，若 $\mathrm{x} = 0$，则有 $\mathscr{H}(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \right) = 0$。值得一提的是，L. Euler 在 [9]给出的例子是 $\mathscr{H}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\ln(2)$。公式（4）与我们将分数和的基本公式应用于函数 $\mathrm{f}(\nu) = \frac{1}{\nu}$ 时得到的结果完全相同，该基本公式见 [15]（见第 3 节）。

3. 预备知识

本节中，我们回顾 M. Müller 和 D. Schleicher [13, 14, 15]所建立的分数有限和理论的基本概念。

分数有限和理论的公理化框架由 Müller 和 Schleicher 在 [15] 中提出的六条公理构成。对于 $\mathrm{x}、\mathrm{y}、\mathrm{z}、\mathrm{s} \in \mathbb{C}$ 以及复函数 f、g（其定义需满足一些条件，后文将对此作出说明），以下陈述成立：

公理 A1（连续求和）：

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=y+1}^{z} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu). \tag{5}$$

公理 A2（平移不变性）：

$$\sum_{\nu=x+s}^{y+s} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu + s). \tag{6}$$

公理 A3（线性）：

$$\sum_{\nu=x}^{y} \big(\lambda f(\nu) + \mu\, g(\nu)\big) = \lambda \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \mu \sum_{\nu=x}^{y} g(\nu). \tag{7}$$

公理 A4（与经典求和的一致性）：

$$\sum_{\nu=1}^{1} f(\nu) = f(1). \tag{8}$$

公理 A5（单项式求和）：对于每个 $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$，映射

$$z \mapsto \sum_{\nu=1}^{z} \nu^{d} \tag{9}$$

在 $\mathbb{C}$ 中是全纯的。

公理 A6（右移连续性）：如果对任意 $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$，$\lim_{n\to\infty} \mathrm{f}(\mathrm{z}+\mathrm{n}) = 0$ 逐点成立，那么

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu + n) = 0. \tag{10}$$

此外，如果存在一个固定次数的多项式序列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足条件 $|f(z+n)-p_n(z+n)|\to 0$，当 $n\to\infty$ 时，对所有 $z\in\mathbb{C}$，那么

$$\left|\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)\right|\longrightarrow 0. \tag{11}$$

公理 A6 有如下替代表述：如果 $\lim_{n\to\infty} f(z-n)=0$ 逐点收敛，对于任意 y $z\in\mathbb{C}$，则可推出 $\lim^{n\to\infty}\sum_{\nu=x} f(\nu-n)=0$。该替代公理称为“左移公理”或“公理 A6”。 ←

通过运用公理 A1–A6，Müller 和 Schleicher 开发了一种适用于多项式的求和方法，如下所述。给定一个多项式 $p(z)$，其中 $z\in\mathbb{C}$，他们将 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 定义为满足方程 $P(z)-P(z-1)=p(z)$（对所有 $z\in\mathbb{C}$）以及条件 $P(0)=0$ 的唯一多项式。因此，满足公理 A1–A6 的多项式 $p(z)$ 的分数有限和的唯一定义由 [15] 给出：

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu)=P(y)-P(x-1). \tag{12}$$

随后，他们为实函数和复函数确立了如下分数有限和的（唯一可能的）定义 [15]。

定义 3.0.1. 若函数 $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，则称其为分数可求和的，当且仅当满足以下条件：

(i) 若 $x\in U$，则 $x+1\in U$；(ii) 存在一个由次数小于或等于 m 的多项式组成的序列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $x\in U$，均有 $|f(n+x)-p_n(n+x)|\to 0$ 当 $n\to+\infty$ 时（按照约定，零多项式的次数为 $-\infty$）；并且

(iii) 对所有 $x,y\in U$，极限均存在

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=n+x}^{n+y} p_n(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)\right), \tag{13}$$

其中，分数和 $\sum p_n$ 的含义见公式（12）。

对于满足 $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 且对所有 $z\in U$，当 $n\to\infty$ 时 $f(n+z)\to 0$ 的分数可求和函数，Müller 和 Schleicher [15] 证明了：

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big). \tag{14}$$

y他们使用记号 $\sum f$ 表示式 (13) 中的极限，并将其称为 f 的分数x和 [15]。在本文中，这些符号的用法略有不同（见定义 4.1.3）。

I. Alabdulmohsin 仅借助两个公理，即公理 A1 和公理 A4，提出了相同的理论（见 [2]），其改写形式如下：

$$\sum_{\nu=z}^{z} f(\nu) = f(z) \tag{15}$$

对所有 z ∈U ⊂ℂ，其中 f 为分数可求和函数。

4. 新结果

本文介绍了分数有限和理论的一些新成果。我们的目的之一是解答 [14] 中提出的一个未决问题。更确切地说，我们的主要目标是确定函数 f 满足以下关系的条件：

$$\frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{x} f(\nu) \stackrel{?}{=} c_f + \sum_{\nu=1}^{x} f'(\nu), \tag{16}$$

并定义非任意常数 c_f，同时提供在某些情况下对其进行求值的方法。

4.1. 关于公理、集合及其直接推论

我们考虑 M. Müller 和 D. Schle- icher 提出的完整公理化框架 [15]（见第 3 节），其中公理 A5 被公理 A5*（如下给出）取代，而 A6 仅包含右移连续性（不包括左移连续性）。在命题 4.1.9 中，我们给出公理 A1、A2 和 A4 的一些直接且有用的推论。我们还引入可求和集的概念，并定义其他一些适用于后续小节发展的函数集。

公理 A5*（全纯函数之和）若 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是全纯函数，则函数

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{x} f(k)$$

也为全纯函数。

由于每个多项式都是全纯函数，公理 A5* 显然蕴含公理 A5。

定义 4.1.1. 对于集合 A，我们用 $\wp$(A) 表示 A 的所有子集构成的集合。令 $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ 表示所有函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 构成的集合。分别定义函数 L、T、$S:\wp\left(\mathbb{C}^{\mathbb{C}}\right)\to\wp\left(\mathbb{C}^{\mathbb{C}}\right)$ 如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(X) &:= \left\{f\in\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \mid f \textit{ is a linear combination of functions in } X\right\},\\
\mathbf{T}(X) &:= \left\{f\in\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \mid \exists\,(g,c)\in X\times\mathbb{C}, \forall\, x\in\mathbb{C}, f(x)=g(x+c)\right\}, \textit{ and}\\
\mathbf{S} &:= \mathbf{L}\circ\mathbf{T}.
\end{aligned}$$

定义 4.1.2. 设 $\mathscr{F}$ 为函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的集合，其中的函数可以表示为全纯函数和分数可求和函数的线性组合。

定义 4.1.3. 若 $\mathscr{U} \subset \mathscr{F}$ 满足存在唯一映射

$$\sum : \mathbf{S}(\mathscr{U}) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
$$(f,x,y) \mapsto \sum(f,x,y) = \sum_{k=x}^{y} f(k) \tag{17}$$

满足公理 $A1_{\mathscr{U}}$、$A2_{\mathscr{U}}$、$A3_{\mathscr{U}}$、$A4_{\mathscr{U}}$、$A5^*_{\mathscr{U}}$和 $A6_{\mathscr{U}}$，则称 $\mathscr{U}$为可求和集，而 $\sum$是相对于 $\mathscr{U}$的分数和。

注记 4.1.4。请注意，一个函数可以属于某个可求和集，即使它不是分数可求和的；例如，参见 $z = \pi i$ 的例 5.1.1。

更一般地，若我们有一个依赖于集合 $X \subset \mathbb{C}^C$的公理体系，也就是说，一个由 $\mathscr{A}(X) = (\mathscr{A}_1(X)\ \mathscr{A}_2(X)\ ...,\mathscr{A}_n(X))$ 给出的体系 $\mathscr{A}$，并且 $\mathscr{U} \subset \mathbb{C}^C$满足存在唯一映射 $\sum: S(\mathscr{U}) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$满足这些公理，则称 $\mathscr{U}$为公理体系 $\mathscr{A}$中的可求和集。最后，我们定义 $\mathfrak{S} := \{X \subset \mathscr{F} | X$ 是一个可求和集$\}$。

注记 4.1.5. 对于每个集合 $\mathscr{U}$，所讨论的函数集合记为 $S(\mathscr{U})$。也就是说，每个集合 $\mathscr{U}$ 都会生成各自的公理 $A1_{\mathscr{U}}$、$A2_{\mathscr{U}}$、$A3_{\mathscr{U}}$ 等。例如，公理 $A2_{\mathscr{U}}$ 指出，$\forall(f, s, x, y) \in S(\mathscr{U}) \times \mathbb{C}^3, \sum(f, x+s, y+s) = \sum(h, x, y)$，其中$\forall z \in \mathbb{C}$，$h(z) := f(z+s)$。公理 $A3_{\mathscr{U}}$指出，$\forall(f, g\lambda, \mu, x, y) \in S(\mathscr{U})^2 \times \mathbb{C}^4, \sum(\lambda f + \mu g, x, y) = \lambda \sum(f, x, y) + \mu \sum(g, x, y)$。公理 $A5_{\mathscr{U}}$指出，如果 $f \in \mathscr{U}$是全纯的，那么映射 $x \mapsto \sum(f, 1, x)$ 也是全纯的。注意，$h \in T(\mathscr{U}) \subset S(\mathscr{U})$，且$\lambda f + \mu g \in L(\mathscr{U}) \subset S(\mathscr{U})$。

注记 4.1.6. 请注意，先验地，符号 $\sum$并无“全局意义”：设 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$是两个可求和集，设 ${}^{\mathscr{U}}\sum$和 ${}^{\mathscr{V}}\sum$分别是相对于集合 $\mathscr{U}$和 $\mathscr{V}$的分数和，并设 $f \in S(\mathscr{U} \cap \mathscr{V})$。那么，我们无法保证 ${}^{\mathscr{U}}\sum f = {}^{\mathscr{V}}\sum f$（见开放问题 (ii)）。

注记 4.1.7. 在上下文含义明确时（如命题 4.1.8 和 4.1.9），我们会省略分数和所对应的集合。

Müller 和 Schleischer [15] 指出，复多项式的集合 $\mathbb{C}[x]$ 是一个可求和集；因此，$\mathfrak{S} \neq /0$。本文的目标之一是寻找可求和集，并计算其中元素的分数阶和。可求和集的其他例子还有：

i) $\{x \mapsto u^x | u \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}\}$; ii) $\mathbb{C}[x] \cup \{x \mapsto u^x | u \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}\}$; iii) $\{P \in \mathbb{C}[x] | P$ 的次数小于或等于 $c\}$，其中 c 是正整数；iv) $\left\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} | f(0) = 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{C}^*, f(x) = \frac{1}{x^n}\right\}$。

遗憾的是，并非所有全纯函数都能被“分数求和”，如命题 4.1.8 所示。事实上，在任何包含公理 A1-A4 的公理体系中，这样的函数都不可求和。这是一个“极其规整”的全纯函数却不能被“分数求和”的例子。

命题 4.1.8. 对每个奇整数 k，任何包含函数 $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ 的集合都不是可求和集。更一般地，若 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$，并且对所有 $x \in \mathbb{C}$ 都有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = -f(x)$，那么在任何包含公理 A1、A2、A3 和 A4 的公理体系中，任何包含 f 的集合都不是可求和集。

证明。设 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，且令 $c = \sum_{k=1}^{1/2} f(k)$。那么

$$\begin{aligned}
c + \sum_{k=3/2}^{1} f(k) &= \sum_{k=1}^{1/2} f(k) + \sum_{k=3/2}^{1} f(k) \\
\Rightarrow \quad c + \sum_{k=1}^{1/2} f\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{1} f(k) && \text{(from A1 and A2)} \\
\Rightarrow \quad c - \sum_{k=1}^{1/2} f(k) &= f(1) && \text{(from A3 and A4)} \\
\Rightarrow \quad f(1) &= 0.
\end{aligned}$$

但是 $f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(1) = -f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，这就产生了矛盾。对于特殊情形，只需注意 $e^{2\pi ik\frac{1}{2}} \neq 0$ 和 $e^{2\pi ik(x+\frac{1}{2})} = e^{2\pi ikx} e^{2\pi ik\frac{1}{2}} = -e^{2\pi ikx}$。 □

在命题 4.1.9 中，我们给出由公理 A1-A4 推导出的一些直接且有用的结果。

命题 4.1.9. 设 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，$f \in S(\mathscr{U})$ 且 $x,y \in \mathbb{C}$。则有以下结论：

i) 与经典求和的一致性：

$$\sum_{k=x}^{x} f(k) = f(x). \tag{18}$$

ii) 从 1 开始的连续求和：

$$\sum_{k=x}^{y} f(k) = \sum_{k=1}^{y} f(k) - \sum_{k=1}^{x-1} f(k). \tag{19}$$

iii) 广义空和：

$$\sum_{k=x}^{x-1} f(k) = 0. \tag{20}$$

iv) 经典求和的插值

$$\sum_{k=x}^{y} f(k) = \sum_{k=a}^{y-x+a} f(k+x-a), \quad \text{if } a, y-x \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

v）相反数求和

$$\sum_{k=1}^{-x} f(k) = -\sum_{k=1}^{x} f(k-x). \tag{22}$$

证明。对于条目（i）和（ii），分别应用 A2、A4 和 A1。条目（iii）由条目（ii）令 $y = x - 1$ 得出。对于条目（iv），只需应用 A2、A1，然后应用条目（i）。最后，对于条目（v），应用 A2 和条目（ii）。□

由于任何分数求和都可以替换为从 1 开始的等价求和，因此下文只考虑从 $k = 1$ 开始的求和。方便时，我们[x]只写 $\sum f$，而不写 $\sum f(k)$。此外，[2]中给出的空和概念（见[k=1]命题 4.1.9）已经有所体现。在本文中，空和的概念至关重要。

注释 4.1.10。值得注意的是以下情况。假设我们的公理体系为 (A1、A2、A3、A4、A5、A6)。对于 $\mathscr{U} = \{x \mapsto u^x\}$，其中 $|u| < 1$ 且 $u \neq 0$，我们可以直接应用公理 A6，在整个复数域上计算分数阶和。然而，集合 $\mathscr{V} = \{x \mapsto u^x\}$，其中 $|u| \geq 1$ 且 $u \neq 1$，将不是可求和集。在这种情况下，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathscr{V}) &= \left\{ x \mapsto \sum_{m=1}^{n} \alpha_m u^{x+\beta_m} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{2n} \right\} \\
&= \left\{ x \mapsto \sum_{m=1}^{n} \omega_m u^x \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \mathbb{C}^n \right\} \\
&= \{ x \mapsto a u^x \mid a \in \mathbb{C} \}.
\end{aligned}$$

事实上，对于 $p、q \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1+(l-1)\frac{p}{q}}^{l\frac{p}{q}} u^k \overset{A1}{=} \sum_{k=1}^{p} u^k \\
\Rightarrow \quad & \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} u^{k+(l-1)\frac{p}{q}} = \sum_{k=1}^{p} u^k && \text{Axiom A2 and Eq. (21)} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{l=1}^{q} u^{(l-1)\frac{p}{q}} \sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} u^k = \frac{u(u^p - 1)}{u - 1} && \text{Axiom A3} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} u^k = \frac{u(\cancel{u^p - 1})}{u - 1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1\left(\cancel{\left(u^{\frac{p}{q}} \right)^q - 1} \right)}{\left(u^{\frac{p}{q}} \right) - 1} \right)} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} u^k = \frac{u\left(u^{\frac{p}{q}} - 1 \right)}{u - 1} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} a u^k = a \frac{u\left(u^{\frac{p}{q}} - 1 \right)}{u - 1}.
\end{aligned}$$

对于负有理数，请注意

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{-\frac{p}{q}} au^k &= -\sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} au^{k-\frac{p}{q}} && by\ (22)\\ &= -u^{-\frac{p}{q}}\sum_{k=1}^{\frac{p}{q}} au^k && Axiom\ A3\\ &= -u^{-\frac{p}{q}}\left(a\frac{u\left(u^{\frac{p}{q}}-1\right)}{u-1}\right)\\ &= a\frac{u\left(u^{-\frac{p}{q}}-1\right)}{u-1}.\end{aligned}$$

最后，对于 0，回忆公式 (20)，并注意到 $0 = a\,u\left(u^0-1\right)u - 1$。因此，

$$\sum_{k=1}^{r} au^k = a\frac{u\left(u^r-1\right)}{u-1},\quad \forall\, r\in\mathbb{Q}. \tag{23}$$

然而，我们没有视角来计算 $r \notin \mathbb{Q}$时的分数和，而只有公理 A5* 允许我们计算缺失点。注意，左移公理仅能解决 $|u|>1$时的这些问题，但不能解决 $|u|=1$时的问题；因此，无法计算x x例如，$\sum_{k=1} i^k := \sum_{k=1} e^{(\pi i/2)k}$。

注 4.1.11。上述考虑说明了不考虑 $f \notin \mathscr{F}$ 的理由；显然，公理 A1、A2、A3 和 A4 在最理想的情况下，只能用于确定 $y\,y\,x_{-1}\sum f = \sum f - \sum f$，其中 $y - x \in \mathbb{Q}$，但不能用于 $y - x \notin \mathbb{Q}$ 的情形，而且我们无法以任何方式应用公理 xA5* 和 A6 来解决缺失的情形。

基于这一事实，我们考虑两个不同的函数 S, P : $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，使得

$$\left(\sum f\right)\Big|_Q = S|_Q = P|_Q$$

仅对 $Q \subset \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, y - x \in \mathbb{Q}\}$成立，但对 $Q = \mathbb{C}$不成立，这违背了我们的唯一性假设。

4.2. 函数本质

解决 [15], 中遗留的关于关系 (16) 在何种条件下成立这一开放问题，第一步是针对每个可求和函数 f 唯一确定一个常数。为此，我们如下定义这一常数。

定义 4.2.1（函数本质）。设 $\mathscr{U}$ 为可求和集，$\sum$ 为相对于 $\mathscr{U}$ 的分数和，且 $f \in S(\mathscr{U})$。f 相对于 $\mathscr{U}$ 的本质是由下式给出的一个常数

$$\operatorname{ess}(f) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{0}^{h} f, \tag{24}$$

如果该极限存在。在这种情况下，我们称 f 是一个在 $\mathscr{U}$ 中具有本质的函数。

注记 4.2.2。此处应以类似方式看待注记 4.1.6 和 4.1.7。

容易验证，本质在 $S(\mathscr{U})$ 上是线性的。

给定一个函数 f，我们用 $\operatorname{ess}(x \mapsto f(x))$ 表示 $\operatorname{ess}(f)$。例如，$\operatorname{ess}(y \mapsto y^2-2)$ 与将 ess(g) 写作 $g(y) = y^2-2$ 意思相同。

命题 4.2.3（本质的刻画）。若函数 f 有本质，则有

$$\operatorname{ess}(f) = \frac{d}{dx}\Big(\sum^{x} f\Big)\Big|_{x=0}. \tag{25}$$

$_x$证明。只需对 $\sum f$ 关于 x 求导，并在 $x=0$ 处取值：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(\sum^{x} f\Big)\Big|_{x=0} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{x+h} f(k) - \sum_{k=1}^{x} f(k)\right)\Big|_{x=0} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{0+h} f(k) - \sum_{k=1}^{0} f(k)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} f(k) \\
&= \operatorname{ess}(f).
\end{aligned}$$

□

公理 A5* 意味着，属于可求和集的每个全纯函数在该集内也有本质。

例 4.2.4。在表 4.2 中，我们列出了一些函数及其对应的本质。

注记 4.2.5。表 4.2 中的所有函数，其在可求和集 $\mathscr{U}$ 中的分数和，只需满足 $f \in S(\mathscr{U})$ 即可计算（也就是说，我们只用 $S(\{f\})$ 中的函数进行计算），因此这些分数和（以及相应的本质）是唯一的，与它们所属的可求和集无关。

注记 4.2.6。注意，γ是欧拉–马歇罗尼常数。

注 4.2.7. 上述某些函数并非在整个 $\mathbb{C}$上都有定义。在这篇文章中，每当我们提到一个可在 $\mathbb{C}-X$上定义的函数 f 时，实际上指的是将 f 零延拓后的函数。也就是说，函数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足 $f|_{\mathbb{C}-X} = f$，且对所有 $x \in X$ 都有 $f(x) = 0$。例如，当我们说 $f(x) = \frac{1}{x}$ 或 $f(x) = x^{-1}$时，我们指的是函数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，满足 $f|_{\mathbb{C}-\{0\}}(x) = \frac{1}{x}$ 且 $f(0) = 0$。

表 4.2 - 某些选定函数的本质。

f	$\operatorname{ess}(f)$
$x \mapsto z$	z
$x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{Z}^*$	$-a\zeta(1-a)$
$x \mapsto e^{zx}$, $e^z \neq 1$	$\frac{ze^z}{e^z-1}$
$x \mapsto e^{zx}x$, $e^z \neq 1$	$\frac{e^z}{e^z-1}\left(1-\frac{z}{e^z-1}\right)$
$x \mapsto \ln x$	$-\gamma$
$x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$	1

定理 4.2.8. 设 $a \in \mathbb{N}$。那么，在任何可求和集 $\mathscr{U}$ 中，只要 $S(\mathscr{U})$ 包含函数 $x \mapsto x^a$，就有 $\operatorname{ess}(x \mapsto x^a) = B_a$，其中 B_a 为满足 $B_1 = \frac{1}{2}$的伯努利数。

证明。对于一个 $= 0$，$x \mapsto x^a$ 是常值函数 $x \mapsto 1$。于是，$\operatorname{ess}(x \mapsto x^a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_h 1 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} hh = 1 = B_0$。

对于一个 > 0，对所有 $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$（见 [5, 3]），我们有

$$\sum_{k=1}^{n} k^a = n^a + \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} B^-_{a-k} \frac{n^{k+1}}{k+1},$$

其中 $B_1^- = -\frac{1}{2}$ 且 $B_i^- = B_i$，对 $i \neq 1$成立。根据命题 4.1.9 的第 (iv) 项可知，对所有 $(x, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$，我们有

$$\sum_{k=1}^{x} k^a = x^a + \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} B^-_{a-k} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \tag{26}$$

等式（26）的第二项是关于 x 的次数为 $a + 1$的多项式，而在 [15],中，第一项也如此。但是，如果 P 和 Q 是次数为 m 的多项式，且对于 $m+1$ 个不同的 x 值，$P(x) = Q(x)$，那么 $P = Q$，因此等式（26）对所有 $x \in \mathbb{C}$都成立。因此，假设 $a \geq 2$，我们可以在 0 处对等式（26）两边求导：

$$\begin{aligned} \operatorname{ess}(x \mapsto x^a) &= ax^{a-1} + \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} B^-_{a-k} x^k \Big|_{x=0} \\ &= 0 + \binom{a}{0} B^-_{a-0} \cdot 1 \\ &= B_a. \end{aligned}$$

a 的情形可以很容易地验证。因此，对于所有 n、a 和 p，$\operatorname{ess}(x\, x)\ B\ a(a)$。此外，根据线性，如果 x 属于 S，且 $P(x)\ c\ c\ x$，那么 k

$$\operatorname{ess}(P) = \sum_{k=0}^{n} c_k B_k. \qquad \square$$

命题 4.2.3 给出了函数 f 本质的一种刻画；然而，在许多情况下，这种刻画并不适合用于评估本质，因为

$_x$函数 $x \mapsto \sum f$ 事先无法得知。在第6节中，我们将介绍一些可用于计算某些函数本质的方法。

4.3. 主要结果

我们在此介绍主要结果，确定了若干类函数，对于这些函数，可以求得其分数求和，且所得结果与公式（16）一致，其中常数 c_f 被函数的本质所替代。更具体地说，在定理 4.3.1 中，我们证明了：对于属于某个可求和集并满足以下将详细说明的若干假设的全纯函数，公式（27）成立。在定理 4.3.3 中，我们进一步推广了该结果，得到一个新的结果。在定理 4.3.5 中，我们证明了该结果对于一些不属于定理4.3.1–4.3.3所涵盖范围的函数同样成立。最后，在定理 4.3.7 中，我们给出了关于函数平移一个复数 y 后其本质的一些恒等式。

定理 4.3.1. 设 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯函数。若存在 $2n+1$ 个函数 $u, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足

i) $\forall\, m\in\{1,\dots,n\},\ \lim_{h\to 0}\left(\dfrac{v_m(h)}{h}\right)=0,$

ii) $\forall\,(x,h)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\ f(x+h)-f(x)=u(h)f'(x)+\sum_{m=1}^{n} v_m(h)w_m(x),$

且存在一个可求和集 $\mathscr{U}$，使得 $\{f, f', w_1,\dots, w_n\}\subset S(\mathscr{U})$，则可得

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{x} f(k)\right)=\operatorname{ess}(f)+\sum_{k=1}^{x} f'(k). \tag{27}$$

证明. 设 f 满足定理 4.3.1 的假设。因此，对所有 $(x,h)\in\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(h)}{h}f'(x)+\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m(h)}{h}w_m(x)\\ f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(h)}{h}f'(x)+\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m(h)}{h}w_m(x)\right).\end{aligned}$$

因此，若 $f'\equiv 0$，则必有 $f(x)=c$，其中 c 为某个常数，而这种情况很容易验证。接着，若 $f'\not\equiv 0$，则存在 $x\in\mathbb{C}$ 使得 $f'(x)\neq 0$，这意味着 $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{u(h)}{h}\right)=1$。

利用这样的极限，注意到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=1}^{x}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=1}^{x}\frac{u(h)f'(k)+\sum_{m=1}^{n}v_m(h)w_m(k)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(h)}{h}\sum_{k=1}^{x}f'(k)+\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m(h)}{h}\sum_{k=1}^{x}w_m(k)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(h)}{h}\sum_{k=1}^{x} f'(k)\right) + \lim_{h\to 0}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m(h)}{h}\sum_{k=1}^{x} w_m(k)\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{x} f'(k)\right)\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(h)}{h}\right) + \sum_{m=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{x} w_m(k)\right)\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{v_m(h)}{h}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{x} f'(k).
\end{aligned}
$$

$_x$最后，对 $\sum \mathrm{f}$ 关于 x 求导，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sum^{x} f\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{x+h} f(k) - \sum_{k=1}^{x} f(k)\right)\\
&\overset{A1}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{h} f(k) + \sum_{k=1+h}^{x+h} f(k) - \sum_{k=1}^{x} f(k)\right)\\
&\overset{A2}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{h} f(k) + \sum_{k=1}^{x} f(k+h) - \sum_{k=1}^{x} f(k)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} f(k) + \sum_{k=1}^{x}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}\right)\\
&\overset{A5^*}{=} \operatorname{ess}(f) + \sum_{k=1}^{x} f'(k).
\end{aligned}
$$

□

推论 4.3.2。设 $\mathscr{U}$ 为一个可求和集，使得 $\mathbb{C}[\mathrm{x}] \subset \mathrm{S}(\mathscr{U})$。对于 $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{x}],$，我们有

$$
\frac{d}{dx}\left(\sum^{x} P\right) = \operatorname{ess}(P) + \sum^{x} P'. \tag{28}
$$

证明。对于 $\mathrm{P(x)} = 1$，结论显然。对于 $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^a$ 且 $\mathrm{a}\geq 1$ 的情形，注意到

$$
P(x+h) - P(x) = \underbrace{h}_{u(h)}P'(x) + \left(\sum_{m=1}^{a-2}\underbrace{h^{m+1}}_{v_m(h)}\underbrace{\binom{a}{m+1}x^{a-(m+1)}}_{w_m(x)}\right) + \underbrace{h^a}_{v_{a-1}(h)}\cdot\underbrace{1}_{w_{a-1}(x)}.
$$

如果 P(x) 不是单项式，只需应用线性性即可。 □

在定理 4.3.3 中，我们处理全纯函数的分数和的导数，其中其逐次导数满足定理 4.3.1 关于某个“固定”可求和集 $\mathscr{U}$ 的相同假设。

定理 4.3.3。设 f 为全纯函数。若对所有 $\lambda \geq 0$，存在 $2\mathrm{n}+1$ 个函数 u_λ、$\mathrm{v}^{(1,\lambda)}$、...、$\mathrm{v}^{(n,\lambda)}$、$\mathrm{w}^{(1,\lambda)}$、...、$\mathrm{w}^{(n,\lambda)}$：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足

i) $\forall m\in\{1,\ldots,n\}, \lim_{h\to 0}\left(\frac{v_{(m,\lambda)}(h)}{h}\right) = 0,$

n ii)　$\forall (x,h) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$，$f^{(\lambda)}(x+h)-f^{(\lambda)}(x) = u_\lambda(h)\, f^{(\lambda+1)}(x) + \sum v^{(m,\lambda)}(h) w^{(m,\lambda)}(x)$，$m=1$并且若存在可求和集 $\mathscr{U}$ 使得 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}} \left\{ f^{(\lambda)},\ w^{(1,\lambda)},\ \ldots,\ w_{(n,\lambda)} \right\} \subset S(\mathscr{U})$，则对所有 $y\in\mathbb{C}$，有

$$\sum_{0}^{x} f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{ess}\left(f^{(k-1)}\right) + \sum_{0}^{y} f^{(k)} \right) \frac{(x-y)^k}{k!}. \tag{29}$$

特别地，对于 $y=0$，我们得到

$$\sum_{0}^{x} f = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ess}\left(f^{(k-1)}\right) \frac{x^k}{k!}. \tag{30}$$

x证明。只需利用用定理 4.3.1 写出 $\sum f$ 的泰勒级数。 □

推论 4.3.4。设 $\mathscr{U}$是一个可求和集，满足 $\mathbb{C}[x]\subset S(\mathscr{U})$。对于次数为 n 的 $P\in\mathbb{C}[x]$，我们有

$$\sum_{0}^{x} P = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{ess}\left(P^{(k-1)}\right) \frac{x^k}{k!}. \tag{31}$$

证明。只需调整推论 4.3.2，即可看出 $(P\ \mathscr{U})$ 满足定理 4.3.3 的假设。□

在定理 4.3.5 中，我们证明，对于 $f(x) = {}^{1}x_a, a\in\mathbb{N}^*$，其分数阶和的导数可以求得，且结果与公式（16）一致。请注意，这是一个不适用于定理 4.3.1 和 4.3.3 的函数示例。

定理 4.3.5。设 $X=\{-1,-2,-3,\ldots\}$。对于任意 $a\in\mathbb{N}^*$，令 $f_a(x) = \frac{1}{x^a}$。若存在一个可求和集 $\mathscr{U}$使得 $\{f_a,\ f'a\}\subset S(\mathscr{U})$，则 $\operatorname{ess}(f_a) = a\zeta(a+1)$，且

$$\frac{d}{dx}\sum_{0}^{x} f_a = \operatorname{ess}(f_a) + \sum_{0}^{x} f_a' \tag{32}$$

对所有 $x\in\mathbb{C}-X$。

证明。根据分数可求和函数的基本公式，f_a 和 f_a' 的分数阶和是良定义的（见注 4.2.7）：

$$\sum_{0}^{x} f_a = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+x)^a} \right) & \text{if } x\in\mathbb{C}-X, \\ \displaystyle\frac{1}{(-x)^a} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq -x}}^{\infty} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+x)^a} \right) & \text{if } x\in X, \end{cases}$$

and

$$\sum_{0}^{x} f_a' = \begin{cases} \displaystyle -a\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{a+1}} - \frac{1}{(k+x)^{a+1}} \right) & \text{if } x\in\mathbb{C}-X, \\ \displaystyle\frac{-a}{(-x)^{a+1}} - a\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq -x}}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{a+1}} - \frac{1}{(k+x)^{a+1}} \right) & \text{if } x\in X. \end{cases}$$

接下来，由 [1,第 259 页-260],可知，对所有 x $\in \mathbb{C}$ –X，$_x\sum f_a = C_a + (-1)^{a+1}(a-1)!\psi^{(a-1)}(x+1)$，其中 $\psi^{(0)} := \psi$，$C_1 = \gamma$，且对 a > 1，$C_a = \zeta(a)$。因此，对所有 x $\in \mathbb{C} - X$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sum^{x} f_a &= \frac{d}{dx}\left(C_a + \frac{(-1)^{a+1}}{(a-1)!}\psi^{(a-1)}(x+1)\right) = \frac{(-1)^{a+1}}{(a-1)!}\psi^{(a)}(x+1)\\ &= \frac{(-1)^{a+1}}{(a-1)!}\left(\frac{a!}{(-1)^a}\left(-C_{a+1} + \sum^{x} f_{a+1}\right)\right) = -a\left(-\zeta(a+1) + \sum^{x}\frac{f_a'}{-a}\right)\\ &= a\zeta(a+1) + \sum^{x} f_a' = \mathrm{ess}(f_a) + \sum^{x} f_a'.\end{aligned}$$

□

注 4.3.6. 要计算 f_a 的本质，只需确认 $f_a \in S(\mathscr{U})$，因为根据 [1,p. 260],，我们有 $\psi^a(0+1) = (-1)^{a+1}[a!\zeta(a+1)]$。此陈述说明，在不指定相关可求和集的情况下，写作 ess(f_a) 是合理的。

定理 4.3.7. 设 f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，并考虑一个可求和集 $\mathscr{U}$，使得 $\{f, f'\} \subset S(\mathscr{U})$。若 f 满足式 (27)，则对所有 y $\in \mathbb{C}$，函数 $f_y \in T(\mathscr{U}) \subset S(\mathscr{U})$，定义为 $y\, f_y(x) := f(x+y)$，在 $\mathscr{U}$ 中存在本质，其值为 ess(f_y) = ess(f) + $\sum f'$。此外，$d\,dy\,\mathrm{ess}(f_y)\big|_{y=0} = \mathrm{ess}(f')$。

证明。

$$\begin{aligned}\mathrm{ess}(f_y) &= \frac{d}{dx}\left(\sum^{x} f_y\right)\Big|_{x=0}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1+y}^{x+y} f(k)\right)\Big|_{x=0}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum^{x+y} f - \sum^{y} f\right)\Big|_{x=0}\\ &= \left(\mathrm{ess}(f) + \sum^{x+y} f'\right)\Big|_{x=0}\\ &= \mathrm{ess}(f) + \sum^{y} f'.\end{aligned}$$

对于第二部分，只需对两边关于 $y = 0$ 求导，并应用命题 4.1.9。 □

5. 示例与应用

本节中，我们应用第 4 节得出的结果，给出一些示例与应用。具体而言，我们将：（i）为那些求和 $\sum f$ 事先未知的函数$_x$f，提供一种求其本质的方法；（ii）将著名的欧拉-麦克劳林求和公式推广到求和边界为实数/复数极限的情形；（iii）提出一种求发散级数的新方法。

5.1. 分数求和理论中函数本质的求值

接下来，我们将介绍一种求函数本质的方法，适用于不能直接应用x命题 4.2.3 的情形。对于给定的函数 $F(x)=\sum f(k)$，为了求其本质，我们假设 $ess(f)=u$，并采用与例 5.1.1 和 5.1.3 类似的步骤。

例 5.1.1. 若 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $e^{z}\neq 1$，则函数 $f(x)=e^{zx}$ 满足定理 4.3.3 的假设。事实上，对于 $f^{(\lambda)}$，只需取函数 u_λ、$v^{(1,\lambda)}$、$w^{(1,\lambda)}$，其中 $u_\lambda(h)=e^{zh}-1\,z$，且 $v^{(1,\lambda)}\equiv w_{(1,\lambda)}\equiv 0$。由此可得

$$f^{(\lambda)}(x+h)-f^{(\lambda)}(x)=u_\lambda(h)f^{(\lambda+1)}(x)+\sum_{m=1}^{1}v_{(m,\lambda)}(h)w_{(m,\lambda)}(x).$$

现在，令 $\mathscr{U}$为一个可求和集，使得 $f\in S(\mathscr{U})$，因为 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}}\left\{f^{(\lambda)},\ w_{(1,\lambda)}\right\}\subset S(\{f\})\subset S(\mathscr{U})$。由于 $ess(f^{(k)})=z^{k}ess(f)=z^{k}u$，由定理 4.3.3 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{x}e^{zk} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(z^{k-1}u\right)\frac{x^{k}}{k!}\\ &= \frac{u}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(zx)^{k}}{k!}\\ &= u\left(\frac{e^{zx}-1}{z}\right),\end{aligned}$$

并考虑 $x=1$，我们得到 $e^{z}=u\left(e^{z}-1\,z\right)$。于是 $ess(f)=ze^{z}e^{z}-1$，并且有

$$\sum_{k=1}^{x}e^{zk}=\frac{e^{z}(e^{zx}-1)}{e^{z}-1}.$$

特别地，$ess(x\mapsto e^{\pi ix})=\frac{\pi}{2}i$。

注 5.1.2。注意，具有 $x\mapsto u^{x}$ 形式且 $u\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ 的函数包含在例 5.1.1 中，因为我们只要求 $f\in S(\mathscr{U})$，并且由于 $u^{x}:=e^{\ln(u)x}$。

例 5.1.3。设 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $e^{z}\neq 1$；则 $f(x)=e^{zx}x$ 满足定理 4.3.3 的假设，其中任意可求和集 $\mathscr{U}$ 满足 $f\in S(\mathscr{U})$。事实上，注意，如果我们考虑由 $T(x):=f(x+1)$ 定义的函数 $T\in T(\mathscr{U})\subset S(\mathscr{U})$，以及由 $L(x):=e^{z}\cdot f(x)$ 定义的函数 $L\in L(\mathscr{U})\subset S(\mathscr{U})$，那么 $g(x):=e^{zx}$ 可以写成 T 和 L 的线性组合：$g(x)=e^{-z}\cdot(T(x)-L(x))$。因此，$g\in S(\mathscr{U})$。

现在，对于 $f^{(0)}$，只需取 $u_0(h)=e^{zh}-1\,z$，$v^{(1,0)}(h)=he^{zh}-e^{zh}-1\,z$，以及 $w^{(1,0)}(x)=e^{zx}$。于是可知，f 满足定理 4.3.1 的假设 (i)：

$$f^{(0)}(x+h)-f^{(0)}(x)=u_0(h)f^{(1)}(x)+\sum_{m=1}^{1}v_{(m,0)}(h)w_{(m,0)}(x). \tag{33}$$

注意，对于 $\lambda > 0$，$f^{(\lambda)}$ 可以表示为 f 和 e^{zx} 的线性组合：$f^{(\lambda)}(x) = \lambda z^{\lambda-1} e^{zx} + z^{\lambda} f(x)$，并且当此处将 $\mathscr{U}$ 视为可求和集时，这两个函数都满足定理 4.3.1 的假设 (i)。因此，f 满足等式 (30)。x 接下来，若令 $F(x) = \sum f$，$h(x) = e^{zx}$ 且 u = 本质(f)，则有

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ess}\left(f^{(k-1)}\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ess}\left(z^{k-1} \cdot f + (k-1) z^{k-2} \cdot h\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^{k-1} \cdot \operatorname{ess}(f) + (k-1) z^{k-2} \cdot \operatorname{ess}(h)\right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

将 ess(f) 替换为 u，我们得到

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^{k-1} u + (k-1) z^{k-2} \left(\frac{e^z}{e^z - 1} \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{zh} - 1}{h}\right)\right)\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{u}{z} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{x^k}{k!} + \frac{e^z}{e^z - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) z^{k-1} x^k}{k!} \\ &= \frac{u}{z} \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zx)^k}{k!}\right) + \frac{e^z}{e^z - 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1} x^k}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1} x^k}{k!}\right) \\ &= \frac{u}{z} \left(-1 + e^{zx}\right) + \frac{e^z}{e^z - 1} \left(x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zx)^k}{k!} - \frac{1}{z} \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zx)^k}{k!}\right)\right) \\ &= \frac{u}{z} \left(e^{zx} - 1\right) + \frac{e^z}{e^z - 1} \left(x e^{zx} - \frac{1}{z} \left(-1 + e^{zx}\right)\right) \\ &= \frac{u(e^{zx} - 1)}{z} + \frac{e^z (zx e^{zx} - e^{zx} + 1)}{z(e^z - 1)}. \end{aligned}$$

在 $x = 1$ 处计算 F，得到

$$F(1) = \frac{u(e^z - 1)}{z} + \frac{e^z (z e^z - e^z + 1)}{z(e^z - 1)};$$

并且由于 $F(1) = e^z$，因此

$$\begin{aligned} e^z &= \frac{u(e^z - 1)}{z} + \frac{e^z (z e^z - e^z + 1)}{z(e^z - 1)} \\ \Rightarrow \quad z(e^z - 1) e^z - e^z (z e^z - e^z + 1) &= u(e^z - 1)^2 \\ \Rightarrow \quad e^z (z e^z - z - z e^z + e^z - 1) &= u(e^z - 1)^2 \\ \Rightarrow \quad u = \frac{e^z}{e^z - 1} \left(1 - \frac{z}{e^z - 1}\right). \end{aligned}$$

因此，ess(f) = ess($x \mapsto e^{zx} x$) = $e^z - 1 \left(1 - e\ z\ e^z - 1\right)$。此外，由于

$$F(x) = \frac{u(e^{zx} - 1)}{z} + \frac{e^z (zx e^{zx} - e^{zx} + 1)}{z(e^z - 1)},$$

我们得出

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{x} e^{zk}k &= \left(\frac{e^z}{e^z-1}\left(1-\frac{z}{e^z-1}\right)\right)\frac{(e^{zx}-1)}{z}+\frac{e^z(zxe^{zx}-e^{zx}+1)}{z(e^z-1)}\\ &= \frac{e^z}{e^z-1}\left(xe^{zx}-\frac{e^{zx}-1}{e^z-1}\right).\end{aligned}$$

特别地，对于 $\mathrm{z}=\pi\mathrm{i}$，我们有 $\operatorname{ess}\left(\mathrm{x}\mapsto \mathrm{e}^{\pi i\mathrm{x}}\mathrm{x}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$，且

$$\sum_{k=1}^{x} e^{\pi ik}k=\frac{1}{2}e^{\pi ix}x+\frac{1}{4}e^{\pi ix}-\frac{1}{4}. \tag{34}$$

命题 5.1.4 和 5.1.5 中展示的结果可以由例 5.1.3 得出。

命题 5.1.4. 若 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，且 $\{\mathrm{x}\mapsto \cos(\pi\mathrm{x})\mathrm{x}\}\subset \mathrm{S}(\mathscr{U})$，则可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{x}\cos(\pi k)k &= \frac{1}{2}\cos(\pi x)x+\frac{1}{4}\cos(\pi x)-\frac{1}{4},\ \textit{and}\\ \sum_{k=1}^{x}\sin(\pi k)k &= \frac{1}{2}\sin(\pi x)x+\frac{1}{4}\sin(\pi x).\end{aligned}$$

证明。由于 $\sin(\mathrm{x})=\cos\left(\mathrm{x}-\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin(-\mathrm{x})=-\sin(\mathrm{x})$ 且 $\cos(-\mathrm{x})=\cos(\mathrm{x})$，因此，对于所有 $\mathrm{z}\in\mathbb{C}$（特别是对于 $\mathrm{z}=\pi$），我们有

$$\begin{aligned}e^{i(zx)}x &= \cos(zx)x+\underbrace{i\cos\left(z\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)\right)\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)}_{\in \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathscr{U}))=\mathbf{S}(\mathscr{U})}+\frac{i\pi}{2z}\underbrace{\cos\left(z\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)\right)}_{\in \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathscr{U}))=\mathbf{S}(\mathscr{U})},\\ e^{i(-zx)}x &= \cos(zx)x-i\cos\left(z\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)\right)\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)-\frac{i\pi}{2z}\cos\left(z\left(x-\frac{\pi}{2z}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，$\{\mathrm{x}\mapsto \mathrm{e}^{izx}\mathrm{x}, \mathrm{x}\mapsto \mathrm{e}^{-izx}\mathrm{x},\ \mathrm{x}\mapsto \mathrm{e}^{izx}_{-xi},\ \mathrm{x}\mapsto \mathrm{e}^{-izx}\}\subset \mathrm{S}(\mathscr{U})$。根据定义，$\sin(\mathrm{x})=\underline{\mathrm{e}^{xi}-\mathrm{e}2}\quad \mathrm{i}\text{'}\cos(\underline{\mathrm{x}})=\underline{\mathrm{e}^{xi}}+\mathrm{e}_{2}$，由线性可得结论。 □

命题 5.1.5。设 $\mathrm{x}\in\mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{x}}\neq 1$。若 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，使得

$$\left\{y\mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{x}y\right)y\right\}\subset \mathbf{S}(\mathscr{U}),$$

由此可得：

$$\sum_{k=1}^{x}\cos\left(\frac{2\pi k}{x}\right)k=\frac{x}{2}. \tag{35}$$

证明。设 $F(\beta) = \sum_{k=1}^{\beta} \overrightarrow{\text{余弦}}\left(\frac{2\pi}{x}k\right)k$。根据余弦的定义、线性性质、例 5.1.3 和推论 4.3.4 中的结果，并令 $z = {}^{2\pi}/_{i\,x}$，可得

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\beta} e^{zk}k + \sum_{k=1}^{\beta} e^{-zk}k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{e^z-1}\left(\beta e^{z\beta} - \frac{e^{z\beta}-1}{e^z-1}\right) + \frac{e^{-z}}{e^{-z}-1}\left(\beta e^{-z\beta} - \frac{e^{-z\beta}-1}{e^{-z}-1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{e^z-1}\left(\beta e^{z\beta} - \frac{e^{z\beta}-1}{e^z-1}\right) - \frac{1}{e^z-1}\left(\beta e^{-z\beta} - \frac{e^{-z\beta}-1}{e^{-z}-1}\right)\right). \end{aligned}$$

令 $\beta = x$，则有 $e^{\pm z\beta} = e^{\pm 2\pi i} = 1$；因此

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{e^z-1}\left(x\cdot 1 - \frac{1-1}{e^z-1}\right) - \frac{1}{e^z-1}\left(x\cdot 1 - \frac{1-1}{e^{-z}-1}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2(e^z-1)}(e^z-1) \\ &= \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

□

例 5.1.6. 设 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，且 $\ln \in S(\mathscr{U})$。那么 $\operatorname{ess}(\ln) = -\gamma$。此外，若 $\left\{\ln,\ x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto \frac{1}{x^2},\ x \mapsto \frac{1}{x^3}, \ldots\right\} \subset S(\mathscr{U})$，则对于 $|x| < 1$，

$$\ln\Gamma(x+1) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k}(-x)^k. \tag{36}$$

证明。从 [15] 可知，对所有 $|x| < 1$，$\ln\Gamma(x+1) = \sum \ln$。因此，由 [1, p. 258], $\operatorname{ess}(\ln) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x+1)\big|_{x=0} = \psi(0+1) = -\gamma$。

为证明（36），注意到由定理 4.3.5，对于 $a \geq 2$，有：

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a}\left[\ln\Gamma(x+1)\right]_{x=0} &= \frac{d^{a-1}}{dx^{a-1}}\left[\psi(x+1)\right]_{x=0} \\ &= \frac{d^{a-1}}{dx^{a-1}}\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}\right]_{x=0} \\ &= (-1)^a(a-2)!\cdot \operatorname{ess}\left(x \mapsto \frac{1}{x^{a-1}}\right) \\ &= (-1)^a(a-1)!\zeta(a). \end{aligned}$$

现在，我们写出 $\ln\Gamma(x+1)$ 在 0 处的泰勒级数。 □

注 5.1.7. 根据前面的例子，分数求和似乎有望用于发现类似 (36) 的恒等式。

例5.1.8. 设 $\mathrm{f}\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 由 $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = {}^{1}\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)$ 给出（当 $\mathrm{x}\notin\{0,-1\}$ 时），否则 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$。若 $\mathscr{U}$ 是可求和集，且 $\mathrm{f}\in \mathrm{S}(\mathscr{U})$，则 $\overline{\mathrm{ess}(\mathrm{f})}=1$，并且对于 $\mathrm{x}\neq -1,-2,-3,\ldots$，$\sum^{x} f = \dfrac{x}{x+1}$.

证明。注意，f 是分数可求和的：

$$\begin{aligned}
\sum^{x} f &= \sum_{k=1}^{\infty}(f(k)-f(k+x))\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+x)(k+x+1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{1+x}\\
&= \frac{x}{x+1}.
\end{aligned}$$

此外，f 的本质 $=\overline{\mathrm{d}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{x}\,\mathrm{x}+1}\Big|_{x=0}^{=1}$。 □

5.2. 分数的欧拉-麦克劳林求和公式

在此，我们利用分数阶和理论，将欧拉–麦克劳林求和公式推广到求和边界为实数或复数的情形。下述定理5.2.1是欧拉–麦克劳林求和公式对多项式的一种推广。

定理5.2.1. 设 $\mathscr{U}$ 是一个可求和集，使得 $\mathbb{C}[\mathrm{x}]\subset \mathrm{S}(\mathscr{U})$ 且 $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{x}]$。那么，对于所有 $\mathrm{x}\in\mathbb{C}$，有

$$\sum_{k=1}^{x} P(k) = \int_0^x P(t)\,dt + \frac{P(x)-P(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(P^{(2m-1)}(x)-P^{(2m-1)}(0)\right). \tag{37}$$

证明。假设 P 的次数为 n，并令 $\mathrm{Q}\in\mathbb{C}[\mathrm{x}]$ 为 P 的一个原函数，即 $\mathrm{Q}'=\mathrm{P}$。因此，根据推论 4.3.4：

$$\begin{aligned}
\sum^{x} P &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{ess}\left(P^{(k-1)}\right)\frac{x^k}{k!}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{ess}\left(y\mapsto Q^{(k)}(y)\right)\frac{x^k}{k!}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{ess}\left(y\mapsto \sum_{m=0}^{n}\frac{Q^{(k+m)}(0)}{m!}y^m\right)\frac{x^k}{k!} \qquad (38)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{Q^{(k+m)}(0)}{m!}\operatorname{ess}\left(y\mapsto y^{m}\right)\right)\frac{x^{k}}{k!}\\
&= \sum_{m=0}^{n}\frac{B_m}{m!}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{Q^{(m+k)}(0)}{k!}x^{k}\\
&= \sum_{m=0}^{n}\frac{B_m}{m!}\left(Q^{(m)}(x)-Q^{(m)}(0)\right)\\
&= Q(x)-Q(0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(P^{(m-1)}(x)-P^{(m-1)}(0)\right)\\
&= \int_0^x P(t)\,dt+\frac{P(x)-P(0)}{2}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(P^{(m-1)}(x)-P^{(m-1)}(0)\right)\\
&= \int_0^x P(t)\,dt+\frac{P(x)-P(0)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(P^{(2m-1)}(x)-P^{(2m-1)}(0)\right).
\end{aligned}
$$

□

注意，公式 (37) 与自然数 n 的欧拉-麦克劳林求和公式中已知的形式完全相同。这一事实很有趣，因为现在我们对左侧项有了一个解释。

可以证明，对于某些函数，例如 cos(zx) 或 e^{zx}，等式 (37) 成立，两者均满足 $e^{z}\neq 1$。然而，对于任意全纯函数 P，由于它是级数而非有限和，从 (38) 推导到 (39) 的过程比使用多项式时更为复杂。

我们在此说明这一难点。我们知道，如果 $f_i(x) = 1 + i\sum_{k=1}\frac{1}{k!x^{k}}$，那么 f_i (x) 会逐点收敛于 e^{x}，且 $\sum f_i(k)$ 也会逐点收敛于 $\sum e^{k}$。因此，可以猜想：如果函数序列 f_i 逐点收敛于函数 f，那么 $\sum f_i$ 也会逐点收敛于 $\sum f$。遗憾的是，这个“逐点收敛猜想”是错误的（见第6节中的开放问题 (iv)）。例如，若对所有 x 都有 $f(x) = 0$，并且对于 $i\in\mathbb{N}$，我们定义

$$
\begin{aligned}
f_i : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\
x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{if } x = i\\ 0, & \text{elsewhere,}\end{cases}
\end{aligned}
$$

那么，$f_i \to f$ 逐点成立，但对于任意 $x\notin\mathbb{Z}$，我们有

$$\lim_{i\to\infty}\sum^{x} f_i = \lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_i(k) - f_i(k+x) = \lim_{i\to\infty} 1 \neq 0 = \sum^{x} f.$$

5.3. 如何使用分数和计算发散级数?

与发散级数相关的一个重要问题是如何为其赋予唯一的值。这个过程称为发散级数的正则化。正则化发散级数的方法有多种，例如切萨罗求和法、阿贝尔求和法或博雷尔求和法、平滑求和法，以及级数的拉马努金常数等 [6, 7]。下文中，我们将提出一种利用分数有限和理论对发散级数进行正则化的方法。

受以下针对渐近趋于零的分数可求和函数 F 的形式计算启发：

$$\begin{aligned}\operatorname{ess}(F) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum^{h} F \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(F(k)-F(k+h)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{h\to 0}\frac{F(k+h)-F(k)}{h}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}F'(k),\end{aligned}$$

对于某些函数（例如 $\mathrm{F(x)}=\frac{1}{-}\mathrm{x}$），上述方法是有效的，因此我们提出以下发散级数正则化方法。给定一个函数 f，若 $\sum \mathrm{f\,(k)}$ 发散，则取一个函数$_{k=1}$F：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得 $\mathrm{F}'=\mathrm{f}$，我们有

$$^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} f(k) := -\operatorname{ess}(F). \tag{40}$$

换言之，我们提出

$$^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} f(k) := -\left(\frac{d}{dx}\sum^{x} F\right)\Big|_{x=0}. \tag{41}$$

遗憾的是，与其他方法一样，如何选择合适的函数 F 仍然是一个开放问题。然而，对于某些函数 f，我们找到了若干自然原函数 F；对于这些函数，发散$_{\infty}$级数 $\sum \mathrm{f\,(k)}$ 所赋予的值是已知的（见例 5.3.1–5.3.4）。$_{k=1}$

例 5.3.1. 如果 $\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}$，我们可以取 $\mathrm{F(x)}=\frac{\mathrm{x}^{2}}{2}$。那么，

$$\operatorname{ess}(F)=\operatorname{ess}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ess}(x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12},$$

也就是说，

$$^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} k = -\frac{1}{12}. \tag{42}$$

例 5.3.2. 若 f(x) = $\frac{1}{-}$x，则可取 F = ln。于是，

$$\operatorname{ess}(F) = \operatorname{ess}(\ln) = -\gamma \quad \Rightarrow \quad {}^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \gamma, \tag{43}$$

例 5.3.3. 若 f (x) = $-e^{\pi ix}$，我们可以取 F(x) = $-\frac{1}{\pi} i e^{\pi ix}$。于是，

$$\operatorname{ess}(F) = \operatorname{ess}\left(-\frac{1}{\pi i} e^{\pi ix}\right) = -\frac{1}{\pi i} \cdot \operatorname{ess}((e^{\pi i})^x) = -\frac{1}{\pi i} \cdot \frac{e^{\pi i} \ln(e^{\pi i})}{e^{\pi i} - 1} = -\frac{1}{\pi i} \cdot \frac{\pi i}{2} = -\frac{1}{2}.$$

即:

$$ {}^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = \frac{1}{2}, \tag{44}$$

例 5.3.4. 若 f (x) = $-e^{\pi ix}$x，我们可以取 F(x) = $-\frac{1}{\pi} i e^{\pi ix}$x $-\frac{1}{\pi^2} e^{\pi ix}$。于是可得

$$ {}^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k = -\operatorname{ess}\left(-\frac{1}{\pi i} e^{\pi ix} x - \frac{1}{\pi^2} e^{\pi ix}\right) = \frac{1}{\pi i} \operatorname{ess}(e^{\pi ix} x) + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{ess}(e^{\pi ix}) = \frac{1}{4}.$$

注记 5.3.5. 注意，若 F 是一个函数，使得 F′ 满足欧拉-麦克劳林求和公式 (37)，且 $\sum F''(k)$ 发散，那么形式上，我们的正则化方法 $\sum_{k=1}$ 给出

$$\begin{aligned} {}^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} F''(k) &= -\operatorname{ess}(F') \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(F(x) - F(0) + \frac{F'(x) - F'(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} (F^{(2m)}(x) - F^{(2m)}(0)) \right) \\ &= -F'(0) - \frac{F''(0)}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} F^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} \end{aligned}$$

换句话说，这种方法只是简单地“抹去依赖于无穷大的项”:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{\infty} F''(k) \\ \downarrow \\ \cancel{F'(\infty)} - F'(0) + \frac{\cancel{F''(\infty)} - F''(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\cancel{F^{(2m+1)}(\infty)} - F^{(2m+1)}(0) \right) \\ \downarrow \\ -F'(0) - \frac{F''(0)}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} F^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} \\ \downarrow \\ {}^{\#}\sum_{k=1}^{\infty} F''(k). \end{gathered}$$

6. 最后注记

本文展示了 Müller 和 Schleicher 提出的一个开放问题（见[15]），该问题涉及分数和求导过程中所得常数的存在性。为此，我们定义了函数本质的概念。此外，我们提出了一种运用泰勒级数计算函数本质和分数阶和的方法。借助分数求和理论，我们还能够理解著名的欧拉－麦克劳林求和公式中求和上下限的极限边界，该公式可应用于实数值。此外，我们还提出了一种正则化发散级数的新方法。最后，我们列出了一些开放问题，以期为感兴趣的研究者提供有趣的研究方向。

(i) $\mathfrak{S}$ 对有限并封闭吗？也就是说，$X,Y \in \mathfrak{S} \Rightarrow X \cup Y \in \mathfrak{S}$？(ii) $\mathfrak{S}$ 对任意并封闭吗？也就是说，$S \subset \mathfrak{S} \Rightarrow \bigcup X \in \mathfrak{S}$？$_{x\in s}$(iii) 如果 (ii) 的答案是肯定的，那么只需处理最大的可求和集 $\mathfrak{z} = \bigcup X$，因为相对于任何其他可求和$_{x\in\mathfrak{S}}$集 $\mathscr{U}$ 的分数和，都是将“最大分数和”限制在集合 $S(\mathscr{U}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$上所得。此外，这个集合是什么？(iv) 是否可以对逐点收敛猜想中的函数添加假设，使该猜想成立？(v) 是否适合添加新的公理，以证明诸如以下断言：“如果 $f_i \to f$ 一致收敛，那么 $\sum f_i \to \sum f$ 一致收敛/逐点收敛”？

致谢

本研究部分得到巴西机构 CNPq、CAPES 和 Fundação Araucária# PBA2022011000222 的资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: 《数学函数手册：公式、图表与数学表》。应用数学丛书。美国国家标准局，华盛顿特区（1964）。[2] Alabdulmohsin, I.M.: 《可求和性微积分：分数有限和的综合理论》。施普林格，柏林/海德堡（2018）。[3] Arakawa, T.; Ibukiyama, T.; Kaneko, M.: 《伯努利数与ζ函数》。施普林格数学专著。施普林格，东京（2014）。[4] Berndt, B.C.: 《拉马努金笔记》第一部分。施普林格，纽约（1985）。[5] Bernoulli, J.; Haussner, R.: 《概率论》（《推测术》，1713）。Wilhelm Engelmann 出版社，莱比锡（1899）。

[6] Chagas, J.Q; Machado, J.A.T.; Lopes, A.M.：《求和方法概述：发散级数的求和方法、拉马努金求和与分数有限和》。《数学》9，2963（2021）。[7] Chagas, J.Q.; Machado, J.A.T.; Lopes, A.M.：《重新探讨级数的拉马努金常数公式》。《数学》10，1539（2022）。[8] Euler. L.：《微分学原理及其在有限分析与级数理论中的应用》。圣彼得堡帝国科学院，圣彼得堡（1755）。[9] Euler, L.：《关于我的微分学末章中不可解函数的阐释》。《圣彼得堡科学院院刊》4，88–119（1813）。[10] Galvão, A.T.; Chagas, J.Q.：《分数阶求和导论：学习如何对非整数个项求和》。《大学数学杂志》1，15–33（2021）。[11] Machado, J.A.T.：《具有负概率的系统的熵分析》。《非线性科学与数值模拟通讯》36，58–64（2016）。[12] Machado, J.A.T.; Lópes, A.M.; Duarte, F.B.; Ortigueira, M.D.; Rato, R.T.：《分数阶狂想曲》。《分数阶微积分与应用分析》17（4），1188–1214（2014）。[13] Müller, M.; Schleicher, D.：《如何对非整数个项求和，以及如何构造奇特的无穷求和》。《计算与应用数学杂志》178，347–360（2005）。[14] Müller, M.; Schleicher, D.：《分数阶和与欧拉型恒等式》。《拉马努金杂志》21，123–143（2010）。[15] Müller, M.; Schleicher, D.：《如何对非整数个项求和：从公理到新恒等式》。《美国数学月刊》118，136–152（2011）。[16] Qian, T.：《受分数和启发的示性演算刻画》。arXiv.org，2103.09117（2021）。[17] Ramanujan, S.：《斯里尼瓦萨·拉马努金笔记》，第1–2卷。塔塔基础研究院，孟买（2012）。[18] Uzun, B.Ü.：《若干特殊函数的分数阶和》。《数学研究成果》74，50（2019）。