arXiv:2303.00813v1 [math.CO] 1 Mar 2023

最小余秩的均匀最可靠图不存在

Pablo Romero* Mart´ín D. Safe†

摘要

若 G 是简单图且 $\rho \in [0,1]$，则可靠度 $R_G(\rho)$ 是其在每条边以概率 ρ 独立移除后仍保持连通的概率。若简单图 G 满足：对于每个 $\rho \in [0,1]$ 以及每个与 G 具有相同顶点数和边数的简单图 H，都有 $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$，则称 G 为一致最可靠图（UMRG）。Boesch 在《图论杂志》10 (1986年), 339–352] 中提出猜想：若 n 和 m 满足存在一个具有 n 个顶点和 m 条边的连通简单图，则也存在一个具有相同顶点数和边数的 UMRG。Kelmans、Myrvold 等人以及 Brown 和 Cox 给出了一些反例，推翻了 Boesch 猜想。已知当余秩（定义为 $c = m - n + 1$）至多为 4 时，Boesch 猜想成立（且相应的 UMRG 已被完全刻画）。Ath 和 Sobel 猜想，当余秩 c 在 5 到 8 之间且顶点数至少为 $2c-2$ 时，Boesch 猜想成立。本文给出一个余秩为 5 、推翻 Boesch 猜想的无限反例族。这是首次报告达到可能最小余秩的反例。作为副产品，Ath 和 Sobel 的猜想也被推翻。

1 引言

若 G 是一个简单图，则在其每条边均以 ρ 的概率独立移除后， G 仍然连通的概率称为 G 的可靠度，记作 $R_G(\rho)$。给定整数 n 和 m，问题是：是否存在一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图 G，使得对于每个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图 H 以及每个 $\rho \in [0,1]$，可靠度 $R_G(\rho)$ 均大于或等于可靠度 $R_H(\rho)$? 这样的简单图 G 称为均匀最可靠图（UMRG）。这一概念由 Boesch 于 1986年 在其开创性论文 [5]中提出。

如果所有具有 n 个顶点和 m 条边的简单图都不连通，那么它们全都是 UMRG（因为无论 ρ 取何值，它们的可靠度都为 0）。因此，我们可以将注意力限制在连通简单图类 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 上；该类由具有 n 个顶点和 m 条边的图组成，且非空。如果 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 非空，我们将 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 以及 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 中每个图的余秩 定义为 $m - n + 1$。

Boesch 等人 [6]开创了对小余秩 UMRG 的研究。他们观察到，所有树、所有圈以及所有所谓的平衡 θ-图（定义见第 2 节）分别构成了余秩等于 0、1 和 2 的全部 UMRG。此外，作者还证明，所有余秩为 3 的 UMRG 都是完全图 K_4 的某些细分。在同一工作中，他们猜想所有余秩为 4 的 UMRG 都是 4 轮图以及完全二部图 $K_{3,\,3}$ 的某些细分。该猜想由 Wang [12]证明。文献中仅报告了余秩为 5 的类 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 中 UMRG 的存在性，见 $n \in \{5,6,7,8\}$。相应的 UMRG 是图 1 中所示的三个图，以及图 2 中所示的瓦格纳图 W； Myrvold [10] 通过对至多含 8 个顶点的所有简单图进行穷举计算机搜索发现了它们。在另一端，就稠密图而言，Kelmans [9] 证明了所有满足$n \geq 3$和$\binom{n}{2} - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq m \leq \binom{n}{2}$的类 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 中 UMRG 的存在性。相应的 UMRG 可由从完全图 K_n中删去一个匹配得到。最近，Archer 等人 [1] 还证明了：对于每个奇数 $n \geq 5$，且 m 为 $\binom{n}{2} - \frac{n+1}{2}$ 或 $\binom{n}{2} - \frac{n+3}{2}$ 时，类$\mathcal{C}_{n,\,m}$ 中也存在 UMRG。

在 [5], Boesch 猜想以下结论成立。

猜想 1 (Boesch [5])**.** 如果 $\mathcal{C}_{n,\,m}$ 非空，那么它至少包含一个 *UMRG*。

*乌拉圭蒙得维的亚共和国大学工程学院。电子邮箱： promero@fing.edu.uy

†阿根廷布兰卡港南方国立大学（UNS）数学系，以及阿根廷布兰卡港南方国立大学（UNS）-CONICET INMABB。电子邮箱: msafe@uns.edu.ar

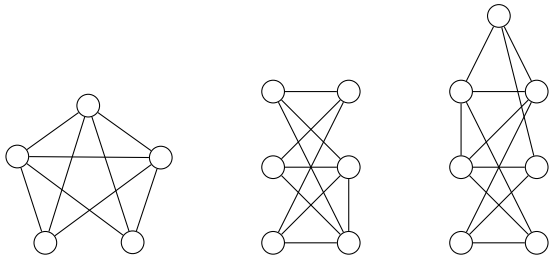

图 1：余秩为 5 的小型 UMRG

文献 [6] 和 [12], 中证明的、上文讨论的余秩至多为 4 的所有 UMRG 的刻画表明，Boesch 猜想对所有余秩至多为 4 的类 $\mathcal{C}_{n,\ m}$ 均成立。因此，猜想 1 的任何反例的余秩至少为 5。

已知存在无穷多个 猜想 1 的反例 [9, 11, 7]。这些反例包括：(i) 类 $\mathcal{C}_6$,11，其余秩为 6；(ii) 类 $\mathcal{C}_7$, 15，其余秩为 9；(iii) 类 $\mathcal{C}_8$,14、 $\mathcal{C}_8$,17、$\mathcal{C}_8$,19、 $\mathcal{C}_8$,22 和 $\mathcal{C}_8$,23，其余秩分别为 7、10、12、15 和 16；以及 (iv) 无穷多个其他反例 $\mathcal{C}_{nm}$ ，满足 $n \geq 9$，其余秩至少为 21（并且随着 $n^2/2$ 渐近增长）。因此，所有已知的 猜想 1 反例的余秩都至少为 6，目前尚不清楚是否存在余秩为 5 的反例。

Ath 和 Sobel [2]于 2000 年提出了以下较弱的猜想。

猜想 2 (Ath-Sobel [2])。 若非空类 $\mathcal{C}_{n,m}$ 的余秩为 $c \in \{5,6,7,8\}$ 且满足 $n \geq 2c-2$，则$\mathcal{C}_{n,m}$ 至少包含一个 *UMRG*。

此外，文献 [2] 也提出了这类 UMRG 的明确候选对象。

我们的主要结果是证明类 $\mathcal{C}_{n,m}$ 中不存在满足 $n = 12s+4$ 且余秩为 5（即 $m = 12s+8$）的 UMRG，对每个正整数 s皆如此。因此，我们为余秩为 5 的猜想 1 提供了一个无限反例族。这些是已知首批达到可能的最小余秩的反例。作为推论，Ath 和 Sobel 提出的较弱猜想 2 被推翻。

我们的证明策略分为两步。首先，对于每个正整数 s，我们确定类 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 中的一个简单图 G （取决于 s）；当 $\rho \in (0,\epsilon)$ 时，其可靠度严格高于该类中所有其他图的可靠度，其中 $\epsilon > 0$ 为某个值。其次，我们找出 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 中的一个简单图；当 $\rho \in (1-\delta,1)$ 时，其可靠度严格高于 G 的可靠度，其中 $\delta > 0$ 为某个值。由于 UMRG 对每个 $\rho \in [0,1]$ 都必须达到可能的最高可靠度，因此类 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 中不存在 UMRG。

本文安排如下。第2 节介绍基本图论术语。第3节更详细地讨论一致最可靠图的概念以及此前已知的结果。第4节证明一些预备结果。在第5节中，我们确定类 $\rho = 0$ 中、在 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 附近的局部最可靠图，其中每个正整数 s 均对应一个这样的图。主要结果见第6节。

2 基本定义

本节介绍基本定义。全文中还将给出更具体的定义。若 c 是正整数，则 $[c]$ 表示集合 $\{1,2,\ldots,c\}$。我们用 $\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集。设 S 是一个有限集。 S 的基数记为 $|S|$。我们也将集合的基数称为其大小。若 k 是非负整数，则 S 中所有基数为 k 的子集构成的族记为 $\binom{S}{k}$。

本文中的所有图都是有限无向图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集。若一个图没有平行边或环，则称其为简单图。设 G 为一个图。若 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G-S$ 表示从 G 中删除 S 内的所有顶点后得到的图，并用 $G[S]$ 表示由 S 导出的子图（即图 $G-(V(G)-S)$）。若 $F \subseteq E(G)$，则 $G-F$ 表示顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G)-F$ 的图。我们分别用 P_n、 C_n 和 K_n 表示 n 个顶点上的无弦路径、无弦圈和完全图。*4* 轮图是

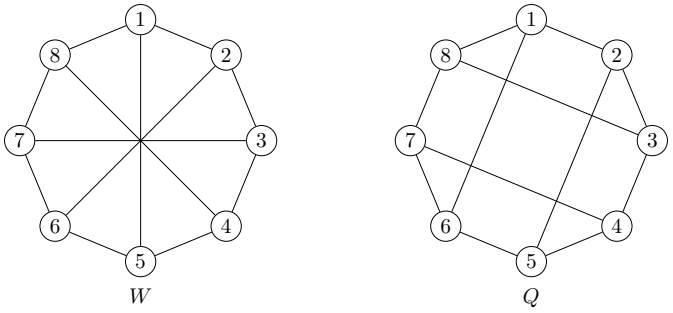

图 2：瓦格纳图 W 和立方体图 Q。

由 C_4 添加一个与其他每个顶点都相邻的顶点后得到的简单图。瓦格纳图 W 和立方体图 Q 见图2。若图 θ-图恰好由三条具有相同两个端点的路径组成，且这些路径的内部顶点两两不相交，并且由其中任意两条路径的顶点导出的子图均为无弦圈，则称其为一个简单图。如果这三条路径中任意两条的长度之差至多为 1，则称该图为平衡 θ-图。

设 G 为一个图。 G 的边割 是 G 的一个边集 F，使得 $G-F$ 不连通。一个k-边割 是大小为 k的边割。图 $G \neq K_1$的边连通度 记为 $\lambda(G)$，是使 G 具有一个 k-边割的最小 k 。

设 F 是 G的一个边割。若 F 包含所有恰有一个端点在 S 中的边，且不包含任何两个端点都在 S中的边，我们称 F 分离 顶点集 S ，其中 G 。注意， F 也可能包含一些没有端点在 S中的边。若 $S=\{v\}$ ，其中 v 是 G的一个顶点，我们称 F 分离 v ，并称F 为顶点分离的。若 $S=\{u,v\}$ ，其中 u 和 v 是 G的一条边 e 的端点，我们称 F分离 e ，并称 F 为边分离的。如果一个边割既不是顶点分离的，也不是边分离的，则称其为非平凡 。若 S 在 G中诱导出图 H ，则称 F 是 H-分离的。

设 G 是一个无环图。若边 e 的一个端点是顶点 v ，则称 e 与 v 关联。图 G 中顶点 v 的度 $d_G(v)$ 是与其关联的边数。 G 中各顶点的最小度记为 $\delta(G)$。若 G 的所有顶点的度均为 3，则称 G 是三次图。若两条边分别恰好共享 0、1 或 2 个端点，则称它们不关联、关联或平行。匹配是一个由两两不关联的边组成的集合。若 G 的匹配 M 中每个顶点都是 M 中某条边的端点，则称 M 是完美匹配。

将一条端点为 x 和 y 的边细分 k 次，是指用 $k+1$ 条边xz_1、z_1z_2、……、$z_{k-1}z_k$、z_ky 替换该边，其中 z_1、z_2、……、z_k 是 k 个新的顶点，且每个顶点的度为 2。

若简单图 G 至少有 3 个顶点、连通，且对所有 $v \in V(G)$， $G-v$ 均连通，则称其为二连通图。设 G 是一个边数多于顶点数的二连通简单图。 γ 的链 G 是图 G 中一条路径 P 的边集，其中 P（若存在）的所有内部顶点在 G 中的度均为 2，并且 P在 G 中有两个度均大于 2 的不同端点。 γ 的端点就是 P 的端点；若顶点 v 是 v 的一个端点，则称 γ 与该顶点关联。 γ 的内部顶点就是 P的内部顶点。所谓从 G中移除 γ ，是指移除 γ 的边和内部顶点（但不移除其端点）。从 G 中移除 γ 后得到的图记为 $G\ominus\gamma$。若 G的一组链为 H，则将从 G 中移除 H内所有链后得到的图记为 $G\ominus H$ 。所谓收缩 γ ，是指移除 γ 并添加一条与 γ端点相同的边。 γ的长度记为 $\ell(\gamma)$，即其大小 $|\gamma|$。我们用 $\Gamma(G)$ 表示 G的所有链构成的集合。 G的蒸馏记为 $D(G)$，是将其所有链收缩后得到的图 G 。显然， G 可由 $D(G)$ 经一系列（可能为零次）细分得到。注意， G 的每条边都恰好属于一条链，且 $D(G)$ 可能含有平行边，但不含环（回想一下，我们假设 G 是二连通简单图，且边数多于顶点数）。若两条链恰好共享 0、1 或 2 个端点，则分别称它们为不关联、关联或平行。 G 的链匹配是 G中两两不关联的链构成的集合。 G 的链的完美匹配是 G 的链匹配，其端点恰好是 G中所有度大于 2 的顶点。

3 背景

本节介绍一些关于一致最可靠图的已有结果，并讨论一些相关概念。

若存在 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $\rho \in (0, \epsilon)$，$R_G(\rho) > R_H(\rho)$，则称简单图 G 在 $\rho = 0$ 附近比简单图 H 更可靠（分别地，在 $\rho = 1$附近更可靠）。若简单图 G 在 $\rho = 0$ 附近（分别地，在 $\rho = 1$附近）比所有与 G具有相同顶点数和边数的其他简单图更可靠，则称其在 $\rho = 0$ 附近（分别地，在 $\rho = 1$附近）局部最可靠。注意，如果在具有 n 个顶点和 m条边的图中，存在一个在 $\rho = 0$ 附近（分别地，在 $\rho = 1$附近）局部最可靠的图，那么它必然是唯一的。

设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图。我们用 $\mu_k(G)$ 表示 G中 k-边割的数量。显然，对于每个 $\rho \in [0, 1]$,

$$R_G(\rho) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \mu_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{m-k}.$$

比较上述多项式表达式在两个不同图上的值，当 ρ 趋近于0或1时，可以证明以下结论。

定理3 (Brown 和 Cox [7])。设 G 和 H 是具有 n 个顶点和 m 条边的简单图。

(i) 如果存在 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$，使得对于所有 $k \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$，均有 $\mu_k(G) = \mu_k(H)$，且 $\mu_i(G) < \mu_i(H)$，那么在 $\rho = 0$ 附近，G 比 H 更可靠。*(ii)* 如果存在 $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$，使得对于所有 $k \in \{j+1, j+2, \ldots, m\}$，均有 $\mu_k(G) = m_k(H)$，且$\mu_j(G) < \mu_j(H)$，那么在 $\rho = 1$ 附近，G 比 H 更可靠。

设 G是一个具有 n个顶点和 m条边的简单图。若 $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$，则称 G为最小μ_k，如果对于所有其他具有与 G相同顶点数和边数的简单图 H，均有$\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$。

定理 4 (Wang [12])。设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图，且满足 $m > n$。若 G 对于某些情形是最小-μ_k 某个 $k \in \{\lambda(G), \lambda(G)+1, \ldots, m-n+1\}$，则 G 是 *2*-连通的。

定理 5 (Bauer 等人 [3])。设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的2-连通简单图，且满足 $n + 2 \leq m \leq 3n/2$。设 c 为 G 的余秩，且 r 和 s 为满足$m = (3c-3)s + r$且 $r \in \{0, 1, \ldots, 3c-4\}$的唯一整数。那么，$G$是最小-$\mu_2$ 当且仅当以下两个断言成立：

(i) $D(G)$ 是简单三次图，有 $2c-2$ 个顶点，且 $\lambda(D(G)) = 3$;

(ii) G 有 r 条长度为 $s+1$ 的链，以及 $3c-3-r$ 条长度为 s的链。

定理 6 (Wang [13])。设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的 *2*-连通简单图，满足$n + 2 \leq m \leq 3n/2$。设 c 为 G 的余秩，并设 r 和 s 为满足 $m = (3c-3)s + r$且满足 $r \in \{0, 1, \ldots, 3c-4\}$的唯一整数。那么，$G$是最小-$\mu_3$当且仅当以下所有断言均成立：

(i) $D(G)$ 是简单三次图，有 $2c-2$ 个顶点，是最小-μ_3，且 $\lambda(D(G)) = 3$;

(ii) G 有 r 条长度为 $s+1$ 的链，以及 $3c-3-r$ 条长度为 s的链；

(iii) 如果 $r \leq c-1$ （分别为 $r \geq 2c-2$），那么 G 中长度为 $s+1$ （分别为 s）的 G 链构成链匹配；而如果 $c-1 < r < 2c-2$，那么对于 G 中任意三条具有公共端点的链，其中至少有一条链的长度为 s，且至少有一条链的长度为 $s+1$。

推论 7 (Wang [13])。设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的 2-连通简单图，且满足 $n+2 \leq m < 3n/2$。如果 G 是最小 μ_3，那么 G 是最小 μ_2。

除 Myrvold 通过穷举计算机搜索发现的少数几类不含 UMRG 的类 $\mathcal{C}_{n,\ m}$，以下是此前关于 $\mathcal{C}_{n,\ m}$ 中不存在 UMRG 的所有已知结果。请注意，这些结果都聚焦于稠密图的类 $\mathcal{C}_{m,\ n}$。

定理 8 (Kelmans [9]; Myrvold 等人 [11])。若以下任一断言成立，则类 $\mathcal{C}_{n,\ m}$ 中不存在 *UMRG*：

(i) $n \geq 6$, n *is even, and* $m = \binom{n}{2} - \frac{n+2}{2}$;

(ii) $n \geq 7$, n *is odd, and* $m = \binom{n}{2} - \frac{n+5}{2}$.

定理 9 (Brown 和 Cox [7])。设 $n \geq 6$ 和 $m = \binom{n}{2} - (n-k)$，其中 $1 \leq k < n/2$。那么，在类 $\mathcal{C}_{n,m}$ 中不存在 *UMRG*，只要以下任一断言成立：

(i) $k = 1$ 和 $n \equiv 1$ (模 3)；***(ii)*** $n - 2k \equiv 1$ (模 3)，$k \neq 1$，且 $k \neq (n-1)/2$;

(iii) $n - 2k \equiv 2$ (模 3) 且 $k \neq 1$。

4 预备知识

本节区分一类边数多于顶点数的 2-连通简单图，我们称之为公平图，其特征是任意两条链的长度相差至多一。本节的主要结果是命题14，该命题指出，若 $\mathcal{S}$ 是一个公平图集合，其中所有图的顶点数、边数和链数均相同，那么对于适当的 k值，在 $\mathcal{S}$ 上最小化 k-边割数量的问题，等价于在 $\mathcal{S}$上最小化导出 k-边割数量的问题（见定义 13）。

设 G 是一个边数多于顶点数的二连通简单图。回顾一下，我们用 $\Gamma(G)$ 表示 G 的所有链构成的集合。此外，若 k 是非负整数，则用 $\Gamma^{(k)}(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 中所有大小为 k 的子集构成的族；即，$\Gamma^{(k)}(G) = \binom{\Gamma(G)}{k}$。我们还令

$$\Gamma^{(k)}_{-}(G) = \{H \in \Gamma^{(k)}(G) : G \ominus H \text{ is disconnected}\}.$$

下面的引理给出了任意二连通简单图中 k-边割的数量表达式。

引理 10. 对于每个具有 n 个顶点和 m 条边的2-连通简单图 G，若满足 $m > n$ 且每个$k \in \{0, 1, \ldots, m\}$,

$$\mu_k(G) = \binom{m}{k} - \sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) + \sum_{H \in \Gamma^{(k)}_{-}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma). \tag{1}$$

证明。注意，$\mu_k(G)$ 可通过从 $\binom{m}{k}$ 中减去这样一种选边方式的数量来计算：从 G 中选出 k 条边并将其删除，且删除后仍保持 G 连通。为了避免 G 变得不连通，每种这样的选边方式至多从每条链中选取一条边，并且所选边必须来自一个链集 H，使得 $G \ominus H$ 不会变得不连通。因此，

$$\mu_k(G) = \binom{m}{k} - \sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G) - \Gamma^{(k)}_{-}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) = \binom{m}{k} - \left(\sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) - \sum_{H \in \Gamma^{(k)}_{-}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) \right). \square$$

注意，若上引理中的图 G 恰有 t 条链，且其所有链的长度分别为 ℓ_1，ℓ_2，……，ℓ_t，则式（1）右端的第二项为

$$\sum_{H \in \Gamma^{(k)}} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) = \sum_{J \in \binom{[t]}{k}} \prod_{i \in J} \ell_i. \tag{2}$$

如果 $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_t$被限制为等于固定值 m，则当元组（ℓ_1，ℓ_2，……，ℓ_t）按下文定义为公平时，上述方程的右端达到最大值。该最大性结果在引理 12 中得到证明。

定义 11。 元组（x_1， x_2，……， x_t） $\in \mathbb{Z}_+^t$ 是公平的，当且仅当 $|x_i - x_j| \leq 1$ 对所有 i， $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$均成立。图$G$ 是公平的，如果它是一个边数多于顶点数的 2-连通简单图，并且其所有链的长度所组成的元组在 G 中是公平的。

引理 12. 设 k 和 t 为整数，使得 $2 \leq k \leq t$，并设

$$\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t) = \sum_{J \in \binom{[t]}{k}} \prod_{i \in J} \ell_i \qquad \textit{for each } (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{Z}_+^t.$$

设 m 为任意整数，使得 $m \geq t$，并设 $L_{t,\,m} = \{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t) \in \mathbb{Z}_+^t : \ \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_t = m\}$。当 ℓ_1, $\ell_2, \ldots, \ell_t$ 在 $L_{t,\,m}$ 中取遍时， $\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t)$ 的最大值恰好在那些公平的元组处取得。

记号。 $\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ \ell_2, \ldots, \ell_t)$ 在 $L_{t,\,m}$ 中取得的最大值记为 $\Phi_t^{(k)}(m)$。

引理 12 的证明。由于 $\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t)$ 是关于 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t$ 的对称多项式，我们不失一般性地假设 $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_t$。因此，$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t)$ 是公平的，当且仅当 $\ell_1 \leq \ell_t + 1$。于是，只需证明若 $\ell_1 \geq \ell_t + 2$，则 $\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t) < \phi_t^{(k)}(\ell_1 - 1, \ell_2, \ldots, \ell_{t-1}, \ell_t + 1)$。事实上，

$$\begin{aligned}
&\phi_t^{(k)}(\ell_1 - 1, \ell_2, \ldots, \ell_{t-1}, \ell_t + 1) - \phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t) \\
&\quad = \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-2}} (\ell_1 - 1)(\ell_t + 1) \prod_{i \in J} \ell_i + \\
&\qquad \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-1}} (\ell_1 - 1) \prod_{i \in J} \ell_i + \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-1}} (\ell_t + 1) \prod_{i \in J} \ell_i - \\
&\qquad \left(\sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-2}} \ell_1 \ell_t \prod_{i \in J} \ell_i + \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-1}} \ell_1 \prod_{i \in J} \ell_i + \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-1}} \ell_t \prod_{i \in J} \ell_i \right) \\
&\quad = \sum_{J \in \binom{[t]-\{1,t\}}{k-2}} (\ell_1 - \ell_t - 1) \prod_{i \in J} \ell_i > 0.
\end{aligned}$$

这证明， $\phi_t^{(k)}$ 只有在公平的元组中才能在 $L_{t,\,m}$ 上取得最大值。由于 $\phi_t^{(k)}$ 在 $L_{t,\,m}$的所有公平元组上的取值相同，故引理得证。 □

定义 13. 设 G 是一个边数多于顶点数的二连通简单图。设 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 是 $D(G)$ 的一个 k-边割。对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$，设 γ_i 是与 $D(G)$ 的边f_i 相对应的 G 链。若 G 的 k-边割 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 满足 $e_i \in \gamma_i$ 对每个$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$，则称该边割由 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 导出。此外，

(i) 若 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 是顶点分离的，则称 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 为 V 型；

(ii) 若 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 是边分离的，但不是顶点分离的，则称 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 为 E 型；

(iii) 若 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 是非平凡的，则称 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 为 N 型。

G 的 Type-V、Type-E 和 Type-N k 边割的数量分别记为 $\mu_k^{\mathrm{V}}(G)$、 $\mu_k^{\mathrm{E}}(G)$ 和 $\mu_k^{\mathrm{N}}(G)$。 G 的导出 k 边割总数记为 $\mu_k^{\mathrm{I}}(G)$；即，

$$\mu_k^{\mathrm{I}}(G) = \mu_k^{\mathrm{V}}(G) + \mu_k^{\mathrm{E}}(G) + \mu_k^{\mathrm{N}}(G).$$

请注意 根据 $\mu_k^{\mathrm{I}}(G)$ 的定义，它与式（1）的右端第三项相同；即，

$$\mu_k^{\mathrm{I}}(G) = \sum_{H \in \Gamma_-^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma).$$

这一事实结合引理 12 得出以下结果。

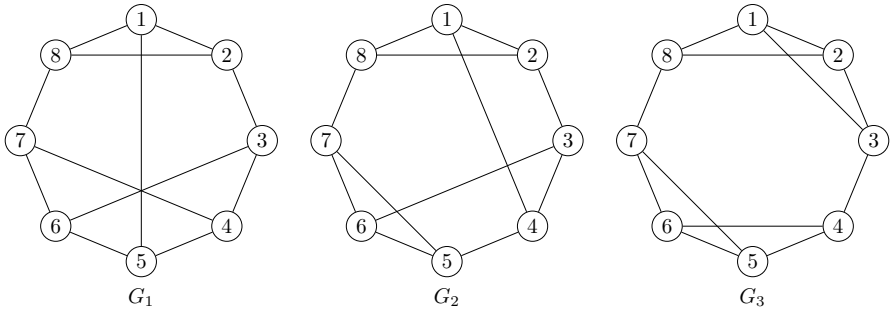

图 3：8 个顶点上的三个三次图。

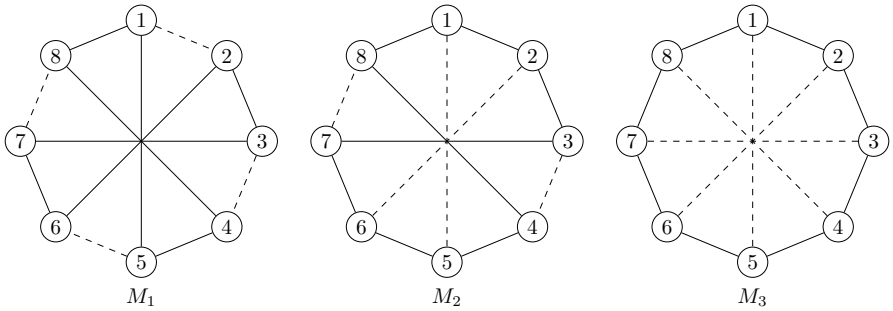

图 4：瓦格纳图 W的完美匹配 M_1、 M_2 和 M_3 。这些匹配由虚线边组成。

命题 14. 设 k 和 t 为正整数，使得 $2 \leq k \leq t$ ；设 $\mathcal{S}$ 为一个非空的公平图集合，其图具有 n 个顶点和 m 条边，使得 $m > n$ 且恰有 t 条链。那么，当 G 遍历 $\mathcal{S}$时， $\mu_k(G)$ 的最小值恰好在与 $\mu_k^{\mathrm{I}}(G)$的最小值取到时相同的那些图 G 上取到。

证明。由于 G 的 t 链非空且两两不相交， $t \leq m$。因此， $k \leq m$ 并且，由于 G 是公平的，引理 a 10，方程（2），以及引理12 意味着

$$\mu_k(G) = \binom{m}{k} - \Phi_t^{(k)}(m) + \sum_{H \in \Gamma_-^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma). \tag{3}$$

由于 m、 k和 t均为固定值，(3) 右端的前两项为常数。因此， $\mu_k(G)$ 恰在 (3) 右端的第三项达到最小值时取得最小值。并且，如上所述，该项与 $\mu_k^{\mathrm{I}}(G)$ 相同。

□

5 零附近的局部最可靠图

本节针对每个正整数 s，刻画类 $\rho = 0$ 中在 $\mathcal{C}_{12s+4}$、$_{12s+8}$附近局部最可靠的图。本节安排如下。在小节 5.1 中，找出 μ_3 中所有使 μ 最小的图 $\mathcal{C}_{12s+4}$。$_{12s+8}$ 在这些图中，使 μ_4 最小的唯一图将在小节 5.2 中确定。在小节 5.3 中，我们证明该图在 $\rho = 0$附近局部最可靠。

5.1 使 μ_3 最小化

在本小节中，对于每个正整数 s，我们求出 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 中的所有 min-μ_3 图的列表。以下注记将有助于实现这一目标。

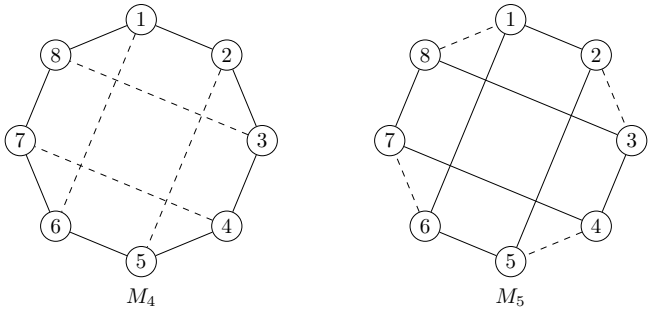

图5： 立方体图 Q 的完美匹配 M_4 和 M_5。这些匹配由虚线边组成。

注15。 如 [8], 中首次报道的那样，在同构意义下，恰有五个具有 8 个顶点的三次图。这五个图如图 2 和3所示。一方面，图 2 中的两个图（即 W 和 Q）都是 min-μ_3 ，因为容易验证，它们唯一的 3-边割是那 8 个顶点分离的边割。另一方面，图3 所示的图不是 min-μ_3。事实上， G_1、 G_2和 G_3 除具有 8 个顶点分离的 3-边割外，还各有其他的 3-边割；例如，分别为$\{23, 78, 15\}$、 $\{23, 78, 14\}$和 $\{23, 78, 13\}$。

注16. 在同构意义下， W的唯一完美匹配是 M_1， M_2和 M_3图4中所示的匹配。在同构意义下， Q 的唯一完美匹配是 M_4 和 M_5图5中的匹配。

正如我们将看到的（见引理 18），$\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 中的 min-μ_3 图是某些扩展图，这一概念将在下文定义。

定义17. 设 G 是一个三次简单图， Y 是 G 的边集，且 s 是一个正整数。扩展图 G_s^Y是由 G 得到的图：将 Y 中的每条边细分 $s-1$ 次，并将 E 中的每条边细分 s 次（G） $-Y$。

注意， 此外，如果 G 是 2-连通的，那么 G_s^Y 可由 G 得到：将 Y 中的每条边替换为长度为 1 的链，并将不在 Y 中的每条边替换为长度为 $s+1$ 的链。

我们现在可以列出$\mathcal{C}_{12s+4}$ 中所有最小 μ_3 图，$_{12s+8}$。

引理 18。 设 s 为正整数。图 G 在 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 中是最小μ_3 当且仅当 G 是以下五个扩展图之一：$W_s^{M_1}$， $W_s^{M_2}$， $W_s^{M_3}$， $Q_s^{M_4}$、 $Q_s^{M_5}$其中 M_1，……， M_5 是图 *4* 和 *5*中所描绘的完美匹配。

证明。设 G 是 $\mathcal{C}_n$ 中的一个最小 μ_3 图，$_m$，其中 $n=12s+4$ 和 $m=12s+8$。由于 $s\geq 1$， $m<3n/2$。因此， G 的最小度至多为 2，特别地， $\lambda(G)\leq 2$。由于 $m>n$， G 是最小 μ_3，且 $3\in\{\lambda(G)\ \lambda(G)+1,\ \ldots\ldots,\ m-n+1\}$，定理 4 保证 G 是 2-连通的。因此，由于 G 的余秩为 $c=5$ 且 $m=12s+8$，定理 6 保证以下所有断言均成立：

(i) $D(G)$ 是一个具有 8 个顶点的最小-μ_3 简单三次图；

(ii) G 有 8 条长度为 $s+1$ 的链和 4 条长度为 s 的链；

(iii) G 中长度为 s 的 4 条链构成 G 的链的完美匹配。

断言(i) 和注记15 表明 $D(G)$ 或者是 W ，或者是 Q。因此，断言(ii) 和(iii) 以及注记16 表明 G 与以下图同构： $W_s^{M_1}$、 $W_s^{M_2}$、 $W_s^{M_3}$、 $Q_s^{M_4}$或 $Q_s^{M_5}$。 □

5.2 μ_4的最小化

本小节的主要结果是引理 22 ，其表明 $W_s^{M_1}$是使……最小的唯一图 μ_4，在最小μ_3 图中，属于 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$。证明策略如下。根据引理 18，在 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 中的所有最小μ_3 图都是公平的。因此，命题 14 意味着，要证明引理 22，只需证明 $W_s^{M_1}$使……最小 μ_4^{I}，在 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$中的所有最小$\mu_3$ 图上即可。引理 19 和 20 表明

$\mu_4^{\mathrm{V}}(G)$ 和 $\mu_4^{\mathrm{E}}(G)$ 对于 $\mathcal{C}_{12s+4}$、$_{12s+8}$ 中的所有最小-μ_3 图 G 都是常数。引理 21 进一步表明，在这些相同的图中，仅当 $G = W_s^{M_1}$ 时，$\mu_4^{\mathrm{N}}(G)$ 才取得最小值。由于 $\mu_4^{I}(G) = \mu_4^{\mathrm{V}}(G)+\mu_4^{\mathrm{E}}(G)+\mu_4^{\mathrm{N}}(G)$，本小节的主要结果得证。

引理 19. 如果 $G \in \mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 且 G 是最小-μ_3，那么

$$\mu_4^{\mathrm{V}}(G) = 8s(s+1)^2(9s+6).$$

证明。由引理 18，G 是 $W_s^{M_1}$、$W_s^{M_2}$、$W_s^{M_3}$、$Q_s^{M_4}$或 $Q_s^{M_5}$。特别地，D（G）要么是 W，要么是 Q。设 v 是 D（G）的一个顶点。由于 D（G）是三次图，分离 v 的 D（G）的 4-边割，恰好由与 v 关联的三条边以及一条与 v不关联的边组成。因此，由分离 v 的 D（G）的某个 4-边割所导出的 G的 4-边割，恰好由与 v 关联的每条链中的一条边，以及 G中一条与 v 不关联的链中的一条边组成。由于 G 是由一个三次图通过完美匹配扩展而成的图，v 恰好关联着 1 条长度为 s 的链和 2 条长度为$s+1$的链。因此，由分离 v 的 D（G）的一个 4-边割所导出的 G 的 4-边割数目等于s（$s+1$）^{2}（$12s+8-$（$s+2$（$s+1$））$= s$（$s+1$）^{2}（$9s+6$）。由于 D（G）恰有 8 个顶点，并且 D（G）的任何 4-边割至多分离一个顶点（因为 D（G）是三次图），引理得证。

□

引理 20. 如果 $G \in \mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 且 G 是最小的 μ_3，那么

$$\mu_4^{\mathrm{E}}(G) = 4(s+1)^4 + 8s^2(s+1)^2.$$

证明。根据引理 18，G 是 $W_s^{M_1}$、$W_s^{M_2}$、$W_s^{M_3}$、$Q_s^{M_4}$ 或 $Q_s^{M_5}$，并令 M 分别为 M_1、M_2、M_3、M_4 或 M_5。特别地，D（G）要么是 W，要么是 Q。令 e 为 D（G）的一条边。由于 D（G）是三次的，分离 e 的 D（G）中唯一的 4-边割是集合 F，它恰由与 e 相接的 D（G）的四条边组成。令 γ 为对应于 e的 G 的链。因此，由 F 导出的 G 的 4-边割恰由与 γ 相接的 G 的每条链中的一条边组成。一方面，若 $e \in M$，则 G 中与 γ 相接的四条链长度均为 $s+1$，这意味着由 F 导出的 G 的 4-边割数量为 $(s+1)^4$。另一方面，若 $e \notin M$，则由于 M 是完美匹配，G 中与 γ 相接的两条链长度为 s，另外两条长度为 $s+1$，因此由 F 导出的 G 的 4-边割数量为 s^2（$s+1$）^{2}。由于 G 在 M 中有 4 条边，在 M 中有 8 条边，且 D（G）的任何 4- 边割都不会分离多于一条边，故引理得证。□

引理 21. 设 s 为正整数。在所有$\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$中的最小-$\mu_3$ 图里，图 $W_s^{M_1}$是使 μ_4^{N} 最小的唯一图。

证明。设 G 是 $\mathcal{C}_{12s+4}$中的一个最小-μ_3 图 $_{,12s+8}$。根据引理 18，G 是 $W_s^{M_1}$，$W_s^{M_2}$，$W_s^{M_3}$，$Q_s^{M_4}$，或 $Q_s^{M_5}$。

先假设 $D(G) = W$。注意，W 只有两个非平凡 4-边割，即 M_1 和$M_1' = \{23, 45, 67, 81\}$。$G$的 N 型 4-边割是由 M_1或 M_1'导出的。一方面，G 中与 M_1 的边对应的所有链的长度至少为 s，且只有当 $G = W_s^{M_1}$时，它们的长度才都为 s。另一方面，在所有情形下（即 G 等于 $W_s^{M_1}$、$W_s^{M_2}$或 $W_s^{M_3}$），G 中与 M_1' 的边对应的四条链的长度均为 $s+1$。由此可得，$\mu_4^{\mathrm{N}}(G) \geq s^4 + (s+1)^4$，且仅当 $G = W_s^{M_1}$时取等号。

现在假设 $D(G) = Q$。注意，以下两个都是 Q 的非平凡 4-边割：$F = \{12, 56, 38, 47\}$ 和 M_1。注意，如果 G 是 $Q_s^{M_4}$ 或 $G = Q_s^{M_5}$，那么 G 中对应于 F 的边的至少两条链长度为 $s+1$，而 G 中对应于 M_1 的所有链长度均为 $s+1$。因此，在所有情形下（即，G 等于 $Q_s^{M_4}$ 或 $Q_s^{M_5}$），$\mu_4^{\mathrm{N}}(G) \geq s^2(s+1)^2 + (s+1)^4 > \mu_4^{\mathrm{N}}(W_s^{M_1})$。引理证明完毕。□

引理 22. 对于每个正整数 s，$W_s^{M_1}$ 是所有 *min*-μ_3 图中使 *4*-边割数量最小的唯一图，在 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$。

证明。令 $\mathcal{S}$ 为 μ_3 中的极小图集合 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$。根据引理 18，$\mathcal{S}$ 是一个由公平图组成的集合，其中每个图恰有 12 条链。因此，根据命题 14，μ_4 在 $\mathcal{S}$ 上达到最小值，且这些图与 μ_4^{I} 在 $\mathcal{S}$上达到最小值的图相同。根据引理 19 和 20，μ_4^{V} 和 μ_4^{E} 的值在$\mathcal{S}$上为常数。因此，由于 $\mu_4^{\mathrm{I}} = \mu_4^{\mathrm{V}} + \mu_4^{\mathrm{E}} + \mu_4^{\mathrm{N}}$，结论由引理 21得证。□

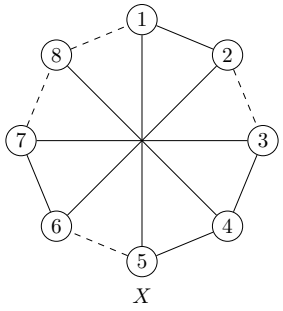

图6：集合 X 由虚线边组成。

5.3 零点附近的局部最优性

结合引理 18 和22 以及定理 3 和推论 7，我们能够刻画 $\mathcal{C}_{12s+4,\ 12s+8}$ 中在 $\rho = 0$ 附近局部最可靠的图。

Pro位置 23。 对于每个正整数 s，图 $W_s^{M_1}$在 $\rho = 0$附近是局部最可靠的 .

证明。显然， $W_s^{M_1}$是 2-边连通的；也就是说， $\mu_0(W_s^{M_1}) = \mu_1(W_s^{M_1}) = 0$。因此，当 k 等于 0 或 1 时， $W_s^{M_1}$使-μ_k最小。根据引理 18， $W_s^{M_1}$使-μ_3最小。此外，按照引理 18 的证明进行推理可知， $W_s^{M_1}$满足推论 7 的假设，因此， $W_s^{M_1}$也使-μ_2最小。此外，引理 22 保证，在使 μ_4 最小的 min-μ_3 图中， $W_s^{M_1}$是唯一的图。这证明了，对于任意一个不同于 $W_s^{M_1}$、具有 $12s+4$ 个顶点和 $12s+8$ 条边的简单图 H，存在某个 $i \in \{0,1,2,3,4\}$，使得对于每个 $k \in \{0,1,\ldots,i-1\}$， $\mu_k(W_s^{M_1}) = \mu_k(H)$，并且 $\mu_i(W_s^{M_1}) < \mu_i(H)$。因此，由定理3(i)可得该命题。 □

6 主要结果的证明

本节证明主要结果，即定理30。该定理断言，对于每个正整数 s，在 $\mathcal{C}_{12s+4,12+8}$ 中都不存在 UMRG。为证明这一结果，我们令 $X = \{23, 56, 78, 18\}$（见图6），并将证明扩大的图 W_s^X 的 5-边割比 $W_s^{M_1}$ 少。根据命题 14，证明 $\mu_5(W_s^X) < \mu_5(W_s^{M_1})$ 等价于证明 $\mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^X) < \mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^{M_1})$。在计算 W_s^X 和 $W_s^{M_1}$ 的诱导5-边割数量之前，我们先证明它们的共同蒸馏 W 的 5-边割具有一项有用性质。

引理24. *W 的每个非平凡5-边割要么是 P_3-分离的，要么是 C_4-分离的。*

证明。 我们首先枚举 W 的四类 5-边割。随后，我们将论证这个列表已涵盖所有情况。

– 顶点分离割。设 W 的一个顶点为 v 。由于 W 是三次图，每个将 v 分离开的 5-边割都由与 v 相 incident 的三条边以及另外两条边组成。因此，将 v 分离开的 W 的 5- 边割数量等于 $\binom{9}{2}$（即与 v 不相 incident 的边对数量）。注意，将至少两个不同顶点分离开的 W 的 5-边割，是那些分离两个相邻顶点、且由与这两个顶点中至少一个相 incident 的五条边组成的割。根据容斥原理，W 的顶点分离 5-边割数量为 $8 \times \binom{9}{2} - 12 = 276$。

– 边分离割。 设 e 是 W 的一条边。 W 中分离 e 的 5-边割由与 e 相接的四条边以及一条不同于 e 的额外边组成。因此，分离 e 的 5-边割数量为 $12 - 4 - 1 = 7$。由于 W 的任何 5-边割都不会分离两条不同的边， W 的边分离 5-边割总数为 $12 \times 7 = 84$。

– P_3-分离割。设 S 是 W 的一个顶点集，其诱导出 P_3。由于 W 是三次图， W 中分离 S 的唯一5-边割是集合 F ，该集合由恰好有一个端点位于 S中的五条边组成。注意，反过来， F 唯一确定 S 。因此， P_3-分离的5-边割的数量

等于 W中诱导出 P_3 的集合数量。由于 W 是无三角形的，这等于关联边对的数量。由于 W 是一个具有8个顶点的三次图，该数量为 $8 \times 3 = 24$。

– C_4-分离边割。注意， W 有四个与 C_4 同构的导出子图，其顶点集分别为 $D_1 = \{1, 2, 6, 5\}$、$D_2 = \{2, 3, 7, 6\}$、 $D_3 = \{3, 4, 8, 7\}$或 $D_4 = \{4, 5, 1, 8\}$。对于每个$i \in \{1, 2, 3, 4\}$， W中分离 D_i 的5-边割由 W中恰好与 D_i 的一个顶点关联的四条边，以及另一条与 D_i的任何顶点都不关联的边组成。因此， W 中 D_i-分离的5-边割数量为4。由于对于$i \neq j$， W 的任何5-边割都无法分离 D_i 和 D_j，所以 W 中 C_4-分离的5-边割总数为 $4 \times 4 = 16$。

注意到， W <style id='4'}中的任何一个 5-边割都不属于上文讨论的四类边割中的多类。因此，我们已经列出了 W的 400 个不同的 5-边割。注意，若从 W中移除五条边，所得结果要么是非连通图，要么是一棵树。因此， $\mu_5(W) = \binom{12}{5} - t(W)$，其中 $t(W)$ 表示 W的生成树数。此外，已知 [4] 有 $t(W) = 392$。因此，$\mu_5(W) = \binom{12}{5} - 392 = 400$。这意味着，上文讨论的四类 5-边割涵盖了 W的所有 5-边割。由于只有最后两类包含非平凡边割，结论得证。

□

设 G 为 $W_s^{M_1}$ 或 W_s^X。回顾一下， $\mu_5^{\mathrm{V}}(G)$ 和 $\mu_5^{\mathrm{E}}(G)$ 分别表示 G 的 V 型和 E 型 5-边割的数量。此外，我们用 $\mu_5^{P_3}(G)$（分别用 $\mu_5^{C_4}(G)$）表示由 $D(G)$ 中将 P_3 分离（分别将 C_4 分离）的边割所导出的 G 的 5-边割数量。因此，根据上述引理，

$$\mu_5^{\mathrm{I}}(G) = \mu_5^{\mathrm{V}}(G) + \mu_5^{\mathrm{E}}(G) + \mu_5^{P_3}(G) + \mu_5^{C_4}(G). \tag{4}$$

在下面的引理25 至 28 中，我们分别确定 $\mu_5^{\mathrm{V}}(G)$、 $\mu_5^{\mathrm{E}}(G)$、 $\mu_5^{P_3}(G)$ 和 $\mu_5^{C_4}(G)$，对两者均成立$G = W_s^{M_1}$ 和 $G = W_s^X$。

引理 25。 对于每个正整数 s,

$$\mu_5^{\mathrm{V}}(W_s^{M_1}) = 276s^5 + 920s^4 + 1128s^3 + 600s^2 + 116s \qquad \text{and}$$
$$\mu_5^{\mathrm{V}}(W_s^X) = 276s^5 + 920s^4 + 1149s^3 + 651s^2 + 156s + 10.$$

证明。我们先详细考察 W 中分离某个顶点 v 的 5-边割 F。由引理24的证明可知，这些集合 F 恰好由与 v 相 incident 的三条边以及另外两条与 v 不相 incident 的边组成。在 W 中与 v 不相 incident 的边中，有 3 条边属于 M_1，6 条边不属于 M_1；因此，在 W 中所有分离 v 的可能 5-边割中，有：(i) $\binom{3}{2} = 3$，其与 v 不相 incident 的边均属于 M_1；(ii) $3 \times 6 = 18$，其与 v 不相 incident 的边一条属于 M_1，另一条不属于 M_1；以及 (iii) $\binom{6}{2} = 15$，其与v 不相 incident 的边均不属于 M_1。

我们首先考虑 $G = W_s^{M_1}$。设 v是其蒸馏 W的一个顶点。由于 v在 W中的度为 3，且 M_1是 W的完美匹配，因此 v 在 G 中与一条长度为 s 的链和两条长度为 $s+1$的链相 incident。于是，如果 F是分离 v的 W 的一个 5-边割，则由 F 导出的 G 的 5-边割数量为 $s(s+1)^2\ell_1\ell_2$，其中 ℓ_1 和 ℓ_2 是 G 中对应于 F 里不与 v 相 incident 的边的两条链的长度。由于 M_1 的每条边在 G 中对应一条长度为 s 的链，而不属于 M_1 的每条边在G中对应一条长度为 $s+1$ 的链，前一段的分析表明，由分离 v 的 W 的 5-边割所导出的 G的 5-边割总数为 $s(s+1)^2(3s^2+18s(s+1)+15(s+1)^2) = 36s^5+120s^4+147s^3+78s^2+15s$。

回顾引理24的证明， W 中分离两个不同顶点 v 和w 的 5-边割，恰好是由边集 F 组成的集合；对W中的任意一条边 vw，这些边都与 v 和 w 中至少一个顶点相 incident。由于 v和 w在 W中的度均为 3，且 M_1 是 W的完美匹配，因此由 F 导出的 G 的 5-边割数量为 $s(s+1)^4$ 或 $s^2(s+1)^3$,，分别取决于 $vw \in M_1$ 是否成立。由于 W 的任何 5-边割都不可能分离三个不同的顶点，因此 G 中分离两个不同顶点的 5-边割数量为 $4s(s+1)^4 + 8s^2(s+1)^3 = 12s^5 + 40s^4 + 48s^3 + 24s^2 + 4s$。

根据容斥原理，我们得出

$$\begin{aligned}\mu_5^{\mathrm{V}}(W_s^{M_1}) &= 8 \times (36s^5 + 120s^4 + 147s^3 + 78s^2 + 15s) - (12s^5 + 40s^4 + 48s^3 + 24s^2 + 4s) \\ &= 276s^5 + 920s^4 + 1128s^3 + 600s^2 + 116s.\end{aligned}$$

接下来，我们以类似方式研究$G = W_s^X$。设 v是其蒸馏 W中的一个顶点。我们考虑以下不同情形：

– 如果 v既不是 4 也不是 8，那么 v在 G中与一条长度为 s的链和两条长度为 $s+1$的链关联。因此，在 $G = W_s^{M_1}$的情形中所采用的推理仍然适用，可以证明由分离 v 的 W 的 5-边割所导出的 G 的 5-边割数量为 $36s^5 + 120s^4 + 147s^3 + 78s^2 + 15s$。

– 由于 4 在 G中与三条长度为 $s+1$的链相邻，而与 4 不相邻的链中有 4 条长度为 s、5 条长度为 $s+1$，因此由分离 4 的 W的 5-边割导出的 G的 5-边割数量为 $(s+1)^3\left(\binom{4}{2}s^2+4\times5\times s(s+1)+\binom{5}{2}(s+1)^2\right) = 36s^5+148s^4+238s^3+186s^2+70s+10$。

– 由于 8 在 G 中与两条长度为 s 的链和一条长度为 $s+1$ 的链相邻，而与 8 不相邻的链中有 2 条长度为 s、7 条长度为 $s+1$，因此由分离 的 -边割导出的 G 5 W 8 s^2 $s+1$ $\left(s^2+2\times7\times s\ s+1\ +\binom{7}{2}\ s+1\ ^2\right)=$ 的 5-边割数量为 ( ) ( ) ( )。$36s^5 + 92s^4 + 77s^3 + 21s^2$

回顾一下，每个将两个不同顶点 v 和 w 分隔开的 5-边割 F of W 恰好由所有与 v和 w关联的边组成，其中 vw是 W的任意一条边。因此，对于每个这样的集合 F，由 F 导出的 G 的 5-边割恰好是这样一些边割：从与 vw对应的链 γ of G 中取一条边，并从与 γ关联的四条链中各取一条边。我们分情况讨论：

– 若 vw 是 23 或 56，则 γ的长度为 s，与其关联的四条链长度均为 $s+1$。因此，由 F导出的 5-边割数量为 $s(s+1)^4$。– 若 vw 是 18 或 78，则 γ 的长度为 s，且与一条长度为 s 的链和三条长度为 $s+1$的链关联。因此，由 F导出的 5-边割数量为 $s^2(s+1)^3$。– 若 vw 是 34 或 45，则 γ的长度为 $s+1$，且与一条长度为 s 的链和三条长度为 $s+1$的链关联。因此，由 F导出的 5-边割数量为 $s(s+1)^4$。– 若 vw 是 12、15、26、37、48 或 67，则 γ的长度为 $s+1$，且与两条长度为 s的链和两条长度为 $s+1$的链关联。因此，由 F导出的 5-边割数量为 $s^2(s+1)^3$。

由于 W 的任何5-边割都不会分离出两个以上不同的顶点，因此由 W 中分离两个不同顶点的某个5-边割导出的 G的5-边割总数为 $2s(s+1)^4 + 2s^2(s+1)^3 + 2s(s+1)^4 + 6s^2(s+1)^3 = 12s^5 + 40s^4 + 48s^3 + 24s^2 + 4s$。

因此，根据容斥原理，我们得出

$$\begin{aligned}\mu_5^{\mathrm{V}}(W_s^X) &= 6\times(36s^5+120s^4+147s^3+78s^2+15s)+(36s^5+148s^4+238s^3+186s^2+70s+10)+\\ &\quad+(36s^5+92s^4+77s^3+21s^2)-(12s^5+40s^4+48s^3+24s^2+4s)\\ &= 276s^5+920s^4+1149s^3+651s^2+156s+10.\end{aligned}$$ □

引理 26. 对于每个正整数 s,

$$\mu_5^{\mathrm{E}}(W_s^{M_1}) = 84s^5+280s^4+368s^3+248s^2+92s+16 \qquad and$$
$$\mu_5^{\mathrm{E}}(W_s^X) = 84s^5+280s^4+356s^3+216s^2+64s+8.$$

证明。我们先考虑 $G = W_s^{M_1}$。回顾引理24的证明可知， W中分离一条边 e 的每个5-边割 F，恰好由与 e 关联的四条边以及另一条与 e不关联的边组成。因此，由 F 导出的 G 的5-边割，由 G 中与对应于 e 的链 γ 相邻的每条链各取一条边，以及从 G 中与 γ不关联的任意链中取一条边组成。另一方面，若 $e \in M_1$，则与 γ相邻的四条链长度为 $s+1$，而与 γ 不相邻的链总共有 $12s+8-(s+4(s+1)) = 7s+4$ 条边。因此，由分离 e 的 W的5-边割导出的 G的5-边割数量为$(s+1)^4(7s+4)$。另一方面，若 $e \notin M_1$，则 γ与两条长度为 s 的链及两条长度为 $s+1$ 的链相邻，而与γ 不相邻的链中的边数为 $12s+8-(2s+3(s+1)) = 7s+5$。因此，由分离 e 的 W的5-边割导出的 G的5-边割数量为 $s^2(s+1)^2(7s+5)$。由于 W在 M_1 中有4条边，在 M_1 中有8条边，且 W 的任何5-边割都不会分离两条不同的边，因此由 W中边分离的5-边割导出的 G 的5-边割总数为 $4(s+1)^4(7s+4) + 8s^2(s+1)^2(7s+5) = 84s^5+280s^4+368s^3+248s^2+92s+16$。由于 W中没有边分离的5-边割是顶点分离的，这也就是 $\mu_5^{\mathrm{E}}(W_s^{M_1})$的值。

接下来，我们以类似的方式研究 $G = W_s^X$。设 W 的一条边为 e，设与 e对应的 G链为 γ。我们考虑不同的情况：

– 如果 e 是 23 或 56，那么 γ 的长度为 s，γ 与四条长度为 $s+1$ 的链相连，而与 γ 不相连的链中的边数为 $12s+8-(s+4(s+1)) = 7s+4$。– 如果 e 是 18 或 78，那么 γ 的长度为 s，γ 与一条长度为 s 的链和三条长度为 $s+1$ 的链相连，而与 γ 不相连的链中的边数为 $12s+8-(2s+3(s+1)) = 7s+5$。– 如果 e 是 34 或 45，那么 γ 的长度为 $s+1$，γ 与一条长度为 s 的链和三条长度为 $s+1$ 的链相连，而与 γ 不相连的链中的边数为 $12s+8-(s+4(s+1)) = 7s+4$。– 如果 e 是 12、15、26、37、48 或 67，那么 γ 的长度为 $s+1$，γ 与两条长度为 s 的链和两条长度为 $s+1$ 的链相连，而与 γ 不相连的链中的边数为 $12s+8-(2s+3(s+1)) = 7s+5$。

由此得出，G 中由 W 的某个边分离 5-边割导出的 5-边割数量为 $2(s+1)^4(7s+4)+2s(s+1)^3(7s+5)+2s(s+1)^3(7s+4)+6s^2(s+1)^2(7s+5) = 84s^5+280s^4+356s^3+216s^2+64s+8$。由于 W 的任何边分离 5-边割都不是顶点分离的，这也就是 $\mu_5^{\mathrm{E}}(W_s^X)$ 的值。 □

引理27。对于每个正整数 s，

$$\mu_5^{P_3}(W_s^{M_1}) = 24s^5+80s^4+104s^3+64s^2+16s \qquad and$$
$$\mu_5^{P_3}(W_s^X) = 24s^5+80s^4+105s^3+69s^2+23s+3.$$

证明。回顾引理24的证明，W 中将 P_3 分离的 5-边割 F 由 W 的边组成，这些边与 e_1 和 e_2 中至少一个恰好共享一个端点，其中 e_1 和 e_2 是 W 的任意两条关联边。此外，F 唯一确定 $\{e_1,e_2\}$。因此，若 G 是一个图，且 $D(G) = W$，那么由 F 导出的 5-边割数量等于 G 中恰好有一个端点与 e_1 或 e_2 共有的五条链的长度之积。

我们先考虑 $G = W_s^{M_1}$。令 e_1 和 e_2 为 W 的两条关联边，并令 F 如上一段所述。一方面，如果 e_1 和 e_2 中有一条属于 M_1，那么另一条就不属于 M_1；在 G 的五条链中，与 e_1 或 e_2 至少一个恰有一个端点相同的链，有一条长度为 s，另外四条长度为 $s+1$。因此，在这种情况下，由 F 导出的 G 的 5-边割数量为 $s(s+1)^4$。另一方面，如果 e_1 和 e_2 都不属于 M_1，那么在与 e_1 或 e_2 至少一个恰有一个端点相同的五条链中，有三条长度为 s，另外两条长度为 $s+1$。因此，在这种情况下，由 F 导出的 G 的 5-边割数量为 $s^3(s+1)^2$。由于 W 有 16 对关联边，其中一条属于 M_1；另有 8 对关联边，两条都不属于 M_1，我们得出 $\mu_5^{P_3}(W_s^{M_1}) = 16s(s+1)^4+8s^3(s+1)^2 = 24s^5+80s^4+104s^3+64s^2+16s$。

接下来，我们以类似的方式分析 W_s^X。设 e_1 和 e_2 是 G 的两条关联边，设 F 如本证明第一段所述，并设 H 为与 F 中的边对应的链族（即，G 中恰好有一个端点与 e_1 和 e_2 中至少一个共享的链）。以下情况恰有一种成立：

– 若 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\{23,34\}$、$\{45,56\}$ 或 $\{78,81\}$，则 H 由 5 条长度为 $s+1$ 的链组成。– 若 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\{12,23\}$、$\{56,67\}$、$\{23,37\}$、$\{32,26\}$、$\{56,62\}$、$\{65,51\}$、$\{78,84\}$ 或 $\{18,84\}$，则 H 由 1 条长度为 s 的链和 4 条长度为 $s+1$ 的链组成。– 若 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\{34,45\}$、$\{67,78\}$、$\{81,12\}$、$\{43,37\}$、$\{45,51\}$、$\{87,73\}$ 或 $\{81,15\}$，则 H 由 2 条长度为 s 的链和 3 条长度为 $s+1$ 的链组成。– 若 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\{12,26\}$、$\{21,15\}$、$\{34,48\}$、$\{54,48\}$、$\{67,73\}$ 或 $\{76,62\}$，则 H 由 3 条长度为 s 的链和 2 条长度为 $s+1$ 的链组成。

由于 F 导出的 G 的 5-边割数量等于 H 中各链长度的乘积，因此 $\mu_5^{P_3}(W_s^X) = 3(s+1)^5+8s(s+1)^4+7s^2(s+1)^3+6s^3(s+1)^2 = 24s^5+80s^4+105s^3+69s^2+23s+3$。

□

引理 28. 对于每个正整数 s，

$$\mu_5^{C_4}(W_s^{M_1}) = 16s^5+44s^4+64s^3+56s^2+24s+4 \qquad and \tag{5}$$
$$\mu_5^{C_4}(W_s^X) = 16s^5+44s^4+40s^3+12s^2 \tag{6}$$

证明。回顾引理24的证明，与 C_4 同构的 W 的导出子图是由 $D_1 = \{1,2,6,5\}$、$D_2 = \{2,3,7,6\}$、$D_3 = \{3,4,8,7\}$ 或 $D_4 = \{4,5,1,8\}$ 导出的；而将 D_i 分开的 W 的 5-边割 F，由 W 中恰好与 D_i 的一个顶点关联的四条边，以及另一条与 D_i 的任何顶点都不关联的边组成。注意，将 D_2 或 D_4 分开的 W 的 5-边割族，恰好是将 W 中不属于 M_1 的任意一条边添加到 M_1 后得到的集合族。类似地，若 $M_1' = \{23,45,67,18\}$，那么将 D_1 或 D_3 分开的 W 的 5-边割族，恰好是将 W 中不属于 M_1' 的任意一条边添加到 M_1' 后得到的集合族。因此，若 G 是一个图，且 $D(G) = W$，则由 W 的 C_4-分离 5-边割所导出的 G 的 5-边割数目，是以下两项之和：(i) G 中与 M_1 的边相对应的链的长度之积，乘以 G 中位于不对应于 M_1 的边的链内的边数；以及 (ii) G 中与 M_1' 的边相对应的链的长度之积，乘以 G 中位于不对应于 M_1' 的边的链内的边数。因此，通过简单观察可得，$\mu_5^{C_4}(W_s^{M_1}) = s^4(12s+8-4s) + (s+1)^4(12s+8-4(s+1)) = 16s^5+44s^4+64s^3+56s^2+24s+4$，且 $\mu_5^{C_4}(W_s^X) = 2s^2(s+1)^2(12s+8-2s-2(s+1)) = 16s^5+44s^4+40s^3+12s^2$。 □

现在结合引理25 至28，可证明 W_s^X比 $W_s^{M_1}$在 $\rho = 1$附近更可靠。

命题29。 对于每个正整数 s，$\mu_5(W_s^X) < \mu_5(W_s^{M_1})$。因此，$W_s^X$比 $W_s^{M_1}$在 $\rho = 1$附近更可靠。

证明。回顾一下，若 G是 $W_s^{M_1}$或 W_s^X，则（4）成立；即 $\mu_5^{\mathrm{I}} = \mu_5^{\mathrm{V}} + \mu_5^{\mathrm{E}} + \mu_5^{P_3} + \mu_5^{C_4}$。因此，引理25至28 表明

$$\mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^{M_1}) = 400s^5+1324s^4+1664s^3+968s^2+248s+20 \qquad \text{and}$$
$$\mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^X) = 400s^5+1324s^4+1650s^3+948s^2+243s+21.$$

因此，

$$\mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^{M_1}) - \mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^X) = 14s^3+20s^2+5s-1 = 14(s-1)^3+62(s-1)^2+87(s-1)+38 > 0$$

因为 s 是正整数。因此，$\mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^X) < \mu_5^{\mathrm{I}}(W_s^{M_1})$，并且根据命题14，还有$\mu_5(W_s^X) < \mu_5(W_s^{M_1})$。

我们声称，对于每个 $k \in \{6,7,\ldots,12\}$，$\mu_k(W_s^X) = \mu_k(W_s^{M_1}) = \binom{12s+8}{k}$，这是因为从 $W_s^{M_1}$或 W_s^X中移除任意一组F条 k边总会得到一个非连通图；事实上，所得图具有 $12s+4$ 个顶点和少于 $12s+3$ 条边。因此，通过将定理3(ii) 应用于 $j=5$，我们得出 W_s^X比 $W_s^{M_1}$在 $\rho = 1$附近更可靠。 □

我们现在可以证明主要结果。

定理30。 对于每个正整数 s，在类 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$中都不存在 *UMRG*。

证明。根据命题23，$W_s^{M_1}$在 $\rho = 0$ 附近是局部最可靠图。因此，$W_s^{M_1}$是 $\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$ 中唯一可能成为 UMRG 的候选图。然而，根据命题29，W_s^X在 $\rho = 1$ 附近比$W_s^{M_1}$更可靠。这一矛盾表明，$\mathcal{C}_{12s+4,12s+8}$中不存在 UMRG。 □

致谢

P. Romero 获得了科学研究部门委员会（CSIC）和 FCE-ANII 项目的部分资助，该项目名为*Teor´ıa Construcci´on de Redes de M´axima Confiabilidad*。M.D. Safe 获得了 CONICET 的 PIBAA 28720210101185CO 资助以及南方国立大学的 PGI 24/L115资助。作者感谢 Guillermo Dur´an 博士一直以来的支持。

参考文献

[1] K. Archer、C. Graves 和 D. Milan。全终端可靠度下一致最可靠图的类。离散应用数学，267:12–29，2019。

[2] Y. Ath 和 M. Sobel。一些关于一致最优可靠网络的猜想。《概率工程与信息科学》，14:375–383，2000年。

[3] D. Bauer、F. Boesch、C. Suffel 和 R. Tindell。概率网络分析与设计中的组合优化问题。*Networks*，15(2):257–271，1985年。[4] N. Biggs。代数图论。剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1993年。[5] F. T. Boesch。可靠网络综合中的不可靠性多项式与图连通性。《图论杂志》，10(3):339–352，1986年。[6] F. T. Boesch、X. Li 和 C. Suffel。关于一致最优可靠网络的存在性。*Networks*，21(2):181–194，1991年。[7] J. I. Brown 和 D. Cox。不存在全终端可靠度意义下的最优图。*Networks*，63(2):146–153，2014年。[8] F. Bussemaker、S. ˇCobelji´c、D. M. Cvetkovi´c 和 J. J. Seidel。具有 $\leqslant 14$ 个顶点的三次图。《组合理论杂志*B*辑》，23(2–3):234–235，1977年。[9] A. Kelmans。关于随机删除边的图。《匈牙利数学学报》，37(1–3):77–88，1981年。[10] W. Myrvold。一致最可靠图并非总是存在。技术报告 #DCS-120-IR，维多利亚大学计算机科学系，维多利亚，不列颠哥伦比亚省，加拿大，1990年。[11] W. Myrvold、K. H. Cheung、L. B. Page 和 J. E. Perry。一致最可靠网络并非总是存在。*Networks*，21(4):417–419，1991年。[12] G. Wang。Boesch 猜想的证明。*Networks*，24(5):277–284，1994年。[13] G. Wang 和 L. Zhang。可靠网络设计中所用 max λ-min $m_{\lambda+1}$ 图的结构。*Networks*，30(4):231–242，1997年。