arXiv:2303.00820v1 [math.RA] 1 Mar 2023

关于代数双反射元素的一则说明

Cl´ement de Seguins Pazzis*†

2023年3月3日

摘要

Wonenburger、Djoković、Hoffmann 和 Paige 的一个经典定理 [2, 3, 5] 指出，有限维向量空间的一般线性群中的一个元素是两个对合的乘积，当且仅当它与其逆元相似。当底域 $\mathbb{F}$ 代数闭且特征不为 2 时，我们给出这一结果的一个非常初等的证明。在这种情形下，该结果推广到任意有限维代数上的可逆元群 $\mathbb{F}$。

AMS分类：15A23；16W10

关键词：分解、代数闭域、对合、平方根。

1 域上代数中的双反射元素

群 G 中的元素 g 称为双反射元素，当且仅当 $g = ab$，其中 a 和 b 是 G 的对合，即满足 $a^2 = b^2 = 1_G$ 的元素。在这种情况下，$g^{-1} = ba = bgb^{-1}$，因此 g^{-1} 与 g 共轭；更进一步，它可以通过一个对合与 g 共轭。反过来，如果存在一个对合 $b \in G$ 使得$g^{-1} = bgb^{-1}$，那么 gb 是一个对合，并且 $g = (gb)b$ 是双反射元素。

一般而言，G 中与其逆元共轭的元素并不一定是双反射元素。一个标准例子是特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，其中每个元素都与其逆元共轭，尽管其中唯一的双反射

*凡尔赛圣康坦伊夫林大学，凡尔赛数学实验室，45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex，法国

†电子邮箱：dsp.prof@gmail.com

元素是 $\pm I_2$。另一个有趣的例子是非零四元数群 $\mathbb{H}^*$。两个四元数共轭当且仅当它们具有相同的范数和迹。由此很容易推出， $\mathbb{H}^*$中每个范数为 1 的四元数都与其逆元共轭。然而，群 $\mathbb{H}^*$ 中的唯一对合是 ± 1，因此它们也是唯一的双反射元素。

对经典群中双反射元素的系统研究始于 M.J. Wonenburger 的一篇文章 [5], ，他证明了：在域上的有限维向量空间的一般线性群中，双反射元素正是那些与其逆元相似的元素（他实际上排除了特征 2 的域，这一不必要的限制后来由 Djokovi˘c[2] 以及 Hoffman 和 Paige [3]取消）。所有已知的这一结果的证明都要求深入理解自同态代数中的相似类，并且依赖于弗罗贝尼乌斯标准形。

本注记源于尝试对 Wonenburger 的结果给出一个纯代数证明。更明确地说，设我们有有限维 $\mathbb{F}$-代数 $\mathcal{A}$ （结合的且具有单位元）中的可逆元 x、y，满足 $yxy^{-1} = x^{-1}$。如果可能，我们希望计算出一个元素 $z \in \mathcal{A}^\times$，使得 $zxz^{-1} = x^{-1}$和 $z^2 = 1_{\mathcal{A}}$。然而，四元数的 $\mathbb{R}$-代数这一例子表明，这一般是不可能的。

因此，我们自然将讨论范围限定在代数闭域上，接下来假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域。我们还假设 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2。在这种情况下，证明非常简单。回到元素 x 和 y，注意到对于每个奇数整数 k，都有 $y^k x y^{-k} = x^{-1}$，从而得到 $y^k x = x^{-1} y^k$。因此，对于所有 $z \in y\mathbb{F}[y^2]$，都有 $zx = x^{-1}z$；综上，只需证明 $y\mathbb{F}[y^2]$ 包含一个对合元素。证明出乎意料地简单，并且基于以下经典结果：

引理 1. 设 $\mathcal{A}$是一个定义在特征不为 2 的代数闭域上的有限维代数，且 z 是 $\mathcal{A}$ 的一个可逆元素。那么 z在 $\mathcal{A}$中有一个平方根。

为求完整起见，我们证明这个引理。

证明。这是亨泽尔方法的一个经典应用。元素 z 被某个非零多项式消去，而且我们甚至可以取这样的多项式为 s^n，其中 $s = \prod_{k=1}^{m}(t - a_k) \in \mathbb{F}[t]$ 在 $\mathbb{F}$ 中分裂且具有单根，并且这些根都非零。对于每个 $k \in [\![1, m]\!]$，我们选取 a_k 的一个平方根 b_k，并将 $r \in \mathbb{F}[t]$ 取为满足对所有 $k \in [\![1, m]\!]$都有 $r(a_k) = b_k$ 的任意多项式。注意， s 整除 $r^2 - t$。

现在，假设对于某个 $k \geq 1$，我们找到了一个多项式 r，使得 s^k 整除 $r^2 - t$。将 $r^2 - t = s^k v$ 模 s^{k+1} 写成某个 $v \in \mathbb{F}[t]$。令 $u \in \mathbb{F}[t]$，注意到 $(r + s^k u)^2 - t = s^k v + 2s^k ru$ 模 s^{k+1}。注意到 r 模 s 可逆（因为 t 也是如此），并利用 $\mathbb{F}$ 不具有特征 2 这一假设，我们看到可以调整 u，使得 s 整除 $v + 2ru$。因此，根据归纳法，对于所有 $k \geq 1$，我们都可以找到 $r_k \in \mathbb{F}[t]$，使得 s^k 整除 $r_k^2 - t$。$k = n$ 的情形给出了所声称的结果。 □

在代数 $\mathbb{F}[y^2]$ 中应用此引理，我们得到 $y^{-2} = p(y^2)^2$，其中某个 $p \in \mathbb{F}[t]$，因此 $(yp(y^2))^2 = 1_{\mathcal{A}}$。由此得到所声称的结果，结论如下：

定理 2. 设 $\mathcal{A}$ 是特征不为 2 的代数闭域上的有限维代数。那么，群 $(\mathcal{A}^\times, \times)$ 的双反射元素恰好是与其逆元共轭的元素。

2 代数中平方零元素的和

前述方法也可应用于不同的情形。在 [4]，Wang 和 Wu 研究了可分解为两个平方零自同态之和的有限维复向量空间的自同态。Botha [1] 将他们的结果推广到了任意域。他们的一项关键结果是，每个与其相反元共轭的自同态都能表示为两个平方零自同态之和。我们将此结果推广如下：

定理 3。设 $\mathcal{A}$ 是一个定义在特征不为 2 的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维代数。设 $x \in \mathcal{A}$ 与 $-x$共轭。则 x 是 $\mathcal{A}$中两个平方零元素之和。

证明。从一个满足 $yxy^{-1} = -x$ 的可逆 $y \in \mathcal{A}$ 出发，我们发现，对于每个奇整数 k，都有$y^k x = -xy^k$ 。像之前一样继续推导，可得存在一个对合 $i \in \mathcal{A}$，使得 $ix = -xi$，即 $ixi = -x$。令$p := \frac{1}{2}(1_{\mathcal{A}} + i)$，且 $q := \frac{1}{2}(1_{\mathcal{A}} - i)$，则有 $p+q = 1_{\mathcal{A}}$、$i = p-q$ 和 $pq = qp = 0$。于是，等式 $ixi = -x$ 得出 $x = (pxq + qxp) - (pxp + qxq)$；而$x = 1_{\mathcal{A}} x 1_{\mathcal{A}}$ 得出 $x = (pxq + qxp) + (pxp + qxq)$。取半和可得$x = a + b$，其中 $a := pxq$，$b := qxp$，显然它们的平方均为零。 □

在定理 3 中，对于任意环 R 中的可逆元，逆命题成立。事实上，设 x 是环 R 中的一个可逆元，且 a、b 是

R 的平方零元素，满足 $x = a + b$。那么对于 $y := ab - ba$，我们有$y^2 = (ab)^2 + (ba)^2 = x^4$，因此 y 可逆。此外， $yx = aba - bab = -xy$。即使在代数闭域上的有限维代数中， x 的可逆性也是不可或缺的。事实上，考虑代数 $\mathcal{A} := \mathbb{C}I_3 + \mathrm{NT}_3(\mathbb{C})$，它由所有对角项相等且具有复数项的上三角 3×3 矩阵构成。我们有如下分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

其中 $A^2 = B^2 = 0$。然而， J 在 $\mathcal{A}$中并不与 $-J$ 共轭，因为 $\mathcal{A}$ 中的任意矩阵 M 的共轭矩阵在第一超对角线上的元素必定与 M 相同。

3 带对合的代数中的双反射元素

最后，我们回到关于双反射元素的初始问题，这次是在带有 $\mathbb{F}$-线性对合 $x \mapsto x^\star$的 $\mathbb{F}$-代数 $\mathcal{A}$的背景下。自然会问，当背景设为酉群时，定理 2 会变成什么样?

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : \ x^\star x = 1_{\mathcal{A}}\}.$$

然而，众所周知，在如此一般的情形下结论并不成立。例如，$\mathcal{A}$ 是有限维复向量空间的所有端同态构成的代数 $2n > 0$ ，且该空间配备了辛形式 s，对合相对于该辛形式取标准伴随。在这种情况下，已知辛群 $\mathrm{Sp}(s)$中的每个酉元都与其逆元共轭，但 $\mathrm{Sp}(s)$中存在并非双反射的元素（当 $n = 1$时这一点显而易见，因为此时 $\mathrm{Sp}(s)$中的唯一对合是 $\pm\mathrm{id}$）。以下是我们能够得到的最佳一般性结果:

命题 4. 设 $(\mathcal{A}, x \mapsto x^\star)$ 是一个定义在特征不为 2 的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上、带有线性对合的有限维代数。设 $x \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中与其逆元共轭。则存在 $y \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$，使得 $yxy^{-1} = x^{-1}$ 且 $y^4 = 1_{\mathcal{A}}$。

证明。第一步是注意到， x 在群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 中与其逆元共轭。这是运用极分解技巧的经典部分；为完整起见，我们在此回顾。取满足 $zxz^{-1} = x^{-1}$ 的 $z \in \mathcal{A}^{\times}$ 。取伴随后，我们还得到 $z^{\star}x^{-1}(z^{\star})^{-1} = x$ ，由此推出 $z^{\star}z$ 与 x 交换。取 $\mathbb{F}[z^{\star}z]$ 中 $z^{\star}z$ 的一个平方根 s ，仍有 s 与 x 交换；此时 $z' := zs^{-1}$ 是酉元，且满足$z'x(z')^{-1} = x^{-1}$。

因此，我们可以假设 $z \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$。接下来，需要考虑两种特殊情形。

- 特殊情形 1： $z - z^{-1}$ 可逆。注意到 $(z - z^{-1})^{2}$ 可逆，并且属于 $\mathbb{F}[(z + z^{-1})^{2}]$。根据引理 1，我们可以找到 $p \in \mathbb{F}[t]$，使得 $(z - z^{-1})^{-2} = p((z + z^{-1})^{2})^{2}$。令 $u := i(z - z^{-1})p((z + z^{-1})^{2})$ ，其中 i 是 $\mathbb{F}$ 中满足 $i^{2} = -1$ 的元素。由于 z^{2} 可逆且 $\mathcal{A}$ 是有限维的，我们有 $\mathbb{F}[z^{2}] = \mathbb{F}[z^{2}, z^{-2}]$。因此显然 $u \in z\mathbb{F}[z^{2}]$，从而 $uxu^{-1} = x^{-1}$。最后， u 是斜自伴的，并满足 $u^{2} = -1_{\mathcal{A}}$，于是 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$。
- 特殊情形 2： $z - z^{-1}$ 是幂零的。因此， $z + z^{-1}$ 是可逆的，因为 $(z + z^{-1})^{2} = 4.1_{\mathcal{A}} + (z - z^{-1})^{2}$。这一次，我们找到 $q \in \mathbb{F}[t]$ ，使得 $(z + z^{-1})^{-2} = q((z + z^{-1})^{2})_{2}$，并令 $u := (z + z^{-1})q((z + z^{-1})^{2})$。显然， $u \in z\mathbb{F}[z^{2}]$，由此 $uxu^{-1} = x^{-1}$。最后， u 是自伴的，且满足 $u^{2} = 1_{\mathcal{A}}$，由此 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$。

要得到一般情形，只需对自伴元 $a := (z - z^{-1})^{2}$ 使用 Fitting 分解。这给出一个幂等元 $p \in \mathbb{F}[a]$ ，使得 pap 在 $p\mathcal{A}p$ 中可逆，而 $p'ap'$（其中 $p' := 1_{\mathcal{A}} - p$）在 $p'\mathcal{A}p'$中是幂零的。注意到 p 是自伴的，可知 $p\mathcal{A}p$ 和 $p'\mathcal{A}p'$ 在所考虑的 $\mathcal{A}$ 的对合下保持不变。此外，我们注意到 $(z - z^{-1})^{2}$ 与 x 和 z都可交换，因此 p 与 x 和 z都可交换。由此可推得，pzp在 $p\mathcal{A}p$中将 pxp 共轭为其逆元，而 $p'zp'$ 在 $p'\mathcal{A}p'$中将 $p'xp'$ 共轭为其逆元。

利用前面两个特殊情形，我们得到酉元 $z_{1} \in p\mathcal{A}p$ ，使得 z_{1} 在 $p\mathcal{A}p$ 中将 pxp 共轭为其逆元，并且 $(z_{1})^{2} = -1_{p\mathcal{A}p}$；还得到酉元$z_{2} \in p'\mathcal{A}p'$ ，使得 z_{2} 在 $p'\mathcal{A}p'$ 中将 $p'xp'$ 共轭为其逆元，并且 $(z_{2})^{2} = 1_{p'\mathcal{A}p'}$。因此， $y := z_{1} + z_{2}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是酉元，并且满足代数关系$yxy^{-1} = x^{-1}$ 和 $y^{4} = 1_{\mathcal{A}}$。 □

注意到，根据前面的证明，我们可以得出，每个

$\mathcal{U}(\mathcal{A})$中与其逆元共轭的元素都可以分解为乘积 yz，其中 y、z属于 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$，且 $y^4 = z^4 = 1_{\mathcal{A}}$。

最后请注意，如果代数 $\mathcal{A}$ 等于某个域 $\mathbb{F}$上的有限维向量空间 V 的端同态代数 End(V)，那么 $\mathcal{A}$ 中的每个酉元在 $\mathcal{A}$中都与其伴随共轭，因此也与其逆元共轭。这是斯科伦-诺特定理（关于中心单代数的自同构）的经典推论，并结合了每个端同态都相似于其转置这一事实。

参考文献

[1] J.D. Botha，任意域上两个平方零矩阵之和，Linear Algebra Appl. 436-3 (2012)，516–524。[2] D.ˇZ. Djokovi´c，两个对合的乘积，Arch. Math. (Basel) 18 (1967)，582–584。[3] F. Hoffman，E.C. Paige，一般线性群中两个对合的乘积，Indiana Univ. Math. J. 20 (1971)，1017–1020。[4] J.-H. Wang，P.Y. Wu，平方零算子之和，Studia Math. 99-2 (1991)，115–127。[5] M.J. Wonenburger，两个对合乘积形式的变换，J. Math. Mech. 16 (1966)，327–338。