arXiv:2303.00827v1 [math.CO] 1 Mar 2023

多终端网络中的奇数游走与迹打包

Maxim Akhmedov[1]莫斯科国立大学，数理逻辑与算法系，俄罗斯莫斯科**Maxim Babenko**[2]

俄罗斯莫斯科，国立高等经济学院

摘要

设 G 为一个无向网络，其具有一个特殊的终端集合 终端 $T \subseteq V(G)$ 和边容量 $cap: E(G) \to \mathbb{R}_+$。我们将 奇数 T-游走定义为网络 G 中连接两个不同终端、且由奇数条边组成的游走（允许顶点和边自交）。受 Schrijver 和 Seymour 关于两个终端间奇数路径打包的研究启发，我们考虑满足容量 cap 约束的奇数 T-游走打包。

首先，我们提出一种强多项式时间算法，用于构造奇数 T-游走的最大分数打包。对于偶数整数容量，该算法构造的打包为半整数。此外，如果对任意 $v \in V(G)-T$, $cap(\delta(v))$ 能被 4 整除，则该算法可以构造整数打包。

其次，我们建立并证明了相应的最小最大关系。

第三，如果 G 是内部欧拉的（即 $V(G)$ 中所有节点的度数 $-T$ 均为偶数），并且对于所有 $e \in E$, $cap(e) = 2$，我们证明存在一个奇数 T-迹的整数打包（即边不重复的奇数 T-游走），其值与奇数 T-游走的情形相同；而且可以在多项式时间内找到该打包。

为实现上述目标，我们建立了奇数 T-游走和T-迹的打包与无向图及双向图中的某些多流问题之间的联系。

2012年 ACM 学科分类计算理论 → 网络优化

关键词与短语奇数路径、有符号图与双向图、多流、多项式算法

1 引言

下文中，对于图 G，我们用记号 $V(G)$（分别为 $E(G)$）表示 G 的顶点（分别为边）集合。

考虑一个无向网络 G，其中包含一个特定的终端 $T \subseteq V(G)$集合和边容量 $cap: E(G) \to \mathbb{R}_+$。我们使用**游走** 和**路径**的概念；前者允许任意的边和顶点自交，而后者不允许任何自交。此外，我们还考虑**迹**，它允许顶点自交，但不允许边自交。任何路径都是迹，任何迹都是游走，但反之则不成立。AT**-游走** （分别为 T**-迹** 或 T**-路径**）是连接 T 中两个不同顶点的游走（分别为迹或路径）（注意，其中间顶点也可能位于 T）。

我们所说的满足容量 cap 的 T-游走（分别为 T-迹、 T-路径）的（分数）打包，是指一个带权集合 $\mathrm{P} = \{\alpha_1 \cdot W_1, \ldots\ldots, \alpha_m \cdot W_m\}$，其中 W_i 是 T-游走（分别为 T-迹、 T-路径）， $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ 是权重，并且对于任意 $e \in E$（G），都有 $\sum_i \alpha_i n_i$（e） $\leq cap$（e）；其中， n_i（e） $= 0, 1, \ldots\ldots$表示 e 在 W_i 中的出现次数。如果所有 α_i 都是整数（分别为 $\frac{1}{k}$-整数，即乘以 $\frac{1}{k}$ 后变为整数），则称整个打包为整数（分别为 $\frac{1}{k}$-整数）。P 的值（记作 $\|\mathrm{P}\|$）是 $\sum_i \alpha_i$；具有最大值的打包称为最大打包。

[1] 通讯作者[2] 通讯作者

如果不施加任何其他限制， T-游走、T-迹和 T-路径的最大打包的值相同；这是因为任何游走都可以通过移除其闭合部分而化为路径。对于 $|T| = 2$ 和整数边容量，最大分数打包的值也等于最大整数打包的值（根据最大流整数性定理 [10, Cor. 10.3a]）；而对于 $|T| \geq 3$，最大打包可能是半整数的 [10, Sec. 73.2]。

现在考虑一个困难得多的情形：由打包组成的 T-游走（分别为 T-迹、 T-路径）被要求是**奇数**的，即由奇数条边构成。此时，尝试通过类似的去环方法将游走转换为路径（甚至将游走转换为迹）会失败，因为这可能改变奇偶性。

我们最初的灵感来源于 Schrijver 和 Seymour [11], 的工作，他们为 $T = \{s, t\}$的奇数 T- 路径的最大分数打包值建立了一个极小极大公式。在其对偶一侧，该公式涉及枚举 G 的子图 H （不一定是诱导子图），这些子图包含 s 和 t，但不包含奇数 $s - t$ 路径，并通过某个“容量”对打包的值进行上界约束。就某种意义而言，这样的 H 类似于标准最大流最小割定理 [10, Th. 10.3] 中的$s - t$ 割，并被称为**奇路径屏障**。

上述结果仅针对 $|T| = 2$ 建立，只涉及分数打包，而且还是非构造性的。对于整数容量，最终应当致力于找到一个极小极大公式，以及一种用于构造奇数 T-路径最大整数打包的多项式算法。然而，遗憾的是，这些问题似乎出了名地困难。特别地， [12,第 3 节3] 表明，对于 $|T| = 2$，判断给定图是否包含一对边不相交的奇数 T-迹，已经是 NP难问题。

1.1 我们的结果

本文研究该问题的**多终端** 版本（允许任意数量的终端 T），但研究的是奇数 T-游走和 T-迹的打包，而不是奇数T-路径的打包。

首先，对于奇数 T-游走的打包和实数容量，我们给出一个多项式时间归约（定理 9）：将最大奇数 T-游走打包问题归约为一个特殊商品图族上的最大多流问题，该商品图族由 Karzanov 提出 [6]。对于偶数整数容量，我们的算法生成一个半整数打包。此外，如果容量为偶数整数，且 $cap(\delta(v))$（按照惯例，这是对所有边 e 关联于 v的 $cap(e)$ 之和）对于任意 $v \in V(G) - T$ 都能被 4 整除，则可以构造出一个整数最大打包。

其次，我们给出一个关于最大奇数 T-游走打包的极小极大公式（定理12）。它与 Schrijver 和 Seymour 提出的公式（针对奇数 $s - t$ 路径）惊人地相似；在其对偶一侧，涉及不包含奇数 T-游走的 G 子图。

第三，我们将上述结果扩展到奇数 T-迹打包。考虑单位容量情形。即使假设 $|T| = 2$ 且底层图是**内部欧拉**（即所有非终端顶点的度数均为偶数），整数打包也不满足 Schrijver–Seymour 型极小极大关系。此类“坏”实例的一个例子见[11, 第3]节。（那里给出的例子针对奇数 T-路径，而非奇数 T-迹，但事实证明该例在两种情形下都成立。）

此类打包问题的分数性状态似乎尚无定论。我们通过证明部分解决了这一问题：对于具有单位容量的内欧拉图，无论终端数量多少，总能选取一个半整数的 T-迹最优打包（并且还能在多项式时间内找到）。如果将所有容量都乘以 2，内部欧拉性

条件就变为对所有 $v \in V(G) - T$， $cap(\delta(v))$ 都能被 4 整除；这与第一个结果中的条件等价，而我们的最优打包则变为整数。

我们证明（定理 14），存在一种奇数 T-迹打包，其值与奇数 T-游走的情形相同，而且可以在多项式时间内找到这种打包。换句话说，构成最大整数打包的奇数 T-游走总能重新整理（“解开纠缠”），确保它们都没有边自交。

1.2 我们的方法

处理奇数 T-游走的算法基于将问题归约为某个多流问题 [6]，并结合一些图对称化方法。对于奇数 T-游走打包的极小极大公式，我们说明，最优割集（就上述多流问题而言）如何对应于最小奇数 T-游走障碍。

处理奇数 T-迹的算法还运用了额外的组合思想。粗略地说，该算法构造一个由奇数 T-游走 W_i组成的最大整数打包。如果所有这些 T-游走 W_i 已经是 T-迹（即没有边自交），那么问题就解决了。否则，对于存在边自交的游走 W_i，我们要么对其进行简化 W_i（同时保持其奇偶性），要么在 G 中找到一条**冗余**边；移除该边不会减少当前打包中的T-游走数量。将其删除后，再重复上述过程。冗余边的存在性由一种新颖的刻画加以证明：它将整数奇数 T-游走打包刻画为内部欧拉**双向有向**图 [1] 中的 T-迹打包，并依赖于相应的极小极大定理。

1.3 相关工作

近期也有大量研究致力于单位容量图中的路径打包。（请注意，在这里，整数游走打包与迹打包的概念是一致的。）

虽然即便对于 $T = \{s, t\}$，在一般网络中求解奇数T-迹的最大整数打包问题似乎也难以处理，但关于此类打包最大值的某个下界（将其与奇数 T-迹覆盖联系起来）已为人所知 [5]（另请参见 [4]，其中给出了一个较弱的下界）。

请注意，如果要在整数容量大于 1 的图中打包奇数 T-迹（而非奇数 T-游走），那么这个问题似乎无法直接归约到单位容量情形。事实上，将每条边拆分后，在单位容量情形下求解问题，再尝试返回原图时，会遇到边自交的难题。

这些难题似乎相当根本；尤其是，我们不知道此前有任何关于最大奇数 T-迹整数打包问题的容量版本的研究。我们用于构造奇数 T-迹最大打包的算法，能够通过某种 T-游走“解结”来处理边自交，但这场攻坚并不容易。

另一个相关（但仍有很大不同）的研究领域，关注的是在**群标记**图中对顶点不相交的 A-路径进行整数打包。这里，每条边 $xy \in E$ 都赋予群 Γ 中的一个元素 $g(x, y)$（满足 $g(x, y) = -g(y, x)$）。两端（且互不相同）均位于 $A \subseteq V(G)$ 中的路径 P，若其有向边 P 所对应的所有群元素之和非零，则称为**非零 A-路径**。（这一概念也可推广到非阿贝尔群。）文献 [3] 给出了一种多项式算法，用于构造顶点不相交 A-路径的最大整数打包。另请参阅 [9]，其中对涉及置换群的类似问题进行了研究。

通过适当选择群 Γ 和边标记，非零 A-路径可以表达各种经过深入研究的概念，例如广受赞誉的 Mader 的顶点不相交$\mathcal{S}$-路径的整数打包 [8], [10, 第 73 节1]。

注意，如果对所有边都有 $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ 和 $g(x,\ y) = 1\ xy$，则可以得到构成打包的路径所满足的奇偶约束。后者促使我们希望在上述 Mader 的情形中，将这样的 Γ 作为直接群直和加入，以捕捉奇偶限制。然而，这种方法不会如预期般奏效：此时，一条路径可能是奇数或连接属于不同$\mathcal{S}$-类的终端（而我们确实希望路径的两个端点属于不同$\mathcal{S}$-类且具有奇数长度）。

2 游走、迹、打包及其他记号

考虑一个无向无环图 G，其中可能存在平行边。本文研究 G 中某些类路径对象的族，它们允许的自交类型各不相同。形式化地说：

▶**定义1**。给定 $x, y \in V(G)$，一个 $x-y$游走 是一个序列 $W = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$，其中$e_i \in E$ 满足 $e_i = v_{i-1}v_i$，对于 $v_0 = x$, $v_l = y$ 以及 $v_1, \ldots, v_{l-1} \in V(G)$。

这里 l 称为 W 的长度 。根据长度的奇偶性，游走称为偶数 或奇数 。顶点 x 和 y 称为 W的端点，而 $v_1, \ldots, v_{l-1}$ 称为中间顶点 （对于 W）。

请注意， W 的某些顶点 v_i 可能重合，因此游走可以多次经过同一个顶点，也可以多次经过同一条边。

▶**定义 2.** $x-y$迹（分别地，路径）是指所有边（分别地，顶点）均不重复的 $x-y$游走 W。$x-x$ 游走（分别地，迹）称为闭合的。

▶**定义 3.** 设 $T \subseteq V(G)$ 为一个指定的顶点集，称为终端。 T-游走（分别地， T-迹、 T-路径）是连接两个不同x和$y \in T$的 $x-y$ 游走（分别地， $x-y$ 迹、 $x-y$ 路径）。（注意，除非另有明确说明，此类游走的中间顶点也可以是终端。）

▶**定义 4.** 若对任意 $v \in V(G) - T$， v 在 G 中的度均为偶数，则称图 G 关于 T 是内部欧拉（若上下文中 T明确，也简称内部欧拉）。

▶ 定义 *5.* 给定边容量 cap： $E(G) \to \mathbb{R}_+$，若带权多重集 $P = \{\alpha_1 \cdot W_1, \ldots, \alpha_m \cdot W_m\}$满足：对于任意 $e \in E(G)$，边 e 的负载 $P(e) := \sum_i \alpha_i n_i(e)$不超过 $cap(e)$，则称其为一个（分数）游走打包。其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ 为权重，每个 W_i 都是一条游走； $n_i(e) = 0, 1, \ldots$ 表示 e 在 W_i中的出现次数。

$\|P\| := \sum_i \alpha_i$ 称为 P 的值。若所有 $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$，则称 P 为整数。

若 P、Q 是打包，且 $\alpha \in \mathbb{R}_+$，则 $P + Q$ 表示带权多重集的并，而 $\alpha \cdot P$ 表示将 P 中所有权重乘以 α所得的结果。

当组成打包的游走受到某种限制时，相应的术语也用于描述整个打包。特别地，可以称其为 T-游走（分别为 T-迹、 T-路径）打包 $\mathcal{P}$，表示 $\mathcal{P}$中的游走实际上是 T-游走（分别为 T-迹、 T-路径）。

▶ **定义 6**。由无向图 G、终端集合$T \subseteq V(G)$ 和容量函数 cap： $E(G) \to \mathbb{R}_+$组成的三元组(G, T, cap) 称为网络。

本文中将反复出现的两个值得注意的常值容量函数特例是$\mathbf{1}(e) := 1$ 和$\mathbf{2}(e) := 2$，其中 $e \in E(G)$。

▶ **定义 7.** 考虑网络 $N = (G, T, cap)$ 以及无向图 H，使得 $V(H) = T$ （称为商品图）。网络 N 中关于商品图 H 的多商品流 （或简称多流）是一个 T-游走打包 P，满足：对于 P 中任意T-游走 W，其（不同的）端点在 H 中由一条边连接。

我们还采用以下图论记号：

▶ 定义 8。给定图 G 和 $A \subseteq V(G)$ $v \in V(G)$，$\delta(v)$ 表示与 v 相接的边集，$\delta(A)$ 表示恰有一个端点在 A 中的边集，而 $\gamma(A)$ 表示两个端点都在 A 中的边集；对于函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 和 $Y \subseteq X$，$f(Y)$ 定义为 $\sum_{x \in Y} f(x)$；例如，对于顶点集 A，$f(\delta(A))$ 是所有恰有一个端点在 A 中的边上的 f 总值；给定图 G 中的边容量 $cap: E(G) \to \mathbb{R}_+$ 和 S，$T \subseteq V(G)$ $S \cap T = \varnothing$，一个 $S-T$ 割是满足 $S \subseteq C \subseteq V(G) - T$ 的顶点集 C；割 C 的容量为 $cap(\delta(C))$；$S-T$ 割的最小容量记为 $\lambda(S,T)$；当上下文无法明确图 G 时，会明确指出，例如 δ_G、γ_G 和 λ_G。

3 奇数 T-游走打包算法

设 (G, T, cap) 是一个网络。本节将介绍由 G 构造的辅助网络 $(G, T, \widetilde{cap})$，并利用它给出一个用于求最大奇数 T-游走打包的强多项式时间算法。该网络在后续各节中也发挥着关键作用。

构造图 $\widetilde{G}$ 带有 $V(\widetilde{G}) = V(G) \sqcup V(G)'$，其中 $V(G)'$ 是 $V(G)$ 的不相交副本，即每个顶点 $v \in V(G)$ 都有其自身的副本 $v' \in V(G)'$，且 $E(\widetilde{G}) := \{u'v,\ uv' \mid uv \in E(G)\}$。此外，令 $v'' := v$，其中 $v \in V(G)$。若 x，则 $y \in V(G)$，顶点 x 和 x' 称为彼此对称，同样地，边 xy' 和 $x'y$ 也称为彼此对称。对于顶点集（分别地，边集或游走）X，令 X' 为由与 X 中元素对称的顶点（或边）组成的顶点集（分别地，边集或游走）。令 $T := T \sqcup T'$。最后，为 G 的边定义容量：对任意 $uv \in E(G)$，$\widetilde{cap}(uv') := \widetilde{cap}(u'v) := \frac{1}{2} cap(uv)$。

下面的定理概括了我们在第 1 节中公布的第一个结果。

▶ **定理 9**（奇数 T-游走打包）。给定网络 (G, T, cap)，可以在强多项式时间内构造 (G, T, cap) 中的最大分数奇数 T-游走打包 P。

如果所有容量都是非负偶整数，则所得的 P 为半整数。如果进一步地，对于所有 $v \in V(G) - T$，$cap(\delta(v))$ 均可被 4 整除，则 P 为整数。

证明。 注意到 G 是二分图，因此对于不同的 x，$y \in T$ 中的任意 $x-y'$ 游走 G 都是奇数，并且对应于 $x-y$ 中的奇数 G游走。

构造商品图 H_T 如下：$V(H_T) := T$ 以及 $E(H_T) := \{t_i t'_j \mid i \neq j\}$。注意到 H_T 同构于 $K_{|T|,\ |T|}$ 但没有完美匹配（见图1）。

考虑在 (G, T, cap) 中任意一个值为 p 的分数奇数 T-游走打包 $\mathrm{P} = \{\alpha_1 \cdot W_1, \ldots, \alpha_m \cdot W_m\}$。将 W_k 的端点记为 $t_{k,1}$ 和 $t_{k,2}$；该游走对应于 G 中一对 $\widetilde{G}$ 的 $t_{k,1} - t'_{k,2}$ 游走 W_k 和 $t'_{k,1} - t_{k,2}$ 游走 W'_k，二者互为对称。在 $(G, T, \widetilde{cap})$ 中，打包 $\mathrm{P} := \{\alpha_1 \cdot W_1, \ldots, \alpha_m \cdot W_m\}$ 的值为 p。对于任意 $xy \in E$，(G) 满足 $\mathrm{P}(xy') + \mathrm{P}(x'y) = \mathrm{P}(xy)$，因为 P 中某个游走 W_k 里的每次 xy 出现，都恰好对应 W_k 中 $x'y$ 或 xy' 的一次出现。对打包 $\mathrm{P}' = \{\alpha_1 \cdot W'_1, \ldots, \alpha_m \cdot W'_m\}$ 也有相同性质，它是 P 的对称对应项。

构造 $\mathrm{Q} := \frac{1}{2}(\mathrm{P} + \mathrm{P}')$; Q 的值也为 p。对于任意 $xy \in E(G)$，都有 $\mathrm{P}'(xy') = \mathrm{P}(x'y)$，因此 $\mathrm{Q}(xy') = \frac{1}{2}(\mathrm{P}(xy') + \mathrm{P}'(xy')) = \frac{1}{2}(\mathrm{P}(xy') + \mathrm{P}(x'y)) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(xy) \leq \frac{1}{2} cap(xy) = \widetilde{cap}(xy')$，也就是说，Q 是 $(G, T, \widetilde{cap})$ 上、商品图为 H_T 的（自对称）多流。因此，p 不超过 $(G, T, \widetilde{cap})$ 上、商品图为 H_T 的最大分数多流的值。

反过来，考虑网络 $(G, T, \widetilde{cap})$ 中一个值为 q、商品图为 H_T 的分数多流 $\mathcal{Q}$。通过取

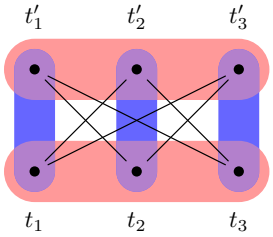


图1 商品图 H_T；反团族 $\mathcal{A}_1$ 为红色，$\mathcal{A}_2$ 为蓝色。

$\mathcal{Q}$ 中所有加权游走的原像及其各自的权重。显然，对于 $xy \in E(G)$，有 $\mathcal{P}(xy) = \mathcal{Q}(xy') + \mathcal{Q}(x'y) \leq \widetilde{cap}(xy') + \widetilde{cap}(x'y) = cap(xy)$。因此，$q$ 不超过网络 (G, T, cap) 中最大分数奇数 T-游走打包的值。

因此，(G, T, cap) 中分数奇数 T-游走打包的最大值，等于以商品图 H_T 为基础的 $(G, T, \widetilde{cap})$ 中最大分数多流的值。为完成证明，我们使用 Karzanov [6] 的以下结果：

▶ **定理10.** 设 (G, T, cap) 是一个商品图为 H 的网络。用 $\mathcal{A}$ 表示 H 中所有包含意义下极大的反团（即独立集）组成的族。假设 $\mathcal{A}$ 可以划分为两个子族 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$，使得每个子族 $\mathcal{A}_i$ 中的所有反团都两两不交。

那么，可以在强多项式时间内找到 (G, T, cap) 中的最大多流。此外，如果 cap 是整数，且对于任意 $v \in V(G) - T$，$cap(\delta(v))$ 是偶数，那么所得多流为整数。

注意，H_T 中的极大反链族满足定理10中的性质。事实上，定义 $\mathcal{A}_1 := \{T, T'\}$ 和 $\mathcal{A}_2 := \{\{t, t'\} \mid t \in T\}$（见图1）。如果某个极大反链包含一个终端及其对称副本，那么它必属于 $\mathcal{A}_2$；否则，它不可能同时包含一个来自 T 的顶点和一个来自 T' 的顶点，因此属于 $\mathcal{A}_1$。此外，如果对于任意 $v \in V(G) - T$，$cap(\delta(v))\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$能被4整除，那么对于任意 $v \in V(G) - T$，$\widetilde{cap}(\delta(v))$ 都是偶数。因此，应用定理10即可完成证明。◀

4 奇数 T-游走障碍

本节将对障碍结构作组合描述，该结构为最大奇数 T-游走打包的值给出了紧上界，这是我们在第 1 节宣布的第二个结果。这一刻画与 Schrijver 和 Seymour 提出的最大奇数 $s-t$ 路径打包的相应障碍结构惊人地相似。利用它与第3节中的多流之间的等价性，可以证明强对偶。

▶ **定义11.** 给定网络 (G, T, cap)，若 B 是 G 的一个（不一定是诱导）子图，且满足 $T \subseteq V(B)$，则称其为奇数 T-游走障碍，如果 B 中不存在奇数 T-游走。

障碍 B 的容量 $cap(B)$ 定义为 $\frac{1}{2}cap(I(B)) + cap(U(B))$，其中，对于 G 的任意（不一定是诱导）子图 H，我们使用以下记号：$I(H) := \{xy \in E(G) \mid xy \in \delta_G(V(H))\}$（直观而言，边离开 H 后不再返回）；$U(H) := \{xy \in E(G) \mid x, y \in V(H)\ xy \in E(G) - E(H)\}$（直观而言，边离开 H 后立即折返）。

很容易验证，任意障碍 B 的容量都是任意奇数 T-游走打包 $\mathcal{P}$ 值的上界。事实上，$\mathcal{P}$ 中任何一个赋予权重 α 的奇数 T-游走 W 都

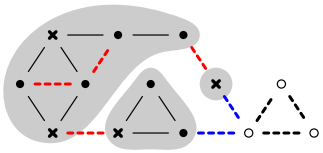


图 2 奇数 T-游走障碍 B 的示例； T 中的顶点用叉号表示， $V(B)$ 中的顶点用黑点表示，不在 $V(B)$ 中的顶点用白点表示； $E(B)$ 中的边用实线表示，不在 $E(B)$ 中的边用虚线表示； $I(B)$ 中的边为蓝色， $U(B)$ 中的边为红色。

不完全包含于 B中；因此，它要么访问某个顶点 $v \in V(G) - V(B)$，要么遍历某条边 $xy \in E(G) - E(B)$，使得 $x, y \in V(B)$。在前一种情况下，它占用 $I(B)$中至少两条边的 α 单位容量；在后一种情况下，它占用 $U(B)$中至少一条边的 α 单位容量。因此 $\|\mathcal{P}\| \le cap(B)$。强对偶性同样成立：

▶ **定理12** （见附录）。 设 (G, T, cap) 是一个网络。若 P 遍历奇数 T-游走打包， B 遍历奇数 T-游走障碍，则 $\max_{\mathcal{P}} \|\mathcal{P}\| = \min_B cap(B)$。

上述极小极大公式使我们能够将定理 9 的结论加强如下。

▶ **推论 13.** 给定网络 (G, T, cap)，设 P 是 (G, T, cap) 中的最大分数奇数 T-游走打包。若所有容量均为非负偶整数，则 $\|\mathcal{P}\|$ 为整数。若进一步地，对所有 $v \in V(G) - T$， $cap(\delta(v))$ 均能被 *4* 整除，则 $\|\mathcal{P}\|$ 为偶整数。

证明。根据定理12， $\|\mathcal{P}\| = \frac{1}{2} cap(I(B)) + cap(U(B))$ 对于最小奇数 T-游走障碍 B 成立。如果所有容量都是偶数整数，那么 $cap(U(B))$ 和 $cap(I(B))$ 也都是偶数，因此该陈述的第一部分是显然的。令 $A := V(G) - V(B)$，注意 $\delta(A) = I(B)$。在第二个条件下，注意以下同余式：

$$0 \equiv \sum_{v \in A} cap(\delta(v)) \equiv 2cap(\gamma(A)) + cap(\delta(A)) \equiv cap(I(B)) \pmod 4$$

因此， $\frac{1}{2} cap(I(B))$ 也是一个偶数整数。 ◀

5 奇数 T-迹打包算法

下文我们将重点讨论网络（G， T， **2**），其中 G 是一个内欧拉图。由于所有容量均为 2，在整数打包中，每条边至多可由两条游走经过。我们的最终目标是构造一个最大整数 T-迹打包。第 1 节中宣布的第三个结果如下：

▶ **定理 14**。 给定网络 $(G, T, \mathbf{2})$，其中 G 是内欧拉图，可以在多项式时间内构造奇数 T-迹的最大整数打包。该打包也是网络 $(G, T, \mathbf{2})$ 中奇数 T-游走的最大分数打包。

我们使用受化学启发的记法：将 G 中的每条边替换为两个 **价**，每个价都可以被一条游走占据。更正式地说：

▶ **定义15.** 对于边 $e \in E(G)$，记 e^1 和 e^2 为 e的两个度；边 e称为 e^1 和 e^2的底层边。定义价图 G^{12} 为一个与 G 具有相同顶点、并将度视为边的图。

接下来，我们不再讨论 $(G, T, \mathbf{2})$ 中的整数奇数 T-游走打包，而是讨论 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中的整数奇数 T-迹打包；实际上，这些打包是 G^{12} 中边互不相交的奇数 T-迹集合。然而，将度替换为其底层边后，G^{12} 中的 T-迹可能对应于 G 中一条非边简单的 T-游走。如下所述：

▶ **定义16**。如果边 $e \in E(G)$ 在 G^{12} 中的 T-迹 W 同时经过两个价 e^1、e^2，则称其为不规则 边；否则称为规则 边。

因此，我们要寻找 G^{12} 中不含不规则边的、边不相交的奇数 T-迹的最大集合。

我们的方法简述如下。在第5.1节中，我们对引导 T-迹并确保其具有适当奇偶性的价进行**符号赋值** 。给定一个合适的符号赋值，通过约化到**双向网络**，我们证明在 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中存在所需值的整数奇数 T-迹打包（可能包含不规则边）。我们还证明合适的符号赋值必然存在。

在第5.2节中，我们构造这样的符号赋值，并通过为每个 $t \in T$ 引入一个**终端疏散** 所称的操作；对于每个 $t \in T$，引入一个辅助终端 t'，使其通过具有特定符号且数量适当的价与 t 相连。这一变换使我们可以假设，打包中的任何迹都不包含以终端为中间顶点的情形。

接下来，第5. 3保证内部顶点的度至多为 3。

最后，在第5.4节中，我们处理不规则边。我们证明，只要某条边 e 的两个度 e^1 和 e^2 都被打包中的某条奇数 T-迹 W 使用，就可以简化 W（同时保持其奇偶性），或者 e 实际上是**冗余**的，也就是说，可以通过去掉 e 来缩减 G。这种缩减保留了 G 所需的性质；因此，可以重新计算打包并重复这一过程。如此迭代，直到没有剩余的不规则边为止。

5.1 符号图

我们还采用**符号图**这一框架，其中的边带有“+”和“–”符号。直观地说，带符号价图引入了一类便于处理的 T-迹，这类迹由交替性要求定义，使得迹的奇偶性由第一个和最后一个度的符号唯一确定。

▶ **定义17**。任意函数 $M: E(G^{12}) \to \{+, -\}$称为符号赋值。图 G^{12}与某个符号赋值 M共同构成一个带符号价图 (G^{12}, M)。若给定终端集合 $T \subseteq V(G)$，则得到一个带符号价网络 $(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$。若 T-迹 W在(G^{12}, M) 中，则称其为交替的，当且仅当沿着 W，各价的符号交替出现。

▶ **定义18**。若对于任意 $v \in V(G) - T$，与 v 关联的正边数等于与 v关联的负边数，则称符号赋值 M 是内部平衡的。

我们将用到**双向图**这一概念，它是有向图的推广，允许三种类型的边：通常的**有向边**（对一个端点为入边，对另一个端点为出边）、**正边** （对两个端点均为入边）以及**负边** （对两个端点均为出边）。双向游走或双向迹的定义与定义1类似，唯一的区别是，对于任意内部顶点v_i，e_i, e_{i+1} 中恰有一个是进入 v_i 的，另一个则是从 v_i离开的。详情参见 [10, 第36]章。

内部欧拉性的概念可如下扩展至双向图：双向图 G 相对于终端集合 T 是**内部欧拉**的，当对于任意 $v \in V(G) - T$，

进入 v 的边数等于离开 v 的边数。与无向情形类似，由双向图 G、终端集合 T 和容量函数 cap 构成的三元组 (G, T, cap) 称为**双向网络**。

我们依赖于两个类似的定理，其中一个归功于 Cherkassky [2] 和 Lovász [7]，另一个归功于 Babenko 和 Karzanov [1, 定理 1。1]:

▶ **定理 19** （内部欧拉无向图中 T-迹打包的极小极大公式 [2][7]）。设 $(G, T, \mathbf{1})$ 为一个内部欧拉网络。则 T-迹的一个最大打包的值等于 $\frac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(\{t\}, T-\{t\})$。这样的打包可以取为整数，并且可在多项式时间内构造。

▶ **定理 20** （内部欧拉双向图中 T-迹打包的极小极大公式 [1]）。设 $(G, T, \mathbf{1})$ 为一个内部欧拉双向网络。则双向 T-迹的一个最大打包的值等于 $\frac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(\{t\}, T-\{t\})$。这样的打包可以取为整数，并且可在多项式时间内构造。

请注意，后一条定理中的最大打包的值不取决于边的实际方向。正如我们之前提到的，符号标记编码了某一类奇数T-游走。下面的定理说明了这为何对我们很重要。

▶ **定理 21**。 设$(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 是一个带有内平衡符号标记M的带符号价网络。设 P 是$(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中奇数 T- 迹的最大打包，S 是 $(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 中交替 T- 迹的最大打包。那么 $\|P\| = \|S\|$。此外，P 和 S 可以取整数值，并且可以在多项式时间内构造。

证明。如下构造一个与带符号价图（G^{12}, M）对应的辅助双向图 $\overleftrightarrow{G^{12}}$：$\overleftrightarrow{G^{12}}$ 中的边对应于 $E(G^{12})$中的价；如果价的符号为“+”，则该边为正，否则为负；M为内部平衡意味着 $\overleftrightarrow{G^{12}}$ 为内部欧拉，因此定理 20 适用于（$\overleftrightarrow{G^{12}}, T, \mathbf{1}$）。还请注意，$\overleftrightarrow{G^{12}}$ 中的双向 T-迹对应于（G^{12}, M）中的交替 T-迹。示例见图 3a 和 3b。

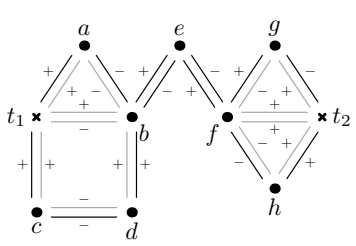
注意，由于 V（G^{12}）中的每个顶点都与偶数个价相邻，因此 G^{12} 自动是内部欧拉的，故定理 19 适用于（G^{12}，T，$\mathbf{1}$）。

因此，（G^{12}，T，$\mathbf{1}$）中奇数 T-迹的最大打包 $\mathcal{P}$ 与（$\overleftrightarrow{G^{12}}$，$T$，$\mathbf{1}$）中双向 T-迹的最大打包 $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ 具有相同的值 $\frac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(\{t\}, T-\{t\})$。后一个打包可以选为整数打包，并可在多项式时间内构造出来，然后将其转换为带符号价网络（G^{12}，M，T，$\mathbf{1}$）中交替 T-迹的最大整数打包 $\mathcal{S}$。◀

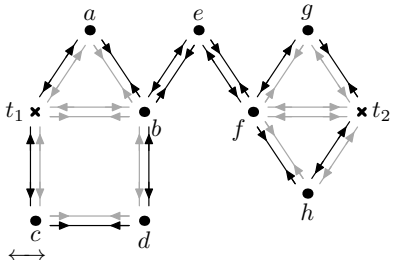
▶ **定义 22**。 带有内部平衡符号赋值 M 的带符号价网络（G^{12}，M，T，$\mathbf{1}$）称为（p，q）-紧的，如果：*1*）在（G^{12}，T，$\mathbf{1}$）中存在一个值为 $p+q$ 的整数 T-迹打包；*2*）与终端 T 相邻的“−”价的数量为 q。

▶ **引理 23.** 给定一个带符号价网络 $(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$，其具有一个$(p, q)$-紧内部平衡符号标记 M，则在$(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 中存在一个值为 $p+q$ 的整数打包 $P+Q$，其中 P 至少由 p 条奇数交替 T-迹组成，而 Q 至多由 q 条偶数交替T-迹组成。此外，可选择 $P+Q$ 中的 T-迹，使其不经过终端T 作为中间顶点。

证明。 第一个紧性性质意味着存在一个整数 T迹打包于 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$，其值为 $p+q$。然后，根据定理 21，我们得到一个 $p+q$ 交替 T迹打包于



(a) 在 $(G^{12},\ M,\ T,\ \mathbf{1})$ 中打包两条 t_1-t_2 迹，其中一条为偶数，另一条为奇数。



(b) 在 $(\overleftrightarrow{G^{12}},\ T,\ \mathbf{1})$ 中打包两条双向 $t_1\ -\ t_2$ 迹，其中一条为偶数，另一条为奇数。

图3 带内平衡符号赋值的带符号价图 $(G^{12},\ M,\ T,\ \mathbf{1})$ 与内部欧拉双向有向图 $(\overleftrightarrow{G^{12}},\ T,\ \mathbf{1})$ 之间的对应关系。终端用叉号表示，其他顶点用黑点表示。

$(G^{12},\ M,\ T,\ \mathbf{1})$。将此打包分成两部分 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，其中 $\mathcal{P}$ 由奇数 T迹组成 s 且$\mathcal{Q}$ 由偶数 T-迹组成。

第二个紧性性质蕴含 $\|\mathcal{Q}\| \le q$，因为$\mathcal{Q}$ 中的每条迹都有一个 - 度关联 t 通向某个终端，因此按需为 $\|\mathcal{P}\| \ge p$。

不失一般性，所有这些 T-迹均不含作为中间顶点的终端（否则，若某条交替 T-迹 W 访问 $t \in T$ 作为其中间顶点，则 W 可在 t处分割为两条子迹 W_1, W_2；在 W_1, W_2 中至少有一条，例如 W_1，是有效的交替T-迹；以 W_1 替换 W 并重复此过程）。◀

5.2 初始符号赋值和终端疏散

本节我们给出一种构造紧内部平衡符号标记 M 的算法。~ ~这借助第3节中的网络 $(G, T, \widetilde{cap})$ 完成。注意，由于 $cap = \mathbf{2}$,~，我们有 $\widetilde{cap} = \mathbf{1}$。 G 中顶点的度数与其在 G中的原像的度数一致，~因此 G 也是内部欧拉的。

~ ~考虑 $(G, T, \mathbf{1})$ 中以 H_T为商品图的一个最大多流 $\mathcal{F}$。定理10~保证可以选择整数的 $\mathcal{F}$，即 $\mathcal{F}$ 是 G 中一组边不相交的 T- 迹（其~权重为 1），连接形如 $t_1 - t_2'$ 的顶点对，其中 $t_1, t_2 \in T$彼此不同。这些 T-迹中的每一条都是奇数，因此其原像在 G^{12} 中是奇数 T-迹（见图4）。将这些奇数 T-迹在 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中的打包（权重取为 1）记为 $\mathcal{P}$。令$p := \|\mathcal{P}\|$。定理 9 的证明表明：

▶ **推论24**。 P 是 $(G^{12}, T,\ \mathbf{1})$ 中的一个最大奇数 T-迹打包。

~ ~考虑由 G 中未出现在 T-迹里的边组成的子图 Z。由于~ ~ ~ ~ 任意顶点 $v \in V(G) - T$在 G中具有偶数度， Z 相对于~ ~终端 T也属于内部欧拉图。因此， Z 可分解为两个边不相交的迹族：一个由~闭迹组成的集合，以及一个由 T-迹组成的集合。

前者对应于 G^{12} 中的偶数闭合迹（由于 $\widetilde{G}$的二部性）；将这些偶数闭合迹在 $(G^{12},\ T,\ \mathbf{1})$ 中的打包（权重均为单位权重）记为$\mathcal{E}$。

后者还可进一步分为两类：**(i)** 对于不同的 $t_1, t_2 \in T$， $t_1 - t_2$ 或 $t_1' - t_2'$ 迹；以及 **(ii)** 对于 $t \in T$， $t - t'$ 迹。（注意，由于 $\mathcal{F}$ 的极大性，不可能出现对于 $t_1 \ne t_2$ 的 $t_1 - t_2'$ 迹。）第一类对应于 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中的偶数 T-迹。第二类对应于 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中经过终端的奇数闭合迹。将 $(G^{12}, T, \mathbf{1})$ 中与这两类分别对应的打包（权重均为单位权重）记为 $\mathcal{Q}$ 和$\mathcal{R}$，并令 $q := \|\mathcal{Q}\|$ 及 $r := \|\mathcal{R}\|$。

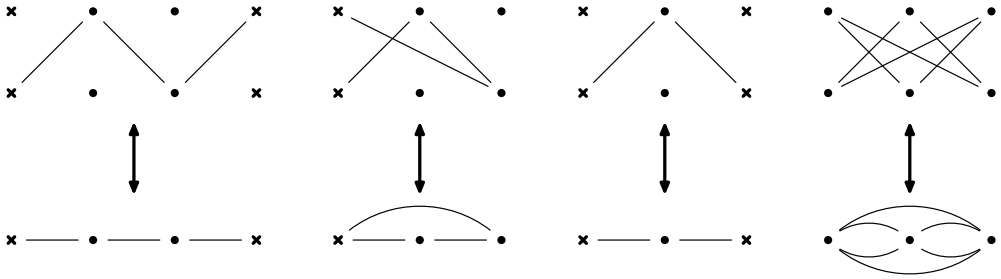


图4 $\widetilde{G}$ 的四种可能的类轨迹分量及其在 G^{12} 中的像：一条奇数 T-迹、一条经过终端的奇数闭合迹、一条偶数 T-迹和一条偶数闭合迹。终端用叉号表示，其他顶点用黑点表示。

注意，$\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}+\mathcal{E}$是 $(G^{12},T,\mathbf{1})$ 中（可能闭合的）迹的整数打包，并且恰好遍历每条边 G^{12} 一次。

从现在起，我们不再考虑图 G，并释放符号 $(\cdot)'$，不再用它表示 G 中的对称性含义。

按如下方式进行**终端疏散**。对于每个终端 $t\in T$，引入一个新终端 t'，并用若干条边将其与 t 相连。具体而言，在 G^{12} 中为 $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ 中的每条迹（t_1 与 t_2 可以重合）添加新的 $t_1'-t_1$ 和 t_2-t_2' 价，从而得到新的价图 G'^{12} 以及新的整数打包 $\mathcal{P}'$，$\mathcal{Q}'$，$\mathcal{R}'$，它们位于 $(G'^{12},\ T',\ \mathbf{1})$ 中。

注意，原来每个终端 $t\in T$ 在 G^{12}中都有偶数条相邻边，因此它在 $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ 中作为偶数条迹的端点（将 $\mathcal{R}$ 的端点计数两次）。因此，对于任意 $t\in T$，所添加的 $t'-t$ 价数目为偶数，故底层图 G' 是良定义的，并且可通过添加 $t'-t$ 价数目的一半来构造。注意，G'^{12} 中的奇数（分别地，偶数）T'-迹对应于 G^{12}中的奇数（分别地，偶数）T-迹。

现在如下为 G'^{12} 构造符号赋值 M'：将 $\mathcal{P}'$ 和 $\mathcal{R}'$ 中的迹变为以 + 价开始和结束的奇数交替迹；将 $\mathcal{Q}'$ 中的迹变为偶数交替迹（两种可能方式中的任一种）；将 $\mathcal{E}$ 中的每条（闭合）迹变为交替迹（两种可能方式中的任一种）。显然，这样的 M'关于 T'是内部平衡的。此外，M'是（p,q）-紧的。事实上，$\mathcal{P}'+\mathcal{Q}'$是一个值为 $p+q$的 T'-迹打包。最后，与终端 T'相邻的“–”价对应于 $\mathcal{Q}'$中的 T'-迹，因此恰有 q 个。由此我们证明了以下定理。

▶ **定理 25**。给定一个内部欧拉的网络 $(G,T,\mathbf{2})$ G，若在 $(G,T,\mathbf{2})$ 中，奇数 T-游走打包的最大值为 p，则可以在多项式时间内构造一个带符号价网络 $(G'^{12},M',T',\mathbf{1})$，其内平衡符号赋值为 M'，使得：

- M'对于某个 q，是(p,q)-紧的；在多项式时间内，$(G',T',\mathbf{2})$ 中的任意奇数 T'-迹打包
- P'均可转化为$(G,T,\mathbf{2})$ 中的奇数T-迹打包 P，且二者的值相同。

5.3 次三次化

本节将证明，只需针对非终端顶点的度不超过 3 的图求解该问题，这将简化后续的分类讨论。

▶ **定义 26.** 价网络（$G^{12},T,\mathbf{1}$）称为内部次三次，如果度 $v\le 3$ 对于任意$v\in V(G)-T$。

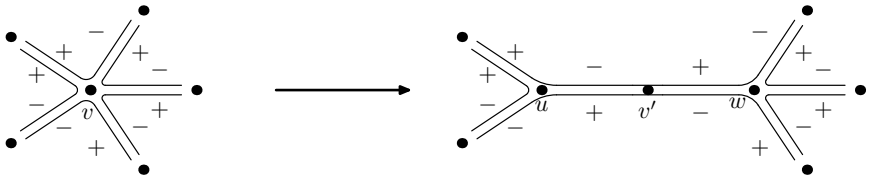


图 5 次三次化于 v

将 G 的**超三次性**定义为

$$s(G) := \sum_{v \in V(G)-T} \max\{0, \deg v - 3\}.$$

显然，对于内部次三次网络， $s(G) = 0$ 。

设 $(G^{12}, M, T, 1)$ 是一个带符号价网络，其符号赋值 M 是 (p, q)-紧内部平衡符号标记。应用引理 23 构造整数打包 $\mathcal{P}$ $+\mathcal{Q}$，其中 $\mathcal{P}$ （分别地， $\mathcal{Q}$）包含至少 p 条（分别地，至多 q 条）奇数（分别地，偶数）交替 T-迹。

考虑一个度为 $d \geq 4$ 的内部顶点 v 。将 v 在 G 中的关联边记为$\delta_G(v) = \{e_1, \ldots, e_d\}$。每当某条迹 W 属于 $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ 并经过 v 时，它会包含一对对应于某些边的连续价$\{e_i, e_j\}$ ，这些边属于 $E(G)$ ；称 (e_i, e_j) 对于 $i \leq j$ 是一个（有序）**穿越对**。（注意， e_i 和 e_j 的此顺序与迹 W 经过这些边的顺序无关。）显然，每当一条交替迹经过一个穿越对时，它取用的是符号相反的价。

与 $\delta_G(v)$ 中未被任何 W_i 经过的边相对应的价，也可以（任意地）按相反符号两两分组（由于符号平衡）。固定一种分组；通过将 G 中的原像替换为这些价，它为 $i \leq j$ 生成更多的穿越对（e_i， e_j），我们也将这些视为穿越对。总共恰好得到 d 个穿越对。

▶ **引理27**。 可以将关联边的集合 $\delta_G(v)$ 划分为两个子集 $L \sqcup R$，使得 $|L|$、$|R| \geq 2$，并且至多存在两个穿越对 $(e_i$、 $e_j)$ （称为分裂穿越对），使得 e_i、e_j 属于不同的子集，即 $e_i \in L$、$e_j \in R$ 或 $e_i \in R$、 $e_j \in L$。

证明。 假设存在一个穿越对 $(e_i$、 $e_j)$ 对应于 $i < j$。定义 $L := \{e_i$、 $e_j\}$ 以及$R := \delta_G(v) - L$。每个分裂穿越对都必须使用 e_i 或 e_j的另一个价，因此此类对至多有两个。

另一方面，如果所有穿越对都形如（e_i， e_i），那么任意一个满足$L \sqcup R$ 且 $|L|$, $|R| \geq 2$ 的划分都可以。◀

通过将顶点 v替换为三个顶点 u、 v'、 w 和两条边 uv'、 $v'w$，并在从 L 出发的所有边中将 v 替换为 u ，再在从 R出发的所有边中将 v 替换为 w ，构造一个新的价网络（G', M'， $T' = T$，1）（图5）。分裂穿越对的数量为0或2；如果有两个，就通过插入 uv' 和 $v'w$ 的价并赋予适当的符号来延长这些迹，使符号赋值 M' 达到内部平衡。如果没有穿越对，只需使 uv' 和 $v'w$ 各自具有一个正价和一个负价。因此，我们也在（G'^{12}， M'， T，1）中得到一个新的打包$\mathrm{P}' + \mathrm{Q}'$，其中$\mathrm{P}'$（分别是$\mathrm{Q}'$）至少包含 p 条（分别至多包含 q条）不经过终端作为中间顶点的奇数（分别为偶数）交替 T-迹。

▶ **引理 28**。 $s(G') = s(G) - 1$ 对于所得的 G'。

证明。 首先，度数 $v' = 2 < 3$，因此在计算超三次性的变化时无需考虑 v' 。然后，度数 $u = 1 + |L| \geq 3$ 以及度数 $w = 1 + |R| \geq 3$；此外

度数 u + 度数 $w = 2 + |L| + |R| = d + 2$，最后度数 $v = d$。我们得出：

$$s(G') - s(G) = \max\{0, \deg u - 3\} + \max\{0, \deg w - 3\} - \max\{0, \deg v - 3\} =$$
$$(\deg u - 3) + (\deg w - 3) - (\deg v - 3) = (\deg u + \deg w) - \deg v - 3 = (d+2) - d - 3 = -1\,.$$

◀

重复这些变换，直到不再有度大于 3 的内部顶点。我们得到一个带有内平衡符号标记 M' 的内部次三次符号赋值网络 $(G'^{12},\ M',\ T\prime = T,\ \mathbf{1})$。注意，在 $(G'^{12},\ T\prime,\ \mathbf{1})$ 中的任意 $T\prime$-迹 $W\prime$ 都可以轻易转化为 $(G^{12},\ T,\ \mathbf{1})$ 中的一个 T-迹 W，且奇偶性相同：只需按相反顺序执行所有操作，并移除所添加的 W' 部分（如果有）。

▶ **引理 29**。 所得的符号赋值 M' 是 (p, q)-紧的。

证明。 与终端相邻的"–"价的总数在次三次化过程中保持不变。此外，打包 $\mathcal{P}' + \mathcal{Q}'$ 的值与 $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ 相同，即 $p + q$。 ◀

因此，我们证明了以下定理。

▶ **定理 30**。 如果 $(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 是一个带符号价网络，并具有一个 (p, q)-紧的内平衡符号标记 M，则可以构造一个带符号价网络 $(G'^{12}, M', T\prime = T, \mathbf{1})$，并具有一个$(p, q)$-紧的内平衡符号标记 M'，使得：

- G' 是内部次三次的；在 $(G', T', \mathbf{2})$ 中，任意由奇数 $T\prime$-迹组成的打包 P'，都可以在多项式时间内转化为 $(G, T, \mathbf{2})$ 中由奇数T-迹组成的、值相同的打包 P。

5.4 正规化

设 $(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 是一个内部次三次带符号价网络，并具有一个 (p, q)-紧的内平衡符号标记 M。使用引理 23，构造一个整数打包 $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$，其中至少包含 p 条奇数交替T-迹（记为 $\mathcal{P}$），且至多包含 q条偶数交替 T-迹（记为 $\mathcal{Q}$）。

假设在 $E(G)$ 中存在一条边 xy，它对于 $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ 中某条 T-迹 W 而言是不规则的，即 W 穿越了 xy 在 G^{12} 中的两个价。将 W 中位于 xy 的两个价的出现次数之间（但不包括它们）的片段记为 C。

注意， xy 不与任何终端相邻，因为假定 $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ 中所有 T-迹都避免将终端作为中间顶点经过。考虑以下情况：

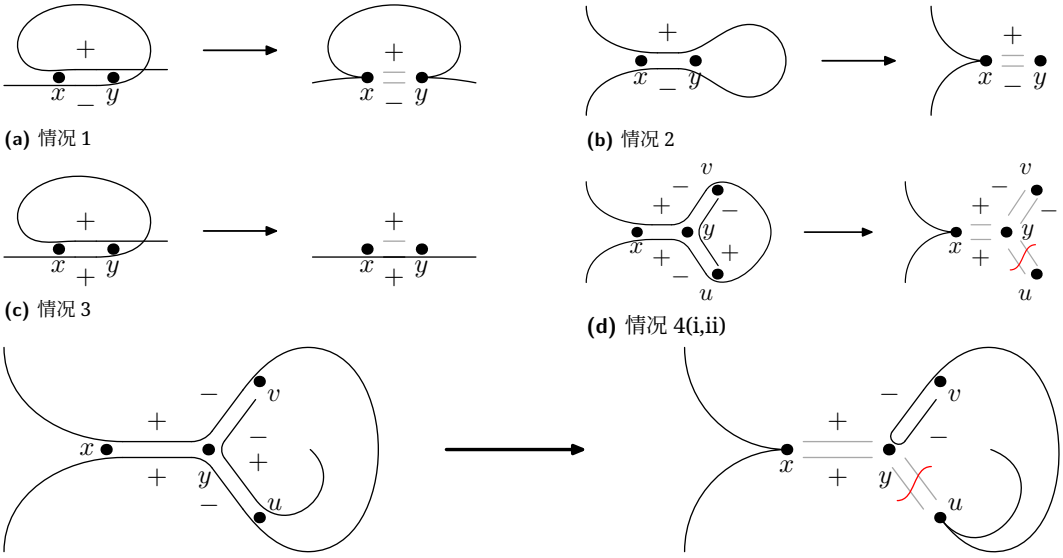
情况 1（图6a）： xy 的价具有相反符号，且 W 沿相同方向穿越它们。通过删除这两个价的出现次数来简化 W。

情况 2（图6b）： xy 的价具有相反符号，且 W 沿相反方向穿越它们。通过删除这两个价的出现次数以及 C 来简化 W。

情况 3（图6c）： xy 的价具有相同符号，且 W 沿相同方向穿越它们。通过删除这些价其中一次的出现次数以及 C 来简化 W。

情况4（图6d和图6e）： xy 的价符号相同，而 W 沿相反方向经过它们。假设选择 xy，使得 C 尽可能短。不失一般性，假设y 属于 C。最后，假设 xy 的两个价均为 +；其余情况可类似处理。

▶ **引理31**。 在情形*4*中，度 $y = 3$ 和 C 以某条边 yu的负价开始，并以某条边 vy 的负价结束，其中 $u \neq v$。



(a) 情况 1 **(b)** 情况 2 **(c)** 情况 3 **(d)** 情况 4(i,ii) **(e)** 情况 4(iii,iv)

图 6 正则化情形。

证明。 如果 度 $y = 1$，则 y 的内部欧拉性受到矛盾，因为它的两条相邻边的价均为正。

如果 $\deg y = 2$，则剩余相邻边的两个价均为负，而 W 必须跟随在它们之后才能构成交替。这与选择具有最短 C的 xy 相矛盾。

最后，$\deg y = 3$ 和 C 分别以 yu 的某个价和 vy的某个价开始和结束，而这两个价均为负。如果 $u = v$，这将再次与选择具有最短 C的 xy 相矛盾。◀

考虑 yu 和 yv的两个剩余价。为了使 y处的符号赋值保持平衡，其中一个必须为 +，另一个必须为 -。因此，yu 和 yv 中的一个同时具有 + 价和 -价；假设它是 yu，另一种情况类似可证。称 yu **冗余**，并通过移除 G'中的 yu，得到一个新的带符号价网络（G'^{12}，M'，$T\prime = T$，$\mathbf{1}$）。

▶ **引理 32。** 新的符号赋值 M' 是内部平衡的，并且是(p, q)-紧的。

证明。 符号赋值 M' 是内部平衡的，因为我们删除了同一条边的两个具有相反符号的价。此外，被删除的边不与终端相邻，因此与终端相邻的“-”价的总数保持不变。

我们来证明，值至少为 $p + q$ 的 T-迹打包仍然存在。具体而言，我们修改$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$，使得其中没有 T-迹经过被删除的边 yu的价。

不失一般性，设 e^1 是 $e = yu$ 的一个价，且它是 C的起始价或终止价。通过删除 xy 和 C的两个价来修改 W，得到一条避开 e^1的（非交替的）子迹 W'。注意，剩余的价 e^2 可能：(i) 不属于$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$中的任何迹；(ii) 属于 C；(iii) 属于同一条迹 W 但位于 C之外；(iv) 属于$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$中的另一条迹。

在子情形 (i,ii)（图 6d）中，e^2 不再被$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$中的任何迹使用；将 W 替换为W'。在子情形 (iii,iv)（图 6e ）中，考虑包含 e^2 的迹，并将其中的 e^2 替换为 C 的 $y - u$ 片段，该片段不同于 e^1（注意，C 不再被 W' 使用）。◀

重复该过程，直到不再存在不规则边。在情形 1–3 中，带符号价图不发生变化，但打包中奇数 T-迹的总长度会减少。因此，可以重复此步骤，直到不再有不规则边，或情形 4 发生并获得新的符号图（G'^{12}，M'）。换言之，（$|E(G)|$，L）中的L（即$\mathcal{P}$中 T-迹的总长度）在每种情形下都按字典序递减。因此，迭代总次数为多项式级别。我们用以下定理总结本节的结果。

▶ **定理 33**。若$(G^{12}, M, T, \mathbf{1})$ 是一个具有(p, q)-紧内部平衡符号标记 M的内子三次符号赋值网络，则可以在多项式时间内构造出$(G, T, \mathbf{2})$ 中一个值至少为 p 的奇数T-迹的整数打包。

5.5 完成证明

定理 14 的证明。设 $(G, T, 2)$ 是一个内欧拉网络，令 p为其中最大奇数 T-游走打包的值。应用定理 25，构造一个带符号价网络 $(G'^{12}, M', T', 1)$，其具有一个 (p, q)-紧内部平衡符号标记 M'（对某个 q而言）。根据定理 30，后一个网络可被替换为一个子三次符号赋值网络 $(G''^{12}, M'', T'', 1)$，其具有一个 (p, q)-紧内部平衡符号标记 M''。现在，定理 33 蕴含在 $(G'', T'', 2)$ 中存在一个值为 p 的奇数 T''- 迹打包 P''。

最后，反向应用于网络的变换：$\mathcal{P}''$ 产生了一个由奇数 T'-迹组成的打包 $\mathcal{P}'$，其值为 p，位于 $(G', T', 2)$ 中（根据定理 30）；反过来，$\mathcal{P}'$ 生成了一个由奇数 T-迹组成的打包 $\mathcal{P}$，其值为 p，位于 $(G, T, 2)$ 中（根据定理 25），正如所需。

注意，以上所有步骤都可以在多项式时间内完成。 ◀

16 多终端网络中的奇数游走与迹打包

参考文献

1 Maxim A. Babenko 和 Alexander V. Karzanov。双向图和斜对称图中的自由多流。《离散应用数学》，155(13)：1715–1730，2007年。 2 B. V. Cherkassky。网络中多商品流问题的一个解。《经济学与数学方法》，13(1)：143–151，1977年。 3 M. Chudnovsky、J. Geelen 和 W. Cunningham。群标记图中非零 A-路径的打包算法。《组合论》，28(2)：145–161，2008年。 4 Ross Churchley、Bojan Mohar 和 Hehui Wu。边不相交奇数 (u, v)-迹打包的弱对偶。载于 Robert Krauthgamer（编），《第二十七届 ACM-SIAM 离散算法年会》论文集，SODA 2016，美国弗吉尼亚州阿灵顿，2016年1月10日至12日，第2086–2094页。工业与应用数学学会，2016年。 5 Sharat Ibrahimpur 和 Chaitanya Swamy。奇数 (u, v)-迹打包与覆盖的极大极小定理。载于 Friedrich Eisenbrand 和 Jochen Könemann（编），《整数规划与组合优化——第19届国际会议》，IPCO 2017，加拿大安大略省滑铁卢，2017年6月26日至28日，论文集，《计算机科学讲义》第10328卷，第279–291页。施普林格，2017年。 6 Alexander Karzanov。关于一类具有整数最优解的最大多商品流问题。《美国数学会译丛》，第2辑，158：81–99，1994年02月。 doi:10.1090/trans2/158/09。 7 L. Lovász。关于欧拉图的某些连通性。《匈牙利科学院数学学报》，28：129–138，1976年。 8 W. Mader。关于边不相交 H-路的最大数量。《数学档案》（巴塞尔），31：382–402，1978年。 9 G. Pap。非返回 A-路径的算法化打包。《离散数学》，308(8)：1472–1488，2008年。 10 Alexander Schrijver。《组合优化：多面体与效率》，第24卷。施普林格科学与商业媒体，2003年。 11 Alexander Schrijver 和 Paul D. Seymour。奇数路径的打包。《组合理论杂志》，B辑，62(2)：280–288，1994年。 12 Yutaro Yamaguchi。《群标记图上的组合优化》。博士论文，数学信息学系、信息科学与技术研究生院、东京大学，日本，2016年。

定理12的一个证明

我们将使用 Karzanov 提出的以下多流最小最大关系，其商品图约束与定理10中的相同；参见 [6]:

▶ 定理*34.* 设 (G, T, cap) 是一个网络，H 是一个满足定理*10*条件的商品图。考虑将 T 划分为互不相交的非空集合 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 的划分 $\mathcal{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$；若每个 X_i 都是 H 的独立集，则称 $\mathcal{X}$ 为适当划分。定义 $\mathcal{X}$ 的容量为 $cap(\mathcal{X}) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \lambda(X_i, T - X_i)$；并令 $Y_i (X_i \subseteq Y_i \subseteq V(G) - (T - X_i))$ 表示 G 中 X_i 与 $T - X_i$ 之间相应的最小割。

令 $\mathcal{F}$ 遍历网络 (G, T, cap) 中所有多流，其中商品图为 H；令 $\mathcal{X}$ 遍历 T 的所有真划分；则

$$\max_{\mathcal{F}} \|\mathcal{F}\| = \min_{\mathcal{X}} cap(\mathcal{X}).$$

此外，最小的 $\mathcal{X}$ 可选取得满足 Y_i 两两不交。

我们将奇数 T-游走障碍的容量改写如下。

▶**定义35**。设 H 是 G 的一个子图（不一定是诱导子图）。定义函数 $S[H] \colon E(G) \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$，称为 H 的切片，定义为 $S[H](e) := 1$ 当 $e \in U(H)$ 时，$S[H](e) := \frac{1}{2}$ 当 $e \in I(H)$ 时；否则为 0 。

早先的文献 [11] 中曾出现过类似的切片概念（相差因子 2）。现在考虑奇数 T-游走障碍 $cap(B) = cap \cdot S[B]$，其中 $\cdot$ 表示标量积。

▶**引理36**。设 H 是 G 的一个子图（不一定是诱导子图），且 $\mathcal{C}$ 是 H 的连通分量族。则 $S[H] = \sum_{C \in \mathcal{C}} S[C]$（视为定义在 $E(G)$ 上的函数）。

证明。如果 $S[H](xy) = 1$，那么 x 和 y 要么属于同一个连通分量 C_1，此时对于任意其他 $C_2 \in \mathcal{C}$，$C_2 \neq C_1$，$S[C_1](xy) = 1$ 且 $S[C_2](xy) = 0$；要么属于两个不同的连通分量 C_1、$C_2 \in \mathcal{C}$，此时对于任意其他 $C_3 \in \mathcal{C}$，$C_3 \neq C_1$、C_2，$S[C_1](xy) + S[C_2](xy) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 且 $S[C_3](xy) = 0$。

如果 $S[H](xy) = \frac{1}{2}$，令 C_1 为包含 xy 的一个端点的连通分量；在此情况下，对于 $C_2 \in \mathcal{C}$，$C_2 \neq C_1$，$S[C_1](xy) = \frac{1}{2}$ 且 $S[C_2](xy) = 0$。
否则，对于任意 $C_1 \in \mathcal{C}$，$S[H](xy) = 0$ 和 $S[C_1](xy) = 0$。 ◀

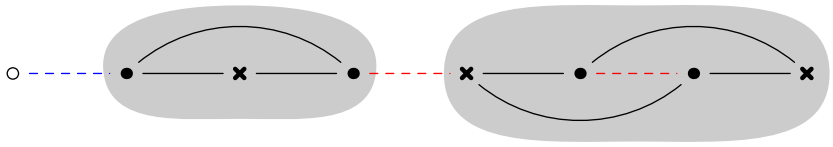
▶ **引理 37.** 令 $\mathcal{X}$ 遍历 T 的适当划分，且固定 B 为奇数 T-游走障碍，则

$$\min_{\mathcal{X}} cap(\mathcal{X}) \leq cap(B).$$

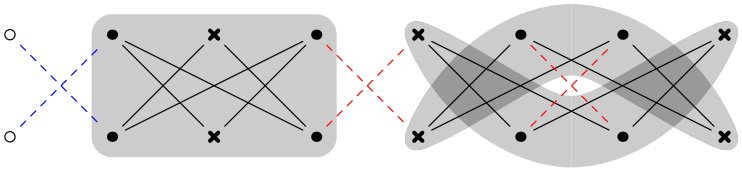
证明。考虑某个障碍 B，并令 $\mathcal{C}$ 表示 B 的连通分量族。我们构造 T 的一个适当划分 $\mathcal{X}$，以及一个相应的割集族，用于分离 X 和 $T - X$（对任意 $X \in \mathcal{X}$）。此外，这些割的容量由 $\sum_{C \in \mathcal{C}} cap \cdot S[C]$ 中相应的项所界定。

若某个分量 $C \in \mathcal{C}$ 不含来自 T 的终端，则称其为**冗余**；若只含一个终端，则称其为**奇异**。否则，C 必须是二分的（视为一个图），且所有终端都必须属于二分划分的同一部分，因此该分量内不存在奇数 T-游走。按如下方式构造一个适当划分。

若 C 是奇异的，且仅包含终端 $t \in T$，则用其对称顶点 t' 将 t 与集合 $X := \{t, t'\}$ 围起来；该集合是 H_T 中的一个极大反链。注意，$Y := C \cup C'$ 是一个割



（a） (G,T,c) 中的奇数 T-游走障碍 B：左侧连通分量是奇异的；右侧连通分量是非奇异的；蓝色边和红色边分别是 $I(B)$ 和 $U(B)$。



(b) 真划分 $\mathcal{X}$ 在 $(\widetilde{G},\widetilde{T},\widetilde{c})$ 中：左侧集合是奇异的；两个右侧集合均为非奇异且对称；蓝色边和红色边分别以权重 $\frac{1}{2}$ 和 1 计入 $cap(\mathcal{X})$。

图 7 奇数 T-游走障碍 B 及其对应的真划分 $\mathcal{X}$。

~ ~位于 X 与 $T-X$ 之间； $\delta(Y)$ 在 G 中的边对应于 $I(C)$ 在 G 中的边。因此

$$\frac{1}{2}\widetilde{cap}(\delta(Y)) = \frac{1}{2}\sum_{xy\in\delta(Y)}\widetilde{cap}(xy) = \frac{1}{2}\sum_{xy\in I(C)}(\widetilde{cap}(xy')+\widetilde{cap}(x'y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{xy\in I(C)} cap(xy) = \frac{1}{2}cap(I(C)) \le cap\cdot S[C]. \quad (1)$$

若 C 是包含多个终端 $t_1,\dots,t_k$ 的二分网络，则引入集合 $X:=\{t_1,\dots,t_k\}$ 和 $X':=\{t'_1,\dots,t'_k\}$，它们分别是 H_T 中极大反链 T 和 T' 的子集。设 L 和 R 为 C 的二分部分，使得 $t_1,\dots,t_k\in L$。注意， $Y:=L\sqcup R'$~ 是 X 与 $T-X$ 之间的一条割；对称地，$Y'=L'\sqcup R$ 是 X' 与 $T-X'$ 之间的一条割。

~在 G 中， $\delta(Y)\cup\delta(Y')$ 有两类边：一类连接 Y 或 Y' 与 $V(G)-(Y\sqcup Y')$，另一类连接 Y 与 Y'。同样，前一类边对应于 $I(C)$ 中的边，而后一类边连接 L 与 L' 或 R 与 R'；因此，它们的原像属于 $\gamma(L)$ 或 $\gamma(R)$，进而属于 $U(C)$。利用这些观察，我们得到如下结果：

$$\frac{1}{2}(\widetilde{cap}(\delta(Y))+\widetilde{cap}(\delta(Y'))) = \frac{1}{2}\sum_{xy\in\delta(Y\sqcup Y')}\widetilde{cap}(xy) + \sum_{x\in Y,\,y\in Y'}\widetilde{cap}(xy) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{xy\in I(C)}(\widetilde{cap}(xy')+\widetilde{cap}(x'y)) + \sum_{xy\in U(C)}(\widetilde{cap}(xy')+\widetilde{cap}(x'y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{xy\in I(C)} cap(xy) + \sum_{xy\in U(C)} cap(xy) = \frac{1}{2}cap(I(C)) + cap(U(C)) = cap\cdot S[C]. \quad (2)$$

最后，如果 C 是冗余的，它不会为我们的真划分产生任何集合。注意， ~每个顶点 $v\in T$ 恰好属于我们划分中形成的一个集合。

对所有奇异和二分连通分量，将方程 (1) 和方程 (2) 求和，得到 $cap(\mathcal{X}) \le cap\cdot S[B] = cap(B)$，由此完成证明。◀

▶ **引理 38.** 存在一个具有最小 $cap(X)$ 的真划分 $\boldsymbol{X}$，使得不存在两个 $X_1, X_2\in\boldsymbol{X}$ 是 H_T 中同一个极大反链的子集。

证明。通过将 X_1 和 X_2 替换为 $X_1 \sqcup X_2$，构造另一个真划分 Z。容量的变化为 cap(Z) $- cap$(X) $= \lambda(X_1 \sqcup X_2, T-(X_1 \sqcup X_2)) - \lambda(X_1, T-X_1) - \lambda(X_2, T-X_2)$。

令 Y_i 为 $i=1$中 X_i 与 $T-X_i$ 之间的一个最小割。割容量的次模性 [10, 第 44.1a 节] 意味着 $\lambda(X_1, T-X_1)+\lambda(X_2, T-X_2) = cap(\delta(Y_1))+cap(\delta(Y_2)) \geq cap(\delta(Y_1 \cap Y_2))+cap(\delta(Y_1 \cup Y_2)) \geq 0+\lambda(X_1 \sqcup X_2, T-(X_1 \sqcup X_2))$。因此，$cap$(Z) $\leq cap$(X)。重复合并各部分，直到完成。◀

由前一个引理可直接得出以下推论。

▶ **推论39**。存在一个真划分 X，使其 $cap(X)$ 达到最小，并且其中所有集合均为 $\{t, t'\}$ 的形式，其中 $t \in T$（称为奇异集合）；但可能有两个对称集合 $X, X' \in X$（称为非奇异集合）。

▶ **引理40**。存在一个真划分 X，其最小 $cap(X)$ 满足：与 X 和 $T-X$ 之间对应于 $X \in X$ 的最小割具有以下性质：

- 若 X 是奇异的，则对应的割 Y 是自对称的，即 $Y'=Y$；若 X 和 X' 是非奇异的，则
- 它们对应的割也彼此对称；上述所有割两两不相交。
-

证明。利用定理34，我们可以选取 $\mathcal{X}$ 使得对应的割 Y、Y' 两两不相交。

若对于某个 $t \in T$，Y是$\{t, t'\}$与 $T-\{t, t'\}$之间的最小割，则 Y'也是。由次模性，$cap(\delta(Y))+cap(\delta(Y')) \geq cap(\delta(Y \cap Y'))+cap(\delta(Y \cup Y'))$，因此$Y \cap Y'$也是$\{t, t'\}$与 $T-\{t, t'\}$之间的最小割；此外，按构造，$Y \cup Y'$是自对称的。用 $Y \cap Y'$替换 Y。

命题的第二部分类似。若 X 和 X' 非奇异，且 Y_1（分别为 Y_2）是 X 与 $T-X$（分别为 X' 与 $T-X'$）之间的最小割，则 $Y_{\prime 2}$（分别为 $Y_{\prime 1}$）也同样是对应顶点集的最小割。运用类似的论证，将 Y_1 和 Y_2 替换为 $Y_1 \cap Y_{\prime 2}$ 和 $Y_2 \cap Y_{\prime 1}$，它们也互为对称的最小割。

上述步骤将割替换为其子集；因此，最后一个性质得以保留。◀

▶ **引理 41.** 令 X 遍历 T 的真划分，并令 B 遍历奇数 T-游走障碍，则

$$\min_{\mathcal{X}} cap(\mathcal{X}) \geq \min_{B} cap(B).$$

证明。取 $\mathcal{X}$ 使其容量最小 $cap(\mathcal{X})$ 且满足前一个引理中的性质。

若 $X=\{t, t'\} \in \mathcal{X}$ 是奇异的，且 Y 是对应的割，则考虑 Y 的原像$C \subseteq V(G)$。将由 C 诱导的 G 子图添加到障碍 B 中。注意，$U(C)=\varnothing$。现在

$$cap \cdot S[C] = \frac{1}{2} cap(I(C)) = \frac{1}{2} \sum_{xy \in I(C)} cap(xy) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{xy \in I(C)} (\widetilde{cap}(xy') + \widetilde{cap}(x'y)) = \frac{1}{2} \widetilde{cap}(\delta(Y)). \quad (3)$$

若 $X, X' \in \mathcal{X}$均为非奇异，则考虑它们对应的割 Y和 $Y_{\prime}$。令 $Y = L \sqcup R'$适用于 L, $R \subseteq V(G)$（这意味着 $Y_{\prime} = L' \sqcup R$）。添加由 D和 G 诱导的二部子图 D

到障碍 B。注意， $U(D)$ 是边 xy' 在 $x \in Y$ 和$y' \in Y'$下的原像。因此

$$cap \cdot S[D] = cap(U(D)) + \frac{1}{2}cap(I(D)) = \sum_{xy \in U(D)} cap(xy) + \frac{1}{2}\sum_{xy \in I(D)} cap(xy) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\sum_{xy \in U(D)} (\widetilde{cap}(xy') + \widetilde{cap}(x'y)) + \frac{1}{2}\sum_{xy \in I(D)} (\widetilde{cap}(xy') + \widetilde{cap}(x'y)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\widetilde{cap}(\delta(Y)) + \widetilde{cap}(\delta(Y'))). \quad (4)$$

◄

定理12的证明。由定理 9 可知， $\max_{\mathcal{P}} \|P\| = \max_{\mathcal{Q}} \|Q\|$，其中 $P^{\sim\ \sim}$遍历奇数 T-游走打包，Q 遍历具有商品图 H_T 的 $(G, T, \widetilde{cap})$ 中的多流。接着，由定理34可得 $\max_{\mathcal{Q}} \|Q\| = \min_{\mathcal{X}} cap(X)$，其中 X 遍历 H_T 中 T 的真划分。最后，由引理 37 和引理 41 可得 $\min_{\mathcal{X}} cap(X) = \min_B cap(B)$。◄