arXiv:2303.00833v1 [math.SP] 1 Mar 2023

通过 p-进拉普拉斯算子聆听形状

´Patrick Erik Bradley 和 Angel Mor´an Ledezma

2023年3月3日

摘要

对于一个有限图，利用图上的 p-进扩散构造一个谱曲线，即一个具有整数系数的二元多项式的零点集。结果表明，某些谱曲线能够区分等谱图中的非同构对，甚至能够重构该图。这使得可以从相关 p-进拉普拉斯算子算子的谱中重构图。作为 p-进几何的一项应用，结果表明，可以从此类算子的谱中恢复 Mumford 曲线的约化图以及 p-进解析环面的乘积约化图。

1 引言

谱几何的目标是描述某些对象（如曲面，或更一般的黎曼流形）的几何与定义在其上的微分算子（如拉普拉斯算子）的谱之间的关系。换言之，正如 M. Kac 在 [11], ”人们能听出鼓的形状吗？”中所说的那样。理想情况下，人们希望能够根据一个或多个自然定义的算子的谱，恢复该几何对- 象，直至等距意义下相同。对于黎曼流形，已经出现了许多反例，表明存在等谱但非等距的流形，这对该问题给出了否定答案。例如，对于鼓问题：

$$\begin{cases} \nabla u = -\lambda u \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Carolyn Gordon、David Webb 和 Scott Wolpert 于1992年展示了存在一对形状不同但等谱的鼓。

[7]。另一方面，可以从谱中提取有关物体几何的信息。这类问题称为“反问题”。在这一方向上已经取得了许多著名成果，例如著名的韦尔渐近律 [26]。这些问题也适用于黎曼流形以外的对象，例如图。对于邻接矩阵和拉普拉斯算子，人们已经发现了非同构的等谱图。这个问题已得到深入研究，参见例如 [21, 18, 24]。从某个算子的谱中恢复图的结构，可能会得到一种用于描述图拓扑的不变量。这可能带来新的应用，例如从扩散过程中恢复图的结构；这有许多潜在用途，例如用于空间数据的拓扑访问方法 [10], ，仅举一例。

素数在许多数学理论及其科学应用中发挥着基础作用。从作为整数基本构成单元或“原子”的算术领域，到物理学中的应用——从量子物理到复杂无序系统理论和地球物理学，再到信息处理、生物学和认知科学，参见 [20] 及其中的参考文献。将数论应用于科学的一种强大框架是所谓的 p进分析，或更一般的超度量分析[25, 14]。一个重要例子见于无序系统（自旋玻璃）理论，其中 p进结构编码在帕里西矩阵中，而帕里西矩阵源于自旋玻璃内部固有的层级结构[19]。这促使人们在 20 世纪 80 年代中期提出用超度量空间描述复杂系统状态的想法。复杂系统（如蛋白质）物理学中的一个核心观点认为，此类系统的动力学由相应能量景观中的随机游走（扩散方程）所驱动。通过使用盆间动力学方法，可将能量景观近似为一个超度量空间，并用该空间上的函数描述活化势垒的分布，参见例如 [15] 及其中的参考文献。朝这一方向的大多数应用都需要在超度量结构（如非阿基米德域）上构造定义良好且自然的伪微分算子；其中，泰布尔森-弗拉基米罗夫算子在 p进数域上的扩散过程中发挥着基础作用[25]。黎曼流形上的微分算子和谱几何已得到广泛研究，然而，对于定义在p进结构上的伪微分算子，尚无可与之相比的非阿基米德谱几何理论。人们还发展了许多其他算子，其中一些

旨在用于实际应用，另一些则是对更一般结构的推广。前一类包括 W. Z´u˜niga、Kozyrev 和 Khrennikov 的研究中提出的多类 p进算子，其中明确阐述了图论与 p进积分算子及伪微分算子之间的关系，参见[27, 14, 17]，及其中的参考文献。

其中一位作者率先研究了黎曼曲面的非阿基米德对应物——即 Mumford 曲线 [3] 上的热方程和积分算子。所有这些关于非阿基米德空间上伪微分方程理论的进展，显然都间接涉及谱几何中的一个主要问题，即需要描述特征值的正问题。

本文首次在非阿基米德框架下研究谱几何中的反问题。此外，我们为任意组合简单图引入了一个新的不变量，并证明，在图上定义的某些 p-adic 算子的谱可以完整刻画该图的同构类。“你能听出图的形状吗？”这一问题已在不同语境下得到回答。在 [8], 中，这一问题是在量子图的语境下提出的，并得到了肯定的回答：研究者证明，在一定条件下，有限度量图上的薛定谔算子的谱能够唯一确定其连通矩阵和键长。在 [28], 中，研究者在量子图中引入了一种新的谱不变量。在 [9], 中，研究者证明，在一定条件下，有限连通度量图上拉普拉斯算子的谱行列式能够确定生成树的数量。理解一般图中某些算子的谱如何确定图的几何性质，是图分析中图比较等应用的一项重要任务。例如， [23], 提出了网络拉普拉斯谱描述符，这是一种能够直接比较大型图的图表示方法。此外，我们的结果还应用于 Mumford 曲线等 p-adic 结构，以及 p-adic 解析环面。因此，这些结果开启了在非阿基米德框架下研究谱几何反问题的工作。

给定一个图 G 和一个矩阵 $\Delta \in \mathbb{N}^{|G|\times|G|}$，我们研究在 $L^2(G \times K)$ 中定义的图拉普拉斯矩阵 Λ_G^{Δ} 的一种推广，其中 K 是一个非阿基米德局部域。空间 $L^2(G \times K)$ 可分解为维数为 $|G|$的有限维空间的直和，由此得到如下表示

Λ_G^{Δ} 的，

$$\Lambda_G^{\Delta} = \bigoplus_{G\mathbb{K}} L(G_r^{\Delta}),$$

其中，矩阵 $L(G_r^{\Delta})$ 是图的某个加权版本的拉普拉斯矩阵；对于 $r = 1$，我们有 $G_1 = G$。因此，该算子可以理解为原图的缩放副本的直和。每个副本的谱都属于同一条平面代数曲线 $V(P_G^{\Delta})$，称为该图的谱曲线。对于适当选取的 Δ，我们证明 P_G^{Δ} 是图 G 的一个不变量。这引出了一个重构定理，使我们能够通过算子 Λ_G^{Δ} 的谱重构该图（见定理 4.7 和推论 4.9）。最后，利用这些结果，我们能够通过 p-进拉普拉斯算子的谱，重构 Mumford 曲线的约化图，以及由 p-进解析环面约化得到的乘积图。

2 记号及 p-进分析的一些结果

本节回顾一些 p-adic 分析中的结果。关于该主题的完整论述及证明，读者可参阅 [1]。

设 K 是一个非阿基米德局部域。令 $|\cdot|_K$ 表示域 K 上的绝对值。将 K 的局部环记作 $\mathcal{O}_K = \{x \in K : |x|_K \leq 1\}$，其极大理想记作 $\mathfrak{m}_K = \{x \in K : |x|_K < 1\}$。设 χ 是 K 上一个固定的非恒定复值加性特征。我们用 dx 表示 K 的加法群上的 Haar 测度，并将其归一化，使得 $\mathcal{O}_K$ 的测度等于 1。绝对可积复值函数 $f \in L^1(K)$ 的傅里叶变换记作

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \int_K \chi(\xi x) f(x) dx, \ \xi \in K.$$

如果 $\mathscr{F}(f) = \hat{} f \in L^1(K)$，我们就得到反演公式

$$f(x) = \int_K \chi(-x\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

由于映射 $\mathscr{F}$: $L^1(K) \cap L^2(K) \to L^2(K)$ 是等距映射，因此该映射可扩展为一个从 $L^2(K)$ 到 $L^2(K)$ 的 L^2–等距映射，其中逆傅里叶变换记作 $\mathscr{F}^{-1}$。

现在我们引入弗拉基米罗夫–泰布尔森算子。令 $\mathcal{D} \subset L^2(K)$ 为其定义域，即由满足 $|\xi|^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(K)$ 的那些 $f \in L^2(K)$ 构成的集合。弗拉基米罗夫算子 $(\Delta^\alpha, \mathcal{D})$, $\alpha > 0$，对于 $f \in \mathcal{D}$ 定义为

$$\Delta^\alpha f(x) = \mathscr{F}^{-1}_{\xi \mapsto x}(|\xi|_K^\alpha \mathscr{F}_{x \mapsto \xi}(f)(\xi))(x),\ x \in K.$$

算子 Δ^α 是 $L^2(K)$ 中的一个无界算子，并且由于它与乘以 $|\xi|_K^\alpha$ 的算子酉等价，因此它是自伴的，其谱由特征值 $\lambda_r = q^{\alpha r}$ 构成，其中 $r \in \mathbb{Z}$，且 q 是剩余域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ 的基数。此外，我们有如下结果

定理 2.1（Kozyrev）。存在一个由算子 Δ^α 的特征函数构成的完备正交系，其形式为 $\psi_{r,\ n}(x) \in L^2(K)$，其中 $r \in \mathbb{Z}$ 且 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\Delta^\alpha \psi_{r,n}(x) = q^{\alpha(1-r)} \psi_{r,n}.$$

证明。对于 $\mathbb{Q}_p$ 的情形，参见 [16]。对于一般非阿基米德局部域 K 的情形，参见 [1]。 □

此后，定理 2.1 中的 $L^2(K)$ 的这个基记作 $\mathcal{K}$。

3 扩散对的谱曲线

本节将介绍构造所谓扩散对的谱曲线所需的对象。所谓扩散对实际上不过是一个加权图，其权重是固定变量 Y 的整数次幂。这些对象是 p-阿基米德矩阵值拉普拉斯算子，反映了图的邻接结构。

3.1 p-阿基米德图的拉普拉斯算子

设 $G \subset K/O_K$ 是一个有限集合。那么我们有同构

$$L^2(G \times K) \cong L^2(G) \otimes L^2(K) \cong \bigoplus_{a \in G} L^2(K_a)$$

其中，对于每个 $a \in G$， K_a 都是 K 的一个副本。我们定义映射:

$$\bigoplus_{a\in G} L^2(K_a) \xrightarrow{H_G} \bigoplus_{a\in G} L^2(K_a) \tag{1}$$

其中我们记

$$L^2(K_a) = \bigoplus_{\psi\in\mathcal{K}} \mathbb{C}\psi_a$$

使用 K上的 Kozyrev 小波集合 $\mathcal{K}$ ，并且

$$\psi_a(x) = \psi(x).$$

映射 H_G 定义如下:

$$H_G\colon (u_g)_{g\in G} \mapsto (f_g)_{g\in G},\ f_g = \sum_{a\in G} C_{ga}\Delta_{ga}u_a$$

其中 Δ_{ga} 是弗拉基米罗夫算子

$$\Delta_{ga}\colon L^2(K_a) \to L^2(K_g), \psi_a \mapsto \Delta^{\alpha_{ga}}\psi_g$$

其中

$$\Delta^{\alpha_{ga}} = \mathscr{F}^{-1}\,|\cdot|_K^{\alpha_{ga}}\,\mathscr{F}$$

其作用类似于通常的弗拉基米罗夫算子，但它作用于 G的顶点所索引的不同副本上的 Kozyrev 小波。特别地，它只是将索引小波 Kozyrev 小波 ψ_g 乘以$q^{\alpha_{ga}}$的一个整数次幂。

请注意，在由下式给出的 L^2($G \times K$) 的基下

$$G\mathcal{K} = \{\psi_g\colon g \in G,\ \psi \in \mathcal{K}\}$$

我们可以将 H_G 表示为如下的 $|G| \times |G|$ 矩阵

$$(C_{ag}\Delta_{ag})$$

而矩阵 C =(C_{ag}) 可以视为一个顶点集为 G 的简单图的邻接矩阵。

为了得到图拉普拉斯矩阵，我们不考虑 H_G，而是考虑算子

$$\Lambda_G^{\Delta}\colon L^2(K)^{|G|} \to L^2(K)^{|G|}$$

其由矩阵表示

$$(L_{ab}^{\Delta})_{a,b\in G}$$

with

$$L_{ab}^{\Delta}=\begin{cases}-C_{ab}\Delta_{ab}, & a\neq b\\ \sum\limits_{g\in G}C_{ag}\Delta_{ag}, & a=b\end{cases}$$

这里， $\Delta=(\Delta_{ga})$ 可以视为一个 $\mathbf{N}^{|G|\times|G|}$ 矩阵：当 ga 表示图中的一条边时，其对应项为 α_{ga}。

稍后我们将证明，存在一些扩散参数 $\alpha_{ag}\in\mathbf{N}$，使得算子 Λ_G^{Δ} 的谱能够确定组合简单图 G的同构类。

定义 3.1。算子 Λ_G^{Δ} 称为与扩散对（G,Δ）相关的 p-进拉普拉斯算子。

3.2 扩散对的谱曲线

设（G,Δ）为一个扩散对。回顾一下， $L=L_1$ 是图 G的拉普拉斯算子。我们先来看下面的观察：

引理 3.2。以下结论成立：

$$\mathrm{Spec}(L)\subset\mathrm{Spec}(\Lambda_G^{\Delta})$$

作为多重集的包含关系。

证明。首先注意，在基 $G\mathcal{K}$ 中，算子 Λ_G^{Δ} 由一个 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 矩阵表示；对基进行适当的线性排序后，该矩阵具有分块对角结构，各块大小为$|G|\times|G|$。现在，每个块中对角线以外的非零元素均为弗拉基米罗夫特征值。根据定理 2.1，它们的形式为

$$q^{\alpha_{ag}(1-r)}$$

与 $r\in\mathbf{Z}$ 一起。对于 $r=1$，我们将拉普拉斯矩阵 L 视为其中一个分块。因此， L 的特征值包含于 Λ_G^{Δ} 的谱中。 □

进一步注意到，上述引理的证明中发现的分块对角结构，实际上是对 G 上具有相同组合图结构的拉普拉斯矩阵的重复，只是现在边长是 p 的幂，形式为 $p^{\alpha_{ab}(1-r)}$，其中固定的 $r \in \mathbb{Z}$。这意味着，存在一个由 $r \in \mathbb{Z}$ 参数化的图族 G_r^{Δ}，它们具有相同的组合拉普拉斯矩阵 L。为了找出 Λ_G^{Δ} 的所有特征值，有必要且足够找出该图族 G_r^{Δ} 中每个图的拉普拉斯特征值，其中 $r \in \mathbb{Z}$。

现在我们将考察该族中与图 G_r^{Δ} 相关联的每个图拉普拉斯矩阵 L_r^{Δ} 的特征多项式。注意，

$$L_1^{\Delta} = L_1 = L, \quad G_1^{\Delta} = G_1 = G,$$

它们与用 Δ 表示的扩散参数无关。我们还假设参数 α_{ab} 都是两两不同的正自然数。G_r^{Δ} 的特征多项式为

$$P_r^{\Delta}(X) \in \mathbb{Q}[X]$$

其次数为 $|G|$。同样，我们有

$$P_1(X) = P_1^{\Delta}(X)$$

与 Δ 无关，并且与图拉普拉斯矩阵 L 的特征多项式一致。

P_r^{Δ} 的系数由行列式的莱布尼茨公式给出，它们是关于另一个变量 Y 的整数系数多项式，并在 p^{1-r} 处取值。因此，我们得到一个多项式

$$P_G^{\Delta}(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

其在 $\mathbb{Q}^2$ 中的零点集包含 Λ_G^{Δ} 的谱，这些谱作为其中某些点的第一坐标。在这里，$\overline{\mathbb{Q}}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包。

定义 3.3. 将平面代数曲线 $V(P_G^{\Delta})$ 完备化为射影代数曲线，称为关于数对 (G, Δ) 的谱曲线。

3.3 恢复谱曲线

假设已知谱 Λ_G^{Δ}，且它是一个多重集，其中 Λ_G^{Δ} 是与扩散对 (G,Δ) 相关联的 p-进拉普拉斯算子。另假设任务是从该谱中恢复图 G。一种方法是尝试恢复谱多项式 $P(X,Y) = P_G^{\Delta}(X,Y)$，并使用下文证明的重构定理（定理 4.7）。

在这种情况下，无法期望存在一个能在有限时间内终止的算法，因为必须将每个特征值与谱数对所诱导的族中的某个图 G_r ($r \in \mathbb{Z}$) 相关联。但纯粹从存在性的角度来看，我们可以说，存在一种特征值分类（包括其重数），使得每个类别都是 Spec(L_r)，其中 $r \in \mathbb{Z}$。一旦完成这种分类，就可以求出多项式的每个系数

$$a_i(p^{1-r}), \quad i = 1, \dots, n$$

的系数

$$P(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(Y) X^i$$

在每个特征值类别中，都可以计算出其中满足 $r \in \mathbb{Z}$ 的系数。接下来所需的只是，对每个 $r \in \mathbb{Z}$，求出

$$P(X, p^{1-r})$$

在有限多个位置 x_s 处的值。然后通过插值即可得到 $P(X,Y)$ 的系数。

定义 3.4. 若数对 (x_s, p^{1-r}) 的集合满足 $s, r \in R \subset \mathbb{N}$，则称其为恢复数据；若 R 是有限集，且在该数对集合中对多项式求值后，$P(X,Y)$ 可以通过插值得到。

定理 3.5. 设（G，Δ）为扩散对。给定 Spec（L_r）作为对于充分但有限多个 $r \in \mathbb{Z}$ 而区分的多重集，可以通过一个终止算法获得谱多项式 $P_{(G,\Delta}$）的恢复数据。

证明。由于所有图 G_r 均为简单图，且具有相同的底层组合图，该图有 n 个顶点和

$$|E| \le \frac{1}{2} n(n-1) =: b_n$$

条边，因此待插值的位置数量

$$P(X,Y) = P_G^{\Delta}(X,Y)$$

有界。由于 n 给出了每个多重集 Spec(L_r) 的大小，因此可以得出结论，只需这些谱就足以重现特征多项式

$$P(X, p^{1-r}) = P_r(X)$$

图 G_r 的特征多项式。在 b_n 个位置 $x_s \in$R 处计算 b_n 多项式 $P_r(X)$，会得到数对 (x_s, p^{1-r})，从而构成恢复数据，因为此时可以对$P(X,Y)$进行插值。总之，这是一种有限步后终止的算法。 □

现在的问题是，能否通过聚类谱值，以某种方式提取出有区别的多重集 Spec(L_r)。如果允许改变素数 p，则可以通过以下游戏做到这一点：

游戏 1. 假设你可以选择一次扩散参数 Δ，并可任意多次选择一个素数 p。随后，对于每个 p，你都会收到一个未知有限简单连通图的多重集 Spec(Λ_G^{Δ})。如果你能根据这些谱恢复扩散对 (G, Δ) 的谱曲线，就算获胜，否则就算失败。

下面的定理指出，游戏 1 存在获胜策略：

定理 3.6. 对于与任意扩散对相关联的 p-进拉普拉斯算子，存在一种获胜策略，以获得满足 $r \in$Z 的有区别的多重集 Spec(L_r)。

证明. 当选择的扩散参数全都取 1 时（属于某条边时取 1，否则取 0），对于连通图，一种获胜策略是选取一个较大的素数 p。此时，我们有

$$L_r = p^{1-r} L$$

其中，L 是图 G 的拉普拉斯算子。

由于 L 的谱的非零部分位于一个不包含 0 的紧区间内，正如 [5]，已证明的那样，因此只需询问

越来越大的素数，直到各簇之间的间隙不断增大，而相邻点之间的簇间距离相对较小。随着 p 增大，这一现象会变得越来越明显。

如果参数并非全部取为 1，我们就限制在 $r \leq 1$ 上，并再次改变素数 p。根据矩阵扰动理论 [2], ，我们得知，如果 p 足够大，那么在范围 $r \leq 1$ 内，相邻特征值之间的簇间距离仍会小于相邻簇之间的簇内距离。因此，令 p 足够大，同样可以消除簇之间的重叠。

由于在两种扩散参数选择情形下，无论如何改变素数 p， L 的谱都保持不变，因此可以提取 $r = 1$ 的参考簇，进而获得更多取值下的谱 Spec(L_r)，其中 $r \in \mathbb{Z}$，或者在第二种情形下取 $r \leq 1$ 。提取足够多的这些有限谱之后，就可以采用插值法并计算恢复数据，因为此时已满足定理 3.5 的要求。

□

4 可分离的谱曲线

本节首先利用解析矩阵扰动理论，通过适当的扩散对对应的谱曲线，将非同构但等谱的图区分开来。随后，我们证明，对每个有限图，都存在一个扩散对，使得可以从谱多项式重构该图。尽管这一结果推广了第一个结果，我们仍认为矩阵扰动方法具有普遍意义。

例 4.1. 根据 *[18],* ，图 1 中的两个图是等谱的。它们的第一贝蒂数为 3。这是没有桥的非同构简单图等谱对中最小的例子。边上的标号“2”表示扩散参数值为 2，即边权重为 Y^2。未标号的边的扩散参数值为 1，即边权重为 Y。左侧图和右侧图各自的谱多项式 P_1 和 P_2 分别为

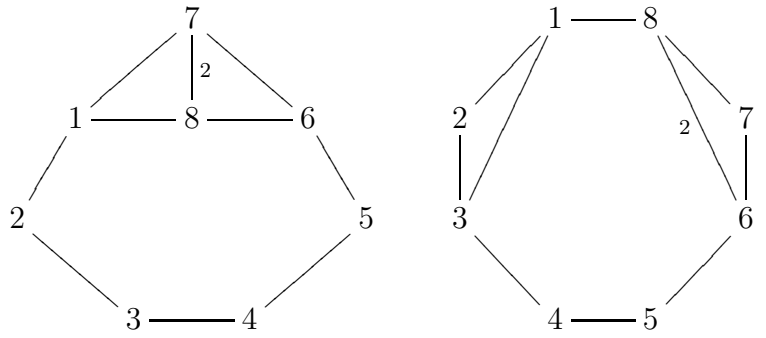

图 1：一对不同构但等谱的图，其第一贝蒂数为 3。

图 1：

$$P_1(X,Y)=\det\begin{pmatrix} X-3Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Y \\ Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-3Y & Y & Y \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-(2Y+Y^2) & Y^2 \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Y^2 & X-(2Y+Y^2) \end{pmatrix}$$

$$P_2(X,Y)=\det\begin{pmatrix} X-3Y & Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y \\ Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & Y & X-3Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-(2Y+Y^2) & Y & Y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y^2 & Y & X-(2Y+Y^2) \end{pmatrix}$$

它们的切锥 T_1 属于 P_1 和 T_2 属于 P_2：

$$T_1(X,Y)=\det\begin{pmatrix} X-3Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Y \\ Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-3Y & Y & Y \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & X-2Y \end{pmatrix}$$

$$T_2(X,Y)=\det\begin{pmatrix} X-3Y & Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y \\ Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & Y & X-3Y & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y & Y \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & X-2Y \end{pmatrix}$$

这是亏格二的两个无桥图的谱多项式，其中每条边都使用相同的变量 Y，如图 2 所示。根据

[18, 定理 3.*1],* 这些图并非等谱，因为它们不同构。因此，两个切锥 T_1 和 T_2 不相等。

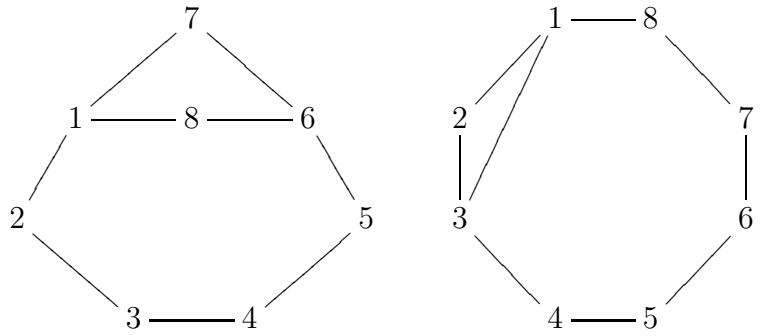

图 2：一对第一贝蒂数为 2 的非同构无桥图。根据 [18], 可知，它们并非等谱。

我们看到，将每个图中的某条特定边的边权重替换为 Y^2，会得到两个不同的多项式 $P_1(X,Y)$ 和 $P_2(X,Y)$。因此，在这种情况下，这对等谱图可由这两个多项式区分。只有在

$$P_1(X,1) = P_2(X,1)$$

从而使这两个非同构图具有相同的特征多项式。这个例子引出了本文接下来的内容。

4.1 通过矩阵扰动理论区分等谱图对

关于矩阵扰动理论的介绍可见 [2]。我们将运用这一方法，为非同构但等谱的图构造不同的谱多项式。我们的计算均为显式计算，其中大部分也在此重现，尽管许多计算也可以在该文献中更一般的背景下找到。

设 $k \neq \ell$ 是 $\{1,\ldots,n\}$ 中的自然数。我们定义矩阵

$$U(k,\ell) = (u_{ij})$$

with

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = k, \text{ or } i = k = \ell \\ -1, & (i,j) = (k,\ell), \text{ or } (i,j) = (\ell,k) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

这是具有 n 个顶点、恰有一条无向边 (k,ℓ) 的图的拉普拉斯算子，因为 $U(k,\ell) = U(\ell,k)$。

设 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$。则

$$v^\top U(k,\ell) v = (v_k - v_\ell)^2$$

这可通过简单计算验证。

现在，设 E 是数 $1, \ldots, n$ 中满足 $i \neq j$ 的数对 (i,j) 所组成的对称集合。则

$$U(E) := \sum_{(k,\ell)\in E} U(k,\ell)$$

并且我们有

$$v^\top U(E) v = \sum_{(k,\ell)\in E} (v_k - v_\ell)^2$$

现在我们可以定义

$$\|v\|_E^2 = v^\top U(E) v$$

函数 $\|\cdot\|_E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的半范数，并且我们有

$$\|v\|_E^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (i,j) \in E \colon v_i = v_j$$

引理 4.2. 设 L 是一个具有 n 个顶点的简单图 G 的拉普拉斯算子，并设 E、E' 是来自 $\{1, \ldots, n\}$ 的两个不相交的数对集合。那么存在一个特征向量 v，使得

$$\|v\|_E^2 \neq \|v\|_{E'}^2$$

证明. 这是由 L 是对称矩阵这一事实得出的，也就是说，这是实对称矩阵的谱定理。具体而言，如果对 L 的所有特征向量 v，都有

$$\|v\|_E = \|v\|_{E'}$$

那么，就不可能通过线性组合生成一个具有 $\|x\|_E \neq \|x\|_{E'}$ 的向量 $x \in \mathbf{R}^n$，因为当特征向量乘以标量时，两个半范数会以相同的方式缩放。

□

设 G_i 是定义在同一顶点集 V 上的图，则扩散对 (G_1, Δ_1) 与 (G_2, Δ_2) 的等价由 $E_1 \to E_2$ 给出： $E_1 \to E_2$ 是 G_1 与 G_2 的边集之间的双射，并将一条加权边映射为具有相同权重的边。如果两个图 G_1、G_2 等谱，那么可以定义扩散参数 Δ_1、Δ_2，使得扩散对 $(G_1, \Delta_1) \sim (G, \Delta_2)$ 等价。下面的定理表明，如果作出适当选择，这已经足以区分非同构图。

定理 4.3。假设 G_1, G_2 是一对不同构但等谱的图。那么存在等价的扩散对 (G_1, Δ_1)、(G_2, Δ_2)，使得

$$P_{G_1}^{\Delta_1}(X, Y) \neq P_{G_2}^{\Delta_2}(X, Y)$$

作为二元多项式。

证明。记图 G_i 的边集为 E_i，其中 $i = 1, 2$，并令 $C = E_1 \cap E_2$，且 $C_1 = E_1 \setminus E_2$，$C_2 = E_2 \setminus E_1$。由于 G_1 和 G_2 等谱，因此 E_1 和 E_2 的元素个数相同。

我们关注矩阵的谱

$$L_{\varepsilon,i} = U(C) + \varepsilon U(C_i)$$

对于 $i = 1, 2$，且 $\varepsilon > 0$。关于参数 ε 作一阶展开，得到

$$\lambda_{\varepsilon,i}^{(1)} = \lambda + \varepsilon \|v\|_{C_i}^2 + \text{terms of higher order in } \varepsilon \tag{2}$$

其中 $v \in \mathbf{R}^n$ 是 $U(C)$ 的一个特征向量，对应特征值 λ；而 $\lambda_{\varepsilon\, i}^{(1)}$，是一阶近似特征值 $\lambda_{\varepsilon,\ i}$，属于 $L_{\varepsilon,\ i}$。根据引理 4.2，可以找到 $U(C)$ 的一个特征向量 v，使得

$$\|v\|_{C_1} \neq \|v\|_{C_2}$$

这意味着特征值 $\lambda_{\varepsilon,i}$ 的一阶近似不同。因此，在可以对 ε 进行解析展开且 $\varepsilon > 0$ 足够小的 $\varepsilon > 0$ 范围内，特征值 $\lambda_{\varepsilon,1}$ 和 $\lambda_{\varepsilon,2}$ 不同。

现在，我们以两种不同的方式解析地改变了 $U(C)$ 的一个特征值。除非对应于 $U(C)$ 的某些特征值可能相等，否则 $L_{\varepsilon,1}$ 和 $L_{\varepsilon,2}$

在这种情况下相等。无论如何，$U(C) = L_{\varepsilon,0}$ 的谱以两种不同的方式连续变化。因此，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，R 中的离散子集 Spec($L_{\varepsilon,1}$) 和 Spec($L_{\varepsilon,2}$) 不同。这意味着相应的特征多项式

$$P_i(X, \varepsilon), \quad i = 1, 2$$

彼此不同。但它们是谱多项式在

$$P_i(X, Y)$$

处的取值，对所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 均成立，其中这些多项式针对以下边权映射给出：

$$\Delta_i \colon C \cup E_i \to \mathbb{N},\ e \mapsto \begin{cases} 1, & e \in C \\ 0, & e \in E_i \end{cases}$$

由此可知，这两个谱多项式彼此不同。

为了得到正扩散常数，现在考察矩阵的谱

$$\varepsilon L_{\varepsilon,i} = \varepsilon U(C) + \varepsilon^2 U(C_i)$$

这相当于将扩散参数取为

$$\Delta_i \colon C \cup E_i,\ e \mapsto \begin{cases} 2, & e \in E_i \\ 1, & e \in C \end{cases}$$

因此，存在一个双射 $E_1 \to E_2$，将带权边集合对应起来；也就是说，扩散对 (G_1, Δ_1) 与 (G_2, Δ_2) 等价，使得 $P_{G_1}^{\Delta_1}(X, Y) \neq P_{G_2}^{\Delta_2}(X, Y)$，如所述。 □

4.2 一个重构定理

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个有 n 个顶点的图。我们从以下观察开始：

定理 4.4（Kel'mans，1967）。设

$$P(X) = X^n - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i c_i X^{n-i}$$

是图 G 的特征多项式。那么

$$c_i = \sum_{\substack{S \subset V \\ |S| = n-i}} T(G_S)$$

其中， $T(H)$ 是图 H 的生成树数量，而 G_S 是将 S 中的所有顶点合并为一个顶点后得到的商图。

证明。 [12, 13] □

我们从谱多项式 $P(X, Y)$ 中恢复这些量如下：

$$c_i(G) = a_{n-i}(1)$$

对于 $i = 1, \ldots, n-1$。

我们定义

$$\mathcal{F}(G) = \{F \colon F \text{ is a forest with } V(F) = V(G) \text{ and } E(F) \subset E(G)\}$$

并称 $\mathcal{F}(G)$ 为 G 的生成森林集。 $\mathcal{F}(G)$ 的以下子集值得关注：

$$\mathcal{F}^i(G) = \{F \in \mathcal{F}(G) \colon b_0(F) = i\}$$

这使我们能够表述定理 4.4 的一个推广形式。该结果虽已为人所知，但此处以谱曲线的形式表述：

定理 4.5（Buslov，2014）。设 (G, Δ) 是一个扩散对。那么，谱多项式的系数

$$P_G^{\Delta}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(Y) X^i$$

扩散对 (G, Δ) 的系数由下式给出

$$a_i(Y) = (-1)^{n-i} \sum_{F \in \mathcal{F}^i(G)} \pi_F, \quad \pi_F = \prod_{e \in E(F)} Y^{\alpha_e}$$

其中 $i = 1, \ldots, n$。

证明。 [4,定理 2]。 □

设 G' 为另一个图。一个同构

$$\mathcal{F}(G) \cong \mathcal{F}(G')$$

生成森林集合之间存在一个双射 f: $\mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G')$，以及一个同构 $F \cong F'$，满足 $F \in \mathcal{F}(G)$ 和 $F' = f(F)$，对所有 $F \in \mathcal{F}(G)$ 均成立。

引理 4.6. 设 G、G' 是具有 n 个顶点的两个图。那么，当且仅当严格森林子集 $\mathcal{F}(G)$ 和 $\mathcal{F}(G')$ 同构时，G 和 G' 同构。

证明. 如果这两个图同构，那么显然它们的严格森林集也同构。

现在假设 $G = T$ 和 $G' = T'$ 是树。由于树本身就是其生成森林，显然必有 $T \cong T'$。

现在，假设 G 不是树。若 G 是森林，那么我们可以将树的结果应用于 G的每个连通分支。因此，我们可以假设 $b_1(G) > 0$，且 G 是连通的。若 $\mathcal{F}(G) \cong \mathcal{F}(G')$，则不失一般性，我们可以假设这两个集合相等，且两个图的顶点集相同。设 T 是 G的生成树。那么

$$\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G')$$

因此，根据对称性，G 的每棵生成树都是 G' 的生成树，反之亦然。这意味着 $G = G'$，否则 G 中会有一条不属于 G'的边。但包含该边的 G的一棵生成树就不是 G'的一棵生成树，这就产生了矛盾。因此，$G \cong G'$。 □

定理 4.7（重构定理）。对于任意有限图 G，都存在一个由扩散参数 Δ 给出的 p-进拉普拉斯算子，使得扩散对（G，Δ）具有谱多项式 P（X，Y），并且对于任意扩散对（G'，Δ），其谱多项式 P'（X，Y）满足:

$$P(X,Y) = P'(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad (G,\Delta) \cong (G',\Delta)$$

换言之，G 的同构类是具有谱多项式 P（X，Y）的唯一图族。

证明。我们只需证明，若 $P(X,Y) = P'(X,Y)$，则 $(G,\Delta) \cong (G',\Delta')$。

Let

$$\Delta\colon E(G) \to \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|E(G)|}\}, e \mapsto \alpha_e$$

是一个双射。不失一般性，我们可以假设 G 的边编号为 α_e，且 Δ 是恒等映射，因此在多项式中可以用 Y^e 代替 Y^{α_e}。我们进一步作出如下假设:

We assume that no edge label equals the finite sum of any other edge labels (they are all positive integers). (3)

令 $I \subset E(G)$。于是我们定义

$$\mathcal{F}_I^i(G) = \{F \in \mathcal{F}^i(G)\colon E(F) = I\}$$
$$\mathcal{F}^i(I) = \{F \in \mathcal{F}^i(G)\colon E(F) \subseteq I\}$$

于是， $\mathcal{F}^i(G)$ 是所有集合 $\mathcal{F}_I^i(G)$（其中 $I \subset E(G)$）的不交并。此外，$\mathcal{F}_I^i(G)$ 要么为空，要么恰好由一棵森林组成。

令 $E(G) =: E$，并令 H 为 G 的生成子图。则

$$a_{H,i}(Y) = (-1)^{n-i} \sum_{F \in \mathcal{F}^i(H)} \prod_{e \in E(F)} Y^e$$

对于 G 的任意生成树 T，我们有

$$a_i(Y) = a_{T,i}(Y) + a_{G\setminus T,i}(Y) \tag{4}$$

其中， $G \setminus T$ 是通过从 G 中删除 T 的边得到的。

现在，给定谱多项式 $P(X, Y)$，多项式

$$a_1(Y) = \sum_{k=1}^{M} a_{1k} Y^k$$

借助 $M >> 0$ 可按如下方式恢复生成树集合：单项式 $a_{1k}Y^k$表示存在 $|a_{1k}| \in \mathbb{N}$ 棵生成树，其边标号总和等于 k。根据我们的假设 (3)，我们有

$$|a_{1k}| \leq 1$$

对所有 $k = 1$、2、.....均成立。因此， $a_1(Y)$ 的每个非零系数恰好编码一棵 G的生成树。此外，分解 (4) 的两部分没有共同的单项式。

为了恢复扩散常数，我们考察

$$a_{n-1}(Y)$$

同样，假设 (3) 保证所有系数不是 1 就是 0。因此，非零单项式的指数给出了 G 的所有不同带标号的边。

现在我们可以进一步提取：对于具有给定边标号集的每棵生成树，提取所有生成森林的集合，从而得知它们的连通分支数。从所有不同边组成的数对开始，我们还可以提取任意生成森林中每个连通分支所含的边集。假设 (3) 使这一过程成为可能。这样便构造出一棵唯一的生成树。对所有生成树重复这一过程，我们得到某个图 G 的唯一生成森林集 $\mathcal{F}(G)$。根据引理 4.6， G 的同构类现已唯一确定。

□

注 4.8. 我们指出，任何满足 (3) 的扩散对的谱多项式，其系数均为 0、± 1; 这一点已在重构定理（定理 4.7）的证明中得到体现。

推论 4.9. 选择满足 (3) 的扩散参数来进行游戏 1，即可重构未知图 G。

证明. 根据定理 3.6，游戏 1 对任意扩散参数的选择都有获胜策略，因此这可由定理 4.7 直接推出。

□

备注 4.10. 请注意，我们并未在多项式时间内解决图同构问题，因为谱多项式系数的计算预计会耗费过多时间。

5 感知 p-进几何对象的形状

推论 4.9 也可以应用于具有底层图结构的 p-进几何对象。第一类对象包括其约化图的第一贝蒂数等于曲线亏格的 Mumford 曲线

。第二类对象是解析环面，它们在基变换后看起来像亏格 1 的 Mumford 曲线的乘积，即所谓的 Tate 曲线。为了实现这一点，我们将构造这些对象的 K-有理点集合到 K 中的嵌入。该过程的细节将在接下来的两个小节中介绍。

5.1 聆听 Mumford 曲线的形状

第 $[6,\ 章\ 5]$ 对 Mumford 曲线作了较为详细的介绍。不过，我们并不需要了解它们的太多构造细节。我们只需知道，它们是可由穿孔圆盘有限覆盖的射影代数曲线。 K 中介绍了一类由穿孔圆盘构成的覆盖，称为顶点式覆盖。这类覆盖会产生特定类型的约化图，也称为顶点式约化图。

设 X 是一条 Mumford 曲线。在 $[3],$ 中，发展了其 K-有理点集合 $X(K)$ 的顶点覆盖概念。设给定这样一个覆盖，并令 G 为相应的顶点式约化图。它是一个连通图，其所有顶点的次数都至少为 2，且其第一贝蒂数等于该曲线的亏格 g。我们要求 Mumford 曲线具有正亏格。

$X(K)$ 的顶点式覆盖由穿孔圆盘组成，这些圆盘与 G 的顶点一一对应。 G 的边对应于（作为刚性解析空间的）圆环域，其厚度为最小正厚度，也就是说，它们不含 K-有理点。这些圆环域连接 $X(K)$ 中原本彼此不相交的两个穿孔圆盘，且不会引入额外的 K-有理点。

作为一个 p-adic 流形， $X(K)$ 只是有限个穿孔圆盘的不交并。这个紧流形可以嵌入 K ，成为一个既闭又开的子集，且嵌入的顶点式覆盖 $X(K)$ 的每个片都包含一个不同的点，该点表示 K/O_K 中的一个类。现在，我们处于第 3.1 节的设定中，并有一个作用于空间 $L^2(K)^{|G|}$ 上的 p-adic 拉普拉斯算子。

推论 5.1. 使用满足条件 (3) 的扩散参数进行游戏 1，可以重构 Mumford 曲线的一个顶点约化图。

证明。这直接由上述构造和推论 4.9 得出。 □

5.2 聆听 p-进解析环面的形状

p-进解析环面的理论概述见 [6, 第 6] 章。接下来我们将汇总相关数据，然后继续进行应用。

设 A 是一个解析环面

$$A = \mathbb{G}_m/\Lambda$$

其乘法格 Λ由以下基生成

$$\tilde{q}_i = q_1^{\alpha_{i1}} \cdots q_g^{\alpha_{ig}}$$

其中 $i = 1 \ldots$、 g满足

$$q_i = qe_i$$

其中 $q = p^f$、 e_i 是乘积空间$K^\times \times \cdots \times K^\times$中第 i 个分量的单位向量，且 $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$。

格基给出如下分解

$$K^g = \bigoplus_{i=1}^{g} K\tilde{q}_i$$

在每个分量 $K\tilde{q}_i$ 上，我们可以如下定义超度量范数：生成元 $\tilde{q}_i$ 由一个整数向量确定

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ig}) \in \mathbb{Z}^g$$

与之对应的本原向量是一个向量

$$\lambda_i \in \mathbb{N}^g$$

使得

$$\alpha_i = k \cdot \lambda_i$$

其中 $k \in\mathbb{Z}$，且 $|k|$ 在这一性质下是极大的。若我们记

$$\tilde{q} = q_1 \cdots q_g$$

and

$$\tilde{q}^\beta = q_1^{\beta_1} \cdots q_g^{\beta_g}$$

for

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_g) \in \mathbb{Z}^g$$

那么我们有

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}^{\alpha_i}$$

其对应于直线 $K\tilde{q}_i$ 的本原生成元定义为

$$\tilde{b}_i := \tilde{q}^{\lambda_i}$$

其中 λ_i 是与 α_i对应的本原向量。

定义 5.2。与直线 $K\tilde{q}_i$ 对应的超度量范数定义为

$$\|x\|_i = \left\|\tilde{b}_i\right\|_{K^g}^{-\log_q|\lambda|_K}$$

~ ~其中 $x = \lambda b_i \in K\tilde{q}_i$ 具有本原生成元 b_i, 且 $\lambda \in K$。$K\tilde{q}_i$ 上的 Haar 测度 μ_i 经过归一化，使得相对于 $\|\cdot\|_i$ 的单位球的测度为一。

元素 $\tilde{q}_i$ 定义了一条 Tate 曲线，其约化图假设为单纯的，如下所示：由于我们有

$$\alpha_i = n_i\lambda_i$$

由自然的 $n_i > 2$，可得

$$\|\tilde{q}_i\|_i = \left\|\tilde{b}_i\right\|^{n_i} = (q^{-c_i})^{n_i}$$

整数 $c_i > 0$。因此，此处的分量 Tate 曲线为

$$T_i = (K^\times \tilde{b}_i)/\langle\tilde{q}_i\rangle \cong K^\times / \langle (q^{c_i})^{n_i}\rangle$$

然而，同构两侧的约化图结构有所不同：右侧曲线的顶点覆盖有 $c_i n_i$个顶点，而左侧任意一个顶点覆盖都有 n_i 个顶点。

我们有一个分解

$$L^2(K^g) = \bigotimes_{i=1}^{g} L^2(K\tilde{q}_i)$$

在每个因子上，我们重复上一小节的构造，并得到一个算子

$$\Lambda\colon \bigotimes_{i=1}^{g} L^2(K\tilde{q}_i)^{|G_i|} \to \bigotimes_{i=1}^{g} L^2(K\tilde{q}_i)^{|G_i|}$$

其中， G_i 是 T_i的一个顶点式约化图。该算子推广了 [22] 中的乘积空间算子，并可分解为

$$\Lambda_G = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_g$$

其中

$$\Lambda_i = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \Lambda_{G_i}^{\Delta_i} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

对于 $i = 1$、.....、 g。

我们无需针对每个分量图 G_i 分别进行游戏 1，而是恢复环面 A 的乘积图：

推论 5.3。对于 p-adic 解析环面，可以成功地进行游戏 1，以恢复由 G_1、.....、 G_g 组成的乘积图。

证明。设 G 为由 G_1、.....、 G_g 组成的乘积图。那么， Λ_G 实际上可以视为一个算子

$$\Lambda_G \colon L^2(K)^{|G|} \to L^2(K)^{|G|}$$

通过取适当的同构。然后利用假设 (3) 进行游戏 1，即可恢复 G。

□

致谢

感谢 Evgeny Zelenov 向本文作者之一提出这个问题。感谢 David Weisbart 进行的宝贵讨论。本研究部分得到德国研究联合会的资助，项目编号为 469999674

参考文献

[1] Kochubei A.N. 非阿基米德域上的伪微分方程与随机分析。Marcel Dekker, Inc., 纽约，2001。

[2] H.Baumg¨artel. 矩阵与算子的解析扰动理论。算子理论，第 15 卷。Birkh¨auser，巴塞尔，1985。

[3]P.E. Bradley. Mumford 曲线上的热方程与小波。arXiv:2112.05739v2 [math.AG], 2021.

[4] V.A. Buslov. 关于加权有向图的拉普拉斯矩阵特征多项式的系数及全子式定理。《数学科学杂志》，212(6)，2016年。译自 POMI 科学研讨会纪要，第 427 卷，2014年，第 5–21 页。[5] M. Fiedler. 图的代数连通度。《捷克斯洛伐克数学杂志》，23(2)，1973年。[6] J. Fresnel 和 M. van der Put.《刚性解析几何及其应用》，数学进展第 218 卷。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，2004年。[7] C. Gordon、D.L. Webb 和 S. Wolpert. 无法听出鼓的形状。《美国数学会通报》，27：134–138，1992年。[8] Boris S. Gutkin 和 Uzy Smilansky. 能否听出图的形状?《物理学杂志 A》，34：6061–6068，2001年。[9] J. M. Harrison 和 Tracy Weyand. 能否听出量子图的生成树？arXiv:2209.01284，2022年。[10] M.W. Jahn 和 P.E. Bradley. 空间与时空数据的拓扑访问方法。《ISPRS 国际地理信息杂志》，11(10)：533，2022年。[11] Mark Kac. 能否听出鼓的形状? 《美国数学月刊》，73(4，第 2 部分)：1–23，1966年。[12] A.K. Kel’mans. 图的特征多项式的性质，Energija 第 4 卷，第 27–41 页。《服务于共产主义的控制论》，莫斯科—列宁格勒，1967年。（俄文）。[13] A.K. Kel’mans 和 V.M. Chelnokov. 某种图的多项式及具有极值树数的图。《组合理论杂志》B辑，16(3)：197–214，1974年。[14] A. Khrennikov、S. Kozyrev 和 W.A. Z´uniga-Galindo. 超度量伪微分方程及其应用。《数学及其应用百科全书》第 168 卷。剑桥大学出版社，2018年。

[15] Sergei V. Kozyrev。超度量与 p进分析的方法及应用：从小波理论到生物物理学。《Steklov数学研究所论文集》，274:1–84，2011年。[16] S.V. Kozyrev。小波理论作为 p进谱分析。《数学》，66(2):367–376，2002年。[17] S.V. Kozyrev。 p进伪微分算子与 p进小波。《理论与数学物理》，138:322–332，2004年。[18] A. Mednykh 和 I. Mednykh。等谱亏格二图同构。《当代数学》，10:223–235，2016年。[19] M. M´ezard、G. Parisi、N. Sourlas、G. Toulouse 和 M. Virasoro。自旋玻璃相的性质。《物理评论快报》，52:1156–1159，1984年3月。[20] K. Oleschko、A. Khrennikov、B.F. Oleshko 和 J.-F. Parrot。素数无处不在，却又无处可寻……载于 B. Toni 编，《跨学科数学科学的新趋势与先进方法》，第155–167页，Cham，2017年。Springer International Publishing。[21] I. Oren 和 R. Band。节点计数相同的等谱图。《物理学杂志 A：数学与理论》，45:135203，2012年。[22] R. Rajkumar 和 D. Weisbart。二维及更高维 p进空间中布朗运动的分支与退出时间。arXiv:2210.16429 [math.PR],2022年。[23] Anton Tsitsulin、Davide Mottin、Panagiotis Karras、Alexander M. Bronstein 和 Emmanuel M¨uller。NetLSD：聆听图的形状。第24届 ACM SIGKDD 知识发现与数据挖掘国际会议论文集，2018年。[24] E.R. van Dam 和 W.H. Haemers。哪些图由其谱唯一确定？《线性代数及其应用》，373:241–272，2003年。[25] Vladimirov V.S.、Volovich I.V. 和 Zelenov E.I。 p进分析与数学物理。《苏联与东欧数学丛书》，1。World Scientific Publishing Co., Inc.，River Edge，NJ，1994年。.[26] H. Weyl。关于特征值的渐近分布。《哥廷根皇家科学院院刊》，第110–117页，1911年。

[27] W.A. Z´u˜niga-Galindo。通过 p进分析研究复杂网络上的反应扩散方程与图灵图样。《数学分析与应用杂志》，491(1):124239，2020年。
[28] M. Lawniczak、P. Kurasov、S. Bauch、M. Bia lous、A. Akhshani 和 L. Sirko。量子图的新谱不变量。《科学报告》，11(15342)，2021年。