arXiv:2303.00842v1 [math.AP] 1 Mar 2023

# 非局部梯度能量的离散近似

Andrea BraidesSISSA，意大利
的里雅斯特，Bonomea 路 265 号

Andrea Causin 和 Margherita SolciDADU，萨萨里大学，Duomo 广场 6 号，07041阿尔盖罗（SS），意大利

摘要

我们研究依赖于非局部梯度的泛函的离散近似。证明了离散化泛函在经典索博列夫空间中是强制的。

关键词：非局部梯度、近场动力学、分数阶Sobole夫空间、离散近似、离散到连续收敛。

## 1 引言

涉及非局部梯度 $\nabla_\rho u$ 的变分问题，其定义为

$$\nabla_\rho u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\xi) \frac{(u(x+\xi) - u(x))\xi}{|\xi|} d\xi, \tag{1}$$

其中 $\rho$ 是一个适当的对称正核，近年来已在例如[16, 12]中得到研究。特别是，黎兹核已用于研究分数阶Sobole夫空间（如 [5, 4]），在这种情况下，以及一般的奇异核情形下，该积分必须按主值理解，但这一点与本文无关。

分数阶梯度积分泛函的形式为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\nabla_\rho u)\, dx, \tag{2}$$

并且可以在适当定义的空间上处理边值问题。这些能量使我们能够考虑比通常的 Sobolev 空间中更弱形式的问题。另一方面，通过对这类梯度进行缩放，可以得到变分法中经典泛函的近似 [2]。更具体地说，考虑由 $\rho_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho(\frac{\xi}{\varepsilon})$定义的缩放核 $\rho_\varepsilon$后，根据 $u_\varepsilon$到 $u$的弱收敛，我们可以推导出 $\nabla_{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$ 弱收敛到通常的弱梯度（的某个倍数）

$\nabla u$，前提是 $\nabla_{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon$ $(1 < p < \infty)$的 $L^p$-范数满足某些有界性条件。特别是，按照 [5] 中的论证（另见 [13]），我们可以推导出如下收敛

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{\rho_\varepsilon} u|^p\,dx = C_\rho^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p\,dx, \quad \text{where} \quad C_\rho = \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} \rho(\xi)|\xi|\,d\xi, \tag{3}$$

秉承 Bourgain 等人那篇著名论文的思路 [3], ，以及相关的 Γ-收敛结果。这些结果得益于对分布形式下非局部梯度的刻画 [5, 6, 16], ；该刻画保证了非局部梯度的弱极限仍是非局部梯度，且对应于弱极限；甚至在收敛 (3) 的情形下，它们还是经典弱梯度。

本文提出一种离散化方法，用于处理如 (1) 中依赖于非局部梯度的能量。尽管这一主题与分数阶问题处理中的数值方法密切相关（例如参见 [8, 7, 9, 17, 18]），但本文应被视为通过变分方法探索近期离散系统分析技术的一部分。为说明这种方法的思路，我们可以将 (3) 中的收敛与 Bourgain 等人 [3], 所证明的分数阶型 Sobolev 空间中的类似收敛进行比较，其形式为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^p}\,dxdy = \widetilde{C}_\rho \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p\,dx, \quad \text{where} \quad \widetilde{C}_\rho = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

对于类型为 (4) 的泛函，可以采用离散化方法，证明它们等价于依赖于立方格点上参数化的差分 $u_i - u_j$ 的离散能量。这类差分可以解释为某种插值的差商；对于该插值，能量有限意味着其在某个经典 Sobolev 空间中有界。

对于非局部梯度，由于 (1) 中可能发生抵消，这种等价关系更加微妙。我们聚焦于一维情形，并在本文末尾提出向更高维的推广。为了与 (1) 平行地定义离散非局部梯度，注意到由于 $\rho$ 的对称性，我们还有

$$\nabla_\rho u(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi)\frac{u(x+\xi)\,\xi}{|\xi|}d\xi = -\int_0^{+\infty} \rho(\xi)\,u(x-\xi)d\xi + \int_0^{+\infty} \rho(\xi)\,u(x+\xi)d\xi. \tag{5}$$

鉴于此公式，若 $u\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ，则我们将其离散非局部梯度定义为函数 $u'_\rho\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, 其在 $k\in\mathbb{Z}$ 处的值为

$$(u'_\rho)_k = -\sum_{i=1}^{M} \rho_i\,u_{k+1-i} + \sum_{i=1}^{M} \rho_i\,u_{k+i}, \tag{6}$$

其中， $u_k = u(k)$ 和 $\rho_i$ 是正值，表示对核ρ的离散化。请注意，为了避免考虑 $\rho$ 在 0 处的值，我们在此定义中引入了不对称性，这相当于平移1 2。如果将 $u_k$ 视为连续函数在区间 $[k, k+1]$上的平均值，其中心为$k+\frac{1}{2}$，那么这并不令人意外。形式上更对称的定义是

$$(u'_\rho)_k = -\sum_{i=1}^{M} \rho_i\,u_{k-i} + \sum_{i=1}^{M} \rho_i\,u_{k+i}, \tag{7}$$

但如下文所示，这一定义不会导出强制能量。

接下来，我们对这个定义进行缩放。如果 $\varepsilon > 0$ 和 $u\colon\ \varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，那么尺度为 $\varepsilon$ 时的非局部梯度是函数 $u'_{\rho_\varepsilon}\colon\ \varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，它与离散核 $\rho_\varepsilon$相关；该离散核由 $\rho$通过缩放得到，方式与连续核相同，其中 $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$。当 $k \in \mathbb{Z}$ 时，$u'_{\rho_\varepsilon}$ 在 $\varepsilon k$处的值为

$$(u'_{\rho_\varepsilon})_k = \frac{1}{\varepsilon}\Big(-\sum_{i=1}^{M}\rho_i u_{k+1-i} + \sum_{i=1}^{M}\rho_i u_{k+i}\Big), \tag{8}$$

其中现在有 $u_k = u(\varepsilon k)$。

下面证明的主要结果是，我们可以将离散非局部梯度的弱收敛改进为插值函数的梯度的弱收敛。也就是说，如果 $u^\varepsilon\colon\ \varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 且 $u\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $u^\varepsilon$的插值在 $L^1_{\mathrm{loc}}$ 中弱收敛于 $u$，并且 $(u^\varepsilon)'_\rho$ 的插值在 $L^2$中弱收敛，那么实际上，$u^\varepsilon$ 的插值在 $W^{1,\ 2\ \mathrm{loc}}$ 中弱收敛于 $u$。

这种改进的收敛并非显而易见，需要对 $\rho_i$ 作一些最低限度的假设，因为在 (8) 中，系数符号的变化可能导致相消。事实上，若有一个常数 $\rho_i = \overline{\rho}$，那么

$$(u'_{\rho_\varepsilon})_k = \frac{\overline{\rho}}{\varepsilon}\big(-u_{k-M+1} - u_{k-M+2} - \ldots - u_{k-1} - u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+M}\big).$$

若 $M$ 是偶函数，并取 $u^\varepsilon_k = (-1)^k$，那么 $u^\varepsilon$ 的非局部梯度（尺度为 $\varepsilon$）为 0，但 $u^\varepsilon$ 的插值仅在 $L^{p\ \mathrm{loc}}$ 中弱收敛，且在任何 Sobolev 空间中都不有界。若采用梯度的对称定义 (7)，则对任意 $\rho_i$（包括非恒定的情形），同样的反例仍然成立。

作为应用，在离散到连续情形下，[1], 我们可以考虑如下形式的泛函

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varepsilon f\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{M}(u_{k+j} - u_k)\rho_j - \sum_{j=1}^{M}(u_{k-j+1} - u_k)\rho_j\Big)\Big), \tag{9}$$

并证明它们关于 $H^1(\mathbb{R})$ 中插值的弱收敛收敛到带有 $K = \sum\limits_{j=1}^{M}\rho_j(2j-1)$ 的 $\int f(Ku')dt$。

关于离散函数的这些结果，在连续情形下可解读为关于有界能量序列的平均值的结论。例如，如果 $\rho$ 的支集为[−1、 1] 和$\rho_i = \rho(\frac{i}{M})$，那么我们考虑的是$\rho$的分段常数近似。给定一个连续 $u$，并将值 $u_k$ 定义为 $u$ 在 $[\varepsilon\frac{k}{M}$上的平均值，其中$\varepsilon\frac{k+1}{M}]$，则 $\{u_k\}_k$ 的离散非局部梯度对应于 $u$ 在 $\varepsilon k$处采用离散化核时的连续非局部梯度；上述结果可解读为此类平均值（的分段仿射插值）在 $H^1_{\mathrm{loc}}$ 中的紧性结果。

## 2 离散非局部梯度

我们考虑 $M \in \mathbb{N}$和一个正数递减数列 $\rho_1, \ldots, \rho_M$。令 $u\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，并令 $u_k = u(k)$。与 $\rho$ 相关的离散非局部梯度是函数

$u'_\rho$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，其在 $k \in \mathbb{Z}$ 处的值由式 (6) 定义。注意，这个量也可以等价地写为

$$\begin{aligned}(u'_\rho)_k &= \rho_M(u_{k+M} - u_{k-M+1}) + \rho_{M-1}(u_{k+M-1} - u_{k-M+2}) + \ldots + \rho_1(u_{k+1} - u_k) \\ &= \rho_M \sum_{j=k-M+2}^{k+M} (u_j - u_{j-1}) + \rho_{M-1} \sum_{j=k-M+3}^{k+M-1} (u_j - u_{j-1}) + \ldots + \rho_1(u_{k+1} - u_k) \\ &= \rho_M(u_{k-M+2} - u_{k-M+1}) + (\rho_{M-1} + \rho_M)(u_{k-M+3} - u_{k-M+2}) + \ldots \\ &\quad +(\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_M)(u_k - u_{k-1}) + (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_M)(u_{k+1} - u_k) \\ &\quad +(\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_M)(u_{k+2} - u_{k+1}) + \ldots \\ &\quad +(\rho_{M-1} + \rho_M)(u_{k+M-1} - u_{k+M-2}) + \rho_M(u_{k+M} - u_{k+M-1}). \end{aligned} \tag{10}$$

我们将考虑 $\varepsilon > 0$ 以及针对函数 $u$定义的缩放离散非局部梯度：式 (8) 中的 $\varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 是函数 $u'_{\rho_\varepsilon}$： $\varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，其在点 $\varepsilon k$ 处的取值为

$$(u'_{\rho_\varepsilon})_k = \frac{1}{\varepsilon}(u'_\rho)_k, \tag{11}$$

其中 $u'_\rho$ 由式 (6) 给出，且我们使用了记号 $u_k = u(\varepsilon k)$。

请注意，若将 $u_k$ 视为连续函数 $u$在区间 $[k$上的平均值， $k+1]$ 那么就会失去一些对称性。特别地，从式 (8) 中的所有项减去 $u_k$ 后得到的公式 (1) 的类似形式为

$$\begin{aligned}(u'_{\rho_\varepsilon})_k = \frac{1}{\varepsilon}\Big(&-\rho_M(u_{k-M+1} - u_k) - \rho_{M-1}(u_{k-M+2} - u_k) - \ldots - \rho_2(u_{k-1} - u_k) \\ &+\rho_1(u_{k+1} - u_k) + \ldots + \rho_{M-1}(u_{k+M-1} - u_k) + \rho_M(u_{k+M} - u_k)\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

尽管根据式 (10)， $(u'_{\rho_\varepsilon})_k$ 可以看作差商的组合

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\varepsilon}$$

对于 $k - M + 1 < j \leqslant k + M - 1$，由于式 (12) 中符号的变化，一般而言， $(u'_\rho)_k$ 无法解释为某种插值的差商，也就无法据此推出某个 Sobolev 空间中的界；但 $M = 1$ 的情况除外，此时只有一项，因此这是一个经典的最近邻相互作用问题。

如果 $u_i = \varphi_i = \varphi(\varepsilon i)$ 对于某个 $C^1$ 函数，由于

$$\frac{u_{k+j} - u_{k+j-1}}{\varepsilon} = \frac{\varphi(\varepsilon(k+j)) - \varphi(\varepsilon(k+j-1))}{\varepsilon} = \varphi'(\varepsilon k) + o(1)$$

由于 $\varepsilon \to 0$ 对所有 $j \in \{-M+2$、.....、 $M\}$ 均成立，根据 (10) 可得

$$(u'_{\rho_\varepsilon})_k = \varphi'(\varepsilon k) \sum_{j=1}^{M} \rho_j(2j-1) + o(1),$$

使得$\varphi'_{\rho_\varepsilon}$ 的分段仿射（或等价地，分段常数）插值收敛到常数 $K := \sum_{j=1}^{M} \rho_j(2j-1)$的 $\varphi'$ 倍。

我们将考察以下形式的泛函的渐近行为

$$F_\varepsilon(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon f\big((u'_{\rho_\varepsilon})_k\big) \tag{13}$$

当 $f(z) \geqslant c_1|z|^2$ 时，尤其是它们的强制性性质。为此，令 $u^\varepsilon$： $\varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$。注意，若 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，由等式

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon((u^\varepsilon)'_{\rho_\varepsilon})_k\varphi_k = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon(\varphi'_{\rho_\varepsilon})_k u_k^\varepsilon,$$

我们可以推得：若 $\{u_k^\varepsilon\}_k$ 的插值在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛到某个 $u$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，且 $\{((u^\varepsilon)'_{\rho_\varepsilon})_k\}_k$ 的插值在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛到某个 $v$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，则

$$\int_{\mathbb{R}} v\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}} K\varphi' u\,dx. \tag{14}$$

因此， $u \in W^{1,\,2}(\mathbb{R})$ 且 $\{((u^\varepsilon)'_{\rho_\varepsilon})_k\}_k$ 的插值弱收敛到 $Ku'$。我们的目标是进一步改进这一收敛性，证明实际上 $\{u_k^\varepsilon\}_k$ 的分段仿射插值在 $W^{1,\,2}(\mathbb{R})$ 中收敛。

## 3 带状循环矩阵的特征值

利用式 (10) 中的第二个等式，我们将把离散非局部梯度表示为最近邻差分的线性组合，其系数由一个 Toeplitz矩阵给出；或者，等价地，考虑边界条件后，可表示为一个循环矩阵。此类矩阵的最小特征值的界可用于推导其强制性性质，并可证明一个一般性结果。

我们考虑对称的 $n$带状循环矩阵；也就是说， $N \times N$ 形如

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & & \cdots & \sigma_{N-1} \\ \sigma_{N-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & & \vdots \\ & \sigma_{N-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \sigma_2 \\ & & & & & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \cdots & & & \sigma_{N-1} & \sigma_0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

其中 $\sigma_{N-j} = \sigma_j$、 $\sigma_n \neq 0$ 以及 $\sigma_j = 0$，若 $j \in \{n+1,\ \ldots\ldots,\ N-n-1\}$。

我们假设以下凸性条件成立

$$\sigma_{j-1} - \sigma_j > \sigma_j - \sigma_{j+1} \quad \text{for all} \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{16}$$

该条件特别意味着，对于 $j \in \{0,\ \ldots\ldots,\ n\}$，有 $\sigma_j > 0$。

引理 3.1. 设 $N > 2n$。那么 $\lambda_{\min}$，即 $A$ 的最小特征值，大于一个与 $N$ 无关的正常数。

证明。根据 [11, 第 3] 章以及矩阵的对称性，$A$ 的最小特征值有如下界，其下界为函数的最小值

$$\Phi(t) = \sigma_0 + 2\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cos(jt)$$

对于 $t \in [0, \pi]$。这个三角和的正性是 Fej´er 所证明的经典结果（参见 [10] 原始来源，或参见 [14, 第 4] 章中的综述和英文翻译）：总之，利用 Fej´er 核 $\sum_{|k|<j} (j-k)\cos(kt) = \frac{1-\cos jt}{t}$ 的闭式表达，我们可以

将 $\Phi$ 改写为

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (\sigma_{j-1} - 2\sigma_j + \sigma_{j+1}) \frac{1-\cos(jt)}{1-\cos t}. \tag{17}$$

根据（16），每个系数 $\sigma_{j-1} - 2\sigma_j + \sigma_{j+1}$ 都严格为正，因此 $\Phi$ 是非负函数之和。特别地

$$\min \Phi \geqslant \sigma_0 - 2\sigma_1 + \sigma_2 > 0$$

于是得证。 □

注 若 $A = (a_{i,j})$ 是一个对称的、 $n$–带状的 $N \times N$ 托普利茨矩阵；也就是说，$a_{i,j} = \sigma_{|i-j|}$ 对于 $|i-j| \leqslant n$ 满足 $\sigma_n \neq 0$ 且 $a_{i,j} = 0$ 否则，则关于厄米特Toeplitz矩阵的一般结果 [11, 引理 4.1] 保证， $A$的特征值属于区间 $[m_\Phi, M_\Phi]$ ，其端点分别是傅里叶级数的最小值和最大值

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_k e^{ikt} = \sigma_0 + 2\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \cos(kt).$$

今后，若数列 $\{\sigma_k\}_{k=0,\dots,n}$ 满足凸性条件 (16)，则引理 3.1 对这类托普利茨矩阵也成立。

# 4 强制性与离散到连续收敛

我们首先考察如下参考二次能量的强制性： ws.

定理4.1。设 $\rho_i > 0$, $i \in \{1, \dots M\}$ 是实数递减数列。设 $(a, b)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界区间，并令能量

$$F_\varepsilon(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \Big( \sum_{j=1}^{M} (u_{k+j} - u_k)\rho_j - \sum_{j=1}^{M} (u_{k-j+1} - u_k)\rho_j \Big) \right|^2 \tag{18}$$

在 $u$ 上定义为： $\varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，其中 $u(x) = 0$，若 $x \in \mathbb{R}\backslash(a, b)$。那么存在常数 $\Lambda$，使得

$$F_\varepsilon(u) \geqslant \Lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon \left| \frac{u_{k+1} - u_k}{\varepsilon} \right|^2 \tag{19}$$

对所有 $u$ 和 $\varepsilon < \frac{1}{2M}$。

证明。我们不妨假设 $(a、\ b) = (0、\ 1)$。

令 $A$ 为式 (15) 中定义的矩阵，且 $n = M - 1$ 和

$$\sigma_j = \sum_{k=j+1}^{M} \rho_k.$$

注意， $\rho_i$ 上的单调性条件确保式 (16) 成立，且式 (17) 中的函数为

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (\rho_j - \rho_{j+1}) \frac{1 - \cos(jt)}{1 - \cos t}.$$

由引理 3.1 可知，对于所有满足 $\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = 1$ 的 $z$，我们有

$$|Az| \geqslant |\langle Az, z\rangle| \geqslant \lambda_{\min},$$

因此，对于所有 $z$，我们有 $|Az|^2 \geqslant \Lambda |z|^2$，其中 $\Lambda = (\lambda_{\min})^2$。于是，取 $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} + 4M$ 并将前述估计应用于 $z_k = \frac{1}{\varepsilon}(u_{k+2M} - u_{k+2M-1})$，即可得到式 (19)。注意，对于 $k \in \{1,$ 有 $z_k = 0,$ ....., $2M\}$ 和 $k \in \{N - 2M + 1,$ ....., $N\}$，因此

$$F_\varepsilon(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \big| (Az)_{k-2M} \big|^2,$$

结论得证。 □

以下结果利用改进的强制性证明离散能量的离散到连续收敛。

定理 4.2。设 $\rho_i > 0, i \in \{1, \dots M\}$ 是实数递减数列。设 $f$ 是凸函数，且 $c_1|z|^2 + c_0 \leqslant f(z) \leqslant c_2|z|^2 + c_3$ 满足 $c_1, c_2 > 0$。设 $(a, b)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界区间，并设能量

$$F_\varepsilon(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon f\left( \frac{1}{\varepsilon} \Big( \sum_{j=1}^{M} (u_{k+j} - u_k)\rho_j - \sum_{j=1}^{M} (u_{k-j+1} - u_k)\rho_j \Big) \right) \tag{20}$$

定义为 $u\colon\ \varepsilon\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，其中若 $x \in \mathbb{R} \backslash (a, b)$，则 $u(x) = 0$。那么，随着 $\varepsilon \to 0$，存在 $F_\varepsilon$ 关于插值弱 $L^2$-收敛的 $\Gamma$-极限，并且

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u) = \int_{(a,b)} f(Ku')dt, \qquad K = \sum_{j=1}^{M} (2j - 1)\rho_j. \tag{21}$$

定义域为 $H_0^1(a, b)$。

证明。设 $u^\varepsilon$ 弱收敛到 $u$，且 $F_\varepsilon(u^\varepsilon)$ 一致有界。由前一个定理可知，相应的分段仿射插值序列在 $H^1(\mathbb{R})$中弱预紧，因此 $u^\varepsilon$ 确实在 $H^1(\mathbb{R})$中弱收敛到 $u$。由于 $u^\varepsilon = 0$ 在 $(a$ 之外， $b)$ 的收敛实际上发生在 $H_0^1(a$中， $b)$。由于对所有固定的 $j$，所有

差商的插值 $\frac{1}{\varepsilon}(u^{\varepsilon}_{k+j-1} - u^{\varepsilon}_{k+j})$ 弱收敛到 $u'$；由 (10) 可知，$(u^{\varepsilon})'_{\rho}$ 的弱极限为 $Ku'$（也可像 (14) 中那样得到）。由 $z \mapsto \int f(z)\,dt$ 的弱下半连续性，我们进而得到下极限不等式。

若 $u \in C_c^{\infty}(a、\ b)$ 在 $(a、\ b)$ 外延拓为 0，则有

$$F_{\varepsilon}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon f(Ku'(\varepsilon k)) + o(1),$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们得到逐点收敛至 $\int_{(a,\ b)} f(Ku')dt$。上极限不等式由稠密性得出。

□

# 5 连续情形插值的应用

我们将使用离散化，为形如以下形式的连续体泛函的 Γ-极限提供近似

$$F_{\varepsilon}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u)\,dx$$

在一维情形中，关于 $L^2$ 中的弱收敛。与上文相同，此处 $\rho_{\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{\xi}{\varepsilon})$。

注意等式

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\nabla_{\rho_{\varepsilon}} \varphi(x)\,dx$$

由此可得，与（14）中一样，若 $u_{\varepsilon}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $u$，且序列 $\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中有界，则实际上 $u \in H^1(\mathbb{R})$，并且序列 $\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $Ku'$，其中

$$K = \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi)|\xi|\,d\xi,$$

并且，若满足如下形式的增长条件 $f(z) \geqslant c_1|z|^2$，则可推出 $F_{\varepsilon}$ 收敛到 Γ

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(Ku')\,dx$$

相对于 $L^2(\mathbb{R})$ 中的弱收敛而言。然而，我们注意到，对于函数序列 $u_{\varepsilon} \in L^2(\mathbb{R})$，即使 $F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$ 一致有界，一般也无法推出更强的强制性。事实上，注意到若 $\rho$ 可积，则对每个 $\varepsilon > 0$ $\nabla_{\rho_{\varepsilon}}$，它都是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的连续算子；因此，对于固定函数 $u \in H^1(\mathbb{R})$，我们可以找到一个在 $L^2$ 范数下趋于 $u$ 的 $u_{\varepsilon}$，使得 $\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}$ 接近 $\nabla_{\rho_{\varepsilon}} u$，但 $\nabla u_{\varepsilon}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中无界。更一般地，我们可以给出一个明确的反例，该反例对 Riesz 分数阶梯度也成立。设 $\rho(\xi) = |\xi|^{-1-\alpha}$，其中 $\alpha \in (0、\ 1)$。固定 $R > 1$，并令 $\varphi$ 为如下定义的截断函数：$\varphi(t) = \min\{1、\ (R - |t|)^+\}$。定义

$$u_{\varepsilon}(t) = \varepsilon^2 \sin\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\varphi(t).$$

于是我们有

$$F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leqslant 2\int_{-R}^{R} \Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(x-y)(u_{\varepsilon}(x) - u_{\varepsilon}(y))\frac{x-y}{|x-y|}\,dx\Big)^2 dy.$$

利用界限 $|u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(s)|\leqslant 2|t-s|$ 和 $|u_\varepsilon(t)|\leqslant \varepsilon^2$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}&\rho_\varepsilon(x-y)(u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y))\frac{x-y}{|x-y|}\,dx\Big|\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{|\xi|<\varepsilon^{3/2}\}}\frac{\varepsilon^{1+\alpha}}{|\xi|^{1+\alpha}}|u_\varepsilon(y+\xi)-u_\varepsilon(y)|\,d\xi+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{|\xi|>\varepsilon^{3/2}\}}\frac{\varepsilon^{1+\alpha}}{|\xi|^{1+\alpha}}|u_\varepsilon(y+\xi)|\,d\xi\\ &\leqslant \frac{4}{\varepsilon^{1-\alpha}}\int_0^{\varepsilon^{3/2}}\frac{1}{\xi^\alpha}\,d\xi+2\varepsilon^{1+\alpha}\int_{\varepsilon^{3/2}}^{+\infty}\frac{1}{\xi^{1+\alpha}}\,d\xi=\frac{4}{1-\alpha}\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}+\frac{2}{\alpha}\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{2}}\leqslant c(\alpha)\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

因此，

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon)\leqslant 4R\ c(\alpha)^2\varepsilon^{1-\alpha}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，它是无穷小量，因此不存在常数 $c$ 使得 $F_\varepsilon(u_\varepsilon)\geqslant c\|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2$。

现在我们假设 $\rho:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 是一个非负、偶的连续核，其支集为 $[-1,1]$，并且在 $[0,1]$ 上递减。对于 $M\in\mathbb{N}$，令 $\rho_i^M=\rho(\frac{i}{M})$，其中 $i\in\{1,\dots,M\}$，并定义偶分段常数函数 $\rho^M$ 如下

$$\rho^M(\xi)=\rho_i^M\quad\text{in}\quad\Big(\frac{i-1}{M},\frac{i}{M}\Big).$$

我们还令 $\rho_\varepsilon^M(\xi)=\frac{1}{\varepsilon}\rho^M(\frac{\xi}{\varepsilon})$。由 $u$: $\frac{\varepsilon}{M}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 上的函数定义的离散能量族 $F^{M,\varepsilon}$ 定义如下

$$F^{M,\varepsilon}(u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\varepsilon}{M}f\big((u'_{\rho_\varepsilon^M})_k\big)$$

可以将其视为族 $F_\varepsilon$ 的一种近似，具体而言，当 $M\to+\infty$ 时，$\Gamma$-极限的 $F_\varepsilon^M$ 与 $F_\varepsilon$ 的极限相同。此外，对于固定的 $M$，族 $\{F^{M,\varepsilon}\}_\varepsilon$ 在 $H^1(\mathbb{R})$ 中是等强制的，其含义如本文第一部分所述。

序列 $F^{M,\,\varepsilon}$ 可以与连续能量序列相关联

$$F_\varepsilon^M(u)=\int_{\mathbb{R}}f(\nabla_{\rho_\varepsilon^M}u)\,dx.$$

给定一个序列 $\{u_\varepsilon\}$，其 $F_\varepsilon^M(u_\varepsilon)$ 一致有界，我们可以假设，经过一个小的平移后，

$$F_\varepsilon^M(u_\varepsilon)\geqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\varepsilon}{M}f\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\rho_\varepsilon(\xi)\,u\Big(\frac{\varepsilon k}{M}+\xi\Big)\frac{\xi}{|\xi|}\,d\xi\right).$$

我们将离散函数序列 $u^{\varepsilon,M}$ 定义为: $\frac{\varepsilon}{M}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$

$$u^{\varepsilon,M}\Big(\frac{\varepsilon}{M}j\Big)=u_j^{\varepsilon,M}=\frac{\varepsilon}{M}\int_{\frac{\varepsilon(j-1)}{M}}^{\frac{\varepsilon j}{M}}u_\varepsilon(t)\,dt.$$

此外，我们将函数 $z^{\varepsilon,M}$ 定义为：$\frac{\varepsilon}{M}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$

$$z^{\varepsilon,M}\Big(\frac{\varepsilon}{M}j\Big)=z_j^{\varepsilon,M}=\frac{M}{\varepsilon}(u_j^{\varepsilon,M}-u_{j-1}^{\varepsilon,M}).$$

这些函数是 $u^{\varepsilon,M}$ 在 $\frac{\varepsilon}{M}\mathbb{Z}$上的差商。我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_{\rho_\varepsilon^M}u\Big(\frac{\varepsilon k}{M}\Big)&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\rho_\varepsilon^M(\xi)u\Big(\frac{\varepsilon k}{M}+\xi\Big)\frac{\xi}{|\xi|}\,d\xi\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\rho^M\Big(\frac{\xi}{\varepsilon}\Big)u\Big(\frac{\varepsilon k}{M}+\xi\Big)\frac{\xi}{|\xi|}\,d\xi\\
&=\frac{1}{\varepsilon M}\Big(\sum_{i=1}^{M}\rho_i^M u_{i+k}^{\varepsilon,M}-\sum_{i=-M+1}^{0}\rho_{1-i}^M u_{i+k}^{\varepsilon,M}\Big)\\
&=\frac{1}{\varepsilon M}\Big(\rho_1^M(u_{1+k}^{\varepsilon,M}-u_k^{\varepsilon,M})+\rho_2^M(u_{2+k}^{\varepsilon,M}-u_{-1+k}^{\varepsilon,M})+\cdots+\rho_M^M(u_{M+k}^{\varepsilon,M}-u_{-M+1+k}^{\varepsilon,M})\Big)\\
&=\frac{1}{M^2}\Big((\sum_{j=1}^{M}\rho_j^M)z_{1+k}^{\varepsilon,M}+(\sum_{j=2}^{M}\rho_j^M)(z_k^{\varepsilon,M}+z_{2+k}^{\varepsilon,M})+\cdots+\rho_M^M(z_{-M+1+k}^{\varepsilon,M}+z_{M+k}^{\varepsilon,M})\Big),
\end{aligned}$$

因此， $\nabla_{\rho_\varepsilon^M}u$ 在 $\frac{\varepsilon}{M}k$ 处与 $u^{\varepsilon,M}$ 在 $k$处的离散梯度一致。

对于 $i\in\{0,\ldots,M-1\}$，我们考虑

$$\sigma_i=\sigma_i^M=\sum_{j=i+1}^{M}\rho_j^M.$$

设 $u^\varepsilon$ 具有紧支集，因此当 $k\in[-N_\varepsilon$时， $u_k^\varepsilon$ 不为零。我们考虑上文定义的维数为 $2N_\varepsilon+2M+1$的循环矩阵，记作 $A^M$。

若取 $z=z^{\varepsilon,M}$ 为分量是 $z^{\varepsilon}{}_{,j}{}^{M}$ 的向量，则得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-N_\varepsilon-M}^{N_\varepsilon+M}\frac{\varepsilon}{M}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\rho_\varepsilon(\xi)u\Big(\frac{\varepsilon k}{M}+\xi\Big)\frac{\xi}{|\xi|}\,d\xi\Big)^2\\
&=\sum_{k=-N_\varepsilon-M}^{N_\varepsilon+M}\frac{\varepsilon}{M}\Big(\frac{1}{M^2}\langle A^Mz,e_{k+1}\rangle\Big)^2=\frac{\varepsilon}{M}\Big(\frac{1}{M^2}|A^Mz|\Big)^2\\
&\geqslant\frac{\varepsilon}{M}\Big(\frac{\lambda_{\min}}{M^2}\Big)^2|z|^2=\Big(\frac{\lambda_{\min}}{M^2}\Big)^2\sum_{k=-N_\varepsilon-M}^{N_\varepsilon+M}\frac{\varepsilon}{M}\Big(\frac{u_k^{\varepsilon,M}-u_{k-1}^{\varepsilon,M}}{\frac{\varepsilon}{M}}\Big)^2,
\end{aligned}$$

这证明了 $\{F_\varepsilon^M\}_\varepsilon$的等强制性。此外，若 $u_\varepsilon$ 在$L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $u$，则 $\{u^{\varepsilon,M}\}_\varepsilon$ 在 $H^1(\mathbb{R})$ 中弱收敛到 $u$，并且我们有下界

$$\liminf_{\varepsilon\to0^+}F_\varepsilon^M(u_\varepsilon)\geqslant\liminf_{\varepsilon\to0^+}F^{M,\varepsilon}(u^{\varepsilon,M}).$$

对 $u\in C^1(\mathbb{R})$ 进行直接计算，同样可以得到上界，并证明 Γ-极限相等。令 $M\to+\infty$，我们便得到 $F_\varepsilon$ 的 Γ-极限的一个近似。

# 6 推广到更高维

我们可以沿用上述论证，在高于一维的情形下给出离散近似。定义离散非局部梯度时需要谨慎，以避免各项过度抵消。对于类似问题，我们在一维中已经遇到过，可以采用一些细微的不对称性来处理。

为了推广一维定义，注意我们可以将点 $k \in \mathbb{Z}$ 处的一维非局部梯度改写为

$$\big(\nabla_\rho u\big)_k = \sum_{i\in\mathbb{Z},\ i>0} \rho_i u_{k+i} - \sum_{i\in\mathbb{Z},\ i\leqslant 0} \rho_i u_{k+i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \rho_i u_{k+i}\,\mathrm{sign}\Big(i-\frac{1}{2}\Big), \tag{22}$$

其中

$$\rho_i = \rho\Big(|i-\frac{1}{2}|\Big). \tag{23}$$

该定义可以推广到定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的函数，此时离散非局部梯度是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个向量。沿第 $n$ 个方向的离散非局部导数可以定义为

$$\Big(\frac{\partial_\rho u}{\partial x_n}\Big)_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_i u_{k+i} \frac{i_n - \frac{1}{2}}{\Big|i - \Big(\frac{1}{2},\dots\frac{1}{2}\Big)\Big|} \tag{24}$$

对于 $k\in\mathbb{Z}^d$，其中

$$\rho_i = \rho\Big(\Big|i - \Big(\frac{1}{2},\dots\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big). \tag{25}$$

然而，这一定义无法描述函数 $u$ 的插值性质，因为例如，取值为 $u_k = (-1)^{|k_1|+\cdots+|k_n|}$ 的振荡函数 $u$ 的离散非局部梯度将为零。

我们对上述定义进行了细微修改，在 $n$ 方向与其他方向之间引入了不对称性，从而禁止零梯度振荡。

定义 6.1. 设 $\rho\colon\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个支集为 $[0,M]$、在 $[0,M]$ 上递减的正核。我们将函数 $u\colon\ \mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ 在 $n$ 方向上的离散非局部偏导数定义为如下函数：

$$\Big(\frac{\partial_\rho u}{\partial x_n}\Big)_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_i^n u_{k+i} \tag{26}$$

对于 $k\in\mathbb{Z}^d$，其中

$$\rho_i^n = \rho\Big(|i-\frac{1}{2}e_n|\Big)\frac{i_n-\frac{1}{2}}{|i-\frac{1}{2}e_n|}. \tag{27}$$

注意，对于 $i_n>0$，$\rho_i^n$ 是非负的；对于 $i_n\leqslant 0$，$\rho_i^n$ 是非正的，这与一维定义类似。离散非局部梯度是 $\mathbb{R}^d$ 中的向量 $\nabla_\rho u$，其 $n$ 个分量是沿 $n$ 方向的离散非局部导数。

如果 $\varepsilon>0$ 缩放离散非局部偏导数 $\dfrac{\partial_{\rho_\varepsilon} u}{\partial x_n}$ 及相关梯度按照一维情形中的方式进行缩放定义。

通过考察一维截面，可以证明涉及离散非局部梯度的能量的强制性。我们给出一个二维例子。

例6.2。在 $d = 2$ 维中，我们考虑最简单的非平凡情形 wi th $M = 2$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial_\rho u}{\partial x_1}\Big)_k &= \rho_1(u_{k+e_1} - u_k) + \rho_2(u_{k+2e_1} - u_{k-e_1}) \\ &\quad + \varrho(u_{k+e_1+e_2} - u_{k+e_2}) + \varrho(u_{k+e_1-e_2} - u_{k-e_2}),\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\rho_1 = \rho\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad \rho_2 = \rho\Big(\frac{3}{2}\Big), \qquad \varrho = \rho\Big(\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

按照一维论证，我们将这个和改写为关于差分 $z_k = u_{k+e_1} - u_k$ 的形式：

$$\Big(\frac{\partial_\rho u}{\partial x_1}\Big)_k = (\rho_1 + \rho_2)z_k + \rho_2 z_{k+e_1} + \rho_2 z_{k-e_1} + \varrho z_{k+e_2} + \varrho z_{k-e_2}.$$

现在假设 $u$ 的支集包含于 $[-N+2、\ N-2]^2$ 中。那么我们可以写成

$$\Big(\frac{\partial_\rho u}{\partial x_1}\Big)_k = (A^N z)_k,$$

其中 $A^N$ 是一个 $N^2 \times N^2$ 对称托普利兹循环矩阵，对角线上为 $\rho_1 + \rho_2$，两个相邻非对角项上为 $\rho_1$，而第 $N$ 阶邻点上的元素为 $\varrho$。随后，我们可以利用第 [11, 章中的 3] 以及矩阵的对称性，将 $A^N$ i 的最小特征值估计为函数的最小值

$$\Phi^N(t) = \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_2\cos(t) + 2\varrho\cos(Nt).$$

确保$A^N$ 的最小特征值严格为正，且与 $N$ 无关的一个充分条件是

$$\rho_1 > \rho_2 + 2\varrho. \tag{29}$$

对于沿 $x_2$方向的偏导数，也可以用同样的方法论证。若条件 (29) 成立，则可以按照定理 4.1的证明进行论证。具体而言，若定义

$$F_\varepsilon(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon^2 \big|(\nabla_{\rho_\varepsilon} u)_k\big|^2, \tag{30}$$

则存在 $\Lambda$ 使得

$$F_\varepsilon(u) \geqslant \Lambda \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}^2, |k-\ell|=1} \varepsilon^2 \left|\frac{u_k - u_\ell}{\varepsilon}\right|^2, \tag{31}$$

其中，对于 $u$，$u_k = u(\varepsilon k)$：$\varepsilon\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$。

我们不再进一步探讨如何优化关于 $\rho$ 的条件，以确保满足如 (31) 中的强制性条件这一颇有意思的问题。

致谢。感谢 Carolin Kreisbeck 和 Giorgio Stefani 提出的宝贵意见。

# 参考文献

[1] R. Alicandro、A. Braides、M. Cicalese 和 M. Solci。《界面离散变分问题》。剑桥大学出版社，2023 年。[2] J.C. Bellido、J. Cueto 和 C. Mora-Corral。涉及 $s$ 分数阶梯度的拟凸函数的 Γ-收敛及其局部对应物。《变分法与偏微分方程》60（2021），7。[3] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu。再论 Sobolev 空间。载于《最优控制与偏微分方程》，IOS出版社，阿姆斯特丹，2001 年，第 439–455 页。[4] E. Bru`e、M. Calzi、G. E. Comi 和 G. Stefani。分数阶 Sobolev 空间与分数阶变分的分布方法：渐近分析 II。《法国科学院数学报告》360（2022），589–626。[5] G. E. Comi 和 G. Stefani，分数阶 Sobolev 空间与分数阶变分的分布方法：爆破的存在性，《泛函分析杂志》277（2019），3373–3435。[6] G.E. Comi 和 G. Stefani，分数阶 Sobolev 空间与分数阶变分的分布方法：渐近分析 I，《马德里康普顿斯大学数学杂志》，2022 年。[7] M. D'Elia、Q. Du、C. Glusa、M. Gunzburger、X. Tian 和 Z. Zhou。非局部与分数阶模型的数值方法。《数值分析纪事》 29 （ 2020 ），1–124。[8] M. D'Elia 和 M. Gunzburger。有界区域上的分数阶拉普拉斯算子作为非局部扩散算子的特例。《计算机与数学及其应用》66（2013），1245–1260。[9] Q. Du、M.Gunzburger、R.B. Lehoucq 和 K. Zhou。非局部向量微积分、非局部体积约束问题与非局部平衡律。《数学建模方法与应用科学》23（2013），493–540。¨ [10] L. Fej´er，关于按三角函数或勒让德函数展开的级数之和的正性：第一篇。《匈牙利皇家弗朗茨·约瑟夫大学学报：数学科学辑》（2），第 75–86 页（1926）。¨ R.M. Gray。《托普利兹矩阵与循环矩阵：综述》。斯坦福大学信息系统实验室，2002 年。[11] C. Kreisbeck 和 H. Sch[12] onberger。分数阶变分法中的拟凸性：下半连续性与松弛的刻画。《非线性分析》215（2022），112625。¨T. Mengesha 和 D. Spector。不同拓扑下非局部梯度的局部化。《变分法与偏微分方程》52（2015），253–279。[13] G.V. Milovanovi[14] c、D.S. Mitrinov´c 和 Th.M. Rassias。《多项式专题：极值问题、不等式、零点》。世界科学出版社，新加坡（1994）。´J.F. Rodrigues 和 L. Santos，关于带分数阶梯度的非局部变分不等式与拟变分不等式，《应用数学与优化》80（2019），835–852。

[16] T.-T. Shieh 和 D.E. Spector. 关于一类新型分数阶偏微分方程。Adv. Calc. Var. 8 (2015), 321–336[17] X. Tian 和 Q. Du. 对非局部扩散和线性近场动力学方程不同近似方法的分析与比较。SIAM J. Numer. Anal. 51 (2013), 3458–3482[18] X. Tian 和 Q. Du. 渐近相容格式及其在非局部模型稳健离散化中的应用。SIAM J. Numer. Anal. 52 (2014), 1641–1665