arXiv:2303.00852v1 [math.AP] 1 Mar 2023

关于 $\mathbb{H}^3$ 上粗糙数据三次散焦非线性波动方程的傅里叶截断方法

CHUTIAN MA

Abstract. 本文研究三维双曲空间上的三次散焦非线性波动方程。我们使用傅里叶截断方法证明，若初始数据属于 $H^s(\mathbb{H}^3)$，$s > \frac{182}{201} \approx 0.905$，则该方程整体适定且具有散射性。

1. Introduction

本文研究双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 上的以下三次散焦非线性波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3} u + F(u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $F(u) = u^3$。假设初始数据 (u_0, u_1) 属于索об列夫空间 $H^s(\mathbb{H}^3)$，其范数定义为

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{H}^3)} := \|(-\Delta_{\mathbb{H}^3})^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbb{H}^3)}$$

在欧几里得空间上，众所周知[LS95] 当 $s \geq \frac{1}{2}$ 时，1.1 是局部适定的。局部适定性和整体适定性的定义如下:

定义 1.1（局部适定性）。如果存在一个包含时刻 0 的区间 $I \subset \mathbb{R}$，满足：则称初值问题 (1.1) 是局部适定的。

(1) 存在唯一的解 $u \in C_t H_x^{\frac{1}{2}}(I) \cap L_{t,x}^4(I)$ 和 $u_t \in C_t H_x^{-\frac{1}{2}}(I)$

(2) 解关于初始数据连续依赖，其意义是按照 (1) 中函数空间的拓扑

定义 1.2（整体适定性）。如果对于任意区间 $I \subset \mathbb{R}$，初值问题 1.1 都满足：则称其为整体适定的。

(1) 存在唯一的解 $u \in C_t H_x^{\frac{1}{2}}(I) \cap L_{t,x}^4(I)$ 和 $u_t \in C_t H_x^{-\frac{1}{2}}(I)$

(2) 解关于初始数据连续依赖，其意义是按照 (1) 中函数空间的拓扑

H^1 解具有守恒能量

$$E(u)(t) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{4}u^4 \tag{1.2}$$

由 (1.2) 和局部适定性可得，(1.1) 的 H^1 解具有整体适定性。事实上，猜想对于所有满足 $s \geq \frac{1}{2}$ 的 $H^s \times H^{s-1}$ 中初始数据，整体适定性和散射均成立。

定义 1.3. 若存在 (u_0^+, u_1^+)、$(u_0^-, u_1^-) \in H^s \times H^{s-1}$，使得 (1.1) 的解在 $H^s \times H^{s-1}$ 中散射到一个线性解

$$lim_{t\to+\infty}\|(u,u_t) - S(t)(u_0^+, u_1^+)\|_{H^s\times H^{s-1}} = 0$$
$$im_{t\to-\infty}\|(u,u_t) - S(t)(u_0^-, u_1^-)\|_{H^s\times H^{s-1}} = 0$$

其中，$S(t)(u_0, u_1)$ 是自由波动方程的传播子。

欧几里得空间上的非线性波方程已有大量关于粗糙数据的研究结果。

[KPV00] 证明了方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中对于 $\frac{3}{4} < s < 1$具有整体适定性。具体而言，他们证明了解的 $H^s \times H^{s-1}$ 范数随时间至多呈多项式增长。整体解所需的最低正则性已得到改进，例如参见 [GP03], [BC06], [Roy07] 。最近，[Dod19] 证明了当 $s > \frac{1}{2}$时，方程在 $H^s \times H^{s-1}$ 中对径向初始数据具有整体适定性；在随后的一篇论文中，[Dod18] 将这一结果推广到了临界 Sobolev 空间 $H^{\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}$（仍假设径向对称）。另见 [Dod22]

在双曲空间中，由于几何原因，自由波动方程的色散估计比欧几里得情形更强。Pierfelice 在 [Pie08] 中针对 Damek-Ricci 空间上的方程 (1.1)（径向数据）得到了加权 Strichartz 估计；Damek-Ricci 空间包含双曲空间。另见 [Ion00]。对于三维双曲空间，Metcalfe 和 Taylor[MT 11] 研究了 $\mathbb{H}^3$ 上的方程 (1.1)，并得到了 Strichartz 型不等式。他们结果中的可容许对范围比欧几里得空间中对应的范围更广。见 (2.4)。作为应用，他们证明了方程 (1.1) 在 $H^{\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}$中、初始数据较小时的整体结果。Anker 和 Pierfelice 在[AP14] 中也研究了双曲空间 $\mathbb{H}^d$、$d \geq 2$上的 Klein-Gordon 方程，其中波方程是其特例。他们证明了一大类可容许对对应的 Strichartz 估计。

拉普拉斯算子 $-\Delta$ 在 $\mathbb{H}^d$ 上是正的，其谱为 $[\rho, +\infty)$，其中 $\rho = \frac{d-1}{2}$。我们也考虑方程 (1.1) 的一个变体，称为移位波方程 (1.3)。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3} - \rho^2 u + F(u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

Fontaine 在 [Jea97] 中研究了二维和三维情形下的移位波方程。Tataru 在 [Tat01] 中得到了双曲空间中移位波方程的色散估计。Anker、Pierfelice 和 Vallarino 针对一大类可容许对，得到了方程 (1.3) 的斯特里茨估计。作为应用，Shen 和 Staffilani 在 [SS16] 中证明了方程 (1.1)（以及更一般的幂次情形）对于具有 $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$初始数据的整体适定性和散射。

本文旨在研究初始数据正则性较低时的初值问题 (1.1)，其中$H^s \times H^{s-1}$, $s < 1$。我们的主要结果如下定理所述：

定理 1.4. 假设 $s > \frac{182}{201} \approx 0.905$，初值问题 (1.1) 对于 $H^s \times H^{s-1}$ 中的初始数据是整体适定的，且满足散射性质。

我们的证明采用傅里叶截断方法，作者也曾用该方法证明了类似的结果，适用于 [Ma22] 中的非线性三次 Schr´odinger 方程。从局部结果得到整体结果的主要障碍，是缺少能够控制解的 $H^{\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}$ 范数的守恒量。为此，我们将初始数据拆分为两部分，一部分是高频数据，另一部分是低频数据。高频数据按照线性方程演化，低频数据则按照标准三次方程演化。由此得到一个修正项，它的初始数据为零，并满足三次方程，但非线性项中还包含一些误差项。我们先在一个较小的时间区间内演化这三个部分。低频模态具有守恒能量。我们需要估计的是修正项的能量。在下一个时间区间开始演化时，我们会将修正项加到低频模态中。因此，新的低频模态以原低频模态和修正项之和作为初始数据，而新的修正项则再次从零初始数据开始。我们将时间划分为若干子区间，并逐步重复这一过程。最后，我们证明低频模态从修正项获得的能量增量是有界的。

本文结构安排如下。第 2 节介绍证明所需的一些预备结果。第 3 节阐述我们如何运用傅里叶截断方法，并估计给定时间区间内低频模态的能量。第 4 节结合第 3 节的结果与莫拉维茨不等式，通过自举论证证明散射范数保持有界。因此，整体适定性与散射性质得以成立。

2. Preliminary Results

本节介绍后续将用到的一些预备结果。

2.1. 关于 $\mathbb{H}^3$ 的分析。我们将通过以下模型定义双曲空间。考虑赋有度量 $-dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ 和双线性形式 $[x,y]=x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$ 的标准闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{3+1}$。双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 定义为满足条件 $[x,x]=1$ 的子流形，其度量由闵可夫斯基空间诱导而来。

我们还将在双曲空间上使用以下极坐标。我们用二元组 $(r,\omega)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 表示前述 $\mathbb{H}^3$ 模型中的点 $(coshr, sinhr\omega)$。r 表示点 $(coshr, sinhr\omega)$ 到原点 (1,0,0,0) 的距离。

极坐标下的度量形式为

$$g_{\mathbb{H}^3}=dr^2+sinh^2rd\omega^2$$

积分则按如下方式计算

$$\int_{\mathbb{H}^3}fd\mu=\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^2}f(r,\omega)sinh^2rdrd\omega$$

与欧几里得情形类似，傅里叶变换也可以对适当的函数定义。例如参见 [Hel01]。事实上，$\mathbb{H}^3$ 上的傅里叶变换将定义在 $\mathbb{H}^3$ 上的函数映射为定义在 (λ,θ) 上的函数 $\in\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$，其变换公式和反演公式如下：

$$\hat{f}(\lambda,\theta)=\int_{\mathbb{H}^3}f(x)[x,b(\omega)]^{i\lambda-1}d\mu(x)$$

$$f(x)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^2}\tilde{f}(\lambda,\theta)[x,b(\omega)]^{-i\lambda-1}\frac{d\lambda d\theta}{|c(\lambda)|^2}$$

其中 $b(\omega)=[1,\omega]\in\mathbb{R}^4$，哈里什-钱德拉函数 $c(\lambda)$ 定义为

$$c(\lambda)=C\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(i\lambda+1)}$$

对于 L^2 可积函数，以下普朗歇尔公式成立：

$$\int_{\mathbb{H}^3}f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu=\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^2}\hat{f}_1(\lambda,\theta)\overline{\hat{f}_2(\lambda,\theta)}\frac{d\lambda d\theta}{|c(\lambda)|^2}$$

拉普拉斯-贝尔特拉米算子的极坐标形式为

$$\Delta_{\mathbb{H}^3}=\partial_r^2+\frac{2coshr}{sinhr}\partial_r+\frac{1}{sinh^2r}\Delta_{\mathbb{S}^2}$$

$\Delta_{\mathbb{H}^3}$ 是严格正定的。$\Delta_{\mathbb{H}^3}$ 的谱为 $[1,\infty)$。事实上，拉普拉斯算子的傅里叶变换为

$$\widehat{(-\Delta_{\mathbb{H}^3}f)}=(\lambda^2+1)\hat{f} \tag{2.1}$$

因此，我们有如下庞加莱不等式

命题 2.1. 对于 $\alpha<\beta$，我们有

$$\|(-\Delta_{\mathbb{H}^3})^{\frac{\alpha}{2}}f\|\lesssim\|(-\Delta_{\mathbb{H}^3})^{\frac{\beta}{2}}f\| \tag{2.2}$$

2.2. 基于热流的频率投影。On 欧几lid里空间中，我们 defi ne 算子 o f the f orm $\chi(-\Delta)$ 中，其中 χ 是一个紧支撑凸起函数，用于局部化频率。但遗憾的是，这种方式定义的算子在一般流形上并非 L^p 有界。因此，我们使用以下基于热流的算子来替代通常的 Littlewood–Paley 算子。以下定义和伯恩斯坦不等式与 [LLOS18] 中相同。

$$\begin{aligned}P_{\geq s}f&=e^{s\Delta}f\\P_{<s}f&=f-P_{\geq s}f\\P_sf&=(-s\Delta)e^{s\Delta}f\end{aligned} \tag{2.3}$$

命题 2.2。(2.3) 中定义的算子在 $L^p(\mathbb{H}^3)$ 上有界。

直观地说，$P_{\geq s}$ 可视为局部化到频率 $\leq s^{-\frac{1}{2}}$，而 P_s 可视为局部化到频率 $\sim s^{-\frac{1}{2}}$，因为它们满足以下伯恩斯坦不等式：

命题 2.3（伯恩斯坦不等式）。

$$\|P_{<s}f\|_{L^p_x} \lesssim s^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^p_x}$$
$$\|\nabla P_{\geq s}f\|_{L^p_x} \lesssim s^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p_x}$$
$$\|\nabla P_s f\|_{L^p_x} \sim s^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p_x}$$

2.3. 斯特里卡茨估计。我们将使用 [MT11] 中关于三维双曲空间上波方程的斯特里茨估计。定义 $\mathcal{R}$ 为由满足下列条件的 (p,q,γ) 构成的集合

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}$$
$$p,q\geq 2$$
$$\gamma=\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-\frac{3}{q}$$

以及 $\mathcal{E}$ 为由 (p,q,γ) 构成的集合

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\leq\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{3p}\ and\ p>2$$
$$or\ 0<\frac{1}{q}<\frac{1}{3}\ and\ p=2$$
$$\gamma=1-\frac{2}{q}$$

我们有以下斯特里卡茨不等式

定理 2.4（ [MT11] 中的斯特里茨估计）。设（p、 q、 γ） $\in\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$，则由下式定义的映射

$$T:H^\gamma(\mathbb{H}^3)\to L^p_tL^q_x(\mathbb{R}\times\mathbb{H}^3)$$
$$Tf(t,x)=e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x) \tag{2.4}$$

或等价地

$$T^*:L^{p'}_tL^{q'}_x(\mathbb{R}\times\mathbb{H}^3)\to H^{-\gamma}(\mathbb{H}^3)$$
$$T^*F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\sqrt{-\Delta}}F(t,x)dt \tag{2.5}$$

是有界的。

注意，1.1 的解由下式给出

$$u(t,x)=cos(t\sqrt{-\Delta})u_0+\frac{sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}u_1+\int_{s<t}\frac{sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}f(s,x)ds \tag{2.6}$$

该解的斯特里茨估计由（2.4）和（2.6）推出

推论 2.5. 令 $I\subset\mathbb{R}$ 和 $t_0\in I$。假设 $(p,q,\gamma)\in\mathcal{R}$，则我们得到如下关于 1.1 的解的估计

$$\|u\|_{L^p_tL^q_x(I)}+\|u\|_{L^\infty_tH^\gamma_x(I)}+\|u_t\|_{L^\infty_tH^{\gamma-1}_x(I)}\lesssim_{p,q,\gamma}\|u_0\|_{H^\gamma_x}+\|u_1\|_{H^{\gamma-1}}+\|f\|_{L^{p'}_tL^{q'}_x(I)} \tag{2.7}$$

证明. $cos(t\sqrt{-\Delta})u_0$ 和 $\frac{sin}{(t\sqrt{-\Delta})\sqrt{-\Delta}}u_1$ 的~~估计可由~~ (2.4) 立即推出。考虑由下式定义的算子 W

$$WF(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} F(s,x)ds \tag{2.8}$$

□

令 $T_1(t) = \frac{sin}{(t\sqrt{-\Delta})\sqrt{-\Delta}}$。事实上， $W = \sqrt{-\Delta}T_1T_1^*$。由 (2.4) 和 (2.5)，我们很容易验证 W 从 $L_t^{p'}L_x^{q'}$ 到 $L_t^pL_x^q$ 有界。Christ-Kiselev 引理[CK01] 为 (2.6) 中最后一项给出了所需的估计。

3. Energy Increment Estimate

本节将傅里叶截断方法应用于 (1.1)，并推导低频模态的能量估计。粗略地说，我们将时间区间 I 划分为若干较小的子区间 I_j，其长度由散射范数 $\|u\|_{L_{t,x}^4}^4$ 衡量。换言之， $\|u\|_{L_{t,x}^4}^4(I_j) < \epsilon$，其中某个常数 $\epsilon > 0$ 足够小。我们将初始数据分解为高频部分和低频部分。高频数据将在全局范围内按线性演化。在第一步 I_1，低频数据将按照三次非线性演化演化。 I_1 上的原解等于高频模态、低频模态和一个修正项之和，该修正项的初始数据为零。低频模态在 I_1 上满足能量守恒。此外，我们证明修正项在 I_1 上具有有限能量。因此，在 I_1 结束时，我们可以将修正项加到低频模态上，并在下一步 I_2 开始这一过程，依此类推。第 3.1 节专门讨论小时间区间上修正项的局部能量估计。第 3.2 节通过对各子区间求和，处理较大区间上的解。

3.1. 小区间上的局部估计。

在本小节中，我们研究初始数据为 u_0 的方程 (1.1) 在小区间 I_1上的解，其中该解的散射范数有界于

$$\|u\|_{L_{t,x}^4}^4 < \epsilon \tag{3.1}$$

$0 < \epsilon \ll 1$。

首先，固定待确定的 $s_0 > 0$ ，我们将初始数据 (u_0, u_1) 分解为

$$\begin{aligned} &(u_0,u_1) = (u_{0,hi},u_{1,hi}) + (u_{0,lo},u_{1,lo}) \\ &u_{j,hi} = P_{\le s_0}u_j \\ &u_{j,lo} = P_{>s_0}u_j \end{aligned} \tag{3.2}$$

由 2.3 可得

$$\begin{aligned} &\|(u_{0,hi},u_{1,hi})\|_{H^\nu\times H^{\nu-1}} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\nu)}\|(u_0,u_1)\|_{H^s\times H^{s-1}} \\ &\|(u_{0,lo},u_{1,lo})\|_{H^1\times L^2} \lesssim s_0^{-\frac{1}{2}(1-s)}\|(u_0,u_1)\|_{H^s\times H^{s-1}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

对于 $\nu \le s$

我们分别通过以下方程演化高频数据和低频数据:

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3}\psi = 0 \\ (\psi(0),\psi_t(0)) = (u_{0,hi},u_{1,hi}) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3}\phi + |\phi|^3 = 0 \\ (\phi(0),\phi_t(0)) = (u_{0,lo},u_{1,lo}) \end{cases} \tag{3.5}$$

修正项记为 v，满足以下方程:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3} v + |v|^3 = -|u|^3 + |\phi|^3 + |v|^3 = \mathcal{O}(\psi^3 + \psi\phi^2 + \psi v^2 + \phi^2 v + \phi v^2) \\ (v(0), v_t(0)) = (0,0) \end{cases} \tag{3.6}$$

由斯特里卡茨估计，我们有

$$\|\psi\|_{L^4_{t,x}} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \tag{3.7}$$

ϕ 在 I_1上具有守恒能量。事实上，由 3.3 和 Sobolev 嵌入可得如下界

$$E(\phi) \lesssim s_0^{1-s} \tag{3.8}$$

I此外，我们对某些时空范数有如下估计。

命题 3.1。

(1) $\|v\|_{L^4_{t,x}(I_1)} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}$
(2) $\|\phi\|_{L^4_{t,x}(I_1)} \lesssim \epsilon$
(3) $\|v\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8(I_1)} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{3}{4})}$ *if* $s \geq \frac{3}{4}$
(4) $\|\phi\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8(I_1)} \lesssim s_0^{-\frac{1}{2}(1-s)}$

证明。将 (3.7) 代入 $u = \psi + \phi + v$，我们有

$$\|\phi\|_{L^4_{t,x}} \leq \epsilon + \|v\|_{L^4_{t,x}} \tag{3.9}$$

由斯特里卡茨估计和 3.6，我们得到

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^4_{t,x}} &\lesssim \|v^3 + \psi^3 + \psi\phi^2 + \psi v^2 + \phi^2 v + \phi v^2\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t,x}} \\ &\lesssim \|v\|^3_{L^4_{t,x}} + \|\psi\|^3_{L^4_{t,x}} + \|\psi\|_{L^4_{t,x}}\|\phi\|^2_{L^4_{t,x}} + \|\psi\|_{L^4_{t,x}}\|v\|^2_{L^4_{t,x}} + \|\phi\|^2_{L^4_{t,x}}\|v\|_{L^4_{t,x}} + \|\phi\|_{L^4_{t,x}}\|v\|^2_{L^4_{t,x}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

将 (3.7)、(3.9) 代入 (3.10),

$$\|v\|_{L^4_{t,x}} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} + o(1)\|v\|_{L^4_{t,x}} + High\ Order\ Terms\ of\ \|v\|_{L^4_{t,x}} \tag{3.11}$$

因此，我们得到了关于 $\|v\|_{L^4_{t,\ x}}$ 的估计，如所需。关于 $\|\phi\|_{L^4_{t,\ x}}$ 的估计由 3.9 得出。为得到 (3)，我们再次使用斯特里茨估计，类似于在 3.10 中所做的。为得到 (4)，注意到

$$\|\phi(0), \phi_t(0)\|_{H^{\frac{3}{4}} \times H^{-\frac{1}{4}}} \lesssim \|\phi(0), \phi_t(0)\|_{H^1 \times L^2} \lesssim s_0^{-\frac{1}{2}(1-s)} \tag{3.12}$$

于是，(4) 可由同样的斯特里茨估计论证得出。 □

为了确保解能够延拓到 I_1 之后，我们需要确保 ϕ 和 v 的能量保持有界。

至于 v，尽管 (3.6) 的强迫项中含有粗糙项，例如 ψ^3，但事实证明，在整个 I_1 上，v 都属于 $L_t^\infty H_x^1$。这一平滑性质对傅里叶截断方法至关重要。事实上，

命题 3.2. v 在 I_1 上的能量有界，且满足

$$\sup_{t \in I_1} E(v)(t) \lesssim s_0^{\frac{7}{4}s - \frac{3}{2}} \tag{3.13}$$

证明。对 E(v) 求时间导数，得到

$$\begin{aligned} \frac{dE(v)}{dt} &= Re < v_{tt} - \Delta v + |v|^3, v_t > \\ &\lesssim < \mathcal{O}(\psi^3 + \psi\phi^2 + \psi v^2 + \phi^2 v + \phi v^2), v_t > \\ &\lesssim (\|\psi\|_6^3 + \|v\|_8\|v\|_4\|\psi\|_8 + \|v\|_8^2\|\phi\|_4 + \|\psi\|_8\|\phi\|_8\|\phi\|_4 + \|\phi\|_8\|v\|_8\|\phi\|_4) E(v)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

对时间积分并使用 H¨older 不等式，得到

$$\begin{aligned}\sup_{t\in I_1} E(v)^{\frac{1}{2}} \lesssim\ & \|\psi\|^3_{L^3_t L^6_x} + \|v\|^2_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|\psi\|_{L^4_{t,x}} + \|v\|^2_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|\phi\|_{L^4_{t,x}} \\ & + \|\psi\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|\phi\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|\phi\|_{L^4_{t,x}} + \|\phi\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|v\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^8}\|\phi\|_{L^4_{t,x}}\end{aligned} \tag{3.15}$$

将命题 3.1 的结果代入 (3.15)，我们得到关于 E(v) 的所需估计。

□

3.2. 条件能量增量估计。假设解在时间区间 I 上存在，其中 $\|u\|^4_{L^4_{t,\ x(I)}} \le M$ 对某个 $M > 0$成立。将 I 划分为子区间 I_j，使得在每个 I_j $\|u\|^4_{L^4_{t,\ x(I_j)}} \le_\epsilon$ 上均如第 3.1 节所述。 ϕ 和 v 按照第 3.1 节的方式定义在 I_1 上。我们将通过归纳将 ϕ 和 v 延拓到 I。假设 ϕ和 v 定义在 $I_{j-1} = (b_{j-1}, b_j)$ 上。记 $f(b_j^+) = \lim_{t\searrow b_j} f(t)$ 以及$f(b_j^-) = \lim_{t\nearrow b_j} f(t)$，我们按如下方式在下一步 $I_j = (b_j, b_{j+1})$ 上定义 ϕ和 v

$$\begin{cases}\phi_{tt} + \Delta_{\mathbb{H}^3}\phi + |\phi|^3 = 0 \\ \phi(b_j^+, x) = \phi(b_j^-, x) + v(b_j^-, x) \\ \phi_t(b_j^+, x) = \phi_t(b_j^-, x) + v_t(b_j^-, x)\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}v_{tt} + \Delta_{\mathbb{H}^3} v + |u|^3 - |\phi|^3 = 0 \\ v(b_j^+, x) = 0 \\ v_t(b_j^+, x) = 0\end{cases}$$

为了估计整个区间 I 上获得的能量，我们将在每个 I_j 上分别进行局部估计，并将它们相加。显然，我们希望第 3.1 节中的命题 3.1 和命题 3.2 不仅对 I_1 成立，也对所有后续子区间 I_j成立。由于 ϕ 和 v 在每个 I_j上都由相同的方程定义，只需确保条件 (3.8) 在整个 I 上持续成立。以下命题给出了这一条件下的能量估计，

命题 3.3. 假设解 u 在区间 I 上存在，且满足 $\|u\|^4_{L^4_{t,x(I)}} \le M$ 其中$M \sim s_0^{-\frac{3}{16}s+\frac{1}{8}}$。则命题 3.1 中的估计对所有 I_j均成立，并且我们有

$$\sup_{t\in I} E(\phi(t)) \le E(\phi(0)) + C\frac{M}{\epsilon} s_0^{\frac{19}{16}s-\frac{9}{8}} \sim s_0^{-(1-s)} \tag{3.16}$$

证明：假设条件 (3.8) 在 I 上成立。我们按照前文所述将 I 划分为若干个 I_j。此类子区间的数量至多为 $\mathcal{O}(\frac{M}{\epsilon})$。 ϕ 在每个 I_j 上的能量增量为

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(\phi + v) - E(\phi) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{H}^3} (|\nabla\phi\cdot\nabla v| + |\phi_t v_t| + |\nabla v|^2 + |v_t|^2 d\mu + |\phi^3 v| + |v|^4) d\mu \\ &\le E(\phi)^{\frac{1}{2}} E(v)^{\frac{1}{2}} + E(\phi)^{\frac{3}{4}} E(v)^{\frac{1}{4}} + E(v) \\ &\lesssim s_0^{-\frac{3}{4}(1-s)} \cdot s_0^{\frac{1}{4}(\frac{7}{4}s-\frac{3}{2})} \\ &\lesssim s_0^{\frac{19}{16}s-\frac{9}{8}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

因此，我们得到了每个子区间 I_j 上 ϕ 的能量增量。为了通过自举论证证明我们的假设 (3.8) 成立，只需以下不等式。

$$\frac{M}{\epsilon}\sup_j \Delta E(\phi) \lesssim \frac{M}{\epsilon} s_0^{\frac{19}{16}s-\frac{9}{8}} \lesssim s_0^{-(1-s)}$$

$$\implies M \sim s_0^{-\frac{3}{16}s+\frac{1}{8}} \tag{3.18}$$

由此便得到我们对 M 大小的假设。

4. Global Wellposedness and Scattering

我们将证明存在一个较小的 s_0，使得

$$\|u\|^4_{L^4_{t,x}(I)} \leq M \tag{4.1}$$

对于解存在的任意 $I = [0, T]$，均成立。整体适定性和散射性可由此界推出。为了估计$L^4_{t,\ x}$ 范数的 ζ，我们需要以下莫拉维茨估计；该估计在 [SS16]中的估计基础上，加入了修正项的影响。

命题4.1（修正方程的莫拉维茨估计）。设在时间区间 I 上，u 是下述带误差项 $\mathcal{N}$ 的修正的三次非线性波方程的解,

$$u_{tt} - \Delta_{\mathbb{H}^3} u + u^3 = \mathcal{N}$$

则 ζ 满足以下莫拉维茨估计

$$\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}} \lesssim \sup_{t\in I} E(\zeta) + \|\mathcal{N}\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} + \|\mathcal{N}\nabla\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} \tag{4.2}$$

证明。为简便起见，我们采用非正式证明，并假设证明中的所有积分均收敛。定义莫拉维茨势 M(t) 为

$$M(t) = -\int_{\mathbb{H}^3} u_t D^\alpha a D_\alpha u + u_t u \cdot \frac{\Delta a}{2} d\mu \tag{4.3}$$

其中，a 是 [IS09] 中的同一个函数。a 满足

$$\begin{cases} \Delta a = 1 \\ \|\nabla a\| \leq C \\ D^2 a \ is\ positive\ definite \end{cases} \tag{4.4}$$

对 4.3 求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= -\int u_{tt} D^\alpha a D_\alpha u + u_t D^\alpha a D_\alpha u_t + u_{tt} u \frac{\Delta a}{2} + u_t^2 \frac{\Delta a}{2} d\mu \\ &= I + II + III + IV \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$
\begin{aligned}
I &= -\int u_{tt} D^{\alpha} a D_{\alpha} u \\
&= -\int (\Delta u - u^3 + \mathcal{N}) D^{\alpha} a D_{\alpha} u \\
&= -\int D^{\beta} D_{\beta} u D^{\alpha} a D_{\alpha} u - \frac{1}{4} D^{\alpha} a D_{\alpha} (u^4) + \mathcal{N} D^{\alpha} a D_{\alpha} u \\
&= \int D^{\beta} D^{\alpha} a D_{\alpha} u D_{\beta} u + \frac{1}{2} D^{\alpha} a D_{\alpha} (|\nabla u|^2) - \frac{1}{4} D^{\alpha} a D_{\alpha} (u^4) + \mathcal{N} D^{\alpha} a D_{\alpha} u \\
&= \int D^{\beta} D^{\alpha} a D_{\alpha} u D_{\beta} u - \frac{1}{2} \Delta a |\nabla u|^2 - \frac{1}{4} \Delta a u^4 - \mathcal{N} D^{\alpha} a D_{\alpha} u \\
&\geq -\frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{4} \|u\|_4^4 - \|\mathcal{N} \nabla u\|_1 \\
II &= -\int u_t D^{\alpha} a D_{\alpha} u_t \\
&= -\int \frac{1}{2} D^{\alpha} a D_{\alpha} u_t^2 \\
&= \int \frac{1}{2} \Delta a u_t^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 \\
III &= -u_{tt} u \frac{\Delta a}{2} \\
&= -\int \frac{1}{2} (\Delta u - u^3 + \mathcal{N}) u \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_4^4 - \frac{1}{2} \int \mathcal{N} u \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_4^4 - \|\mathcal{N} u\|_1 \\
IV &= -\frac{1}{2} \|u_t\|_2^2
\end{aligned}
$$

将 I–IV 相加，得到

$$
\frac{d}{dt} M(t) \geq \frac{1}{4} \|u\|_4 - \|\mathcal{N} u\|_1 - \|\mathcal{N} \nabla u\|_1 \tag{4.6}
$$

对时间积分，得到

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L_{t.x}^4}^4 &\leq \sup_{t \in I} |M(t)| + \|\mathcal{N} u\|_{L_{t,x}^1} + \|\mathcal{N} \nabla u\|_{L_{t,x}^1} \\
&\lesssim \sup_{t \in I} E(u)(t) + \|\mathcal{N} u\|_{L_{t,x}^1} + \|\mathcal{N} \nabla u\|_{L_{t,x}^1}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

□

为了证明 $\|u\|_{L_{t,\ x}^4}$ 有界，我们将使用自举论证。事实上，我们将证明以下推论：

命题 4.2. 对于 $s > \frac{166}{185}$，存在足够小的 $s_0 > 0$ 和 $M \sim s_0^{-\frac{3}{16}s + \frac{1}{8}}$，使得以下推论成立：

$$
\|u\|_{L_{t,x}^4(I)}^4 \leq M \implies \|u\|_{L_{t,x}^4(I)}^4 \leq \frac{1}{2} M
$$

记 $\zeta = \phi + v_{\circ}$ 在 [0,T] 上，ζ 满足修正非线性波方程

$$
\zeta_{tt} + \Delta_{\mathbb{H}^3} \zeta + |\zeta|^3 = \mathcal{N} \tag{4.8}
$$

其中 $\mathcal{N} = |u|^3 - |\zeta|^3 = \mathcal{O}(\psi^3 + \psi \zeta^2)$。

由于我们对 M 的选择，命题 3.3 的结果适用。我们有

$$\sup_{t\in I} E[\zeta(t)] \lesssim s_0^{-(1-s)} \tag{4.9}$$

证明。由于我们对 M 的选择，命题 (3.2) 适用。只需估计 (4.2) 右端的另外两项。

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} &\lesssim \|\psi^3\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} + \|\psi\zeta^3\| \\ &\lesssim \delta\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}(I)} + C_\delta\|\psi\|^4_{L^4_{t,x}(I)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

最后一个不等式中用到了杨氏不等式。当 δ 足够小时，$\delta\|\zeta\|^4_{L^4_{t,\ x}(I)}$ 将被吸收到 (4.2) 的左端。$\|\psi\|^4_{L^4_{t,\ x}(I)}$ </style}由) 0 有界。

另一项估计如下：

$$\|\mathcal{N}\nabla\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} \lesssim (\|\psi\|^3_{L^3_t L^6_x(I)} + \|\psi\|_{L^{\frac{8}{3}}_t L^8_x(I)}\|\zeta\|_{L^{\frac{8}{3}}_t L^8_x(I)}\|\zeta\|_{L^4_{t,x}(I)})\|\nabla\zeta\|_{L^\infty_t L^2_x(I)} \tag{4.11}$$

由斯特里茨估计可得 $\|\psi\|_{L^3_t L^6_x(I)} \lesssim s_0^{\frac{1}{2}(s-\frac{2}{3})}$ </style}以及 (I) </style}$(s-\frac{3}{4})$ </style}。根据假设，，$_x(I)$ </style}。为估计 (I)，我们在每个子区间上应用命题 3.1 并将结果求和。共有 $\leq \frac{M}{\epsilon}$ 个子区间，因此

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_{L^{\frac{8}{3}}_t L^8_x(I)} &\lesssim [\frac{M}{\epsilon}(s_0^{-\frac{1}{2}(1-s)})^{\frac{8}{3}}]^{\frac{3}{8}} \\ &\lesssim M^{\frac{3}{8}} s_0^{-\frac{1}{2}(1-s)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

合并这些项，得到

$$\|\mathcal{N}\nabla\zeta\|_{L^1_{t,x}(I)} \lesssim s_0^{\frac{3}{2}s-\frac{11}{8}} M^{\frac{5}{8}} \tag{4.13}$$

□

将这些代入莫拉维茨不等式，

$$\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}} \lesssim s_0^{1-s} + \delta\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}} + C_\delta s_0^{2s-\frac{1}{2}} + s_0^{\frac{3}{2}s-\frac{11}{8}} M^{\frac{5}{8}} \tag{4.14}$$

将 $\epsilon\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}}$ 吸收到左边后，得到

$$\|\zeta\|^4_{L^4_{t,x}} \lesssim s_0^{\frac{3}{2}s-\frac{11}{8}} M^{\frac{5}{8}} \tag{4.15}$$

为了使命题 4.2 成立，我们要求 4.15 的右端有界于 $\frac{1}{2}M \sim s_0^{-\frac{3}{16}s+\frac{1}{8}}$，即

$$s_0^{\frac{3}{2}s-\frac{11}{8}} \cdot s_0^{\frac{5}{8}(-\frac{3}{16}s+\frac{1}{8})} \lesssim s_0^{(-\frac{3}{16}s+\frac{1}{8})} \tag{4.16}$$

只要指数满足以下条件，就可以通过令 s_0 足够小来实现

$$\frac{3}{2}s - \frac{11}{8} + \frac{5}{8}(-\frac{3}{16}s + \frac{1}{8}) > -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \tag{4.17}$$

由此可得

$$s > \frac{182}{201} \approx 0.905 \tag{4.18}$$

推论 4.3（整体适定性与散射）。当 $s > \frac{182}{201}$ 时，初值问题1(1.1) 整体适定，且解在 $L^4_{t,\ x} \cap C_t H^{\frac{2}{x}}$ 中散射。散射范数 $\|u\|_{L^4_{t,\ x}} \leq f(s, \|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}})$，其中某个函数为 $f > 0$。

证明。散射范数的界由命题 4.2 和标准的连续性论证得出。整体适定性与散射是这一结果的直接推论。□

References

[AP14] Jean-Philippe Anker 和 Vittoria Pierfelice。双曲空间上的波方程与克莱因–戈尔登方程。 *Analysis & PDE* 7 4 953 995, 2014 , ( ): – . [

BC06] Hajer Bahouri 和 Jean-Yves Chemin。关于散焦三次波方程的整体适定性。 *International Mathematics Research Notices* 2006 9 54873 54873, 2006 , ( ): – . [

CK01] Michael Christ 和 Alexander Kiselev。与滤过相关的极大函数。 *Journal of Functional Analysis* 179 2 409 425, 2001 , ( ): – . [

Dod18] Benjamin Dodson。径向散焦三次非线性波方程的整体适定性与散射。 *arXiv preprint arXiv:1809.08284*, 2018. [Dod19] Benjamin Dodson。三维径向初始数据下散焦三次非线性波方程的整体适定性，初始数据属于 $h^s \times h^{s-1}$, $s > 1/2$。 *International Mathematics Research Notices*, 2019 21 6797 6817, 2019 ( ): – . [Dod22] Benjamin Dodson。初始数据属于临界空间的径向共形非线性波方程的整体适定性。 *arXiv preprint arXiv:2206.13586*, 2022. [GP03] Isabelle Gallagher 和 Fabrice Planchon。关于散焦半线性波方程的整体解。 *Revista Matematica Iberoamericana*, 19(1):161–177, 2003. [Hel01] Sigurdur Helgason。 *Differential geometry and symmetric spaces*, volume 341. American Mathematical Soc., 2001.[Ion00] Alexandru D Ionescu。实秩一非紧对称空间上的傅里叶积分算子。 *Journal of Functional Analysis* 174 2 274 300, 2000 , ( ): – . [I

S09] Alexandru D Ionescu 和 Gigliola Staffilani。双曲空间上的半线性薛定谔流：h 中的散射。 *Mathematische Annalen*, 345(1):133–158, 2009. [Jea97] Fontaine Jean。双曲空间上的半线性波方程。 *Communications in Partial Differential Equations* 22 3 4 633 659, 1997 , (-): – . [

KPV00] Carlos E Kenig、Gustavo Ponce 和 Luis Vega。半线性波方程的整体适定性：半线性波方程。 *Communications in partial differential equations*, 25(9-10):1741–1752, 2000. [LLOS18] Andrew Lawrie、Jonas Luhrmann、Sung-Jin Oh 和 Sohrab Shahshahani。双曲空间上薛定谔方程的局部平滑估计。 *arXiv preprint arXiv:1808.04777*, 2018. [LS95] Hans Lindblad 和 Christopher D Sogge。关于半线性波方程在最小正则性下的存在性与散射。 *Journal of Functional Analysis*, 130(2):357–426, 1995. [Ma22] Chutian Ma。三维双曲空间上径向三次散焦薛定谔方程的一个散射结果。 *arXiv preprint arXiv:2210.13760*, 2022. [MT11] Jason Metcalfe 和 Michael Taylor。三维双曲空间上的非线性波。, ( ): – . [Pie08] Vittoria Pierfelice。Damek–Ricci 空间上薛定谔方程与波方程的加权 Strichartz 估计。 *Mathematische Zeitschrift*, 260(2):377–392, 2008. [Roy07] Tristan Roy。双曲空间上径向散焦三次波方程以及粗糙初始数据的整体适定性。*arXiv preprint arXiv:0708.2299*, 2007. [SS16] Ruipeng Shen 和 Gigliola Staffilani。双曲空间上的半线性移位波方程及其在五次波方程上的应用。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 368 4 2809 2864, 2016 ( ): – . [Tat01] Daniel Tataru。双曲空间上的 Strichartz 估计与半线性波方程的整体存在性。 *Transactions of the American Mathematical society*, 353(2):795–807, 2001.*Email address*: cma27@jhu.edu