arXiv:2303.00858v2 [q-fin.MF] 6 Apr 2023

随机投资组合理论中的维度变化量化

Erhan Bayraktar * Donghan Kim † Abhishek Tilva ‡

2023年4月7日

摘要

本文发展了股票市场维度变化下投资组合的函数生成理论。通过在市场中引入维度跳跃，以及维度跳跃之间股票市值的跳跃，我们在非常一般的框架下构造了不同类型的自融资股票投资组合（加法型、乘法型和基于排名的）。我们的研究阐明了由股票上市或退市事件引起的维度变化，以及市场中的意外冲击，如何影响投资组合收益。我们还对一些经典投资组合进行了实证分析，量化了维度变化相对于市场对投资组合表现的影响。

*2020*年*MSC*分类：主要分类：60G48、60H05、91G10。

关键词和短语：函数生成，分段半鞅，自融资投资组合，随机维度，随机投资组合理论。

目录

1 引言 2 2 随机维度股票市场 3 2.1 分段半鞅.3 2.2 市值与市场权重过程.5 2.3 交易策略与投资组合.8 3 投资组合的函数生成 10 3.1 可测生成函数族.10 3.2 函数生成投资组合.11 4 实证分析 21 4.1 离散时间模型.22 4.2 示例.24 4.3 数据描述.26 4.4 实证结果.27 5 结论 29 参考文献 31 A 基于排名的投资组合生成 33 A.1 随机维度市场中的基于排名的生成.33 A.2 开放市场.37

*密歇根大学数学系，美国密歇根州安娜堡（电子邮件： *erhan@umich.edu*）。

†密歇根大学数学系，美国密歇根州安娜堡（电子邮件： *donghank@umich.edu*）。

‡哥伦比亚大学统计系，美国纽约州纽约（电子邮件： *akt2143@columbia.edu*）。

1 引言

本文研究随机维度股票市场模型。这是我们先前工作的延续（Bayraktar、Kim 和 Tilva，2022年）；在该工作中，我们针对公司数量不断变化且可进入货币市场的股票市场，建立了完整版本的资产定价基本定理。另一方面，本文只关注维度不断变化且无法进入货币市场的股票市场，并发展仅投资于股票的投资组合函数生成理论。

投资组合函数生成理论由 R. Fernholz 于 20 多年前（1999年）提出，是随机投资组合理论（E. R. Fernholz，2002年）的核心部分（简要综述另见 R. Fernholz 和 Karatzas（2009年））。该理论阐释了如何根据一个取决于各公司相对市值的函数，构造一类自融资投资组合。它还推导出这些投资组合相对于整个股票市场的对数相对收益的显式分解，即生成函数的对数与一个漂移过程之和。通过这种分解，我们可以确定投资组合生成函数需满足的条件，使漂移过程随时间递增，从而让生成的投资组合在长期内跑赢市场。近来，Karatzas 和 Ruf（2017年）提出了一种新的投资组合构造方法，称为“加法型”生成；而 Fernholz 原先的构造方法则称为“乘法型”生成。这种新方法以更简洁的形式给出了投资组合在适当时间范围内跑赢市场的条件。

上述所有研究都假设市场中的股票数量固定。我们的主要目的是在构建自融资投资组合时，取消对市场维度固定这一假设。具体而言，我们将采用 Strong（2014）提出的随机维度分段半鞅来模拟股票的市值动态；维度变化的时点由一列停时 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 给出，并假设在市场每个“时期”（即两次维度跳变之间），股票市值过程都是某个固定维度的半鞅。利用这一概念，我们的股票市场模型纳入了所有类型的上市/退市事件，例如首次公开募股、拆分、合并、破产等。

主要难点在于，当市场发生维度变化时，如何使（函数生成的）投资组合保持自融资。为此，我们将使用一个 $\mathscr{F}_{\tau_k}$-可测随机变量，在每个时期的起始时刻 τ_k 对投资组合生成函数进行归一化，并以递归方式为市场的每个时期构建投资组合。现在，我们有两种不同的投资组合生成方法，因此将相应地采用加法型和乘法型归一化。引入这类归一化后，生成投资组合相对于市场的相对收益分解中会出现一个额外的修正项；该修正项精确量化了维度变化对投资组合相对于市场表现的影响。

在每次发生维度变化时，即当一只新股票进入市场或一只原有股票退出市场时，都会产生修正项，这是由两个因素造成的：总市值的跳跃，以及投资组合生成函数的跳跃。前者是不可控因素，而后者则可以通过选择适当的生成函数加以控制。对于乘法生成投资组合而言，这两个因素能够很好地分离，因此我们可以分别量化它们相对于市场的投资组合收益。然而，对于加法生成投资组合而言，这两个修正因素之间不存在这种简单的解耦关系。

此外，上述投资组合收益衡量的是所生成投资组合相对于总市值（总市场指数基金）的财富；在维度变化时，后者会发生跳跃，而投资组合的财富仍

保持不变，因为其设计目的就是实现自融资。因此，我们引入“自融资”市场投资组合这一新概念，作为比较函数生成投资组合财富的另一种基准：在维度跳跃之间，它采用买入并持有策略跟随总市场指数基金；在维度变化时，则保持自融资。尤其对于乘法生成的投资组合，相对于这一新基准的相对财富只包含修正项的第二个因子。我们将证明，该因子恰好抵消维度变化时投资组合生成函数的跳跃。由此，相对于自融资市场投资组合，我们恢复了 Fernholz 原有的对数相对财富分解：它由生成函数的对数，以及两个连续维度变化之间累积的漂移项构成。

本文的第二项贡献是，我们的模型放宽了对市值过程在维度跳变之间连续的假设，因为该过程在维度跳变之间被建模为某个固定维度的右连续左极限半鞅。允许存在此类左间断，有助于解释维度跳变之间市场上的某些意外冲击如何影响投资组合，也有助于说明股票退市事件如何影响投资组合收益（更多详情见注2.2）。

因此，这种采用分段右连续左极限半鞅的股票市场模型（见下文定义2.2）是随机投资组合理论领域迄今为止所考虑的最一般模型。本文提出的函数生成投资组合构造方法，推广了连续时间和离散时间市场模型中的既有理论，也很容易应用于随机维度股票市场中的基于排名的投资组合生成。

最后，我们对随机投资组合理论中经典的（乘法生成）投资组合示例进行了实证分析。我们使用涵盖两家美国证券交易所（纽约证券交易所和美国证券交易所）40年的股票数据集，给出了函数生成投资组合相对财富过程的显式分解（见第 4.4 节）。以原始总市场指数为基准时，第一个不可控修正因子会显著影响函数生成投资组合的相对表现；以自融资市场投资组合为基准时，漂移过程（即所谓的超额增长）则是生成投资组合长期跑赢基准的主要原因，这与 Fernholz 的原始理论非常吻合。

预览： 本文结构安排如下。第2节回顾分段半鞅的概念，并介绍我们的随机维度股票市场模型。第3节探讨如何在该市场模型下构造函数生成投资组合。第 4 节给出前文结果的离散时间版本，并利用真实股票数据对经典投资组合进行实证分析。第5节总结全文，并在附录A中说明如何构造基于排名的投资组合。

2 随机维度股票市场

本节介绍一些预备概念和定义，并描述一种随机维度股票市场模型，该模型将在全文中使用。

2.1 分段半鞅

我们首先回顾随机维度分段半鞅的概念，该概念最初由 Strong（2014）提出。相关定义和记号见我们先前论文（Bayraktar 等人，2022年）的第

2 节，但为了使本文内容完整，我们仍在本小节中列出这些定义和记号。

我们将状态空间记为 $\mathbb{U} := \cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}^n$，其拓扑由 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑之并生成。除了加法单位元 $0^{(n)}$——在 $\mathbb{R}^n$ 中对每个 $n \in \mathbb{N}$，它都是 n 维零向量——我们还定义一个加法单位元 $\odot$，它是 $\mathbb{U} := \mathbb{U} \cup \{\odot\}$ 中的一个拓扑孤立点，并满足 $\odot + x = x + \odot = x$，且对每个 $x \in \mathbb{U}$ 都有 $\odot x = x\odot = \odot$。我们定义修正指标函数

$$\hat{\mathbb{1}}_A(t,\omega) := \begin{cases} 1 \in \mathbb{R} & \text{for } (t,\omega) \in A \subset [0,\infty) \times \Omega, \\ \odot & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.1}$$

它将用于分解取值于 $\mathbb{U}$ 的随机过程。为确保所得表达式在 $\mathbb{U}$ 中维度正确，我们有时会在涉及修正指标函数 $\mathbb{1}$ 的某些表达式中加上维度适当的零向量 $0^{(n)}$，其中维度为 $n \in \mathbb{N}$。我们用 $\mathbb{1}_A$ 表示集合 A 的通常指标函数。

我们使用记号 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$、$[n] := \{1,\cdots,n\}$（对每个 $n \in \mathbb{N}$），以及 $B^\top$ 表示矩阵的转置 B。

所有关于随机变量的关系均理解为几乎必然成立。在满足通常条件的滤过概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上，设 X 是一个取值于 $\mathbb{U}$ 的渐进过程，其样本路径在所有时刻均存在左右极限，并记 $N := \dim(X)$ 为 X 的维数过程。以下定义刻画给定的取值于 $\mathbb{U}$ 的过程 X 发生维度跳变的时刻，并将其表示为一列停时。

定义 2.1（重置序列）。若一列停时 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 满足以下条件，则称其为渐进 $\mathbb{U}$ 值过程 X 的**重置序列**，对 $\mathbb{P}$-几乎所有的 ω 均成立：

(1) $\tau_0(\omega) = 0$, $\tau_{k-1}(\omega) \leq \tau_k(\omega)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立，且 $\lim_{k\to\infty} \tau_k(\omega) = \infty$；

(2) $N(t,\omega) = N(\tau_{k-1}+,\omega)$ 对每个 $t \in (\tau_{k-1}(\omega)\ \tau_k(\omega)]$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 都成立；

(3) 对每个 $k \in \mathbb{N}$，$t \mapsto X(t,\omega)$ 在 $(\tau_{k-1}(\omega)\ \tau_k(\omega))$ 上右连续。

当 X 具有一个重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 时，我们总是考虑最小的一个（$\hat{}\tau_k$）$_{k=0}^{\infty}$，即截至给定时刻重置次数最少的序列：

$$\hat{\tau}_0 := 0, \qquad \hat{\tau}_k := \inf\{t > \hat{\tau}_{k-1} \,|\, X(t+) \neq X(t)\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

并假设初始维数是确定性的，即 $\dim(X(0)) = N_0 \in \mathbb{N}$。

接下来，我们固定这样一个取值于 $\mathbb{U}$的过程 X，其重置序列为 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$，并定义 Ω 和 X 的剖分

$$\Omega^{k,n} := \{\tau_{k-1} < \infty,\ N(\tau_{k-1}+) = n\} \subset \Omega, \qquad \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \tag{2.2}$$

$$X^{k,n} := \big(X^{\tau_k} - X(\tau_{k-1}+)\big)\hat{\mathbb{1}}_{\rrbracket \tau_{k-1},\infty\llbracket \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,n})} + 0^{(n)}, \qquad \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2. \tag{2.3}$$

定义 2.2（分段半鞅）。分段半鞅 X 是一个取值于 $\mathbb{U}$的渐进过程，其路径在所有时刻均存在左右极限，并具有一个重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$，使得 $X^{k,n}$ 对每个 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ 都是取值于 $\mathbb{R}^n$的半鞅。

如果对于每个 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$，每个剖分 $X^{k,n}$ 都是 n 维连续（RCLL，即右连续且具有左极限）半鞅，则称分段半鞅 X 为**分段连续（*RCLL*）半鞅**。

我们注意到，当 X 作为积分器时，将使用式 (2.3) 中定义的 (k,n)-剖分 $X^{k,n}$。对于被积函数，则需要采用另一种剖分方式。

定义 2.3（随机积分）。对于分段半鞅 X 及其重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$，设 H 是一个取值于 $\mathbb{U}$的可预测过程，满足 $\dim(H)=\dim(X)$。我们按以下方式剖分 H

$$H^{(k,n)} := H\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})} + 0^{(n)}, \qquad \forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, \tag{2.4}$$

并定义

$$\mathscr{L}(X) := \{\, H \text{ predictable} \mid \dim(H)=\dim(X) \text{ and } H^{(k,n)} \text{ is } X^{k,n}\text{-integrable}, \forall (k,n)\in\mathbb{N}^2\}, \tag{2.5}$$

$$\mathscr{L}_0(X) := \{H\in\mathscr{L}(X)\mid H_0 = 0^{(N_0)}\}.$$

对于 $H\in\mathscr{L}(X)$，随机积分 $H\cdot X$ 定义为

$$H\cdot X := H_0^{\top}X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(H^{(k,n)}\cdot X^{k,n}) = H_0^{\top}X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\sum_{i=1}^{n} H_i^{(k,n)}dX_i^{k,n}. \tag{2.6}$$

注意，式（2.4）的每个剖分 $H^{(k,n)}$ 都是可预测的，因为过程 H 以及（k，n）-剖分集 $]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})$都是可预测的。

式（2.6）中的随机积分 $H\cdot X$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$的半鞅，并且推广了通常的取值于 $\mathbb{R}^n$的半鞅随机积分，因为任意停时序列 $\tau_k\uparrow\infty$ 都是重置序列。我们还注意到，$\mathscr{L}(X)$是一个向量空间，即对于 H，$G\in\mathscr{L}(X)$，$H\cdot X+G\cdot X=(H+G)\cdot X$成立。

2.2 市值与市场权重过程

借助分段半鞅这一概念，我们现在描述一种股票市场模型，其中可投资资产的数量有限，但无上限，且为随机变量。

我们首先定义一个取值于 $\mathbb{U}$ 的市值过程 S，允许在两个连续的维度跳变之间出现左间断。为处理不连续性，对于任意 $t\geq 0$，我们分别用 $\Delta X(t):=X(t)-X(t-)$ 和 $X_-(t):=X(t-)$ 表示右连续左极限半鞅 X 在时刻 t 的跳跃和左连续过程。

定义 2.4（市值过程）。取值于 $\mathbb{U}$ 的分段右连续左极限半鞅 S，其重置序列为 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$，称为市值过程，若 S 的每个 n 分量均非负，且在每个剖分集 $]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})$ 上至少有一个分量严格为正，对每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ 均成立。

$N=$维数过程 $N=\dim(S)$ 描述了 S 市场中现存公司的数量，而在 (k,n)-剖分集上的 n 分量 S，即 $]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})$，则表示每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$时现存公司的市值。为简化模型，且不失一般性，我们假设每只股票只有一股流通股，因此股票的市值等于其价格。根据定义，该模型允许个股价格跌至零，但市场总市值始终应保持严格为正。

示例 2.1。该模型采用变维的分段右连续左极限半鞅作为市值过程，以最灵活的方式描述了一个更为现实的股票市场。它涵盖了其他几种描绘资产数量变化的市场模型。下面给出其中几个示例。

(i) 新公司的进入和现有公司的退出可用生灭过程建模；对于每个 $n \in \mathbb{N}$，每当市场维数为 n 时，新公司会按照 λ_n 的指数到达率进入市场，而其中一家公司会按照 μ_n 的指数离开率退出市场。因此，维数过程 $N = \dim(S)$ 是生灭过程，其生率和死率分别为 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$。重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 描述公司出生或死亡的时刻，且每次维数变化的幅度始终为一，即对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$|N(\tau_{k-1}+) - N(\tau_{k-1})| = 1$。

(ii) Karatzas 和 Sarantsev（2016）提出的多样化市场模型通过描述某种拆分和合并机制，研究公司数量不断变化的情形。当最大公司的市场权重（相对于总市值的相对市值）超过介于 0 和 1 之间的固定阈值时，该公司会拆分为两家规模随机的公司，以此模拟监管拆分。另一方面，除最大公司外，任意两家现有公司都可能在指数时钟响起时随机合并。重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 描述最大公司拆分或两家小公司合并的时刻；在每个停时 τ_k，维数变化的幅度同样为一。

(iii) 我们甚至可以考虑上述 (i) 和 (ii) 的组合，即允许各种事件发生的股票市场，包括公司的进入、退出、拆分和合并，只要每个停时 τ_k 描述此类维度变化。

对于定义 2.4 中给定的市值过程 S，我们定义另一个取值于 $\mathbb{U}$ 的过程，其分量表示各个股票的相对市值。

定义 2.5 (市场权重)。如果取值于 $\mathbb{U}$ 的过程 μ 通过剖分定义，我们称之为市场权重过程

$$\mu(\cdot) := \mu^{(0)}(\cdot)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{(k,n)}(\cdot)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})},$$

$\mu^{(0)}$ 和 $\mu^{(k,n)}$ 的分量对于 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
\mu_i^{(0)}(t) &:= \frac{S_i(0)}{\sum_{j=1}^{N_0} S_j(0)}\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}(t) + 0, && t \geq 0, \quad i = 1, \cdots, N_0, \\
\mu_i^{(k,n)}(t) &:= \frac{S_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} S_j(t)}\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}(t) + 0, && t \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

请注意，按照 (2.3) 的定义，市场权重过程 μ 的 (k,n)-剖分 $\mu^{k,n}$ 与 (2.7) 中的 $\mu^{(k,n)}$ 对每个 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ 都不同。由于其构造方式，当 $t > \tau_k$ 时，量 $\mu_i^{(k,n)}(t)$ 等于零，并具有一项重要性质

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{(k,n)}(t) = 1 \qquad (2.8)$$

在剖分集 $]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})$ 上；而 μ 的剖分 $\mu^{k,n}_{\cdot,i}(t)$ 在 $t>\tau_k$ 时不一定等于零，也不具备这项性质。然而，由于每个 $\mu^{k,n}$ 都是右连续左极限半鞅，μ 是一个 $\mathbb{U}$ 值分段右连续左极限半鞅（定义 2.2），因此剖分 $\mu^{k,n}$ 应发挥积分器的作用。当 μ 不作为积分器出现时，为了利用性质 (2.8)，我们将使用 $\mu^{(k,n)}$，而不是 $\mu^{k,n}$。最后我们注意到，在每个 (k,n)-剖分集上，它们的增量相同，即：

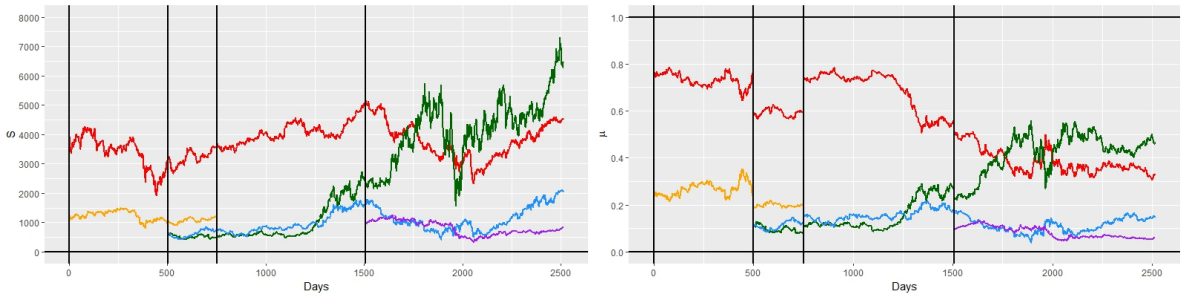
$$d\mu_i^{k,n}(t)\equiv d\mu_i^{(k,n)}(t),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{2.9}$$

因此也可由 (2.8) 得出

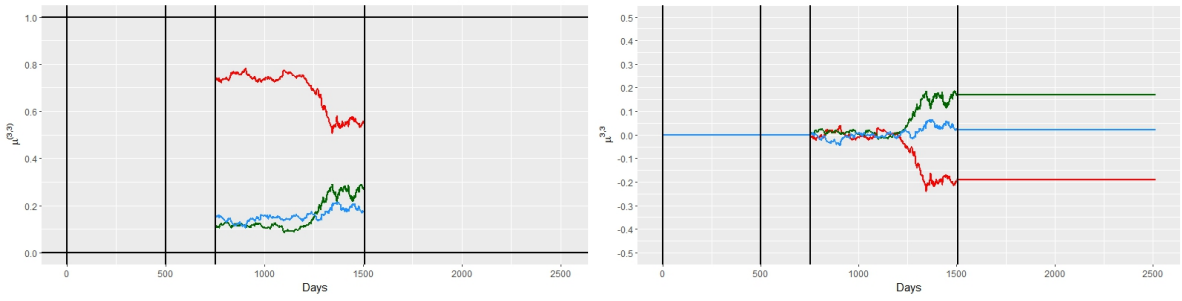
$$\sum_{i=1}^{n} d\mu_i^{k,n}(t)\equiv 0. \tag{2.10}$$

注 2.1。虽然我们将对市场权重过程 μ 使用两种不同的剖分：$\mu^{(k,n)}$（用于被积函数）和 $\mu^{k,n}$（用于积分器），但本文中所有以 $d\mu^{k,n}$ 为积分器的积分（例如，见 (2.11) 和 (3.4)）都只在 (k,n)-剖分集上考虑。因此，根据 (2.9)，积分器 $d\mu^{k,n}$ 可以替换为 $d\mu^{(k,n)}$。不过，为了与我们早期论文（Bayraktar 等人，2022年）中的记号保持一致，以下仍将使用 $d\mu^{k,n}$ 作为积分器。

示例2.2。图1展示了为期10年（2515个交易日）的 $\mathbb{U}$ 值（日频）市值过程S 及其对应的市场权重过程 μ 的一条轨迹。对于这条轨迹，重置序列为（τ_1，τ_2，τ_3）=（501，753，1508），而 Ω 的“活跃”剖分为 $\Omega^{1,2}$,$\Omega^{2,4}$,$\Omega^{3,3}$, 和 $\Omega^{4,4}$。图1(c)展示了式（2.7）中定义的剖分 $\mu^{(3,3)}$ 的一条轨迹，而图1(d)则展示了另一剖分 $\mu^{3,3}$ 的一条轨迹。



(a) 市值 S（单位：百万美元）　　(b) 市场权重 μ



(c) $\mu^{(3,3)}$　　(d) $\mu^{3,3}$

图1：S、μ的轨迹，以及 μ的剖分

尽管图1所示轨迹在维度变化之间是连续的，但我们在此强调，定义2.4和2.5中的市值过程 S 和市场权重过程 μ 在相邻两次维度跳变之间具有右连续左极限路径。维度跳变之间出现的任何左不连续，都表示个股价格发生了意外变化（例如，公司宣布或发放股息等）；而 S 的此类左不连续确实会影响随机积分 $H \cdot S$，该积分表示持有股票中 H 股份所获得的资本利得。

另一方面， S 在停时 τ_0、 τ_1、 $\cdots$ 处的维度跳跃必须仅以右不连续的形式发生，因此这些维度跳跃不会影响积分 $H \cdot S$，无论被积函数 $H \in \mathscr{L}(S)$ 为何。随机积分 $H \cdot S$ 会在每次跳跃处停止，并在紧接着之后开始新的部分。由于每个部分 $S^{k,\,n}$ 都具有右连续左极限路径，积分 $H \cdot S$ 始终保持右连续。

这说明，在分段右连续左极限半鞅的框架下，市值过程 S 在停时 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 之间和处发生的不同类型跳跃有何种解释。关于分段右连续左极限过程 S 的不连续性，以及具有金融解释的积分 $H \cdot S$，更多详情请参阅 Strong（2014）的第1.1.2节和注3.1。市场权重过程 μ 以及针对某个 $\vartheta \in \mathscr{L}(\mu)$ 的随机积分 $\vartheta \cdot \mu$，也具有与 S 和 $H \cdot S$ 相同的不连续性。

我们以一则备注结束本小节，该备注对股票退出市场的退市事件（例如由于破产）进行了更详细的描述。

备注 2.2（退市事件）。 如果第 i 只股票在停时 τ_k 离开（$k,\ n$）-剖分市场，则有两种可能的情形：**(i)** 分量 S_i 在退市时刻 τ_k 左连续，即 $S_i(\tau_k-) = S_i(\tau_k)$；**(ii)** S_i 在 τ_k 处具有左不连续性，即 $S_i(\tau_k-) \neq S_i(\tau_k)$。在情形 **(i)** 中，由于剖分 $S^{k,\,n}_{\cdot,\,i}$ 在 τ_k 处保持连续（既左连续又右连续），第 i 家公司退出不会影响 $H \cdot S$ 在 τ_k 处的值，这意味着投资者不会因第 i 家公司退出而损失任何资金。换言之，我们有机会在该股票最终消亡的时刻清算所持有的第 i 只股票。然而，在情形 **(ii)** 中， τ_k 处的左跳 $S_i(\tau_k) - S_i(\tau_k-)$ 确实会影响积分 $H \cdot S$，因此，如果最终市值 $S_i(\tau_k)$ 接近于零（分别等于零），我们可能会因第 i 只股票退市而损失所持资金的一部分（或全部）。

2.3 交易策略与投资组合

回顾定义 2.5 中的市场权重过程 μ 以及式 **(2.5)** 中 μ 的被积函数类 $\mathscr{L}(\mu)$，我们给出如下交易策略的概念。此处以及下文中，对于任意 $\mu^{k,n}$-可积的 n 维过程 $\vartheta^{(k,n)}$，我们将采用从 $\tau_{k-1}+$ 开始的随机积分记号：

$$I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t) := \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(s)\, d\mu_i^{k,n}(s) \tag{2.11}$$

对每个 $t > \tau_{k-1}$ 以及 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$。

定义 2.6（交易策略）。 如果 $\vartheta \in \mathscr{L}(\mu)$，且 ϑ 在每个剖分集 $\rrbracket \tau_{k-1},\ \tau_k \rrbracket \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,\,n})$ 上对每个 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$ 都满足以下两个自融资条件，则称 $\mathbb{U}$ 值过程 ϑ 为交易策略：

$$\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)\mu_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t), \tag{2.12}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)S_i(\tau_{k-1}+)=\sum_{i=1}^{N_{\tau_{k-1}}}\vartheta_i^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}(\tau_{k-1})S_i(\tau_{k-1}),\tag{2.13}$$

其中 $\vartheta^{(0,N_0)}\equiv\vartheta^{(0)}$。

这里，量 $\vartheta_i^{(k,n)}(t)$ 表示在时刻 t，于 $(k,\ n)$-剖分市场中持有的第 i 只股票的股份数。自融资 性质意味着任何时候都不应提取或注入资本；收益会再投资，损失则由资本吸收。从第二个恒等式 (2.13) 可以直接看出这一性质；在维度变化发生的时刻 τ_{k-1}，ϑ 的绝对财富（而非相对于市场的相对财富）在每个 $(k,\ n)$-剖分集上都得以维持。

另一方面，对于第一个自融资条件 (2.12)，我们需要作更详细的解释。首先，将 (2.12) 的左侧记为

$$V^{\vartheta,k,n}(t):=\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}(t)S_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}S_j(t)}\tag{2.14}$$

其中，最后一个恒等式由定义 (2.7) 得出。因此，$V^{\vartheta,\ k,\ n}$ 表示交易策略 ϑ 的财富与 $(k,\ n)$-剖分市场总市值之比。这表明，在区间 $(\tau_{k-1},\ t]$ 上，$\vartheta^{(k,n)}$ 相对于相对市值 μ 具有自融资性质；同时，这也意味着在同一区间内，$\vartheta^{(k,n)}$ 相对于市值向量 S 也具有自融资性质，因为自融资性质与计价单位无关（参见 Herdegen (2017) 的引理 2.9）。

利用定义 (2.7)，我们可以合并自融资条件 (2.12) 和 (2.13)

$$\begin{aligned}V^{\vartheta,k,n}(t)&=\left(\sum_{i=1}^{N_{\tau_{k-1}}}\vartheta_i^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}(\tau_{k-1})\mu_i^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}(\tau_{k-1})\right)\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}}S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n}S_j(\tau_{k-1}+)}\right)+I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t)\\&=V^{\vartheta,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}}S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n}S_j(\tau_{k-1}+)}\right)+I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

在 $(k,\ n)$-剖分集上。根据滤过的通常条件，我们注意到右侧的第一项是 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}+}=\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测的，因此也是 $\mathscr{F}_t$-可测的，因为在 $(k,\ n)$-剖分集上$t>\tau_{k-1}$ （参见 Karatzas 和 Shreve (1991) 的问题 2.22）。

收集每个剖分集上的相对财富，我们将记

$$\begin{aligned}V^{\vartheta}:=&\sum_{i=1}^{N_0}\vartheta_i^{(0)}\mu_i^{(0)}\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}V^{\vartheta,k,n}\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}\\=&\sum_{i=1}^{N_0}\vartheta_i^{(0)}\mu_i^{(0)}\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}\mu_i^{(k,n)}\Big]\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}\end{aligned}\tag{2.16}$$

ϑ 相对于（未剖分的）市场的相对财富过程。

我们通过定义一个与交易策略 ϑ viadissection 对应的投资组合 $\pi\equiv\pi^{\vartheta}$，来结束本小节。

$$\pi:=\pi^{(0)}\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{(k,n)}\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})},$$

其中，对于每个 $t \geq 0$

$$\pi_i^{(0)}(t) := \frac{\vartheta_i^{(0)}(0)\mu_i^{(0)}(0)}{\sum_{j=1}^n \vartheta_j^{(0)}(0)\mu_j^{(0)}(0)}, \qquad i = 1, \cdots, N_0,$$
$$\pi_i^{(k,n)}(t) := \frac{\vartheta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t-)}{\sum_{j=1}^n \vartheta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t-)}, \qquad i = 1, \cdots, n, \quad (k,n) \in \mathbb{N}^2. \tag{2.17}$$

分量 $\pi_i^{(k,n)}(t)$可解释为在时间 $t-$、$(k,\ n)$-剖分集上，财富投资于 n 只股票中第 i只股票的比例。我们在后续各节构造的每个交易策略 ϑ 都具有左连续分量 $\vartheta_i^{(k,n)}$ ，即在每个$(k,\ n)$-剖分集上，对于$i = 1,\ \cdots,\ n$，均有 $\vartheta_i^{(k,n)}(t) = \vartheta_i^{(k,n)}(t-)$。因此，相应投资组合的所有分量 $\pi_i^{(k,n)}(t)$在每个剖分集上也都是左连续的。

3 投资组合的函数生成

在第 2 节所述的随机维度股票市场模型下，本节将构建投资组合的函数生成理论。定义可测生成函数族之后，我们将说明如何利用该函数族构造加法型和乘法型生成投资组合。随后，我们将其相对于市场的（对数）相对财富过程分解为 3 项：生成函数、超额增长，以及由维度跳变产生的修正项。

3.1 可测生成函数族

我们的目标是根据市场权重过程 μ 的函数构造交易策略（及相应的投资组合）。由于过程 μ 在每个时期的维度都会变化，因此我们需要一族定义域维度各不相同的生成函数。当 X 是一个 $\mathbb{U}$ 值半鞅，且具有重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ 时，我们为 X 引入如下分段函数的概念。为简化记号，我们将交替使用记号 $X_t \equiv X(t)$。

定义 3.1（分段函数）。 若存在一个函数族 $\{f^0\} \cup \{f^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$，使得 $f^0 : \mathbb{R}^{N_0} \to \mathbb{R}$, $f^{k,\ n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，且函数值定义如下，则称 $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 为 X 的分段函数:

$$f(X_0) := f^0(X_0), \tag{3.1}$$
$$f(X_t) := f^{k,n}(X_t) \text{ on each dissection set } \rrbracket\tau_{k-1}, \tau_k\rrbracket \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,n}), \quad \text{for } (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ t > 0.$$

若 f 是 X 的分段函数，且 ℓ 次连续可微，则称其为 ℓ 次连续可微的；也就是说，该函数族中的每个元素都 ℓ 次连续可微，即对于每个 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$，均有 $f^0 \in C^\ell(\mathbb{R}^{N_0})$，$f^{k,\ n} \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$。我们用 $C^\ell(\mathbb{U})$ 表示 ℓ 次连续可微分段函数的集合。

给定函数族 $f^0 :\ \mathbb{R}^{N_0} \to \mathbb{R}$ 和 $\{f^{k,n} :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$，我们可以构造 X 的分段函数 f :

$$f(X_t) = f^0(X_t)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f^{k,n}(X_t)\hat{\mathbb{1}}_{\rrbracket\tau_{k-1},\tau_k\rrbracket\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \qquad t \geq 0. \tag{3.2}$$

此外，对于任意 $f \in C^1(\mathbb{U})$，我们考虑该函数族中维度不同的偏导数向量

$$\nabla f^0 := (\partial_i f^0)_{i\in N_0}, \qquad \nabla f^{k,n} := (\partial_i f^{k,n})_{i\in n}, \quad \forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2, \tag{3.3}$$

并将由下式定义的 $\mathbb{U}$ 值过程称为 $\nabla f(X)$

$$\nabla f(X_t) := \nabla f^0(X_0)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\nabla f^{k,n}(X_t)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}$$

$f(X)$ 的 梯度。由（2.4）可直接验证，过程
$\nabla f\ X$ n $f^{k\,n}$ 3 3 $(\nabla f\ X\ )^{(k,n)}$ =( ) 的剖分由（ ）中的标准 -维梯度给出，
$\nabla f^{k\,n}\ X$ $k\ n\ \in\mathbb{N}^2$ $\nabla f\ X\ \in\mathscr{L}\ X$
即对所有 (,) 有 ( ),( ), 以及 ( ) ( )。

对于分段函数 G 的每一段 $G^{k,n}:\ [0,1]^n \to \mathbb{R}$ ，其中 μ，我们将以自融资的方式生成交易策略 ϑ 的相应部分，即剖分 $\vartheta^{(k,n)}$。于是，区间 $]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]$ 上的初始值 $\vartheta^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)$ 应取决于（2.13）右侧，该右侧是 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测的。这意味着生成函数 $G^{k,n}$ 也应取决于一个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量；换言之， $G^{k,n}$ 应在每次维度变化的时刻 τ_{k-1} 确定，以满足第二个自融资恒等式（2.13）。为此，我们引入以下定义。

定义 3.2 （可测修正）。 对于每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ 以及任意函数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
，若 $f:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 可表示为 $\widetilde{f}=\gamma^k+f$，其中 γ^k是某个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量，则称其为 f的加法型 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测修正 。类似地，若 $\widehat{f}$可表示为 $\widehat{f}=\delta^k f$，其中 δ^k是某个$\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量，则称 $\widehat{f}:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为 f 的乘法型 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测修正 。

此外，给定一族函数 $\mathscr{G}:=\{G^0\}\cup\{G^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$，它们对应于 μ的一个分段 函数 G，若对应的集合 $\widetilde{\mathscr{G}}:=\{\widetilde{G}^0\}\cup\{\widetilde{G}^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ 中$\widetilde{G}$ ($\widehat{\mathscr{G}}:=\{\widehat{G}^0\}\cup\{\widehat{G}^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ 中的 $\widehat{G}$)满足 $\widetilde{G}^0\equiv G^0$ ($\widehat{G}^0\equiv G^0$)，且对于每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$，每个 $\widetilde{G}^{k,n}$ ($\widehat{G}^{k,n}$) 都是 $G^{k,n}$ 的加法型（分别为乘法型）$\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测修正，则称 μ 的分段随机函数 G (G)为 G的加法型（乘法型）可测修正 。

借助这一概念，我们将通过递归方式构造交易策略，来处理第二个自融资条件（2.13）。给定一族 $\mathscr{G}:=\{G^0\}\cup\{G^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ 生成函数，以及市场前一“时期”上的交易策略 ϑ 的一个剖分 $\vartheta^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}$ ，在时刻 τ_{k-1}确定 $G^{k,n}$的一个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测修正（加法型或乘法型） $\widetilde{G}^{k,n}$ ，使其满足（2.13）；随后，将 $\widetilde{G}^{k,n}$ 用于在每个（k,n）-剖分集上生成 ϑ 的下一部分 $\vartheta^{(k,n)}$，其中 $k=1,2,\cdots$。

3.2 函数生成的投资组合

在本小节中，我们将利用定义 2.5 中的市场权重过程 μ 作为输入，从分段生成函数 $G\in C^2(\mathbb{U})$ 及其函数族 $\{G^0\}\cup\{G^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ 构造两类函数生成投资组合。在此以及下文中，不失一般性地假设经过某种归一化后， $G^0(\mu_0)=1$ 成立（我们可以考虑满足 $\widehat{G}^0(\mu_0)=1$ 的 $\mathscr{F}_0$-可测修正，并将 $\widehat{G}^0$ 重命名为 G^0）。

3.2.1 加法生成

由于我们有 $\nabla G(\mu_-) \in \mathscr{L}(\mu)$，标准的带跳跃的 n 维 Itô 公式给出

$$G^{k,n}(\mu_t) = G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}\big(\nabla G^{k,n}(\mu_-)\big)(t) \tag{3.4}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,j} G^{k,n}(\mu_{s-})\, d[\mu_i^{k,n,c}, \mu_j^{k,n,c}](s) + \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} d_{B,G^{k,n}}\big(\mu_s,\, \mu_{s-}\big),$$

在 $(k,\ n)$-剖分集上，其中 $\mu^{k,\ i\ n\,c}$ 是 $\mu^{k,\ i\ n}$ 的连续部分，而 $d_{B,\ G}(x,\ y)$ 表示与 G 相关联的布雷格曼散度，适用于点 $x,\ y \in \Delta_n := \{(x_1,\ \cdots,\ x_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

$$d_{B,G}(x,y) := G(x) - G(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i G(y)(x_i - y_i). \tag{3.5}$$

我们定义

$$\Gamma^{G,k,n}(t) := 0 + \left[G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) - G^{k,n}(\mu_t) + I_{\mu^{k,n}}\big(\nabla G^{k,n}(\mu_-)\big)(t)\right]\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})} \tag{3.6}$$

在每个 $(k,\ n)$-剖分集上，定义 G 的伽马过程。由 (3.4)，每个 $(k,\ n)$-伽马过程都可以用另一种形式表示

$$\Gamma^{G,k,n}(t) = -\frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{i,j} G^{k,n}(\mu_{s-})\, d[\mu_i^{k,n,c}, \mu_j^{k,n,c}](s) - \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} d_{B,G^{k,n}}\big(\mu_s,\, \mu_{s-}\big) \tag{3.7}$$

在 $(k,\ n)$-剖分集上，且它具有有限变差。特别地，若 $G^{k,\ n}$ 是凹函数，则布雷格曼散度非正，即 $d_{B,\ G}(x,\ y) \le 0$ 对每个 $x,\ y \in \Delta_n$ 都成立（根据詹森不等式），因此 $(k,\ n)$-伽马过程 $\Gamma^{G,\ k,\ n}(\cdot)$ 在 $(k,\ n)$-剖分集上是非递减的。

现在，我们可以将 (3.4) 中随机积分的被积函数 $\vartheta^{(k,n)} := \nabla G^{k,\ n}(\mu_-)$ 作为交易策略的候选，但还需要使其满足自融资条件。为此，我们首先定义时刻 $t = \tau_0 = 0$ 的交易策略 φ 的剖分 $\varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)},\ \cdots,\ \varphi_{N_0}^{(0)})$

$$\vartheta^{(0)}(\cdot) := 0^{(N_0)} + \nabla G^0(\mu_\cdot)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}, \tag{3.8}$$
$$\varphi_i^{(0)}(\cdot) := 0 + \big(\vartheta_i^{(0)}(\cdot) - C^{G,\vartheta,0}\big)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}, \qquad i = 1, \cdots, N_0, \tag{3.9}$$

其中 $C^{G,\ \vartheta,\ 0} := \sum_{i=1}^{N_0} \vartheta_i^{(0)}(0)\mu_i(0) - G^0(\mu_0)$ 称为时刻 0 的余额缺额（见下文定义 3.3）。为了递归地构造满足区间 $]\!]\tau_{k-1},\ \tau_k]\!]$ 上第一个自融资条件 (2.12) 的下一组剖分 $\varphi^{(k,n)}$，我们将按照 Karatzas 和 Ruf（2017）的做法，从“基” $\vartheta^{(k,n)}(t)$ 中减去所谓的自融资缺陷 $Q^{\vartheta,\ \mu,\ k,\ n}(t)$（见下文定义 (3.15)）。这里，基定义为

$$\vartheta^{(k,n)}(t) := 0^{(n)} + \nabla G^{k,n}(\mu_{t-})\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \tag{3.10}$$

自融资缺陷由下式给出

$$Q^{\vartheta,\mu,k,n}(t) := 0 + \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t-) - \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)\mu_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+) \tag{3.11}$$
$$- I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t-)\Bigg]\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}.$$

注意，根据定义，我们有 $Q^{\vartheta,\ \mu,\ k,\ n}(\tau_{k-1}+)=0$。我们还考虑 G 的一个可加可测修正：

$$\widetilde{G}^0=G^0,\qquad \widetilde{G}^{k,n}=\gamma^{G,\varphi,k,n}+G^{k,n},\qquad \forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2, \tag{3.12}$$

其中，$\gamma^{G,\ \varphi,\ k,\ n}$ 是一个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量

$$\gamma^{G,\varphi,k,n}:=V^{\varphi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\cdot\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}}S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n}S_j(\tau_{k-1}+)}-G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}). \tag{3.13}$$

接下来，我们定义一个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量 $C^{G,\ \vartheta,\ k,\ n}$，以及一个 n维向量过程 $\varphi^{(k,n)}$ 如下：

$$C^{\widetilde{G},\vartheta,k,n}:=\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)\mu_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)-\widetilde{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}), \tag{3.14}$$

$$\varphi_i^{(k,n)}(t):=0+\Big(\vartheta_i^{(k,n)}(t)-Q^{\vartheta,\mu,k,n}(t)-C^{\widetilde{G},\vartheta,k,n}\Big)\hat{\mathbb{1}}_{\rrbracket\tau_{k-1},\tau_k\rrbracket\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})},\quad i=1,\cdots,n. \tag{3.15}$$

我们再次强调，对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varphi^{(k,n)}$ 是以递归方式定义的；由初始配置 (3.8) 和 (3.9) 可知，式 (3.13) 中的 $\gamma^{G,\ \varphi,\ k,\ n}$ 取决于前一时期的最后一个值 $\varphi^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}(\tau_{k-1})$，因此，在 (3.15) 中定义的 $\varphi^{(k,n)}$ 也取决于量 $\varphi^{(k-1,N_{\tau_{k-1}})}(\tau_{k-1})$。

最后，我们构造一个取值于 $\mathbb{U}$的过程 φ，汇集这些剖分

$$\varphi(\cdot):=\varphi^{(0)}(\cdot)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{(k,n)}(\cdot)\hat{\mathbb{1}}_{\rrbracket\tau_{k-1},\tau_k\rrbracket\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}. \tag{3.16}$$

我们证明，该过程 φ 确实是一个交易策略，并称其为由分段生成函数 $G\in C^2(\mathbb{U})$生成的加法生成交易策略。

命题 3.1（加法生成）。式 φ 中的过程是交易策略，其相对财富过程 V^{φ} 为

$$V^{\varphi}(t)=\widetilde{G}(\mu_t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma^{G,k,n}(t)\,\hat{\mathbb{1}}_{\rrbracket\tau_{k-1},\tau_k\rrbracket\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})},\qquad t\geq 0. \tag{3.17}$$

证明。由于 $\nabla G^{k,\ n}(\mu_-)$ 是 $\mu^{k,\ n}$-可积的，且 (k,n)-剖分集 $\rrbracket\tau_{k-1},\ \tau_k\rrbracket\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,\ n})$ 是可预测的，因此对于每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$，$\vartheta^{(k,n)}$ 也是可预测的。此外，对于每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$，$Q^{\vartheta,\ \mu,\ k,\ n}$ 也是可预测且 $\mu^{k,\ n}$-可积的（Shiryaev 和 Cherny（2002年）的引理 4.13）。我们还证明了在剖分集上，$\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量 $C^{G,\ \vartheta,\ k,\ n}$ 的可预测性。这表明 $\varphi\in\mathscr{L}(\mu)$。

接下来，我们验证对于任意一对 $(k,\ n)\in\mathbb{N}^2$，φ 满足合并后的自融资恒等式 (2.15)。我们回顾性质 (2.8)–(2.10)，以及恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot)\Big(\Delta\mu_i^{(k,n)}(\cdot)\Big)=\Big(\Delta I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})\Big)(\cdot), \tag{3.18}$$

根据 Protter (2003) 的定理 II.13，推导出 $(k,\ n)$-剖分集上的一系列恒等式：

$$\begin{aligned} V^{\varphi,k,n}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t) - Q^{\vartheta,\mu,k,n}(t) - C^{\widetilde{G},\vartheta,k,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(k,n)}(t)\Big(\Delta\mu_i^{(k,n)}(t)\Big) + \widetilde{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t-) \\ &= \widetilde{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t) = \widetilde{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}(\varphi^{(k,n)})(t) \\ &= V^{\varphi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}} S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n} S_j(\tau_{k-1}+)}\right) + I_{\mu^{k,n}}(\varphi^{(k,n)})(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

因此，φ 满足自融资条件 (2.15)，而且 φ 确实是一种交易策略。对于 φ的相对财富过程，恒等式 (3.19) 和 (3.6) 得出

$$\begin{aligned} V^{\varphi,k,n}(t) &= \widetilde{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t) = \gamma^{G,\varphi,k,n} + G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}\big(\nabla G^{k,n}(\mu_-)\big)(t) \\ &= \gamma^{G,\varphi,k,n} + G^{k,n}(\mu_t) + \Gamma^{G,k,n}(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

在每个 $(k,\ n)$-剖分集上。将最后一个等式代入 (2.16)，再结合 (3.2)，便得到 $t>0$的结果 (3.17)；当 $t=0$时，很容易验证恒等式 $V^{\varphi}(0) = G^{0}(\mu_0) = \widetilde{G}^{0}(\mu_0)$。 □

命题 3.1 将 Karatzas 和 Ruf (2017) 针对固定维度剖分市场的每个片段所提出的早期构造加以推广，并通过在每个片段开始时引入生成函数的一个修正版，无缝衔接这些片段，使其满足第二个自融资恒等式 (2.13)。

在计算命题 3.1 中 φ 的相对财富 $V^{\varphi}(t)$ 时，我们需要以递归方式使用恒等式 (3.17)，因为 $\widetilde{G}^{k,\ n}(\mu_t)$ 取决于量 $\gamma^{G,\ \varphi,\ k,\ n}$，而该量又取决于前一时期最后的相对财富 $V^{\varphi,\ k-1,\ N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})$。这是由交易策略 φ的递归构造所致；不过，下面的结果为任意给定的 $t>0$提供了相对财富过程 $V^{\varphi}(t)$ 的另一种表示。

为简化下文中的一些记号，我们记

$$\sigma^{k,n} := \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}} S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n} S_j(\tau_{k-1}+)} \tag{3.21}$$

为 τ_{k-1} 时总市值与其后紧接着的总市值之比（对应于 $(k,\ n)$-剖分集），并将其从第 i 个时期到第 k 个时期的乘积记为，对任意 $1\le i\le k$，有

$$\sigma^{k,n}_{i,N_{\tau_i}} := \prod_{\ell=i}^{k} \sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{i-1}}} S_j(\tau_{i-1})}{\sum_{j=1}^{N_{\tau_i}} S_j(\tau_{i-1}+)} \times \cdots \times \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}} S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n} S_j(\tau_{k-1}+)}. \tag{3.22}$$

定理 3.1（加法生成）。对于任意一对（t,ω），满足 $t>0$，且属于（k,n）-剖分集，其中 $k,\ n)\ \in \mathbb{N}^2$，命题 *3.1* 中加法生成交易策略 φ 的相对财富 $V^{\varphi}(t)$ 可分解为生成函数、超额增长（*EG*）以及由维度跳变产生的修正项（*C*）之和，计算截至时间 t：

$$V^{\varphi}(t) = G^{k,n}(\mu_t) + EG(t) + C(t), \qquad where \tag{3.23}$$

$$EG(t) := \sum_{\ell=1}^{k-1} \Gamma^{G,\ell,N_{\tau_\ell}}(\tau_\ell)\sigma^{k,n}_{\ell+1,N_{\tau_{\ell+1}}} + \Gamma^{G,k,n}(t), \tag{3.24}$$

$$C(t) := \sum_{\ell=1}^{k} \left[\sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}} G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}}) - G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})\right] \sigma^{k,n}_{\ell+1,N_{\tau_{\ell+1}}}, \tag{3.25}$$

记号为 $\sigma^{k,\ n}_{k+1,\ N_{\tau_{k+1}}} = 1$。

证明。对于给定的一对 (t,ω)（以下记号中省略 ω），我们反复应用 (3.20) 和 (3.13)，推导得

$$\begin{aligned}
V^{\varphi}(t) &= V^{\varphi,k,n}(t) = \gamma^{G,\varphi,k,n} + G^{k,n}(\mu_t) + \Gamma^{G,k,n}(t) \\
&= V^{\varphi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\sigma^{k,n} - G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + G^{k,n}(\mu_t) + \Gamma^{G,k,n}(t) \\
&= \left[\gamma^{G,\varphi,k-1,N_{\tau_{k-1}}} + G^{k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\mu_{\tau_{k-1}}) + \Gamma^{G,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\right]\sigma^{k,n} \\
&\qquad\qquad - G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+}) + G^{k,n}(\mu_t) + \Gamma^{G,k,n}(t) \\
&= \cdots \\
&= \left[V^{\varphi,0,N_0}(0)\sigma^{k,n}_{1,N_{\tau_1}} + \sum_{\ell=1}^{k-1}\left[G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_\ell}) - G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})\right]\sigma^{k,n}_{\ell+1,N_{\tau_{\ell+1}}} - G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})\right] + G^{k,n}(\mu_t) \\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{k-1}\Gamma^{G,\ell,N_{\tau_\ell}}(\tau_\ell)\sigma^{k,n}_{\ell+1,N_{\tau_{\ell+1}}} + \Gamma^{G,k,n}(t).
\end{aligned}$$

最后两项是 (3.24) 中的 $EG(t)$；利用恒等式 $V^{\varphi,0,N_0}(0) = G^0(\mu_0)$，并重新整理最大方括号内的各项，即可得到结果 (3.23)。 □

3.2.2 乘法生成

在下文中，我们还固定一个分段生成函数 G in $C^2(\mathbb{U})$，但增加一个条件：倒数 $1/G^{k,n}(\mu_t)$ 在每个 (k,n)-剖分集上局部有界。回顾第3.2.1节中的记号，我们将递归定义两个 $\mathbb{U}$值过程 η 和 ψ，如下所示。在时刻 $\tau_0 = 0$，令

$$\eta^{(0)} \equiv \psi^{(0)} \equiv \varphi^{(0)} \tag{3.26}$$

如 (3. 9). 对每个 $k = 1, 2, \cdots$, 考虑一个 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量 $\delta^{G,\psi,k,\ n}$

$$\delta^{G,\psi,k,n} := \frac{V^{\psi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})}{G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}} S_j(\tau_{k-1})}{\sum_{j=1}^{n} S_j(\tau_{k-1}+)}, \tag{3.27}$$

$\widehat{\ }$以及 G 的乘法可测修正 G

$$\widehat{G}^0 = G^0, \qquad \widehat{G}^{k,n} = \delta^{G,\psi,k,n} G^{k,n}, \qquad \forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2. \tag{3.28}$$

回顾式 (3.6) 中定义在 (k,n)-剖分集上的伽马过程 $\Gamma^{G,k,n}$，并定义

$$E^{G,k,n}(t) := 0 + \mathscr{E}\left(\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \frac{1}{G^{k,n}(\mu_s)}\, d\Gamma^{G,k,n}(s)\right)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \qquad t \geq 0, \tag{3.29}$$

其中 $\mathscr{E}\big(L(t)\big)$ 表示定义在 (k,n)-剖分集上的有限变差过程 L 的随机指数，且 $L(\tau_{k-1}+)=0$：

$$\mathscr{E}\big(L(t)\big) := \exp\big(L(t)\big) \prod_{\tau_{k-1}<s\le t} \Big(1+\Delta L(s)\Big)\exp\Big(-\Delta L(s)\Big) \tag{3.30}$$

使得 $d\mathscr{E}(L)(t) = \mathscr{E}(L)(t-)dL(t)$ 成立。由于假设 G 的倒数 $1/G^{k,n}(\mu_t)$ 局部有界，过程 $E^{G,k,n}(t)$ 在 (k,n)-剖分集上具有有限变差。我们继续定义：对于 $k=1,2,\cdots$，以及任意 $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\eta^{(k,n)}(t) &:= 0^{(n)} + \delta^{G,\psi,k,n}E^{G,k,n}(t-)\nabla G^{k,n}(\mu_{t-})\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}\\ &= 0^{(n)} + E^{G,k,n}(t-)\nabla\widehat{G}^{k,n}(\mu_{t-})\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

此外，对于 $\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$-可测随机变量 $C^{G,\eta,k,n}$，其自融资缺陷 $Q^{\eta,\mu,k,n}$ 对 η 的定义与 (3.11)、(3.14) 中相同，而一个 n 维向量过程 $\psi^{(k,n)}$ 定义为

$$\psi_i^{(k,n)}(\cdot) := 0 + \Big(\eta_i^{(k,n)}(\cdot) - Q^{\eta,\mu,k,n}(\cdot) - C^{\widehat{G},\eta,k,n}\Big)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})},\quad i=1,\cdots,n. \tag{3.32}$$

最后，我们构造一个 $\mathbb{U}$-值过程 ψ，用于收集这些剖分

$$\psi := \psi^{(0)}\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi^{(k,n)}\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}. \tag{3.33}$$

下一个结果表明，ψ 确实是一个交易策略，我们称其由生成函数 G 乘法生成。

命题 3.2 (乘法生成)。对于一个分段函数 $G\in C^2(\mathbb{U})$，其取值于 μ，且对于每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$，倒数 $1/G^{k,n}$ 局部有界，则 (3.33) 中的过程 ψ 是一个交易策略，其相对财富过程 V^ψ 为

$$V^\psi(t) = \widehat{G}^0(\mu_0)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{G}^{k,n}(\mu_t)E^{G,k,n}(t)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}. \tag{3.34}$$

证明。与命题 3.1 的证明一样，利用关于 $1/G^{k,n}$ 对每个 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ 的局部有界性假设，可以直接验证 $\eta^{(k,n)}$ 和 $\psi^{(k,n)}$ 的可预测性以及 $\mu^{k,n}$-可积性。这表明 $\psi\in\mathscr{L}(\mu)$。此外，我们可以用同样的方法证明 ψ 满足自融资条件 (2.15)，从而得出 ψ 是一种交易策略。

我们固定任意一对 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$，并注意到过程 $E^{G,k,n}(\cdot)$ 是有限变差的，且恒等式 $E^{G,k,n}(\cdot) = E^{G,k,n}(\cdot)$ 成立。应用乘积法则（Jacod 和 Shiryaev (2003) 的定理 I.4.49），并回顾定义 (3.6)，我们在每个 (k,n)-剖分集上，即 $\forall(t,\omega)\in]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})$ 上，推导得到：

$$\begin{aligned}&\widehat{G}^{k,n}(\mu_t)E^{G,k,n}(t) - \widehat{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})E^{G,k,n}(\tau_{k-1}+)\\ &\qquad= \int_{\tau_{k-1}+}^{t} E^{G,k,n}(s-)\,d\widehat{G}^{k,n}(\mu_s) + \int_{\tau_{k-1}+}^{t}\widehat{G}^{k,n}(\mu_s)\,dE^{G,k,n}(s)\\ &\qquad= \int_{\tau_{k-1}+}^{t} E^{G,k,n}(s-)\Big(d\widehat{G}^{k,n}(\mu_s) + d\Gamma^{\widehat{G},k,n}(s)\Big)\\ &\qquad= \int_{\tau_{k-1}+}^{t} E^{G,k,n}(s-)\sum_{i=1}^{n}\partial_i\widehat{G}^{k,n}(\mu_{s-})\,d\mu_i^{k,n}(s) = I_{\mu^{k,n}}(\eta^{(k,n)})(t)\\ &\qquad= I_{\mu^{k,n}}(\psi^{(k,n)})(t) = V^{\psi,k,n}(t) - V^{\psi,k,n}(\tau_{k-1}+).\end{aligned} \tag{3.35}$$

这里，倒数第二个等式来自性质 (2.10)，而最后一个恒等式则由 $\psi^{(k,n)}$ 的自融资条件 (2.12) 得出。此外，由 $Q^{\eta,\mu,k,n}(\tau_{k-1}+)=0$ 和 $E^{G,k,n}(\tau_{k-1}+)=1$，我们推导出

$$V^{\psi,k,n}(\tau_{k-1}+)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)\mu_i^{(k,n)}(\tau_{k-1}+)-C^{\widehat{G},\eta,k,n}=\widehat{G}^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})E^{G,k,n}(\tau_{k-1}+). \tag{3.36}$$

由这些推导，我们得出

$$V^{\psi,k,n}(\cdot)\equiv\widehat{G}^{k,n}(\mu_\cdot)E^{G,k,n}(\cdot) \tag{3.37}$$

在 $(k,\ n)$-剖分集上。当 $t=0$ 时，显然可验证 $V^{\psi}(0)=G^0(\mu_0)$，于是得到结果 (3.34)。

□

与定理 3.1 中一样，我们现在推导任意给定 $t>0$ 时对数相对财富 $V^{\psi}(t)$ 的分解。

定理 3.2（乘法生成）。对于满足 $t>0$ 的任意一对 (t,ω)，若其属于针对 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ 的 (k,n)-剖分集，则命题 *3.2* 中乘法生成交易策略 ψ 的对数相对财富对数 $V^{\psi}(t)$ 可分解为生成函数、超额增长（*EG*）以及维度跳跃所引起的修正项（*C*）之和，时间截至 t:

$$\log V^{\psi}(t)=\log G^{k,n}(\mu_t)+EG(t)+C(t),\qquad where \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}EG(t):=\sum_{\ell=1}^{k-1}\left[\int_{\tau_{\ell-1}+}^{\tau_\ell}\frac{d\Gamma^{G,\ell,N_{\tau_\ell},c}(s)}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_s)}+\sum_{\tau_{\ell-1}<s\le\tau_\ell}\log\left(1+\frac{\Delta\Gamma^{G,\ell,N_{\tau_\ell}}(s)}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_s)}\right)\right]\\ +\int_{\tau_{k-1}+}^{t}\frac{d\Gamma^{G,k,n,c}(s)}{G^{k,n}(\mu_s)}+\sum_{\tau_{k-1}<s\le t}\log\left(1+\frac{\Delta\Gamma^{G,k,n}(s)}{G^{k,n}(\mu_s)}\right),\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$C(t):=\sum_{\ell=1}^{k}\log\left(\frac{\sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}}\,G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}})}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})}\right), \tag{3.40}$$

约定 $N_{\tau_k}=n$。此处，$\Gamma^{G,\ k,\ n,\ c}$ 表示伽马过程 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$ 的连续部分，即 *(3.7)* 右侧的第一项。

证明。我们首先引入记号

$$\xi^{G,k,n}:=\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{k-1}}}S_j(\tau_{k-1})}{G^{k,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})\sum_{j=1}^{n}S_j(\tau_{k-1}+)} \tag{3.41}$$

使得

$$\delta^{G,\psi,k,n}=V^{\psi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1})\xi^{G,k,n} \tag{3.42}$$

对每个 $(k,\ n)\in\mathbb{N}^2$，均由 (3.27) 得出。

由于剖分集彼此不相交，对于给定的配对 $(t,\ \omega)$，由 (2.16) 可得恒等式 $\log V^{\psi}(t) = \log V^{\psi,\,k,\,n}(t)$（省略 ω）。我们反复应用 (3.37) 和 (3.42)，推导出

$$\begin{aligned}\log V^{\psi,k,n}(t) &= \log \delta^{G,\psi,k,n} + \log G^{k,n}(\mu_t) + \log E^{G,k,n}(t)\\ &= \log V^{\psi,k-1,N_{\tau_{k-1}}}(\tau_{k-1}) + \log \xi^{G,k,n} + \log G^{k,n}(\mu_t) + \log E^{G,k,n}(t)\\ &= \cdots\\ &= \log V^{\psi,0,N_0}(0) + \sum_{\ell=1}^{k-1}\left[\log \xi^{G,\ell,N_{\tau_\ell}} + \log G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_\ell}) + \log E^{G,\ell,N_{\tau_\ell}}(\tau_\ell)\right]\\ &\qquad + \left[\log \xi^{G,k,n} + \log G^{k,n}(\mu_t) + \log E^{G,k,n}(t)\right].\end{aligned}$$

我们利用恒等式 $V^{\psi,\,0,\,N_0}(0) = G^0(\mu_0)$ 以及定义 (3.41)、(3.21)，重新整理右侧的一些项，从而得到修正项 $C(t)$：

$$\log V^{\psi,0,N_0}(0) + \sum_{\ell=1}^{k-1}\left[\log \xi^{G,\ell,N_{\tau_\ell}} + \log G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_\ell})\right] + \log \xi^{G,k,n}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k}\left[\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau_{\ell-1}}} S_j(\tau_{\ell-1})}{\sum_{j=1}^{N_{\tau_\ell}} S_j(\tau_{\ell-1}+)}\right) - \log\left(\frac{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})}{G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}})}\right)\right] = \sum_{\ell=1}^{k}\log\left(\frac{\sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}}\, G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}})}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})}\right).$$

对于其余各项，我们使用 (3.29)、(3.30) 以及 Protter (2003) 的定理 II.13，推导出

$$\log E^{G,k,n}(t) = \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \frac{d\Gamma^{G,k,n,c}(s)}{G^{k,n}(\mu_s)} + \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} \log\left(1 + \frac{\Delta\Gamma^{G,k,n}(s)}{G^{k,n}(\mu_s)}\right), \tag{3.43}$$

以及类似的表达式 $\log E^{G,\,\ell,\,N_{\tau_\ell}}(\tau_\ell)$ 关于 $\ell = 1,\ \cdots,\ k-1$ 的类似表达式。因此，结果 (3.38) 成立。□

3.2.3 平衡条件

我们首先注意到，加法生成交易策略 φ 在 (3.15) 中的分量 $\varphi_i^{(k,n)}(t)$ 在 $(k,\ n)$-剖分集 $]\!]\tau_{k-1},\ \tau_k]\!] \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,\,n})$ 上具有另一种表示形式：

$$\varphi_i^{(k,n)}(t) = \vartheta_i^{(k,n)}(t) - \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t) + V^{\varphi,k,n}(t), \tag{3.44}$$

根据恒等式 (3.18) 和 (3.20)。此外，最后一项 $V^{\varphi,\,k,\,n}(t)$ 可以用 (3.23) 的右端替换，因此策略 $\varphi^{(k,n)}(t)$ 可表示为原始生成族 G 及其梯度、超额增长和修正项在时刻 t 之前的函数。

类似地，(3.32) 中乘法生成策略 ψ 的分量 $\psi_i^{(k,n)}(t)$ 也可根据恒等式 (3.35) 和 (3.36) 写成另一种形式：

$$\psi_i^{(k,n)}(t) = \eta_i^{(k,n)}(t) - \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t) + V^{\psi,k,n}(t), \tag{3.45}$$

并且我们可以对 (3.45) 的最后一项应用分解 (3.38)。此外，对于 ψ，每个生成函数 $G^{k,\,n}$ 都需要满足一个条件，以进一步简化相应投资组合 π^{ψ} 的表示。

定义 3.3（平衡条件）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，一个 n 维可微函数f 称为平衡，如果 f 满足

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \big(\partial_i f(x)\big) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

这一平衡条件不仅能简化函数生成交易策略及其对应投资组合的表示（Karatzas & Kim, 2020；Karatzas & Ruf，2017），还能在生成交易策略时处理市场权重以外的另一个过程的不连续性（Kim，2023）。A.2 节也将使用这一平衡条件，因为它使基于排名的投资组合能够在开放市场中仅投资于固定数量的大市值股票，这一做法采用了 Karatzas 和 Kim（2021）的思路。

Whe若 $G^{k,n}$ 满足平衡条件，则很容易验证恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(k,n)}(t)\mu_i^{(k,n)}(t-) = \widehat{G}^{k,n}(\mu_{t-})E^{G,k,n}(t-)$$

对每个 $t \in]\!]\tau_{k-1}, \tau_k]\!]$ 均成立。最后一个等式与（3.45）和（3.34）结合，得到

$$\psi_i^{(k,n)}(t-) = \eta_i^{(k,n)}(t-) = \partial_i \widehat{G}^{k,n}(\mu_{t-})E^{G,k,n}(t-). \tag{3.46}$$

回顾投资组合权重的定义（2.17），并注意到 $\psi^{(k,n)}$（及其投资组合权重 $\pi^{(k,n)}$）是左连续的，我们有以下结果。

推论 3.1。如果每个生成函数 $G^{k,\,n}$ 都满足平衡条件，那么乘法生成交易策略 $\psi_i^{(k,n)}$ 的投资组合权重 $\pi_i^{(k,n)}$ 可表示为

$$\pi_i^{(k,n)}(t) = \frac{\partial_i G^{k,n}(\mu_{t-})\mu_i^{(k,n)}(t-)}{\sum_{j=1}^{n} \partial_j G^{k,n}(\mu_{t-})\mu_j^{(k,n)}(t-)}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad \textit{on each } (k,n)\textit{-dissection set.} \tag{3.47}$$

请注意，右侧只取决于市场权重过程和原始生成函数 G（而非其可测修正 G），尽管式 (3.46) 中交易策略的分量取决于 $\widetilde{G}$，或归一化随机变量 $\delta^{G,\,\psi,\,k,\,n}$。

我们将在第 4.2 节看到，所谓的多样性加权投资组合和等权投资组合（示例 4.1、4.2）的生成函数满足平衡条件。

3.2.4 自融资市场投资组合

定理 3.1 和 3.2 中出现的函数生成交易策略 ϑ的相对财富 $V^{\vartheta}(t)$，衡量的是时刻 t的财富 ϑ 相对于总市值的大小，定义见式 (2.14)。按照构造，该交易策略 ϑ 旨在始终保持自融资，而总市值（式 (2.14) 中的分母）在每次维度变化时都可能发生跳跃。

此外，乘法生成策略在 (3.40) 中的修正项 $C(t)$ 还可以进一步分解为

$$C(t) = \sum_{\ell=1}^{k} \log \sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}} + \sum_{\ell=1}^{k} \log\left(\frac{G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}})}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}+})}\right) =: C_{TM}(t) + C_G(t). \tag{3.48}$$

请注意，右侧的第一项 $C_{TM}(t)$ 与生成函数G无关。它累积了截至时间 t 总市值跳跃的（对数值），而第二项 $C_G(t)$ 则捕捉了截至时间 t 之前所有维度变化时生成函数跳跃的（对数值）。

这些观察引出了如下自融资市场投资组合的概念。考虑一族函数 $\mathscr{G}$: $= \{G^0\} \cup \{G^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$，由 $G^0(x) = \sum_{i=1}^{N_0} x_i$ 和 $G^{k,\,n}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 给出。容易检验，由 $\mathscr{G}$ 加法型和乘法型生成的两个交易策略相同；记其为 ξ。其对应的投资组合 $\pi \equiv \pi^{\xi}$ 计算如下

$$\pi^{(k,n)}(t) = \mu^{(k,n)}(t-) \tag{3.49}$$

对于来自推论 3.1 的每个 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$。

定义 3.4（自融资市场投资组合）。式（3.49）中的交易策略 ψ 及其投资组合 ξ 分别称为**自融资市场交易策略**和**自融资市场投资组合**。将它们记为 ξ_{sf} 和 μ_{sf}。

根据定理 3.2 和（3.48），ξ_{sf} 的对数相对财富仅包含修正项$C_{TM}(t)$，换言之，$\log G^{k,\,n}(\mu_\cdot) \equiv EG(\cdot) \equiv C_G(\cdot) \equiv 0$，并且

$$\log V^{\xi_{sf}}(t) = C_{TM}(t) = \sum_{\ell=1}^{k} \log \sigma^{\ell, N_{\tau_\ell}}, \qquad \text{or} \qquad V^{\xi_{sf}}(t) = \sigma^{k,n}_{1,N_{\tau_1}}, \tag{3.50}$$

对于剖分集上的任意（$t,\ \omega$），（$k,\ n$），回顾记号（3.22）。我们再次强调，上述项 $C_{TM}(t)$ 出现在每个函数生成交易策略的分解（3.38）中，与生成函数无关。此外，由恒等式（3.46）可轻易推出，$\xi^{(k,n)}_{sf}(t)$ 的所有分量均等于 $V^{\xi_{sf},\ k,\ n}(t) = \sigma^{k,\ 1\ \cdots\ n}_{\ \cdots\ N_{\tau_1}}$。因此，$\xi_{sf}$ 只是在维度跳跃之间，将等量股份投资于所有现存股票的买入并持有交易策略；在每次维度跳跃时，根据总市值的跳跃调整每只股票所持有的股份数量，以自融资的方式将其财富重新分配给市场的下一组成分股。这也解释了投资组合 π 在（3.49）中如何始终根据现存股票的相对市值分配其财富。

如果投资者认为应以自融资市场投资组合为基准，来比较函数生成交易策略 ϑ 的相对表现，那么可以轻易计算 V^{ϑ} 与 $V^{\xi_{sf}}$ 的比率。这里注意到，由于定义 2.4 中对市值过程的正性假设，对于每个t，$V^{\xi_{sf}}(t)$ 都取正值。记

$$U^{\vartheta}(t) := \frac{V^{\vartheta}(t)}{V^{\xi_{sf}}(t)}, \qquad t \geq 0, \tag{3.51}$$

交易策略 ϑ 相对于自融资市场投资组合的相对财富。与 (2.16) 的方式类似，过程 U^{ϑ} 可表示为每个 $(k,\ n)$-剖分集上的一组 $U^{\vartheta,\ k,\ n}(t) := V^{\vartheta,\ k,\ n}(t)/V^{\xi_{sf},\ k,\ n}(t)$。特别地，对于定理 3.2 中的乘法生成交易策略 ψ，我们有 ψ相对于 ξ_{sf} 的对数相对财富的分解

$$\log U^{\psi}(t) = \log G^{k,n}(\mu_t) + EG(t) + C_G(t), \tag{3.52}$$

具有相同的超额增长项 EG（见 (3.39)），但将修正项 $C(t)$ 替换为 (3.48) 中的 $C_G(t)$。

3.2.5 相对财富过程的长期增长

在本部分中，我们将比较 (3.24) 中的超额增长项 EG 与 (3.39) 中的超额增长项的行为，并指出加法生成交易策略相较于乘法生成交易策略的一些缺点。

式 (3.24) 和 (3.39) 中的超额增长项 $EG(t)$ 有助于相对财富过程 V^{φ} 和 V^{ψ}的长期增长。根据表示式 (3.7)，我们回顾一下：如果每个 G^{ℓ},$^{N_{\tau_\ell}}$ 都是凹函数，那么每个伽马过程 Γ^{G},$_{\ell}$,$^{N_{\tau_\ell}}(\cdot)$ 都是非递减的。因此，如果族$\{G^{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ 中的每个生成函数都是凹函数，那么式 (3.24) 和 (3.39) 均为非负。然而，即使生成函数是凹函数，前一个超额增长项 (3.24) 通常也不会随时间递增。对于加法型生成策略φ，如果总市值的下一个比率 $\sigma^{k+1,\tilde{n}}$（其中 $\tilde{n}\in\mathbb{N}$ 是下一个市场维度）显著小于 1，那么在下一次维度变化 τ_k时，式 (3.24) 可能会下降。这是因为，在“过去”时期中，针对 $\ell=1,\cdots,k-1$的伽马过程累积量 Γ^{G},$_{\ell}$,$^{N_{\tau_\ell}}(\tau_\ell)$，都会受到“未来”维度变化 $\tau_k,\tau_{k+1},\cdots$时总市值比率的影响：在下一次维度跳变的时刻 τ_k，量 $\sigma^{k,n}$ 将乘到式 (3.24) 的整个表达式上，之后依此类推。从这个意义上说，我们可以认为，式 (3.24) 的超额增长仅随时间 t “分段非递减”，并且在维度变化时可能偶尔骤降。

相比之下，乘法生成策略 ψ 的超额增长（3.39）不受比率 $\sigma^{\ell,\ N_{\tau_\ell}}$的影响。因此，如果所有生成函数均为正且为凹函数，（3.39）的每一项都非负，并且随时间推移不减。这表明，乘法生成策略的长期增长不受市场中维度跳变所引发冲击的影响。

此外，ψ 的修正项 C 具有优美的分解形式（3.48），将通用项 C_{TM} 与另一项 C_G分离开来；而 φ 在（3.25）中的修正项则无法进行这样的分解。因此，无法简单表示加法型生成策略 φ 相对于自融资市场投资组合的相对财富 U^{φ}；U^{φ} 应取决于（3.21）中的比率。然而，（3.52）中的 U^{ψ} 不含此类比率，因此，如果我们预期剩余部分 $\log G(\mu_\cdot)+C_G(\cdot)$具有长期稳定性（该部分仅取决于生成函数 G），那么超额增长$EG(\cdot)$将有助于 ψ 相对于自融资市场投资组合取得长期超额表现。

鉴于上述加法生成策略的缺点，我们将在下一节给出乘法生成投资组合的示例，并展示分解式 (3.38) 和 (3.52) 中每一项的经验演化。

4 实证分析

本节的主要目的是考察股票市场中的维度变化如何影响投资组合表现。具体而言，我们希望利用真实的股票市场数据，识别若干经典投资组合的对数相对财富过程 V^{ψ} 和 U^{ψ} 在方程 (3.38)、(3.50) 和 (3.52) 中的修正项 C、C_{TM} 和 C_G；这些投资组合均为乘法生成。

由于我们将使用每日股票价格数据，为了更精确地比较修正项，我们首先将第3节研究的一般理论中的投资组合函数生成理论，作为离散时间市场模型的一个特例加以发展。在计算式（3.39）的超额增长项时，我们需要根据给定的离散时间数据集测量

涉及伽马过程的积分项，因此会产生近似误差。由于我们将考虑一段很长的时期（40年）来分析投资组合，这些近似误差往往会随着时间推移而累积，从而妨碍对修正项进行精确分析。

4.1 离散时间模型

由于我们允许市值（以及市场权重）过程发生跳跃，前几节中的所有结果都可以很容易地改写为离散时间股票市场模型。为了引入离散时间模型，本小节中我们固定一个指标集$\mathbb{T} := (t_j)_{j=0}^{\infty}$，满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots$。此外，对于概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上一个取值于 $\mathbb{U}$ 的离散时间随机过程 $\{X(t_j) : t_j \in \mathbb{T}\}$，我们考虑一列停时 $(\tau_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{T}$，在这些时刻 X 的维度发生变化，即

$$\tau_0 := 0, \qquad \tau_k := \inf\Big\{t_j > \tau_{k-1} : \dim\big(X(t_j)\big) \neq \dim\big(X(t_{j-1})\big)\Big\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

于是，我们可以按照以下规则构造一个取值于 $\mathbb{U}$ 的分段常值过程 $\widetilde{X}$：$\widetilde{X}(0) = X$，且对 $j = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned} &\text{if } t_j \in (\tau_k)_{k\geq 1}: \qquad \widetilde{X}(t) = X(t_{j-1}) \quad \text{for} \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \\ &\text{if } t_j \notin (\tau_k)_{k\geq 1}: \qquad \widetilde{X}(t) = X(t_{j-1}) \quad \text{for} \quad t_{j-1} < t < t_j, \quad \text{and} \quad \widetilde{X}(t_j) = X(t_j), \end{aligned} \tag{4.1}$$

使得 $\widetilde{X}$ 在维度跳跃之间右连续，并在维度跳跃时左连续。对于滤过，我们考虑自然滤过 $\mathscr{F}^X$ 的右连续扩张 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}^X_{t_{j-1}} := \sigma(X_{t_0}, \cdots, X_{t_{j-1}})$，适用于 $t_{j-1} \leq t < t_j$。根据这一构造，不难验证 X 是一个 $\mathscr{F}_t$-渐进过程，且序列 $(\tau_k)_{k\geq 0}$ 是 X 满足定义 2.1 条件的（最小）重置序列，因此，X 被视为定义 2.2 意义下的分段右连续左极限半鞅。

因此，当我们仅在离散时刻 $\mathbb{T}$观察股票市场（其维数为随机维度）的市值，并且市值过程 S 是一个取值于 $\mathbb{U}$的离散随机过程时，我们将考虑其分段常数的连续时间版本 $\widetilde{S}$，以及与之对应的市场权重过程 $\widetilde{\mu}$（属于 $\widetilde{S}$），其维数过程为 N，以便应用前文关于从 $\widetilde{\mu}$生成交易策略的理论。换言之，对于任意 $\omega \in \Omega$，我们将离散过程的轨迹 $\{\mu_{t_j}(\omega)\}_{t_j\in\mathbb{T}}$ 与其连续时间版本 $\{\widetilde{\mu}_t(\omega)\}_{t\geq 0}$视为相同。

现在，由于 $\widetilde{\mu}$ 是分段常数的，每个积分中积分器涉及 $\widetilde{\mu}$（的剖分）的连续部分都为零，因此我们可以根据构造 (4.1) 中的原始离散时间过程 μ，改写前几节中的所有表达式。特别地，对于 $(t_j, \omega) \in \rrbracket \tau_{k-1}, \tau_k \llbracket \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,n})$，第一个自融资条件 (2.12) 可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(t_j)\mu_i(t_j) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(t_{j-1})\mu_i(t_j),$$

并且，(k, n)-伽马过程 (3.7) 均表示为

$$\Gamma^{G,k,n}(t_j) = -\sum_{\tau_{k-1} < t_q \leq t_j} d_{B,G^{k,n}}\big(\mu_{t_q}, \mu_{t_{q-1}}\big).$$

方程 (3.43) 现在简化为

$$\log E^{G,k,n}(t_j) = \sum_{\tau_{k-1}<t_q\le t_j<\tau_k} \log\left(1+\frac{\Delta\Gamma^{G,k,n}(t_q)}{G^{k,n}(\mu_{t_q})}\right) = \sum_{\tau_{k-1}<t_q\le t_j<\tau_k} \log\left(1-\frac{d_{B,G^{k,n}}\big(\mu_{t_q},\,\mu_{t_{q-1}}\big)}{G^{k,n}(\mu_{t_q})}\right).$$

因此，定理 3.2 通过将分解 (3.38)（以及 (3.48)）改写为以下形式而成立

$$\log V^{\psi}(t_j) = \log G^{k,n}(\mu_{t_j}) + EG(t_j) + C_{TM}(t_j) + C_G(t_j), \qquad \text{where} \tag{4.2}$$

$$EG(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{\tau_{\ell-1}<t_q<\tau_\ell} \Big[eg(\ell, N_{\tau_\ell}, t_q)\Big] + \sum_{\tau_{k-1}<t_q\le t_j<\tau_k} \Big[eg(k,n,t_q)\Big], \tag{4.3}$$

$$C_{TM}(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k} \log \sigma^{\ell,N_{\tau_\ell}}, \qquad C_G(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k} \log\left(\frac{G^{\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}}}(\mu_{\tau_{\ell-1}-})}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{\tau_{\ell-1}})}\right), \tag{4.4}$$

采用约定 $G^{0,N_0}(\mu_{\tau_0-}) = G^{1,N_{\tau_1}}(\mu_{\tau_0})$，并使用记号

$$eg(\ell, N_{\tau_\ell}, t_q) := \log\left(1 - \frac{d_{B,G^{\ell,N_{\tau_\ell}}}\big(\mu_{t_q},\,\mu_{t_{q-1}}\big)}{G^{\ell,N_{\tau_\ell}}(\mu_{t_q})}\right),$$

对于每个 (k,n)-剖分集中给定的一对 (t_j,ω)，其中 $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ 且 $t_j<\tau_k$。此处及下文中，τ_k- 表示 τ_k 之前的最后一个时间指标，而 τ_k+ 表示 τ_k 之后的下一个指数，即，当 $\tau_k=t_j$ 时，$\tau_k-=t_{j-1}$ 且 $\tau_k+=t_{j+1}$，约定为 $\tau_0-=\tau_0=0$。表达式$eg(\ell,N_{\tau_\ell},t_q)$ 表示市场处于第 ℓ 个时期且维度为 N_{τ_ℓ} 时，从 t_{q-1} 到 t_q的离散超额增长，因此 $EG(t_j)$ 表示截至时间 t_j的累积离散超额增长。

由于 τ_k- 与 τ_k之间存在维度跳变，方程 (4.2) 的最后三项保持不变，即 $EG(\tau_k) = EG(\tau_k-)$、$C_{TM}(\mu_{\tau_k}) = C_{TM}(\mu_{\tau_k-})$ 以及 $C_G(\mu_{\tau_k}) = C_G(\mu_{\tau_k-})$，这是由其构造方式 (4.1) 所决定的。然而，在 τ_k与 τ_k+之间的下一个时间窗口内，(4.2) 右侧最后一项 $C_G(\cdot)$ 的增量被第一项 $\log G(\mu_\cdot)$ 先前的增量抵消：

$$C_G(\tau_k+) - C_G(\tau_k) = -\Big\{\log G^{k+1,N_{\tau_{k+1}}}(\mu_{\tau_k}) - \log G^{k,N_{\tau_k}}(\mu_{\tau_k-})\Big\}. \tag{4.5}$$

换言之，(4.4) 中 $C_G(\cdot)$ 的每个被加项，都是由$\tau_{\ell-1}-$ 与 $\tau_{\ell-1}$之间的维度跳变引起的，并且均被同一时期内 $\log G(\mu_\cdot)$ 的增量抵消。因此，分解 (4.2)–(4.4) 可以改写为

$$\begin{aligned}\log V^{\psi}(t_j) = &\sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{\tau_{\ell-1}<t_q<\tau_\ell} \Big[\log G^{\ell,N_\ell}(\mu_{t_q}) - \log G^{\ell,N_\ell}(\mu_{t_{q-1}})\Big] \\ &+ \sum_{\tau_{k-1}<t_q\le t_j<\tau_k} \Big[\log G^{k,n}(\mu_{t_q}) - \log G^{k,n}(\mu_{t_{q-1}})\Big] + EG(t_j) + C_{TM}(t_j),\end{aligned}$$

即，对数生成函数的演变，以及在过去的维度跳跃之间累积的超额增长和 C_{TM} 在这些维度跳跃时累积的普适修正项，都会影响相对财富 V^{ψ}。

对于式 (3.52) 中的对数相对财富 U^{ψ}，在这个离散时间框架下，我们有相同的表示形式，只是最后一个修正项除外：

$$\log U^{\psi}(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{\tau_{\ell-1}<t_q<\tau_\ell} \Big[\log G^{\ell,N_\ell}(\mu_{t_q}) - \log G^{\ell,N_\ell}(\mu_{t_{q-1}}) \Big] + \sum_{\tau_{k-1}<t_q\le t_j<\tau_k} \Big[\log G^{k,n}(\mu_{t_q}) - \log G^{k,n}(\mu_{t_{q-1}}) \Big] + EG(t_j),$$

上述推导推广了 Wong（2017）的结果，其中在固定维度的离散时间市场模型中发展了投资组合的函数生成。这里，我们还参考 Campbell 和 Wong（2022）、Pal 和 Wong（2016）以及 Wong （ 2015 ），以了解固定维度市场中离散时间投资组合生成框架的不同方面。

4.2 示例

本小节介绍随机投资组合理论在离散时间模型下的一些经典示例。接下来的小节将对这些示例进行实证分析。

在以下示例中，将投资组合生成函数 $G : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 定义为市场权重过程 μ 的分段函数时，我们只需指定一个 n 维的“代表性分段函数” $G^{k,\,n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，对应于固定的一对 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$。其他所有分段函数均可轻易从这一代表形式推知；事实上，对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $G^{k,\,n} = G^{\ell,\,n}$。此外，以下假设一般时间指标 t_j 处于第 k 个时期，且市场维度等于 n，也就是说，数对 $(t_j,\ \omega)$ 属于 $(k,\ n)$-剖分集 $[\![\tau_{k-1},\ \tau_k[\![\cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,\,n})$。

示例 4.1（多样性加权投资组合）。对于固定实数 $p \in (0, 1]$, 该函数

$$G^{k,n}(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

is b平衡（定义 3.3），并乘法生成式（3.47）中的投资组合)

$$\pi_i(t_j) = \frac{\big(\mu_i(t_{j-1})\big)^p}{\sum_{\ell=1}^{n} \big(\mu_\ell(t_{j-1})\big)^p}, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{4.6}$$

参数 p 决定了多样性度量；p 的值越小，投资组合就会将更多财富投资于较小市值股票。我们还注意到，$p = 1$ 这一情形对应于第 3.2.4 节中的自融资市场投资组合。经过一些计算，我们从（4.2）得到相应交易策略 ψ的对数相对财富的以下分解

$$\log V^{\psi}(t_j) = \frac{1}{p} \log \Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\mu_i(t_j)\big)^p \Big) + EG(t_j) + C_{TM}(t_j) + C_G(t_j), \qquad \text{where} \tag{4.7}$$

超额增长 $EG(t_j)$ 由式 (4.3) 给出，其中

$$eg(\ell, N_{\tau_\ell}, t_q) = \log \Big(\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \mu_i(t_q) \big(\mu_i(t_{q-1})\big)^{p-1} \Big) - \frac{1}{p} \Big[\log \Big(\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \big(\mu_i(t_q)\big)^p \Big) \Big(\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \big(\mu_i(t_{q-1})\big)^p \Big)^{p-1} \Big],$$

以及修正项

$$C_G(t_j) = \frac{1}{p}\sum_{\ell=1}^{k} \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_{\tau_{\ell-1}}} \big(\mu_i(\tau_{\ell-1}-)\big)^p}{\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \big(\mu_i(\tau_{\ell-1})\big)^p}\right).$$

示例 4.2（等权重投资组合）。 以下平衡函数

$$G^{k,n}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\frac{1}{n}}$$

乘法生成式（3.47）中的投资组合

$$\pi_i(t_j) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

该投资组合将当前财富按相同比例投资于所有现有股票。注意，当 $p \to 0$ 时，该投资组合是多样性加权投资组合（4.6）的极限。对数相对财富 $\log V^{\psi}(t_j)$ 的分解（4.2）可计算为

$$\log V^{\psi}(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \mu_i(t_j) + EG(t_j) + C_{TM}(t_j) + C_G(t_j), \qquad \text{where} \tag{4.8}$$

超额增长 $EG(t_j)$ 由（4.3）给出，其中

$$eg(\ell, N_{\tau_\ell}, t_q) = \frac{1}{N_{\tau_\ell}}\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \log\frac{\mu_i(t_{q-1})}{\mu_i(t_q)} + \log\left(\frac{1}{N_{\tau_\ell}}\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \frac{\mu_i(t_q)}{\mu_i(t_{q-1})}\right),$$

而修正项等于

$$C_G(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k}\left[\frac{1}{N_{\tau_{\ell-1}}}\sum_{i=1}^{N_{\tau_{\ell-1}}} \log\mu_i(\tau_{\ell-1}-) - \frac{1}{N_{\tau_\ell}}\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}} \log\mu_i(\tau_{\ell-1})\right].$$

示例 4.3（熵加权投资组合）。 函数

$$G^{k,n}(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

乘法生成由 (3.31)、(3.45)、(3.34) 和 (2.17) 给出的投资组合

$$\pi_i(t_j) = \frac{-\mu_i(t_{j-1})\log\mu_i(t_{j-1})}{-\sum_{\ell=1}^{n}\mu_\ell(t_{j-1})\log\mu_\ell(t_{j-1})}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

式 (4.2) 的对数相对财富 $\log V^{\psi}(t_j)$ 分解为

$$\log V^{\psi}(t_j) = \log\Big(-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t_j)\log\mu_i(t_j)\Big) + EG(t_j) + C_{TM}(t_j) + C_G(t_j), \qquad \text{with} \tag{4.9}$$

$$eg(\ell, N_{\tau_\ell}, t_q) = \log\left(\frac{-\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}}\mu_i(t_q)\log\mu_i(t_{q-1})}{-\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}}\mu_i(t_q)\log\mu_i(t_q)}\right),$$

$$C_G(t_j) = \sum_{\ell=1}^{k}\left[\log\Big(-\sum_{i=1}^{N_{\tau_{\ell-1}}}\mu_i(\tau_{\ell-1}-)\log\mu_i(\tau_{\ell-1}-)\Big) - \log\Big(-\sum_{i=1}^{N_{\tau_\ell}}\mu_i(\tau_{\ell-1})\log\mu_i(\tau_{\ell-1})\Big)\right].$$

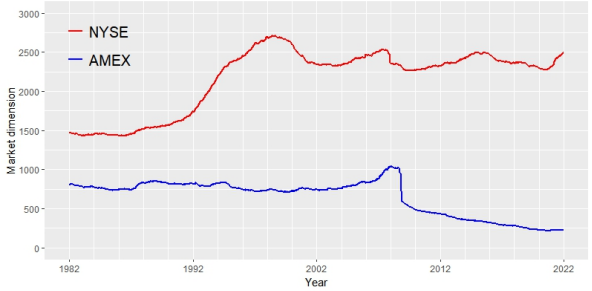
4.3 数据描述

我们的数据包含 1982年1月4日 至 2021年12月31日 这 40年（10086 个交易日）期间，在纽约证券交易所（NYSE）和美国证券交易所（AMEX）上市的股票的每日收盘价。这些数据取自证券价格研究中心（CRSP，2023年）数据库，通过沃顿研究数据服务访问。关于 CRSP 数据库的更详细说明，请参阅 Ruf（2023年）。

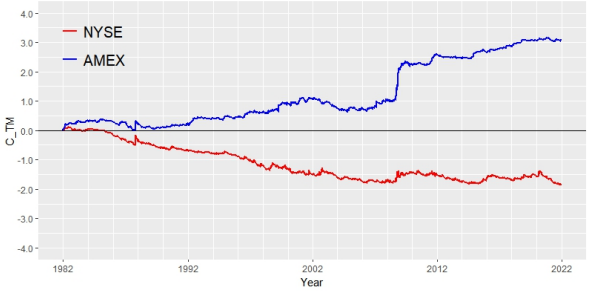
在第 4.1 节介绍的离散时间模型中，时间索引集 $\mathbb{T} = (t_j = j)_{j=0}^{10085}$ 的每个元素 t_j 表示第 j 个交易日。图 2 描述了 40 年间维度变化、公式 (3.50) 中的普适修正项 $C_{TM}(t)$，以及两家证券交易所总市值的演变。在图 2 (a) 中，纽约证券交易所和美国证券交易所在 10086 天内分别发生了 6015 次和 3920 次维度跳跃；换言之，平均而言，维度变化分别每隔 1.68 个和 2.57 个交易日发生一次。

由于纽约证券交易所的上市股票数量在 40 年间有所增加，图 2 (b) 中纽约证券交易所对应的公式 (3.50) 修正项C_{TM} 整体呈下降趋势。对于美国证券交易所的图，我们可以观察到相反的趋势。图 2 (b) 两张图中 1987 年前后的小幅上扬，是由 1987年10月的股市崩盘所致，这一事件被称为黑色星期一。

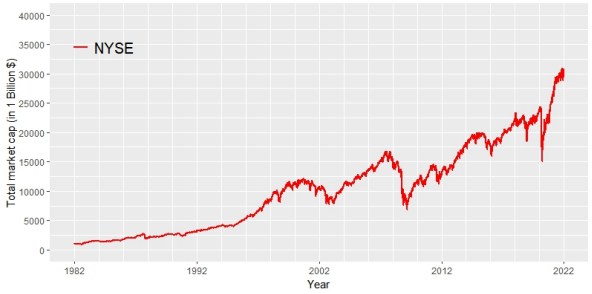
在图2的美国证券交易所图表中，2008年发生了一次重大退市事件，导致市场维度和总市值显著下降。主要原因是，运营纽约证券交易所的跨国金融公司 NYSE Euronext 于2008年收购了美国证券交易所，而美国证券交易所现称为 NYSE American。在这一收购过程中，许多股票因各种原因被清算或从交易所摘除，例如未能满足新交易所的持续上市财务指引，或者仅仅是应公司的要求。2008年的股市崩盘也是造成这两家交易所总市值大幅下跌的原因。



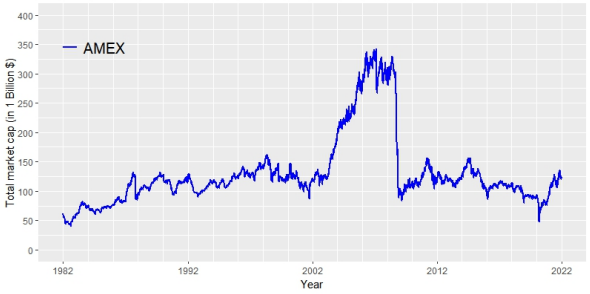
(a) 纽约证券交易所、美国证券交易所的维度变化



(b) C_{TM} 自融资市场投资组合的



(c) 纽约证券交易所的总市值



(d) 美国证券交易所的总市值

图 2：维度和总市值随时间的变化

最后，我们在此指出，为了精确衡量修正项在分解恒等式中对投资组合长期相对绩效的影响程度，下一小节中的投资组合交易在每个交易日进行（每日再平衡），且不计任何交易成本。由于寻找一个表现优异的投资组合（或第3节3.2.5中的相对套利）并非我们的目标，因此我们的实证分析未考虑交易成本。在存在交易成本的情况下，实际的投资组合管理者应审慎确定交易频率，以实现利润最大化；关于这一研究方向，我们参见 Ruf 和 Xie（2020）。

4.4 实证结果

现在，我们利用第 4.3 节所述的数据集，给出第 4.2 节介绍的经典投资组合的对数相对财富过程在分解 (4.7)、(4.8) 和 (4.9) 中各项的实证结果。对数 G 项（右侧第一项）和超额增长（EG）的变化将分别以绿色和蓝色表示。普适修正项 C_{TM}（也见图 2 (b)）将以黄色表示，另一修正项 C_G 则以橙色绘制。

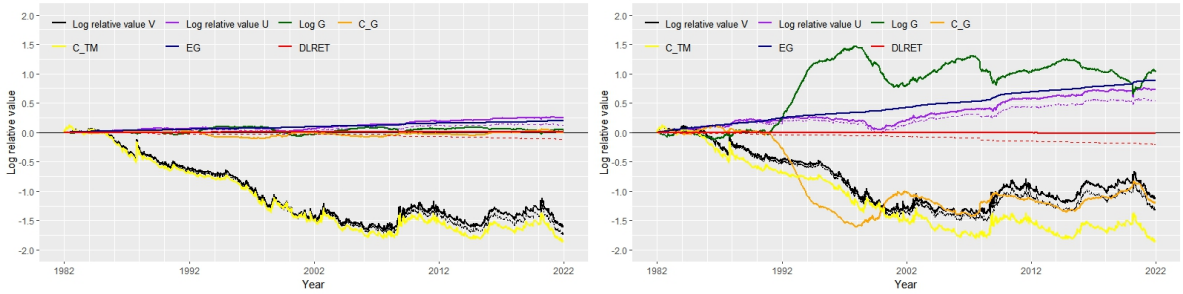
在离散时间市场模型下，我们注意到，恒等式 (4.7)、(4.8) 和 (4.9) 均严格成立，但每只股票在两个交易所退市的时刻除外。发生退市事件时，我们使用数据集中通过 CRSP 数据库获取的退市收益率。然而，我们的数据集中有许多退市收益率变量缺失。对于这些缺失值，我们考虑两种情形：(i) 最保守的情形，将所有缺失的退市收益率设为 -1 （即我们损失分配给退市股票的全部资金）；(ii) 最理想的情形，将这些值设为 0（即我们可以在股票从交易所退市前清算其全部价值）。由于某些原因，数据集中存在一些正的退市收益率，但这种情况很少见。当第 i 只股票在第 t_j天以退市收益率 DLRET$_i$ 从交易所退市时，我们将累积数量 $\log(1+\pi_i(t_j) \times \text{DLRET}_i)$，它表示 π 的对数收益因退市而发生的变化；我们将这个新项称为 DLRET。对于情形 (i)，DLRET 图将以红色实线绘制；对于情形 (ii)，则以红色虚线表示。这里回顾注 2.2，说明我们的连续时间一般模型如何处理这类退市事件。

最后，相对于总市值（log V^ψ）和自融资市场投资组合（log U^ψ）的两个投资组合对数相对财富将分别以黑色和紫色表示。因此，根据恒等式（3.38）和（3.52），下图中的关系为“黑色 =绿色 + 蓝色 + 黄色 + 橙色 + 红色”和“紫色 =绿色 +蓝色 + 橙色 + 红色”。由于红色图形既有实线也有点线，黑色和紫色图形也分别具有两种对应的线型。我们将时间 0 时的交易策略进行了归一化，使分解中的每一项都以零为初始值。

图 3 和图 4 分别展示了投资于纽约证券交易所和美国证券交易所的三个投资组合的上述分解。

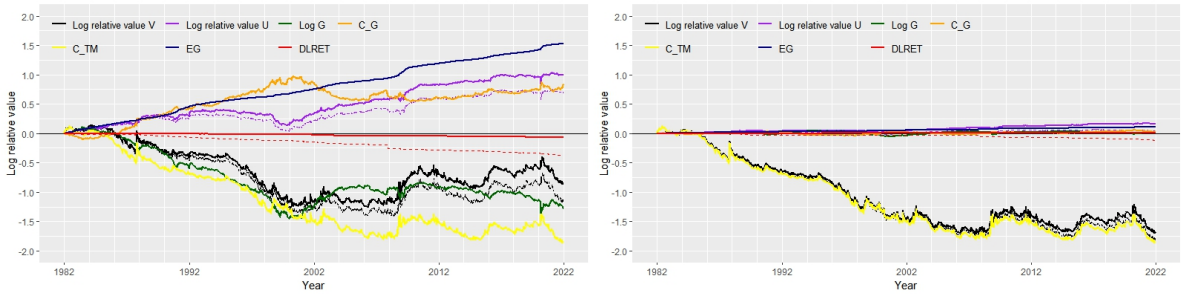
现在，我们说明图 3 和图 4 中的若干重要观察结果。

（i）普适修正项 C_{TM} 是由总市值的跳跃导致的不可避免项，其数值相当大；事实上，它是投资组合相对于总市值的相对财富V^ψ 的一个主要影响因素，尤其是对于 $p = 0.75$ 的多样性加权投资组合和熵加权投资组合而言。此外，如第 4.3 节所述，它以相反的方式影响两个交易所的投资组合收益；对于纽约证券交易所上的投资组合，它会拉低相对财富对数 V^ψ，



（a）多样性加权， $p = 0.75$

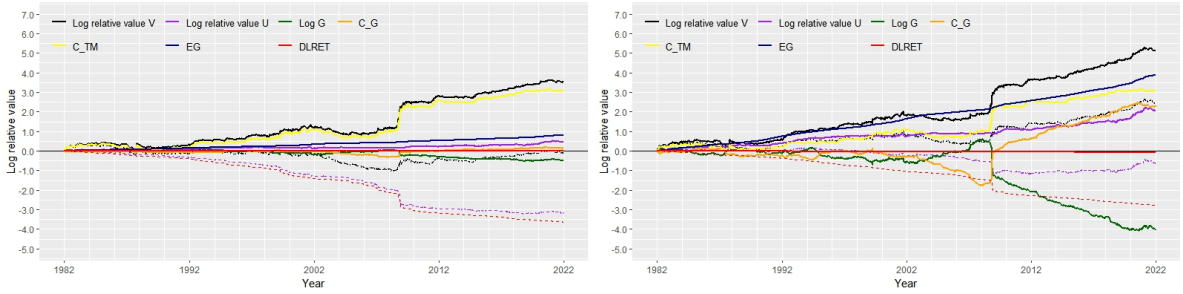
（b）多样性加权， $p = 0.25$



（c）等权

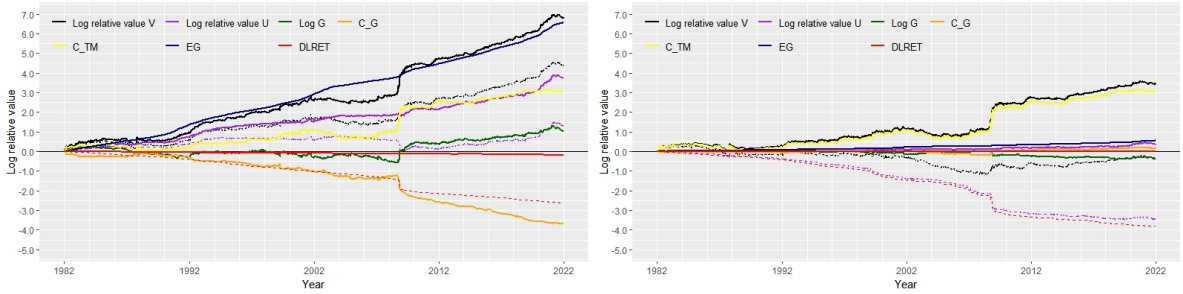
（d）熵加权

图 3：纽约证券交易所投资组合对数相对财富的分解



（a）多样性加权， $p = 0.75$

(b) 多样性加权， $p = 0.25$



(c) 等权

(d) 熵加权

F图 4：美国证券交易所投资组合对数相对财富的分解

而对于在美国证券交易所上市的股票，它则有助于 $\log V^{\psi}$ 的增长。这为投资者提供了一个理由：在比较各自投资组合的相对超额表现时，以自融资市场投资组合为基准。

(ii) 对于多样性加权投资组合，较小的 p 值（或对较小市值股票配置更多权重）会带来更高的超额增长（EG 项）；这在随机投资组合理论中是众所周知的（例如，参见 E. R. Fernholz（2002年）的例3.4.4）。尤其是在图 (b) 和 (c) 中，超额增长对对数相对财富 U^{ψ} 的增长贡献显著。然而，这类对较小市值股票配置过高权重的投资组合换手率较高，因此在存在交易成本时应谨慎实施。

(iii) 此外，在图 (b) 和 (c) 的投资组合中，绿色曲线（$\log G$ 项）和橙色曲线（C_G 项）都剧烈波动，但变化方向几乎相反，宛如彼此映照的镜像。这是因为维度变化相当频繁（见图 2 (a)），而且在维度变化发生的时刻，两者的增量存在关系 (4.5)。因此，只有生成函数和超额增长项在连续两次维度变化之间的波动，才会影响相对于自融资市场投资组合的相对财富 U^{ψ} 的演变。

(iv) 不出所料，红色曲线（DLRET）对投资组合表现有负面影响，而且对在美国证券交易所上市的股票，其影响大于对在纽约证券交易所上市的股票。由于纽约证券交易所的股票数量更多，在最坏情况下（退市收益率等于 -1），纽约证券交易所的股票退市所造成的损失，平均而言，对投资组合表现的影响应小于美国证券交易所的股票退市所造成的影响。DLRET 项的实际演变应位于红色曲线之间的某处，因此这些曲线至少为对数相对财富过程（黑色和紫色曲线）提供了边界。

5 结论

本文在投资组合的函数生成中纳入股票市场的维度变化，从而消除了对可投资范围规模不变的假设。最后，我们总结了基于 Karatzas 和 Kim（2020）进一步拓展投资组合函数生成理论的一些方向。

(i) 构建投资组合时，除了市场权重 μ，还可以使用一些可观测但不可交易的量 λ。这里，λ 是一个有限维 $\mathbb{U}$ 值随机过程，具有其自身的维数过程 dim(λ)（可能与 dim(μ) 相同，也可能不同）。代表性生成函数 $G^{k,\,n}\colon \mathbb{U}\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ 随后以两个 $\mathbb{U}$ 值过程 μ 和 λ 为输入。

这类额外过程的示例 λ 包括移动平均、个别市场权重 $\mu_i^{(k,n)}(t)$自其在时间 τ_{k-1}诞生以来的运行最大值或最小值、已实现二次协变差 $[\mu_i^{k,n}(t)\ \mu^{k,\,_j\,n}(t)]$, 以及股票基本面，例如账面价值（我们假设其具有有限变差）。关于这方面的研究，读者可参阅Kim（2023）；Mijatovic（2021）；Ruf和Xie（2019）；Schied、Speiser和Voloshchenko（2018）。

（ii）在全文中，为了应用伊藤公式，我们假设投资组合生成分段函数 G 属于$C^2(\mathbb{U})$（定义 3.1）。但是，使用伊藤公式（或田中公式）的广义版本时，我们可以将投资组合生成函数的类别扩展到光滑性较低的函数。

(iii) 尽管该理论是在概率空间中发展起来的，但我们可以去除任何概率假设，并在逐路径、无概率设定下构造投资组合。市值过程 S 和市场权重向量 μ 可以建模为取值于 $\mathbb{U}$ 的分段函数，而非半鞅。在这种情况下，重置序列 $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$只是一个取值于 $[0,\infty]$ 的序列；我们以与本文所述类似的方式，在生成投资组合时应用逐路径 Itˆo-Tanaka 理论。关于运用粗路径理论对这一方向所作的较新研究，参见 Allan、Cuchiero、Liu 和 Pr¨omel（2023）。

除了上述 Karatzas 和 Kim（2020）理论的适用扩展方向外，我们还列出本文背景下未来研究的若干其他方向。

(i) 在第 4 节的示例中，即使市场维度发生变化，我们仍对市场的每个时期使用相同的生成函数。例如，在第 4.4 节中，每个多样性加权投资组合在任何时点都使用相同的参数 p。不过，我们也可以为每个时期选择不同的生成函数（或在一族生成函数中选择不同的参数）。尤其是，如果投资者能够预测市场多样性的某种趋势，或预期市场下一时期将发生重大经济事件（例如 2008 年股市崩盘），她就可以据此选择生成函数，以最大化收益。不同的时期采用不同生成函数会如何影响投资组合收益，是一个具有实际意义的研究课题。

（ii）我们可以将随机投资组合理论中的一些理论结果扩展到维度变化的市场模型中。例如，Cuchiero、Schachermayer 和 Wong（2019）将随机投资组合理论与 Cover 的通用投资组合理论（Cover，1991）联系起来。值得探究的是，当市场维度随时间波动时，类似的结果是否仍然成立。

致谢

作者衷心感谢 Ioannis Karatzas 对本文的细致审阅并提出反馈意见，使本文得以改进。

资金支持

E. Bayraktar 部分获得美国国家科学基金会（资助编号 DMS-2106556）以及 Susan M. Smith 教授席位的支持。

数据可用性声明

支持本研究发现的数据可从CRSP获取。这些数据的获取受到限制；本研究使用这些数据时获得了许可。经CRSP许可，可通过https://www.crsp.org/获取数据。

参考文献

Allan, A. L., Cuchiero, C., Liu, C., & Pr¨omel, D. J. (2023). 无模型投资组合理论：粗路径方法。《数学金融》，即将出版。Bayraktar, E., Kim, D., & Tilva, A. (2022). 随机维度市场中的套利理论。(预印本，arXiv:2212.04623) Campbell, S., & Wong, T.-K. L. (2022). 随机投资组合理论中的函数型投资组合优化。《*SIAM*金融数学杂志》，*13*(2), 576-618. Cover, T. (1991). 通用投资组合。《数学金融》，*1*(1), 1-29. CRSP. (2023). *CRSP*美国股票数据库。(https://www.crsp.org，通过沃顿研究数据服务访问) Cuchiero, C., Schachermayer, W., & Wong, T.-K. L. (2019). Cover的通用投资组合、随机投资组合理论与计价单位投资组合。《数学金融》，*29*(3), 773-803. Fernholz, E. R. (2002). 随机投资组合理论 (第48卷)。Springer-Verlag，纽约。（随机建模与应用概率）Fernholz, R. (1999). 投资组合生成函数。载于 M. Avellaneda (编)，金融市场中的定量分析。 World Scientific。Fernholz, R. (2018). 计价单位市场。 (预印本，arXiv:1801.07309) Fernholz, R., & Karatzas, I. (2009). 随机投资组合理论：综述。载于《数值分析手册》(卷名：金融数学建模与数值方法)。Elsevier。Ghomrasni, R., & Pamen, O. M. (2010). 利用局部时对半鞅的顺序统计量进行分解。《随机分析与应用》，*28*(3), 467-479. Herdegen, M. (2017). 计价单位无关建模框架中的无套利。《数学金融》，*27*(2), 568-603. Itkin, D., & Larsson, M. (2021). 开放市场与混合*Jacobi*过程。 (预印本，arXiv:2110.14046) Jacod, J., & Shiryaev, A. N. (2003). 随机过程极限定理 (第2版)。柏林：Springer。Karatzas, I., & Kim, D. (2020). 由市场权重函数沿路径生成的交易策略。《金融与随机学》，*24*(2), 423-463. Karatzas, I., & Kim, D. (2021). 开放市场。《数学金融》，*31*(4), 1111-1161. Karatzas, I., & Ruf, J. (2017). 由Lyapunov函数生成的交易策略。《金融与随机学》，*21*(3), 753-787. Karatzas, I., & Sarantsev, A. (2016, 06). 竞争布朗粒子的多样化市场模型

包含拆分和合并。《应用概率年刊》，26(3)，1329–1361。Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). 布朗运动与随机微积分 (第二版，第113卷)。Springer-Verlag，纽约。Kim, D. (2023). 随机投资组合理论中的市净率。《金融与随机学》，27(2)，401-434。Mijatovic, P. (2021). 利用广义生成投资组合战胜市场。 (预印本，arXiv:2101.07084) Pal, S., & Wong, T.-K. L. (2016). 相对套利的几何。《数学与金融经济学》，10，263-293。Protter, P. E. (2003). 随机积分与微分方程 (第二版)。纽约：Springer。Ruf, J. (2023). 股票数据实证金融学（博士课程），伦敦政治经济学院。 (GitHub https://github.com/johruf/CRSP 关于 WRDS 的介绍) Ruf, J., & Xie, K. (2019). 广义李雅普诺夫函数与函数生成交易策略。《应用数学金融》，26(4)，293-327。Ruf, J., & Xie, K. (2020). 比例交易成本对系统生成投资组合的影响。《SIAM金融数学杂志》，11(3)，881-896。Schied, A., Speiser, L., & Voloshchenko, I. (2018). 无模型投资组合理论及其函数主公式。《SIAM金融数学杂志》，9，1074-1101。Shiryaev, A. N., & Cherny, A. S. (2002). 向量随机积分与资产定价基本定理。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，237，6–49。Strong, W. (2014). 随机维度分段半鞅的资产定价基本定理。《金融与随机学》，18(3)，487-514。Wong, T.-K. L. (2015). 相对套利优化。《金融年刊》，11，345-382。Wong, T.-K. L. (2017). 关于由最优传输生成的投资组合。 (预印本，arXiv:1709.03169)

基于排名的投资组合生成

运用我们在第3节中提出的类似方法，本附录将介绍如何根据公司按市值计算的排名来生成交易策略。我们还将研究一个嵌入随机维度股票全集中的开放市场。

A.1 随机维度市场中的基于排名的生成

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 n 维向量 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 中排名第 ℓ 的分量 $v_{(\ell)}$：

$$v_{(\ell)} := \max_{1 \le i_1 \cdots \le i_\ell \le n} \min\{v_{i_1}, \cdots, v_{i_\ell}\}, \qquad \ell \in [n] = \{1, \cdots, n\},$$

满足

$$\max_{i=1,\cdots,n} v_i = v_{(1)} \ge v_{(2)} \ge \cdots \ge v_{(n)} = \min_{i=1,\cdots,n} v_i.$$

我们用粗体符号 $\boldsymbol{v} := (v_{(1)}, v_{(2)}, \cdots, v_{(n)})$ 表示按降序排列的向量。

此外，对于任意给定的 $\mathbb{U}$ 值过程 X，我们记

$$\boldsymbol{X}^{(k,n)}(\cdot) := \big(X^{(k,n)}_{(1)}(\cdot), \cdots, X^{(k,n)}_{(n)}(\cdot)\big)$$

将剖分的 n 维向量按排名降序排列，并通过剖分构造排列后的 $\mathbb{U}$ 值过程 $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{X}^{(0)} \hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{X}^{(k,n)} \hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}.$$

特别地，如果 X 是一个 $\mathbb{U}$ 值分段半鞅，那么 $\boldsymbol{X}$ 也是一个 $\mathbb{U}$ 值分段半鞅。

现在考虑定义 2.5 中市场权重过程 μ 的排列过程 $\boldsymbol{\mu}$。回顾备注 2.1，由于（2.9），对于具有相同增量的 $\ell \in [n]$，我们有两个剖分 $\boldsymbol{\mu}^{k,n}(\ell)$ 和 $\boldsymbol{\mu}^{(k,n)}_\ell = \mu^{(k,n)}_\ell$（）。然而，前一个剖分 $\mu^{k,n}(\ell)$ 并不能反映 μ 的第 ℓ 个排名分量在（k、n）剖分集上的情况，因为根据定义，它在 τ_{k-1} 处被重置为零（见图1（d））。因此，在本附录中，我们将使用后一个剖分 $\mu^{(k,n)}(\ell)$ 作为积分器，因为每个此类积分都只会在（k、n）剖分集上考虑。

生成函数 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 现在以 $\boldsymbol{\mu}$ 作为输入，而非 μ。在每个 (k,n)-剖分集上，Itô 公式给出

$$\begin{aligned} G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t) &= G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+}) + I_{\boldsymbol{\mu}^{k,n}}\big(\nabla G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_-)\big)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \partial^2_{\ell,\lambda} G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})\, d[\mu^{(k,n),c}_{(\ell)}, \mu^{(k,n),c}_{(\lambda)}](s) + \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} d_{B,G^{k,n}}\big(\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\mu}_{s-}\big), \end{aligned}$$

在随机积分中

$$I_{\boldsymbol{\mu}^{k,n}}\big(\nabla G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_-)\big)(t) := \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})\, d\mu^{(k,n)}_{(\ell)}(s),$$

我们可以根据 Ghomrasni 和 Pamen（2010）的定理 2.3，将按排名排列的积分器 $d\mu^{(k,n)}{}_{(\ell)}$ 替换为原始分量 $d\mu_i^{(k,n)}$：

$$
\begin{aligned}
G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t) &= G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+}) + \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-}) \frac{\mathbb{1}_{\{\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(s-)=\mu_i^{(k,n)}(s-)\}}}{N_\ell^{k,n}(s-)}\, d\mu_i^{(k,n)}(s) \\
&+ \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=\ell+1}^{n} \frac{\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})}{N_\ell^{k,n}(s-)}\, d\mathscr{I}_s\big(\mu_{(\ell)}^{(k,n)} - \mu_{(j)}^{(k,n)}\big) - \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})}{N_\ell^{k,n}(s-)}\, d\mathscr{I}_s\big(\mu_{(j)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell)}^{(k,n)}\big) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_{\ell,\lambda}^2 G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-}) \frac{\mathbb{1}_{\{\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(s-)=\mu_i^{(k,n)}(s-),\, \mu_{(\lambda)}^{(k,n)}(s-)=\mu_j^{(k,n)}(s-)\}}}{N_\ell^{k,n}(s-)\, N_\lambda^{k,n}(s-)}\, d[\mu_i^{(k,n),c}, \mu_j^{(k,n),c}](s) \\
&+ \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} d_{B,G^{k,n}}\big(\boldsymbol{\mu}_s,\, \boldsymbol{\mu}_{s-}\big). \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

这里，$N^{k,n}_{\cdot,\ell}(t)$ 是在时间 t 处排名为 ℓ 的 $\boldsymbol{\mu}^{(k,n)}$ 的分量数：

$$
N_\ell^{k,n}(t) := \big|\{i : \mu_i^{(k,n)}(t) = \mu_{(\ell)}^{(k,n)}(t)\}\big|,
$$

并且我们记 $\mathscr{I}_t(Y) := L_t(Y) + \sum_{0<s\le t} \mathbb{1}_{\{Y(s-)=0\}} \Delta Y(s)$，其中 $L_t(Y)$ 是半鞅 Y 截至时间 $t \ge 0$ 在原点累积的局部时：

$$
2L_t(Y) := |Y(t)| - |Y(0)| - \int_0^t \operatorname{sign}\big(Y(s-)\big)\, dY(s) - \sum_{0<s\le t} \Big[|Y(s)| - |Y(s-)| - \operatorname{sign}\big(Y(s-)\big)\Delta Y(s)\Big], \qquad \text{(A.2)}
$$

记号 $\operatorname{sign}(x) := 2 \times \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - 1$。

在 (A.1) 的右侧，表达式

$$
\vartheta_i^{(k,n)}(s) := \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-}) \frac{\mathbb{1}_{\{\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(s-)=\mu_i^{(k,n)}(s-)\}}}{N_\ell^{k,n}(s-)} \qquad \text{(A.3)}
$$

起到与积分器 $\mu^{k,n}_{\cdot,i}$ 对应的被积函数的作用。我们使用这个被积函数 $\vartheta^{(k,n)}$ 来定义新的 (k,n)-伽马过程

$$
\Gamma^{G,k,n}(t) := 0 + \Big[G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+}) - G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t)\Big] \hat{\mathbb{1}}_{[\![\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})} \qquad \text{(A.4)}
$$

并应用 (A.1) 推导出另一种表示形式

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{G,k,n}(t) = 0 + \Bigg[&- \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=\ell+1}^{n} \frac{\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})}{N_\ell^{k,n}(s-)}\, d\mathscr{I}_s\big(\mu_{(\ell)}^{k,n} - \mu_{(j)}^{k,n}\big) \\
&+ \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-})}{N_\ell^{k,n}(s-)}\, d\mathscr{I}_s\big(\mu_{(j)}^{k,n} - \mu_{(\ell)}^{k,n}\big) \\
- \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell,\lambda,i,j=1}^{n} &\partial_{\ell,\lambda}^2 G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{s-}) \frac{\mathbb{1}_{\{\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(s-)=\mu_i^{(k,n)}(s-),\, \mu_{(\lambda)}^{(k,n)}(s-)=\mu_j^{(k,n)}(s-)\}}}{N_\ell^{k,n}(s-)\, N_\lambda^{k,n}(s-)}\, d[\mu_i^{(k,n),c}, \mu_j^{(k,n),c}](s) \\
&- \sum_{\tau_{k-1}<s\le t} d_{B,G^{k,n}}\big(\boldsymbol{\mu}_s,\, \boldsymbol{\mu}_{s-}\big) \Bigg] \hat{\mathbb{1}}_{[\![\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}. \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

接下来，我们将通过使向量 $\vartheta^{(k,n)} := (\vartheta_1^{(k,n)}, \cdots, \vartheta_n^{(k,n)})$ 成为自融资向量，按照第3节中的方法递归生成交易策略。类比于 (3.8) 和 (3.9)，我们定义两个 N_0 维过程 $\vartheta^{(0)}, \varphi^{(0)}$:

$$\vartheta_i^{(0)}(\cdot) := 0 + \sum_{\ell=1}^{N_0} \partial_\ell G^0(\boldsymbol{\mu}_0) \frac{\mathbb{1}_{\{\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(0) = \mu_i^{(k,n)}(0)\}}}{N_\ell^{k,n}(0)} \hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}, \qquad i = 1, \cdots, N_0, \tag{A.6}$$

$$\varphi_i^{(0)}(\cdot) := 0 + \left(\vartheta_i^{(0)}(\cdot) - C^{G,\vartheta,0}\right) \hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}, \qquad i = 1, \cdots, N_0, \tag{A.7}$$

其中 $C^{G,\,\vartheta,\,0} := \sum_{i=1}^{N_0} \vartheta_i^{(0)}(0)\mu_i(0) - G^0(\boldsymbol{\mu}_0)$。对于 $k = 1, 2, \cdots$，我们定义一个 n 维过程 $\varphi^{(k,n)} = (\varphi_1^{(k,n)}, \cdots, \varphi_n^{(k,n)})$，其分量为

$$\varphi_i^{(k,n)}(\cdot) := 0 + \left(\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot) - Q^{\vartheta,\mu,k,n}(\cdot) - C^{\widetilde{G},\vartheta,k,n}\right) \hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \tag{A.8}$$

如式 (3.15) 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 所示。这里，$Q^{\vartheta,\,\mu,\,k,\,n}(\cdot)$、$\widetilde{G}$ 和 $C^{\widetilde{G},\,\vartheta,\,k,\,n}$ 的定义与式 (3.11)–(3.14) 中相同，只是将 $\widetilde{G}^{k,\,n}(\mu_{\tau_{k-1}+})$ 替换为 $\widetilde{G}^{k,\,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+})$。于是，由这些剖分按式 (3.16) 构造的 $\mathbb{U}$ 值过程 φ 是一个满足自融资条件的交易策略。

推论 A.1 (加法生成)。过程 φ 是一个交易策略，其相对财富过程 V^φ 由下式给出

$$V^\varphi(t) = \widetilde{G}(\boldsymbol{\mu}_t) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{G,k,n}(t) \hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})} \tag{A.9}$$

对于 $t \geq 0$，其中(k,n)-伽马过程 $\Gamma^{G,\,k,\,n}$ 由(A.5)给出。此外，当数对(t,ω) 属于某个(k,n)-剖分集，其中$(k,n) \in \mathbb{N}^2$，则式(A.9) 中的相对财富过程 $V^\varphi(t)$可改写为(3.23) -(3.25)中的另一种表示，不过将 $G(\mu)$ 替换为 $G(\boldsymbol{\mu})$，并将伽马过程写成(A.5)的形式。

证明。按照命题 3.1 证明中的相同方法，可以证明 φ 是一个交易策略。现在我们按照 (3.19) 推导得出

$$V^{\varphi,k,n}(t) = \widetilde{G}^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+}) + I_{\mu^{k,n}}(\vartheta^{(k,n)})(t)$$

对每个 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$均成立。将 (A.1) 代入最后一个恒等式，并结合 (2.16)，即可得到结果 (A.9)。最后一个结论可由定理 3.1 证明中的相同论证得出。 □

注记 A.1。 φ 中的分量 $\varphi_i^{(k,n)}$ (*t*) 在推论 A.1 中具有与 (3.44) 相同的表示:

$$\varphi_i^{(k,n)}(t) = \vartheta_i^{(k,n)}(t) - \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t) + V^{\varphi,k,n}(t).$$

对于乘法生成，我们还对 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 施加条件：倒数 $1/G^{k,\,n}(\mu_t)$ 在每个 $(k,\ n)$-剖分集上局部有界。首先回顾 (A.7) 中的 $\varphi^{(0)}$，并令

$$\eta^{(0)} \equiv \psi^{(0)} \equiv \varphi^{(0)} \tag{A.10}$$

$\widehat{\ }$与之前一样。我们还考虑 G 的乘法可测修正 G，如（3.28）中所示，只是在 δ^G的表达式中将μ 替换为 $\boldsymbol{\mu}$ ψk^n。

此外，我们基于（A.4）中的新（kn）伽马过程，按照（3.29）定义 $E^{G}k^{n}$，其中定义中的 μ 替换为 $\boldsymbol{\mu}$。接下来，我们以递归方式定义两个过程 $\eta^{(k,n)}$ 和 $\psi^{(k,n)}$，其中 $k = 12\cdots$。

$$\eta^{(k,n)}(t) := 0^{(n)} + \delta^{G,\psi,k,n} E^{G,k,n}(t-)\vartheta^{(k,n)}(t)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \qquad t \geq 0, \tag{A.11}$$

类似于 (3.31)，并且

$$\psi_i^{(k,n)}(\cdot) := 0 + \left(\eta_i^{(k,n)}(\cdot) - Q^{\eta,\mu,k,n}(\cdot) - C^{\widehat{G},\eta,k,n}\right)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{A.12}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$，均如 (3.32) 所示。因此，按照 (3.33) 构造的 $\mathbb{U}$ 值过程 ψ 是一种基于排名的乘法生成交易策略。

推论 A.2 (乘法生成)。 过程 ψ 是一种交易策略，其相对财富过程 V^{ψ} 由下式给出

$$V^{\psi}(t) = \widehat{G}^{0}(\boldsymbol{\mu}_0)\hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{G}^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t)E^{G,k,n}(t)\hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \tag{A.13}$$

对于如(3.34)中的 $t \geq 0$，但在 $E^{G,\,k,\,n}$ 的表达式中使用(A.5) 中的新伽马过程。此外，当(t,ω) 属于 (k,n)- 剖分集时，对数相对财富过程 $\log V^{\psi}(t)$ 和 $\log U^{\psi}(t)$ 分别可表示为 (3.38) - (3.40) 以及(3.52)中的形式，其中以 $G(\boldsymbol{\mu})$ 代替 $G(\mu)$，并采用(A.5)中给出的伽马过程。

证明。 根据上述构造，证明 ψ 是一种交易策略同样很直接。对于相对财富过程 V^{ψ}，我们仿照 (3.35) 中的一系列恒等式进行推导，但将 $G(\mu)$ 替换为 $G(\boldsymbol{\mu})$，并将 (3.6) 替换为 (A.4)，从而证明在 $(k,\ n)$-剖分集上，$V^{\psi,\,k,\,n}(\cdot) \equiv \widehat{G}^{k,\,n}(\boldsymbol{\mu}_\cdot)E^{G,\,k,\,n}(\cdot)$。最后一个结论也可由定理 3.2 的证明得到。□

注记 A.2。 与 (3.45) 类似，推论 A.2 中的分量 $\psi_i^{(k,n)}(t)$ 在 (k,n)-剖分集上也有另一种表示：

$$\psi_i^{(k,n)}(t) = \eta_i^{(k,n)}(t) - \sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t) + V^{\psi,k,n}(t),$$

其中，定义 $E^{G,k,n}$ 时使用了新的伽马过程 (A.5)。特别地，如果每个 $G^{k,n}$ 都满足平衡条件，那么我们可以得到一个更简单的表示

$$\psi_i^{(k,n)}(t) = \eta_i^{(k,n)}(t) \tag{A.14}$$

与推论 3.1 中的表示相同，因为我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t) &= \delta^{G,\psi,k,n}E^{G,k,n}(t-)\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^{(k,n)}(t)\mu_j^{(k,n)}(t)\\ &= \delta^{G,\psi,k,n}E^{G,k,n}(t-)\sum_{\ell=1}^{n}\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t)\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(t) = \widehat{G}^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t)E^{G,k,n}(t)\end{aligned}$$

由 (A.3) 得出。

A.2 开放市场

近期，一些文献（Campbell & Wong，2022年；R. Fernholz，2018；Itkin & Larsson，2021；Karatzas & Kim，2021）研究了开放市场的概念：市场由固定数量的 $m \in \mathbb{N}$ 只市值最大的股票组成，但成分股会不断变化；这一概念旨在构建更符合现实的市场模型中的投资组合。接下来，在一些额外假设下，我们将在一个随机维度的完整股票市场中嵌入的开放市场内生成交易策略。

对于定义 2.4 中给定的 $\mathbb{U}$ 值市值过程 S 及其对应的定义 2.5 中的市场权重过程 μ，我们固定一个正整数 m，使得投资者始终只能投资于市值最大的 m 只股票。换言之，在每个 $(k,\ n)$ 剖分市场上，我们将构造仅依赖于 $\mu_{(1)},\ \cdots,\ \mu_{(m)}$ 的交易策略，并将其表现与前 m 只指数的总市值进行比较，也就是市值最大的 m 家公司市值之和。

我们在此强调，开放市场的规模 m 不受限制。在 $(k,\ n)$ 剖分市场上，对于 $m < n$ 的情况，投资者只能投资于现存 n 只股票中排名前 m 的股票；而在另一种 $m \geq n$ 的情况下，前 m 个开放市场就是整个 $(k,\ n)$ 剖分市场（因此投资者可以投资于任何现存公司）。因此，在后一种情况下，前 m 个开放市场可以应用前几节中推导出的结果。

在本小节中，如果两只或更多股票具有相同的市值，我们将规定一项用于打破并列的特殊规则（例如，采用字典序规则，使指数较小的股票获得更高的排名）。当存在多只股票的市值相同且排名为 m 时，在选择纳入前 m 开放市场的股票时，开放市场需要这样的规则。例如，假设市场中现有 $N(t) = 3$ 只股票，我们正在考虑前 $m = 2$ 开放市场。如果在时刻 t 满足关系 $S_{(1)}(t) > S_{(2)}(t) = S_{(3)}(t)$，那么在时刻 t 的两只排名最低的股票中，我们需要选择一只纳入前 2 个开放市场。

因此，我们定义过程 $[n] \times [0,\infty) \ni (i,\ t) \mapsto u^{k,\ n}_{i}(t) \in [n]$，对于任意 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$，使得每个 $u^{k,\ n}_{i}(\cdot)$ 都是可预测的，并且满足

$$
\begin{aligned}
S_i(t) &= S_{\left(u_i^{k,n}(t)\right)}(t), && \text{on the dissection set } \rrbracket \tau_{k-1}, \tau_k \rrbracket \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega^{k,n}),\\
u_i^{k,n}(t) &= i, && \text{otherwise,}
\end{aligned}
$$

对于每个 $i \in [n]$。换言之，在（k、n）-剖分集上，$u^{k,\ n}_{i}(t)$ 表示在时刻 t，i 只股票在 n 只股票中按市值计算的排名。由于 $u^{k,\ n}_{i}$ 仅作用于（k、n）- 剖分集，因此在其补集上选择 $u^{k,\ n}_{i} = i$ 并不重要。根据打破并列的规则，每个 $u^{k,\ n}(\cdot)$ 都是集合 $[n] = \{1, \cdots, n\}$ 上的置换过程。此外，由于股票的指数和排名都可能因维度变化而改变（在每个重置序列 τ_k 处），我们假设每当需要时都会对指数（及相应的排名）进行适当的重新标记，以便在维度变化后延续每家公司的动态。

由于歧视规则打破了市值相同的股票之间的对称性，排序半鞅的动态将不同于 A.1节中的情形，因此在歧视规则下，方程（A.1）不再适用。为此，我们将对 $\mathbb{U}$-值市场权重过程 μ 施加一个额外假设，以处理这一打破并列的规则。

定义 A.1. 称一个取值于 $\mathbb{U}$ 的分段半鞅 X 是路径上相互非退化的，如果其 n 分量 $X = (X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 在每个 $(k,\ n)$-剖分集上都满足以下

条件：

(i) 每个分量 $t \mapsto X_i(t)$ 都是连续的；(ii) 集合 $\{t:\ X_i(t) = X_j(t)\}$ 具有勒贝格测度零，对于所有 $i \neq j$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立；(iii) $L_t(X_{(k)} - X_{(\ell)}) \equiv 0$ 对于所有 $|k-\ell| \geq 2$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立。

在假设 μ 具有路径意义下相互非退化的条件下，每个剖分 $\mu^{(k,n)}$ 在 $(k,\ n)$-剖分集上都是连续的。此外，E. R. Fernholz（2002年）的命题 4.1.11 证明了排名分量 $\mu^{k,\ n}{}_{(\ell)}(\cdot)$ 也都是连续的，并且在 $(k,\ n)$-剖分集上具有如下动态：

$$d\mu_{(\ell)}^{(k,n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{u_i^{k,n}(t)=\ell\}} d\mu_i^{(k,n)}(t) + \frac{1}{2} dL_t(\mu_{(\ell)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell+1)}^{(k,n)}) - \frac{1}{2} dL_t(\mu_{(\ell-1)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell)}^{(k,n)}), \quad \text{(A.15)}$$

对于 $\ell = 1,\ \cdots,\ n$，按照约定 $L_t(\mu^{(k,n)}{}_{(0)} - \mu^{(k,n)}{}_{(1)}) \equiv L_t(\mu^{(k,n)}{}_{(N)} - \mu^{(k,n)}{}_{(N+1)}) \equiv 0$。这里，$L_t(Y)$ 是连续半鞅 Y 在时间 t 之前于原点累积的局部时，不包括（A.2）中的最后一个跳跃项。

对于任意的 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 和任意一对 $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$，应用 Itˆo 公式和新的动力学方程 (A.15)，可得

$$\begin{aligned} G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t) &= G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_{\tau_{k-1}+}) + \int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbb{1}_{\{u_i(s)=\ell\}}\, d\mu_i^{(k,n)}(s) \qquad \text{(A.16)} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s)\, dL_s\big(\mu_{(\ell)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell+1)}^{(k,n)}\big) - \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s)\, dL_s\big(\mu_{(\ell-1)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell)}^{(k,n)}\big) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{\ell,\lambda} G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(s)=\ell,\, u_j^{k,n}(s)=\lambda\}}\, d[\mu_i^{(k,n)}, \mu_j^{(k,n)}](s) \end{aligned}$$

在 $(k,\ n)$-剖分集上。现在记

$$\vartheta_i^{(0)}(\cdot) := 0 + \sum_{\ell=1}^{N_0} \partial_\ell G^0(\boldsymbol{\mu}_0) \mathbb{1}_{\{u_i^0(0)=\ell\}} \hat{\mathbb{1}}_{\{0\}\times\Omega}, \qquad i = 1, \cdots, N_0, \qquad \text{(A.17)}$$

$$\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot) := 0 + \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_\cdot) \mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(\cdot)=\ell\}} \hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}, \qquad i = 1, \cdots, n, \qquad \text{(A.18)}$$

并使用这些对 ϑ 的剖分来定义 $(k,\ n)$-伽马过程 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$，如（A.4）所示。于是，恒等式（A.16）表明，$\Gamma^{G,\ k,\ n}(\cdot)$ 具有有限变差，并可表示为

$$\begin{aligned} \Gamma^{G,k,n}(t) = 0 + \Bigg[&- \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{\ell,\lambda} G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(s)=\ell,\, u_j^{k,n}(s)=\lambda\}}\, d[\mu_i^{(k,n)}, \mu_j^{(k,n)}](s) \\ &- \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s)\, dL_s\big(\mu_{(\ell)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell+1)}^{(k,n)}\big) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_s)\, dL_s\big(\mu_{(\ell-1)}^{(k,n)} - \mu_{(\ell)}^{(k,n)}\big) \Bigg] \hat{\mathbb{1}}_{]\!]\tau_{k-1},\tau_k]\!]\cap(\mathbb{R}_+\times\Omega^{k,n})}. \qquad \text{(A.19)} \end{aligned}$$

因此，将（A.6）、（A.3）中的基 $\vartheta^{(0)}$、 $\vartheta^{(k,n)}$ 以及（A.4）中相应的伽马过程 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$ 分别替换为（A.17）、（A.18）和（A.19）中定义的新表达式后，我们可以按照A.1节中的方法由新基构造出 φ 和 ψ ，并得到与推论A.1、A.2中相同的结果。下面的推论总结了这一构造。

推论 A.3。 假设市场权重过程 μ 在路径上相互非退化，并且在根据市值对股票进行排名时采用特殊规则来打破并列，从而在任意时刻排名与股票指标之间存在一一对应关系。于是，由 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 构造的过程 φ （其剖分按照 (A.17)、(A.18)、(A.7) 和 (A.8)递归定义）是一种交易策略（加法型），其相对财富过程由 (A.9)，或 (3.23) - (3.25)给出，其中 (k,n)-伽马过程$\Gamma^{G,k,\ n}$ 由 (A.19)中的过程替代。

此外，通过配方 (A.17)、(A.18)、(A.10)、(A.11) 和 (A.12)，由 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 构造的过程 ψ （其中 $1/G^{k,n}$ 对于每个 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$均为局部有界）是一种交易策略（乘法型），其相对财富过程由 (A.13)，或 (3.38)- (3.40) 和 (3.52) 给出，其中在 $E^{G,k,n}$ 的表达式中， $\Gamma^{G,k,n}$ 由 (A.19) 中的过程替代。

回顾一下， m 是开放市场的规模，我们在下面的例子中构造前 m 名开放市场投资组合。

例A.1（前 m 名开放市场投资组合）。我们考虑如下定义的一个特定生成函数 $G_m \in C^2$（$\mathbb{U}$）：

$$G_m^{k,n}(x) := \sum_{\ell=1}^{\min(m,n)} x_\ell, \qquad \forall\, (k,n) \in \mathbb{N}^2.$$

在每个具有 $n \le m$ 的（k， n）-剖分市场中，该函数（以加法型或乘法型方式）生成第3.2.4节中的自融资市场投资组合。因此，我们考虑 $n > m$ 的另一种情形。由于每个 $G^{k,\ m}{}^{n}$都满足定义 3.3 的平衡条件，故推论 A.2 的乘法生成交易策略 ψ_m 为

$$\psi_{m,i}^{(k,n)}(\cdot) = E^{G_m,k,n}(\cdot)\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot),$$

其中

$$\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot) = \mathbb{1}_{\{u_i(\cdot)\le m\}}, \qquad i = 1, \cdots, n, \qquad \text{and}$$

$$E^{G_m,k,n}(\cdot) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{\cdot} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^m \mu_{(\ell)}^{(k,n)}(s)} dL_s(\mu_{(m)}^{(k,n)} - \mu_{(m+1)}^{(k,n)})\right),$$

由（A.14）、（A.18）、（A.19）和（3.29）在（k， n）-剖分集上得到。其对应的投资组合π_m 由（2.17）计算得出

$$\pi_{m,i}^{(k,n)}(\cdot) = \frac{\psi_{m,i}^{(k,n)}(\cdot)\mu_i^{(k,n)}(\cdot)}{\sum_{j=1}^n \psi_{m,j}^{(k,n)}(\cdot)\mu_j^{(k,n)}(\cdot)} = \frac{\sum_{\ell=1}^m \mathbb{1}_{\{u_i(\cdot)=\ell\}}\mu_i^{(k,n)}(\cdot)}{\sum_{j=1}^n\sum_{\ell=1}^m \mathbb{1}_{\{u_j(\cdot)=\ell\}}\mu_j^{(k,n)}(\cdot)} = \frac{\mathbb{1}_{\{u_i(\cdot)\le m\}}S_i(\cdot)}{\sum_{\ell=1}^m S_{(\ell)}(\cdot)}. \quad \text{(A.20)}$$

由于最后一个分母表示前 m 个开放市场的总市值，因此，当该公司属于前 m 个指数时，第 i 只股票的投资组合权重 $\pi_{m\,i}^{(k,n)}$，等于第 i 家公司相对于前 m 个开放市场的相对市值；否则，权重 $\pi_{m\,i}^{(k,n)}$，为零。换言之，该投资组合按照以下方式分配财富

即按照属于前 m 个开放市场的股票的相对市值分配财富。因此，我们将这个投资组合 π_m（以 $\pi_m^{(k,n)}$ 为其 $(k,\ n)$- 剖分）称为前 m 个开放市场投资组合。上文对应的交易策略 ψ_m 称为前 m 个开放市场交易策略，记作 $\xi_m \equiv \psi_m$，沿用定义 3.4 中的记号。根据推论 A.2 （式 (3.38)–(3.40) 和 (3.48) 的一个版本），可计算其相对于整个市场资本总额的对数相对财富：

$$\log V^{\xi_m}(t) = \log\Big(\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \mu_{(i)}^{(k,n)}(t)\Big) + EG_m(t) + C_{TM}(t) + C_{G_m}(t), \qquad \text{where} \tag{A.21}$$

$$EG_m(t) = -\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k-1}\int_{\tau_{\ell-1}+}^{\tau_\ell} \frac{\mathbb{1}_{\{N_{\tau_\ell}>m\}}}{\sum_{i=1}^m \mu_{(i)}^{(\ell,N_{\tau_\ell})}(s)}\, dL_s\big(\mu_{(m)}^{(\ell,N_{\tau_\ell})} - \mu_{(m+1)}^{(\ell,N_{\tau_\ell})}\big)$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\tau_{k-1}+}^{t} \frac{\mathbb{1}_{\{n>m\}}}{\sum_{i=1}^m \mu_{(i)}^{(k,n)}(s)}\, dL_s\big(\mu_{(m)}^{(k,n)} - \mu_{(m+1)}^{(k,n)}\big),$$

$$C_{G_m}(t) = \sum_{\ell=1}^{k} \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{\min(m,N_{\tau_{\ell-1}})} \mu_{(i)}^{(\ell-1,N_{\tau_{\ell-1}})}(\tau_{\ell-1})}{\sum_{i=1}^{\min(m,N_{\tau_\ell})} \mu_{(i)}^{(\ell,N_{\tau_\ell})}(\tau_{\ell-1}+)}\right) \tag{A.22}$$

这里，修正项 C_{TM} 与 (3.48) 中的相同。超额增长 $EG_m(\cdot)$ 实际上随时间非递增，反映了顶端 m 开放市场边界处的“泄漏”；也就是说，当排名为 m 的股票被另一只原排名为 $m+1$ 、后被排除在顶端 m 开放市场之外的股票取代时，会产生负面影响。

现在，我们定义一类交易策略（以及相应的投资组合），它们始终只投资于属于顶端 m 开放市场的股票。

定义 A.2 （顶端 m 开放市场中的交易策略）。若交易策略 ϑ 满足以下条件，则称其为顶端 m 开放市场中的交易策略；对于每个剖分 $\vartheta^{(k,n)}$，均有

$$\vartheta_i^{(k,n)}(\cdot)\mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(\cdot)>m\}} \equiv 0, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{A.23}$$

对每个 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$，在 (k,n)-剖分集上成立。

条件 (A.23) 禁止在其排名高于m时投资第 i 只股票。接下来，我们将构造顶端 m 开放市场中的交易策略，并采用 Karatzas 和 Kim（2021）的论证，将其表现与 (A.20) 中的顶端 m 开放市场投资组合进行比较。

推论 A.3 中的加法生成交易策略 φ 采用与注 A.1 相同的表示形式；$\varphi_i^{(k,n)}$ 取决于伽马过程 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$ 而由式 (A.19) 给出的这个伽马过程非零，除非生成函数 G 是常数函数，即 $\partial_\ell G^{k,\ n} \equiv 0$对每个 $\ell \in [n]$均成立。$\varphi_i^{(k,n)}$ 对量 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$ 的这种依赖不可避免，即使生成函数 $G^{k,\ n}$ 是平衡的也是如此。因此，当某公司不属于排名前 m 的开放市场时，$\varphi^{(k,n)}$ 仍可能投资于第 i 家公司。这是加法生成的一个特征；φ 将累计收益 $\Gamma^{G,\ k,\ n}$ 均匀分配到市场中的所有股票上。因此，加法生成交易策略不适用于投资开放市场。

另一方面，如果生成函数 $G^{k,\,n}$ 是平衡的，则推论 A.3 中的乘法生成交易策略 ψ 具有式 (A.14) 的简单形式：

$$\psi_i^{(k,n)}(t) = \eta_i^{(k,n)}(t) = \delta^{G,\psi,k,n} E^{G,k,n}(t)\vartheta_i^{(k,n)}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t)\mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(t)=\ell\}}\delta^{G,\psi,k,n}E^{G,k,n}(t).$$

因此，如果生成函数 $G^{k,n}$ 仅取决于 $\boldsymbol{\mu}$ 的前 m 个分量，使得 $\partial_\ell G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_\cdot) \equiv 0$ 对 $\ell > m$ 成立，那么 $\psi^{(k,n)}$ 满足条件 (A.23)：对每个 $i \in [n]$，$\psi_i^{(k,n)}(t)\mathbb{1}_{\{u_i^{k,n}(t)>m\}} \equiv 0$。我们在以下结果中表述这一构造。

Coro引理 A.4. 假设函数 $G \in C^2(\mathbb{U})$ 满足以下条件 *s:*

(i) 每个 $1/G^{k,n}$ 都是局部有界的；

(ii) 每个 $G^{k,n}$ 按照定义 *3.3* 的意义都是平衡的；

(iii) 对于满足 $m < n$ 的每一对 (k,n)，$\in \mathbb{N}^2$ 每个 $G^{k,n}$ 仅取决于其输入的前 m 个分量，使得 $\partial_\ell G^{k,n} \equiv 0$ 对每个 $\ell > m$ 都成立。

于是，推论 *A.3* 中由 G 乘法生成的交易策略 ψ 是针对排名前 m 只股票的交易策略。此外，相对于针对排名前 m 只股票的开放市场交易策略，其对数财富过程计算如下

$$\log U_{\xi_m}^{\psi}(t) := \log\left(\frac{V^{\psi,k,n}(t)}{V^{\xi_m,k,n}(t)}\right) = \log V^{\psi,k,n}(t) - \log V^{\xi_m,k,n}(t)$$

$$= \log G^{k,n}(\boldsymbol{\mu}_t) - \log\Big(\sum_{\ell=1}^{\min(m,n)} \mu_{(\ell)}^{(k,n)}(t)\Big) + \Big[EG(t) - EG_m(t)\Big] + \Big[C_G(t) - C_{G_m}(t)\Big], \quad \text{(A.24)}$$

对于属于 (k,n) 关于 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ 的剖分集的任意一对 (t,ω)。这里，EG_m 和 C_{G_m} 分别表示 ξ_m 的超额增长和修正项，见 (A.22)；EG 来自 (3.39)，其中不含跳跃项，并将伽马过程替换为 (A.19) 中的过程；C_G 来自 (3.48)，其中将 $G(\mu)$ 替换为 $G(\boldsymbol{\mu})$。

证明。将推论 A.3 中的对数相对财富 $\log V^{\psi}$ 与 (A.21) 进行比较，即可轻易得到结果 (A.24)。

□