arXiv:2303.00860v1 [math.NA] 1 Mar 2023

用于饱和土-结构相互作用问题的稳定两相接触物质点法算法开发

Chihun Sung[1],Shyamini Kularathna[b], Krishna Kumar[1]

[a]得克萨斯大学奥斯汀分校土木、建筑与环境工程系，奥斯汀，得克萨斯州 *78712*，美国[b]加州大学伯克利分校土木与环境工程系，加利福尼亚州 *94720*，美国，

摘要

涉及两相材料的土-结构相互作用问题模拟在岩土工程中面临重大挑战。这些挑战源于材料刚度差异、多相之间的相互作用、孔隙流体较高的体积模量以及较低的渗透率。传统显式时间积分格式受条件稳定性的限制，需要采用较小的时间步长，并导致快速加载条件下出现压力振荡。为解决这些问题，我们在物质点法（MPM）框架内提出了一种用于土-结构相互作用问题的稳定两相接触算法。该算法将土体建模为含不可压缩孔隙流体的完全饱和多孔介质。相较于传统物质点法方法，我们提出了三项主要改进。我们采用Chorin投影法求解耦合公式并减少数值振荡。通过隐式处理扩散项，该算法允许采用更大的稳定时间步长，且不受孔隙流体体积模量和渗透率的影响。最后，我们结合刚体算法以准确模拟固体，并采用精确的接触检测算法。我们详细给出了两相接触物质点法算法的公式和时间增量过程。此外，我们将所提出的算法与有限元法（FEM）和显式物质点法进行比较，以评估其在模拟耦合水-力问题时的准确性和性能。该两相接触算法为模拟土-结构相互作用问题提供了一种更加稳定且高效的方法。

提交至 *Computers and Geotechnics* 的预印本 *2023*年*3*月*3*日

关键词： 物质点法、土-结构相互作用、分裂法、接触力学、多相分析

---

1. 引言

土-结构相互作用是指在不同加载条件下土体与邻近结构之间的相互作用。土-结构相互作用问题的一个关键任务，是估算各种加载条件下位于土体上方或埋置于土体中的结构变形。这些加载条件可能包括直接施加于结构上的荷载，也可能包括由地震或移动交通荷载引发的波动荷载。预测饱和土对上部结构施加的复杂动态荷载的响应，也是土-结构相互作用问题的重要组成部分。随着高性能计算机和数值工具的不断发展，如今可以通过数值方法求解土-结构相互作用问题，推动了该领域的快速进步。[1]。

然而，模拟涉及土-结构相互作用的岩土工程问题仍面临挑战。尤其是在管道埋置、基础贯入和边坡稳定等问题中将土体建模为两相材料体时，接触模型必须能够处理刚度差异显著、相态不同的材料体之间的相互作用。此外，由于孔隙流体的体积模量高、渗透率低，数值模拟在条件上不稳定。此外，这些问题通常涉及大位移并导致几何形状显著变化，因此需要适当的数值工具或技术。鉴于这些挑战，具有大位移的饱和土-结构相互作用问题的数值建模，近年来已成为岩土工程领域备受关注的研究课题。

有限元法（FEM）是一种经典的基于网格的数值方法，已广泛应用于多相公式的早期研究，如 [2], [3], [4], [5], [6], [7]所示。作为一种精确且稳健的工具，FEM适用于对各种力学应用中的连续体进行建模。然而，在处理涉及大变形的模拟时，不可避免地会出现严重的网格畸变问题。为应对这些挑战，研究人员将任意拉格朗日-欧拉（ALE）和耦合欧拉-拉格朗日（CEL）等复杂的重新网格划分技术引入FEM，如 [8], [9], [10]所述。 [11] 采用CEL

方法对桩贯入饱和土进行建模。[12] 引入了三种与ALE相关的方法，以处理大位移岩土工程问题。 [13] 采用ALE方法对自由表面流体流动问题进行建模。尽管这些方法能够有效解决网格畸变问题，但在对历史相关材料进行建模时，可能会产生较高的计算成本，并导致状态变量不准确。

物质点法（MPM）已成为岩土工程领域中一种强大的工具，可用于模拟具有大变形的各种土力学问题。MPM 由 [14], 开发，是一种采用欧拉-拉格朗日空间离散的连续体粒子法。它将可变形材料体离散为拉格朗日物质点，并在欧拉背景网格上求解控制方程。得益于其空间离散格式和连续体框架，我们能够高效地模拟具有大变形的宏观多相颗粒问题。此外，由于拉格朗日物质点携带历史相关状态变量，该方法能够高效地模拟历史相关材料。物质点法在水力-力学界面问题中的应用包括 [15], [16], [17]。关于大变形物质点法模拟的更详细综述，可参阅 [18] 。

然而，传统两相物质点法的应用存在局限，因为它们通常采用显式时间积分格式。涉及两相问题的显式时间积分数值模拟仅具有条件稳定性，其临界时间步长受孔隙流体的可压缩性和渗透率限制。这一限制导致时间步长小得不合理。此外，当孔隙流体近乎不可压缩或不可压缩时，显式模拟会出现体积锁定问题，导致孔隙压力分布呈现不准确的模式。为确保稳定性并避免这些问题，必须对压力与位移采用混合阶空间积分格式（[19]）。然而，即便满足了这些稳定性条件，显式时间积分格式固有的不稳定性仍可能导致压力场中出现非物理振荡（[20]）。

传统物质点法在土体—结构问题中的另一个主要缺点是接触检测过程不准确。 [21] 提出的多速度场接触算法会在不同材料的邻近粒子彼此靠近时识别界面节点。该算法会在材料体实际接触之前很久就检测到接触，因此在材料体之间产生人工间隙。

缺少软化函数也会导致应力振荡；采用显式时间积分格式的接触算法往往会在接触面产生人工应力或压力变化（[22]）。最后，由于物质点法会在时间步结束时将背景网格恢复至其初始位置，因此每个时间步开始时都不满足不可穿透条件。这会导致材料体的初始速度不准确，并最终造成结果偏差（[23]）。尽管使用更密的网格可以减少误差，但也会使计算成本呈指数级增长。因此，本研究旨在针对饱和土—结构相互作用问题提出一种两相稳定接触物质点法算法。

为实现这一目标，本研究采用了此前由 [24]针对饱和多孔介质开发的半隐式MPM算法，并通过引入接触和刚体算法对该算法进行了扩展。半隐式MPM算法的核心特征包括：（1）引入Chorin投影法（[25]）；（2）采用迭代求解器对扩散方程进行隐式求解。该分裂算法将一个时间步划分为两个子步，并对压力与位移变量采用等阶近似函数，从而提高了数值稳定性和计算效率。半隐式欧拉时间积分格式能够显著减少显式格式的局限性，因为它可大幅降低人工压力振荡，并允许采用更大的时间步，而不受流体不可压缩性和渗透率约束的影响（[26]）。

本研究中的接触算法处理方式确保了精度和稳定性，从而大幅减少了传统多速度场物质点法接触算法存在的问题。通过引入投影法，所提出的算法在一个时间步内对界面处的材料速度进行三次调整，以满足不可穿透条件：分别在时间步开始时、子步之间以及时间步结束时。固体被建模为刚体，因此可采用不受材料刚度影响的时间增量步长，并消除刚度差异显著的物体之间的接触问题。此外，我们引入了广义插值物质点法（[27]），以避免线性物质点法中的单元穿越误差，并在界面检测过程中考虑粒子尺寸。在该接触算法中，我们追踪背景节点附近的粒子边缘之间的距离；当材料体

接触时，该节点便会被正确识别为位于界面处。本文详细介绍了半隐式接触物质点法公式和一种刚体算法。通过界面问题示例模拟，将所提出算法的结果与解析解、传统有限元法及显式物质点法的结果进行比较，以评估其性能。

2. 物质点法

物质点法是一种基于粒子的欧拉-拉格朗日计算方法，其中连续体被离散为拉格朗日物质点。物质点可以在背景欧拉网格中移动，同时携带连续体的物理和历史相关属性。控制方程在背景网格节点处求解，但计算过程中节点的位置不会更新。求解控制方程后，利用形函数将运动学变量从节点映射到物质点。

图 1 展示了物质点法算法。初始阶段（粒子到节点）中，物质点携带的属性被投影到相邻节点（速度、体积、质量和力）。在阶段 2（节点求解）中，在节点处求解运动方程，并计算节点速度和位置。在阶段 3（节点到粒子）中，将计算得到的节点运动学量映射回物质点。最后，在最后一个阶段（粒子更新）中，更新物质点的位置。

在物质点法中，由于材料体的运动学行为属于同一速度场，因此材料体之间自然实现无滑移接触。为模拟界面处的相对运动， [21] 提出了一种多速度方法，针对不同材料体采用不同的节点速度场。通过将各材料体的速度与合并后的质心速度进行比较，可以识别界面处的节点。

下面简要介绍多速度接触算法。该算法会在模拟过程中识别界面，因此无需预先指定界面。通过将各材料体的速度与质心速度进行比较，可以识别出多个材料体共有的界面处节点：

$$\mathbf{v}^{a} \neq \mathbf{v}^{CoM} \tag{1}$$

其中，上标表示材料体的索引，$\mathbf{v}^{CoM}$ 表示质心速度。表面单位法向量用于识别

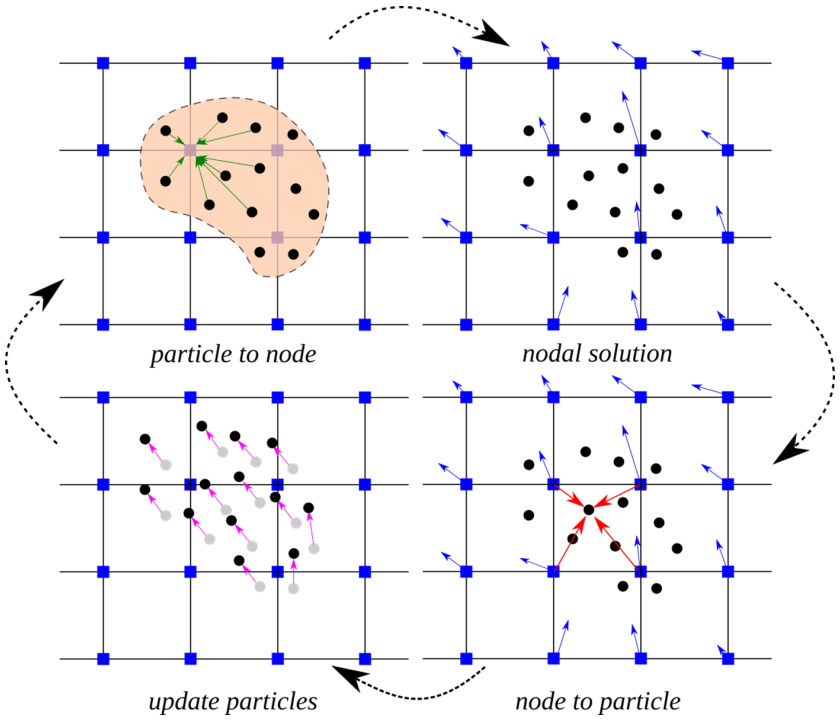


图 1：单点双相物质点法模型示意图

材料体之间的接近和分离。当一个材料体接近另一个材料体时：

$$(\mathbf{v}^{CoM} - \mathbf{v}^{a}) \cdot \mathbf{n}^{a} > 0 \tag{2}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是每个材料体的单位表面法向量。识别出接近状态后，若法向表面牵引力为压缩力，则对界面节点施加接触公式；否则允许自由分离。为防止相互穿透，将每个材料体在法向上的速度调整为质心速度：

$$\Delta \mathbf{v}^{\alpha}_{normal} = (\mathbf{v}^{CoM} - \mathbf{v}^{a}) \cdot \mathbf{n}^{a} \tag{3}$$

$$\mathbf{v}^{a} = \mathbf{v}^{a} + \Delta \mathbf{v}^{\alpha}_{normal} \cdot \mathbf{n}^{\alpha} \tag{4}$$

摩擦接触可沿切向施加。这种方法允许分离、滑动和滚动，同时禁止相互穿透。

3. 半隐式两相物质点法公式

[24] 在单点两相物质点法框架下实现了半隐式两相算法，其中每个物质点由固体骨架和孔隙流体组成。假设多孔介质完全被不可压缩水饱和。我们采用 $\mathbf{u}-p$ 公式，因此忽略达西速度。u-p 公式适用于静态和准静态模拟，但在对高频载荷问题建模时存在精度问题。我们给出了半隐式两相模型的详细公式。

考虑不可压缩水和固体时，混合物的质量守恒为：

$$n\nabla\cdot\mathbf{v}_w+(1-n)+(1-n)\nabla\cdot\mathbf{v}_s=(\nabla\cdot\mathbf{v}_s+n\nabla\cdot\mathbf{v}_{wR})=0 \tag{5}$$

其中，n 为孔隙率，$\mathbf{v}_s$ 为固体速度，$mathbfv_w$ 为水速度，$\mathbf{v}_{wR}=\mathbf{v}_w-\mathbf{v}_s$ 为渗流速度。混合物的动态动量守恒为：

$$\rho^s\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t}+\rho^w\frac{\partial\mathbf{v}_w}{\partial t}=\nabla\cdot(\mathbf{T}_E^s-p\mathbf{I})+\rho g \tag{6}$$

其中，rho 为混合物的质量密度，$\mathbf{T}_E^s$ 为有效应力张量，p 为孔隙压力，$\mathbf{I}$ 为单位张量。ρ^w 和 ρ^s 分别为水和固体的质量密度：

$$\rho^w=n\rho^{wR},\quad \rho^s=(1-n)\rho^{sR} \tag{7}$$

其中，rho^{sR} 为固体颗粒密度，rho^{sR} 为水颗粒的质量密度。水的动量平衡为：

$$\rho^w\frac{\partial\mathbf{v}_w}{\partial t}=\nabla\cdot(-np\mathbf{I})+\rho^w\mathbf{g}+\hat{\mathbf{p}}^F \tag{8}$$

其中，$\hat{}\mathbf{p}^F$ 为阻力，定义为：

$$\hat{\mathbf{p}}^F=-\frac{n^2\rho^{wR}\mathbf{g}}{k}\mathbf{v}_{wR}+p\nabla n \tag{9}$$

其中，k 为孔隙流体的渗透率。混合相的质量守恒时间离散公式为：

$$n\nabla\cdot\mathbf{v}_w^{t+1}+(1-n)\nabla\cdot\mathbf{v}_s^{t+1}=0 \tag{10}$$

混合相和水相的时间离散动量平衡方程为:

$$\rho^s \frac{\mathbf{v}_s^{t+1} - \mathbf{v}_s^t}{\Delta t} + \rho^w \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} - \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_E^s) - \nabla p^{t+1} + \rho \mathbf{g} \tag{11}$$

$$\rho^w \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} - \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = -n \nabla p^{t+1} + \rho^w \mathbf{g} - \frac{n^2 p^{wR} g}{k} \mathbf{v}_{wR} \tag{12}$$

其中 Δt 为时间步长。

采用 Chorin投影法将时间离散公式分为两个子步。在第一个子步中，计算固体和水的中间速度，同时显式处理孔隙压力。引入中间速度后，混合物的质量守恒可表示为:

$$n \nabla \cdot \mathbf{v}_w^* + (1-n) \nabla \cdot \mathbf{v}_s^* = \Delta t (\frac{1-n}{\rho^{sR}} + \frac{n}{\rho^{wR}}) \nabla^2 (p^{t+1} - p^t) \tag{13}$$

其中，上标 $*$ 表示中间参数。$\mathbf{v}_s^*$ 为中间固体速度，$\mathbf{v}_w^*$ 为中间水速度。采用中间速度计算混合相的动量平衡方程:

$$\rho^s \frac{\mathbf{v}_s^* - \mathbf{v}_s^t}{\Delta t} + \rho^w \frac{\mathbf{v}_w^* - \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_E^s) - \nabla p^t + \rho \mathbf{g} \tag{14}$$

$$\rho^s \frac{\mathbf{v}_s^{t+1} - \mathbf{v}_s^*}{\Delta t} + \rho^w \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} - \mathbf{v}_w^*}{\Delta t} = -\nabla (p^{t+1} - p^{t+1}) \tag{15}$$

水相的动量平衡方程为:

$$\rho^w \frac{\mathbf{v}_w^* - \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = -n \nabla p^t + \rho^w \mathbf{g} - \frac{n^2 \rho^{wR} g}{k} \mathbf{v}_w^* R \tag{16}$$

$$\rho^w \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} - \mathbf{v}_w^*}{\Delta t} = -n \nabla (p^{t+1} - p^t) - \frac{n^2 \rho^{wR} g}{k} (\mathbf{v}_{wR} - \mathbf{v}_{wR}^*) \tag{17}$$

其中$\mathbf{v}_{wR}^*$ 为中间渗流速度。

采用忽略渗流加速度的$\mathbf{u} - p$ 公式，将中间水加速度和最终水加速度替换为固体加速度:

$$\mathbf{a}_w^* = \frac{\mathbf{v}_w^* + \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = \mathbf{a}_s^* = \frac{\mathbf{v}_s^* + \mathbf{v}_s^t}{\Delta t} \tag{18}$$

$$\mathbf{a}_w = \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} + \mathbf{v}_w^t}{\Delta t} = \mathbf{a}_s = \frac{\mathbf{v}_s^{t+1} + \mathbf{v}_s^t}{\Delta t} \tag{19}$$

$$\mathbf{a}_w - \mathbf{a}_w^* = \frac{\mathbf{v}_w^{t+1} + \mathbf{v}_w^*}{\Delta t} = \mathbf{a}_s - \mathbf{a}_s^* = \frac{\mathbf{v}_s^{t+1} + \mathbf{v}_s^*}{\Delta t} \tag{20}$$

其中，$\mathbf{a}_w^*$ 为中间水加速度，$\mathbf{a}_w$ 为最终水加速度，$\mathbf{a}_s^*$ 为中间固体加速度，$\mathbf{a}_w$ 为最终固体加速度。最后，混合物动量平衡方程写为:

$$\rho \mathbf{a}_s^* = \nabla \cdot (\mathbf{T}_s^E - p^t \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} \tag{21}$$

$$\rho(\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_s^*) = -\nabla(p^{t+1} - p^t) \tag{22}$$

水动量平衡方程为:

$$\rho^w \mathbf{a}_s^* + \frac{n^2 \gamma^{wR}}{k} \mathbf{v}_{wR}^* = -n \nabla p^t + \rho^w \mathbf{g} \tag{23}$$

$$\rho^w(\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_s^*) + \frac{n^2 \gamma^{wR}}{k}(\mathbf{v}_{wR} - \mathbf{v}_{wR}^*) = -n \nabla(p^{t+1} - p^t) \tag{24}$$

混合物质量平衡方程为:

$$[\frac{k}{\rho^w g}(\frac{\rho^w}{\rho} - n) - \frac{\Delta t}{\rho}]\nabla^2(p^{t+1} - p^t) = -\nabla \cdot \mathbf{v}_s^* - n \nabla \cdot \mathbf{v}_{wR}^* \tag{25}$$

分别利用混合物和流体动量平衡方程（方程 21 和方程 23）计算中间固体加速度和中间水速度。在第一个子步中，中间速度不满足不可压缩条件。通过混合物质量平衡方程更新压力增量，以满足流速散度条件（方程 25）；最后，利用压力增量梯度将中间固体加速度修正为最终加速度（方程 22）。

4. 半隐式接触MPM算法

本章介绍一种数值算法，用于结合接触算法和

刚体算法求解半隐式两相物质点法公式。为说明半隐式接触算法各阶段的具体步骤，我们在图 2 中提供了流程图。该算法包含三个主要阶段：(a) 计算中间加速度和速度；(b) 更新孔隙压力；(c) 计算最终加速度和速度。我们具体考虑两相材料体与刚体之间的界面，其中两相材料代表多孔介质或土体。最后，我们提出一种考虑颗粒尺寸和位置的接触检测算法。

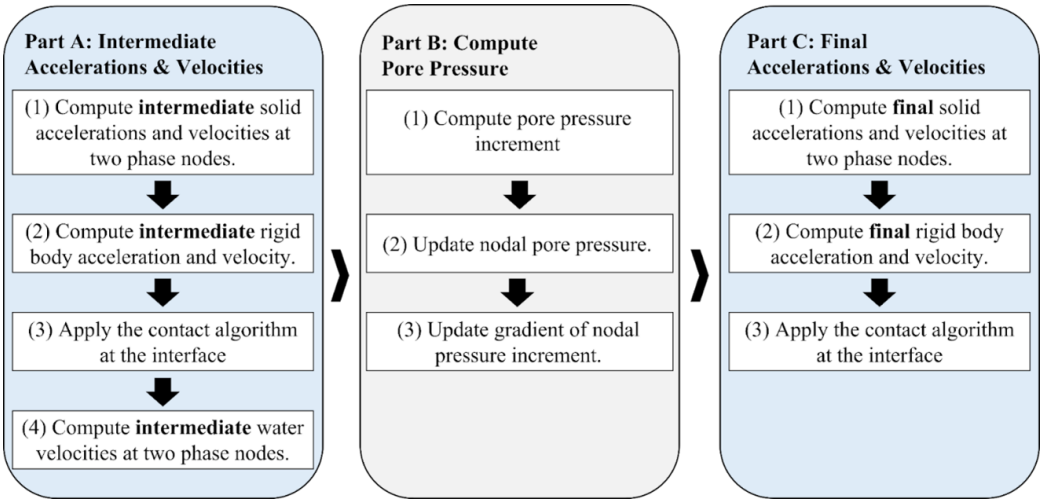


图2：半隐式接触物质点法算法求解器流程图

4.1. 数值离散公式

4.1.1. 中间速度和加速度（步骤*A*）

（a-1）计算两相材料体的中间速度

利用动量平衡方程计算节点中间固体和水的速度。两相体的节点中间固体加速度和速度为：

$$\mathbf{a}_i^{s.tb^*} = \frac{\mathbf{b}_i^{mix,tb} + \mathbf{t}_i^{mix,tb} + \mathbf{f}_i^{mix,tb}}{m_i^{mix,tb}} \tag{26}$$

$$\mathbf{v}_i^{s,tb^*} = \mathbf{v}_{i,initial}^{s,tb} + \Delta t \cdot \mathbf{a}_i^{s,tb^*} \tag{27}$$

其中，上标 $*$ 表示第一个子时间步的中间运动学参数，上标 tb 表示两相材料体（$= tb$），

上标 mix 表示混合相，上标 s 表示固相。下标 i 表示节点参数，下标 $initial$表示时间步开始时的初始运动学参数。$\mathbf{a}_i^{s^*}$ 是节点中间固体加速度，$\mathbf{v}_i^{s^*}$ 是节点中间固体速度，$\mathbf{v}_{i,initial}$ 是节点初始固体速度。$\mathbf{b}_i^{mix}$是节点混合体力，$\mathbf{t}_i^{mix}$是节点混合牵引力，$\mathbf{f}_i^{mix\ tb}$,是节点混合内力，m_i^{mix}是节点混合质量，Δt是时间步长。

(a-2) 计算中间刚体加速度

刚体加速度通过结合属于刚体的节点参数与界面处的节点参数进行全局计算。图3直观展示了节点分类。刚体节点是指与刚体粒子相邻的节点，而界面处的节点是指同时与刚体粒子和两相材料体粒子相邻的节点。中间刚体加速度，$\mathbf{a}^{rb^*}$，通过混合动量平衡方程计算：

$$\mathbf{a}^{rb^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n_rb}(\mathbf{b}_i^{mix,rb} + \mathbf{t}_i^{mix,rb}) + \sum_{i=1}^{n_{contact}}(\mathbf{b}_i^{mix,tb} + \mathbf{t}_i^{mix,tb}) + \sum_{i=1}^{n_{contact}} \mathbf{f}_i^{mix,tb}}{\sum_{i=1}^{n_{contact}} m_i^{mix,CoM}} \tag{28}$$

其中，n_{rb} 是属于刚体的节点数，$n_{contact}$是被识别为处于接触状态的节点数，上标 CoM表示质心参数，上标 rb 表示刚体参数，而 $m^{mix}_{i}{}^{,CoM}$ 是节点质心混合质量。方程 28 的分子包含三项。第一项表示作用于刚体的总混合外力，即属于刚体节点的节点混合体力与节点牵引力之和。第二项是两相体在界面处的总混合外力。最后一项是两相体在界面处的总混合内力。计算得到的中间刚体加速度被赋给刚体中的节点，从而得到节点中间固体速度：

$$\mathbf{a}_i^{s,rb^*} = \mathbf{a}^{rb^*} \tag{29}$$

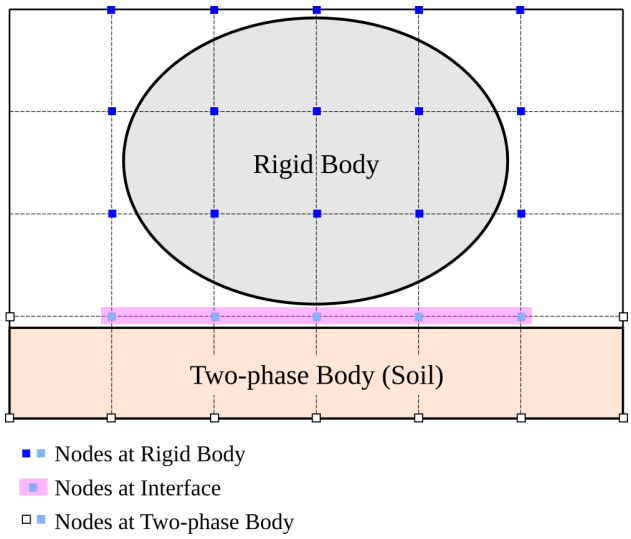


图3：刚体算法示意图

(a-3) 在界面处应用接触算法

将接触算法应用于刚体后，节点中间质心固体速度被设为界面处的中间刚体加速度：

$$\mathbf{a}_i^{s,CoM^*} = \mathbf{a}_i^{s,rb^*} \tag{30}$$

我们使用接触算法调整界面处节点上的两相材料体的节点加速度。与仅调整速度的传统多速度场接触算法不同，在半隐式两相接触算法中，接触算法在第一个子步中应用于固体加速度，因为中间水速度是根据中间固体加速度计算的。由于本研究中的刚体是无摩擦的，因此我们只调整节点中间固体加速度的节点分量。下标 $normal$ 表示表面法向分量。

$$\Delta\mathbf{a}_{i,normal}^{s,tb^*} = (\mathbf{a}_i^{s,CoM^*} - \mathbf{a}_i^{s,tb^*}) \cdot \mathbf{n}_i^{tb} \tag{31}$$

$$\mathbf{a}_i^{s,tb*} = \mathbf{a}_i^{s,tb*} + \Delta\mathbf{a}_{i,normal}^{s,tb^*} \cdot \mathbf{n}_i^{tb} \tag{32}$$

随后，更新界面处的中间质心固体速度：

$$\mathbf{v}_i^{s,tb*} = \mathbf{v}_{i,initial}^{s} + \mathbf{a}_i^{s,tb^*} \cdot \Delta t \tag{33}$$

（a-4）计算节点中间水速度

两相材料体中各节点的节点中间水速度 $\mathbf{v}_i^{w^*}$ 由水动量平衡方程计算：

$$\mathbf{v}^{w,tb^*} = \frac{\mathbf{b}_i^{w,tb} + \mathbf{t}_i^{w,tb} + \mathbf{f}_i^{w,tb}}{m_i^{w,tb} \cdot \frac{ng}{k}} - m_i^{w,tb}\mathbf{a}_i^{s,tb*} \tag{34}$$

其中，$\mathbf{b}_i^w$ 为节点水体力，$\mathbf{t}_i^w$ 为节点水牵引力，$\mathbf{f}_i^w$ 为节点水内力，m_i^w 为节点水质量。

4.1.2. 孔隙压力更新（步骤 *B*）

节点孔隙压力增量通过混合物质量平衡方程（方程 25）在全局范围内隐式计算：

$$L(p^{t+1} - p^t) = -A\mathbf{v}^{s^*} - B\mathbf{v}^{wR^*} \tag{35}$$

其中，L 为整体刚度矩阵，A 和 B 为散度矩阵。整体刚度矩阵和散度矩阵通过映射单元刚度矩阵和散度矩阵构建。单元内的单元刚度矩阵和散度矩阵的分量可计算如下：

$$L_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p}[\frac{k}{\rho^w g}(\frac{\rho^w}{\rho} - n) - \frac{\Delta t}{\rho}]\nabla N_i(\mathbf{X}_k)\nabla N_j(\mathbf{X}_k) \tag{36}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p}\nabla N_i(\mathbf{X}_k)\nabla N_j(\mathbf{X}_k) \tag{37}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} n\nabla N_i(\mathbf{X}_k)\nabla N_j(\mathbf{X}_k) \tag{38}$$

其中，n_p 为单元内粒子的数量，$N(x)$为空间插值函数，下标 i 和 j 表示属于该单元的节点。

4.1.3. 最终速度和加速度（步骤 *C*）(c-1) 计算两相材料体的最终速度

利用更新后的孔隙压力增量，将固体的中间加速度和速度修正为最终加速度和速度。两相材料体的节点最终固体加速度为:

$$\mathbf{a}_{i,final}^{s.tb} = \frac{\mathbf{b}_i^{mix,tb} + \mathbf{t}_i^{mix,tb} + \mathbf{f}_i^{mix,tb} - \nabla(p^{t+1} - p^t)_i}{m_i^{mix,tb}} \tag{39}$$

其中，下标 $final$ 表示时间步结束时的最终运动学参数，分子中的最后一项 $\nabla(p^{t+1} - p^t)_i$为压力增量的节点梯度。节点最终固体速度更新如下:

$$\mathbf{v}_{i,final}^{s,tb} = \mathbf{v}_{i,initial}^{s,tb} + \Delta t \cdot \mathbf{a}_{i,final}^{s,tb} \tag{40}$$

(c-2) 计算最终刚体加速度

利用更新后的孔隙压力增量，将中间刚体加速度调整为最终刚体加速度:

$$\mathbf{a}_{final}^{rb} = \frac{\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{n_{rb}}(\mathbf{b}_i^{mix,rb} + \mathbf{t}_i^{mix,rb}) + \sum_{i=1}^{n_{contact}}(\mathbf{b}_i^{mix,tb} + \mathbf{t}_i^{mix,tb}) \\ + \sum_{i=1}^{n_{contact}} \mathbf{f}_i^{mix,tb} - \sum_{i=1}^{n_{contact}} \nabla(p^{t+1} - t^t)\end{array}}{\sum_{i=1}^{n_{contact}} m_i^{mix,CoM}} \tag{41}$$

刚体上的节点处，最终刚体加速度设为节点最终固体加速度:

$$\mathbf{a}_{i,final}^{s,rb} = \mathbf{a}_i^{rb} \tag{42}$$

(c-3) 在界面处应用接触算法

为在界面处应用接触算法，将界面处节点的节点最终质心加速度设为节点最终刚体加速度。

$$\mathbf{a}_{i,final}^{s,CoM} = \mathbf{a}_{i,final}^{s,rb} \tag{43}$$

界面处的节点最终质心固体速度更新如下:

$$\mathbf{v}_{i,final}^{s,CoM} = \mathbf{v}_{i,initial}^{s,CoM} + \Delta t \cdot \mathbf{a}_{i,final}^{s,CoM} \tag{44}$$

在界面节点处应用接触算法。调整两相体节点最终固体速度的法向分量，使其与节点最终质心固体速度一致。

$$\Delta \mathbf{v}_{i,normal}^{s,tb} = (\mathbf{v}_{i,normal}^{s,CoM} - \mathbf{v}_{i,normal}^{s,tb}) \cdot \mathbf{n}_i^{tb} \tag{45}$$

$$\mathbf{v}_{i,final}^{s,tb} = \mathbf{v}_{i,final}^{s,tb} + \Delta \mathbf{v}_{i,normal}^{s,tb} \cdot \mathbf{n}_i^{tb} \tag{46}$$

最后，将节点最终运动学量映射回粒子，并更新粒子速度、位移、位置、体积和孔隙率。

4.2. 界面检测过程

为了准确判断材料是否接触，我们使用粒子位置和尺寸计算粒子之间的边缘间距。计算颗粒中心到节点的距离，并利用节点处的表面法向单位向量，将该距离投影到表面法向和切向方向。更新粒子在法向和切向方向上的尺寸，并用其计算粒子边缘到节点的距离。

$$d_n = (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}} \pm R_{pn} \tag{47}$$

$$d_t = (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} \pm R_{pt} \tag{48}$$

其中， d_n 和 d_t 分别表示法向和切向上的边到节点距离。$\mathbf{n}$ 和$\mathbf{t}$ 分别表示在节点处计算的表面法向单位向量和切向单位向量，$\mathbf{X}_p$ 表示颗粒中心坐标，$\mathbf{X}_i$ 表示节点坐标， R_{pn} 和 R_{pt} 分别表示法向和切向上的变形颗粒尺寸。图4展示了给定表面法向单位向量时，计算粒子边缘到节点在法向和切向方向上的距离的方法。

当不同材料的粒子彼此靠近时，会更新粒子之间的边到边距离，以检测节点处的材料接触。确定计算粒子间的边到边距离时，是否应从中心到节点的距离中减去或加上粒子尺寸，必须仔细考虑材料体及其粒子的位置。例如，如图4所示，为了正确计算粒子A与粒子B之间的边到边距离，应将粒子尺寸加到粒子B的中心到节点距离上。对于材料体

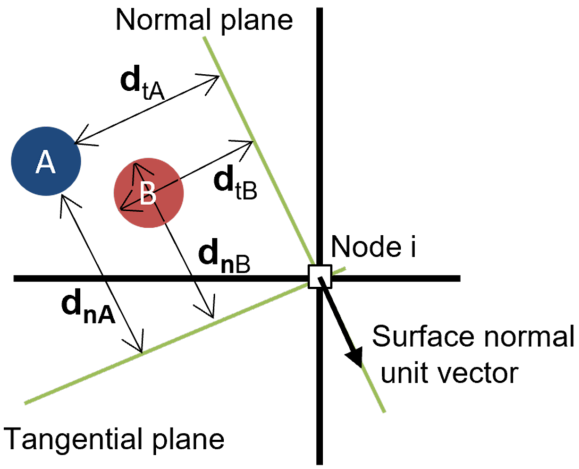


图4：法向和切向的边到节点距离计算

对于几何形状简单的材料体，仅使用法向距离即可准确检测界面。然而，对于每个节点处法向单位向量各不相同的复杂几何形状，为了准确进行接触检测，应同时使用法向距离和切向距离。图5展示了传统接触算法、仅使用法向边到边距离的方法，以及同时使用法向和切向边到边距离的方法在接触节点检测结果上的差异。接触节点以绿色方框标出。同时使用法向距离和切向距离可获得最准确的结果。为了计算法向和切向上的粒子尺寸，我们采用了 [28]提出的椭圆颗粒法。

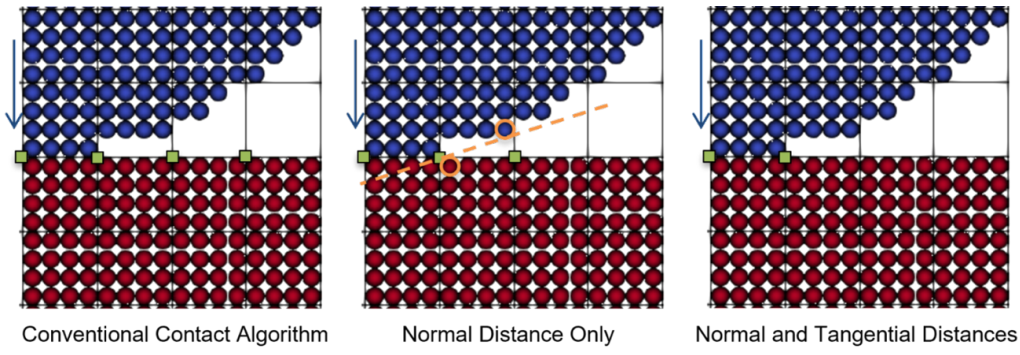


图5：接触检测算法比较

5. 模型验证

我们通过三个模型评估所提出的半隐式接触物质点法算法：(1) 一维固结，(2) 动态冲击试验，以及 (3) 条形基础。我们将模拟结果与传统有限元法、显式物质点法或解析解进行比较，以验证接触物质点法算法。对于物质点法模拟，我们采用带有线性插值函数的二维四边形背景单元计算位移。固体建模为刚体，土体与结构之间的界面为无摩擦。土体建模为完全饱和的多孔介质，且假设水的渗透率在整个模拟过程中保持恒定。

5.1. 一维固结

一维固结模拟旨在评估半隐式接触物质点法算法的准确性，重点考察其在瞬时加载条件下抑制人工振荡的能力。我们分析孔隙压力消散和有效应力随时间及土层深度的变化，并将模拟结果与显式物质点法以及太沙基一维固结解进行比较，以验证模型。

模拟几何形状和边界条件如图6所示。饱和土柱的底部和侧面边界均为不透水边界，并在土体表面与加载帽之间的界面处施加自由排水边界条件。在加载帽顶部施加瞬时竖向压缩牵引力，大小为10千帕。载荷通过加载帽与土体表面之间的接触传递至土柱。土柱的初始孔隙压力设为10千帕，初始有效应力设为零。不考虑重力的影响。

土体为各向同性孔隙弹性体，加载帽为刚性。土体的材料属性见表1。总模拟时间为2秒，时间步长为1E-4秒。我们采用尺寸为0.02 m × 0.02 m的四边形单元，每个单元格内布置4个粒子。对于显式物质点法模拟，我们采用相同的几何形状、单元、加载和边界条件以及材料属性。为满足显式分析的稳定时间增量准则，我们采用5E-06秒的时间步长。

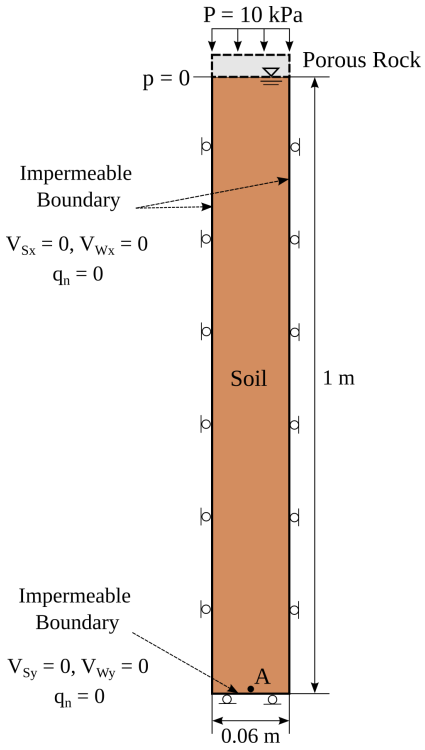


图6：一维固结模拟的几何形状和边界条件

我们在图7和图8中展示了固结模拟过程中初始孔隙压力的消散。图7展示了半隐式接触物质点法模拟中孔隙压力随时间的分布。图8绘制了不同固结时间下孔隙压力沿土柱高度的分布。为评估算法在稳态下的准确性，我们将结果与太沙基解析解进行了比较，并确认半隐式物质点法模拟得到的孔隙压力与太沙基解吻合良好。

图9展示了土柱底部（A点）的孔隙压力和竖向有效应力随时间的变化。为考虑瞬时加载产生的动力效应，我们将半隐式算法的结果与采用 u-p 格式的显式模拟结果进行了比较。图中结果表明，即使采用大得多的时间步长，半隐式时间积分格式也比显式时间积分格式稳定得多。半隐式接触物质点法显著

固体颗粒密度	2,700 kg/m^3
孔隙率	0.3
渗透率	1E-3 m/s
杨氏模量	10 MPa
泊松比	0.2

表1：土柱的材料属性

降低了模拟初期孔隙压力的人工振荡。此外，稳态下的孔隙压力和有效应力均与太沙基解吻合。结果表明，半隐式MPM算法相较于显式物质点法具有先进的特性。我们还验证了该算法能够准确模拟孔隙压力和有效应力的产生与消散。

5.2. 动态冲击试验

对移动块体与一维杆之间的冲击进行了模拟。块体采用刚性材料，杆则建模为完全饱和水的两相弹性材料。一维动力冲击模拟旨在评估半隐式接触MPM算法对动力学问题建模的准确性和稳定性，同时评估接触检测算法的准确性。模型的几何形状和边界条件如图10所示。杆建模为矩形，高0.06 m、宽1 m。。杆底部、顶部和左侧边界处的水和固体速度在各边界的法向方向上受到约束。在刚性块体与杆的界面处施加自由排水条件。

对刚性块体施加10 kPa的瞬时水平载荷，并在整个模拟过程中保持该载荷。刚性块体的质量为3.24 kg，因此其冲击时的速度为2.72 m/s，冲击时间为0.0147秒。时间步长为2E-5秒，模拟持续进行直至达到稳态。采用尺寸为0.02 m×0.02 m的四边形单元，每个单元格内布置4个粒子。网格和粒子配置如图11所示，杆和刚性块体的材料属性汇总于表2。

我们监测冲击在杆中产生的总应力波和孔隙压力波，并将结果与显式物质点法模拟和 ABAQUS 模拟进行比较。显式模拟和 ABAQUS 模拟采用相同的几何形状、边界，

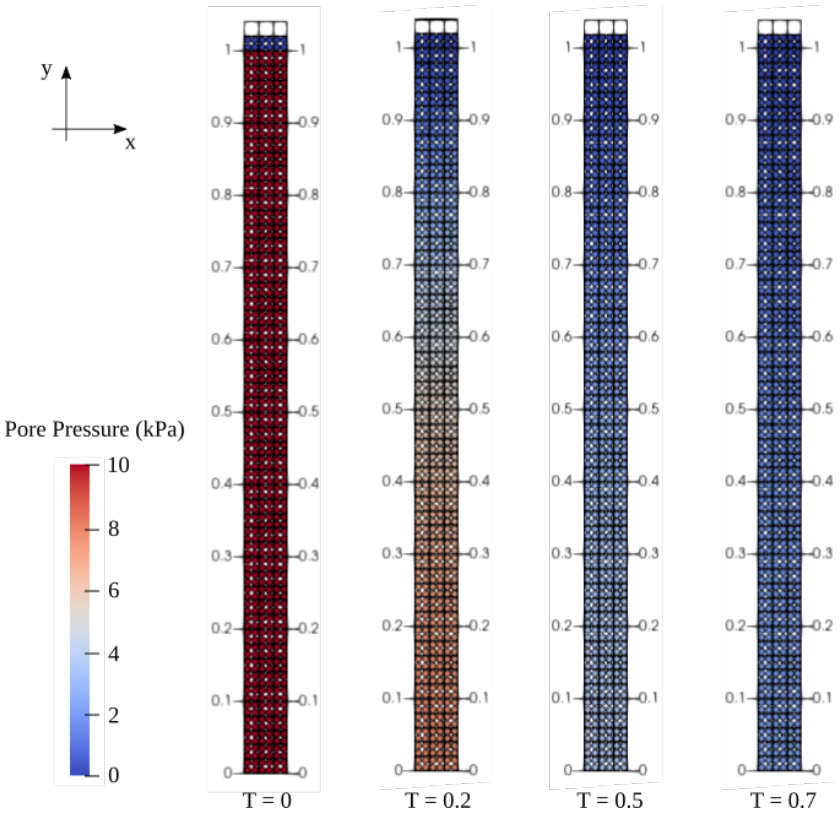


图7：孔隙压力随时间消散

以及加载条件。显式物质点法模拟采用 1E-6 秒的步长。图 12 显示了冲击时刻在杆与刚性块体之间的界面处测得的总应力波。所有模拟得到的首个波的峰值应力相近，但显式物质点法模拟存在严重的数值振荡问题，导致前几个波出现显著误差。显式模拟达到稳态所需的时间也更长。还需指出，所提出的接触检测算法准确地确定了冲击时刻为 0.0147 秒。

图 13 显示了通过半隐式和显式模拟测得的杆中心处的孔隙压力波。半隐式和显式模拟得到的峰值及波速总体上吻合良好，但显式模拟的峰值压力存在显著误差。值得注意的是，半隐式接触算法不会受到

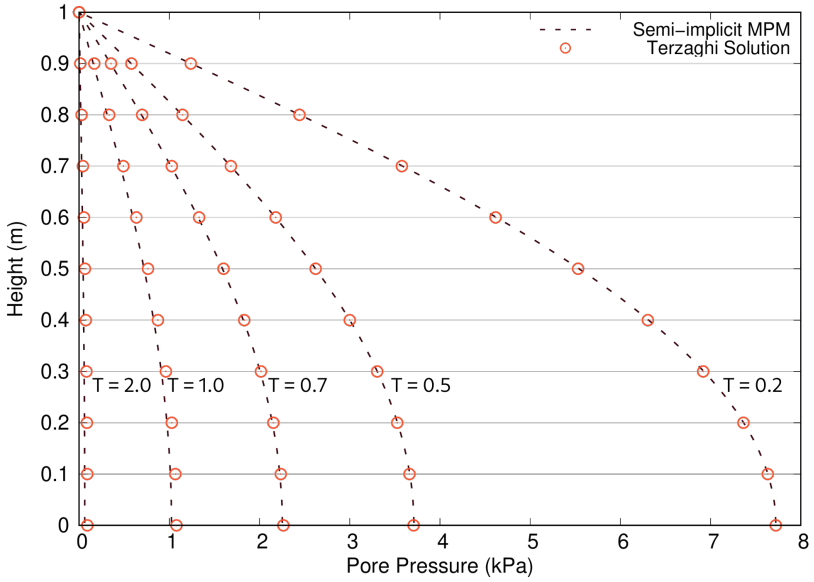


图8：不同时刻孔隙压力分布随土柱高度的变化

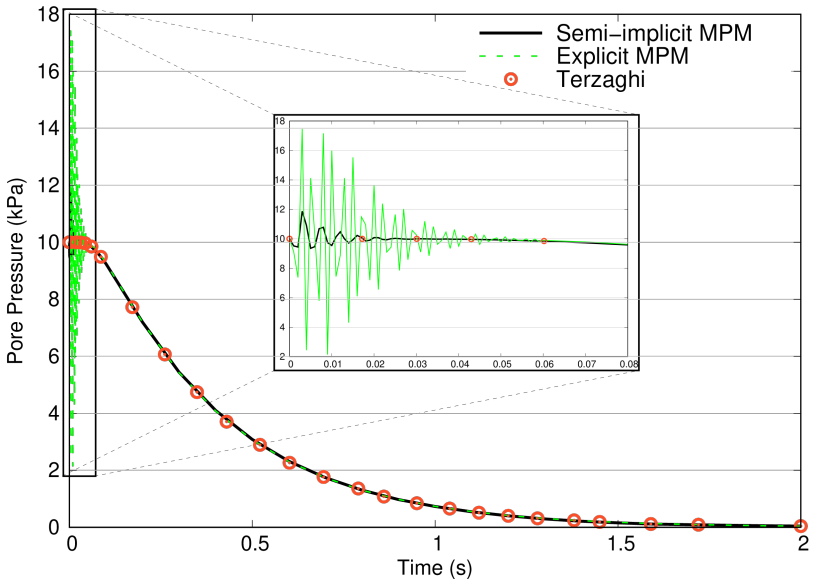
Soil	固体颗粒密度	2,700kg/m^3
	孔隙率	0.3
	渗透率	1E-3 m/s
	杨氏模量	2 MPa
	泊松比	0.2
刚性块体	Mass	3.24 kg

表2：土体和刚性块体的材料属性

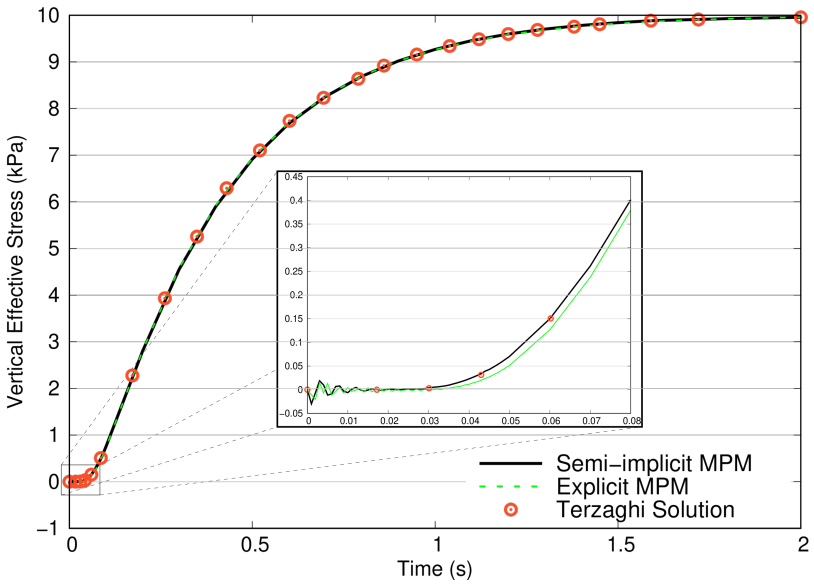
压力振荡的影响，并且在使用较大步长求解两相动力问题时不会出现严重误差。

5.3. 条形基础模拟

条形基础模拟旨在考察半隐式接触算法在以下方面的建模能力：(1) 不排水土-结构界面附近饱和土的响应；(2) 二维孔隙水压力的生成与消散，并将物质点法模拟与传统有限元法模拟进行比较。我们采用二维平面应变单元模拟条形基础。利用几何形状的对称性，对基础和土体的一半进行建模。



(a) 孔隙压力



(b) 竖向有效应力

图9：土柱底部（A点）孔隙压力和竖向有效应力随时间的变化

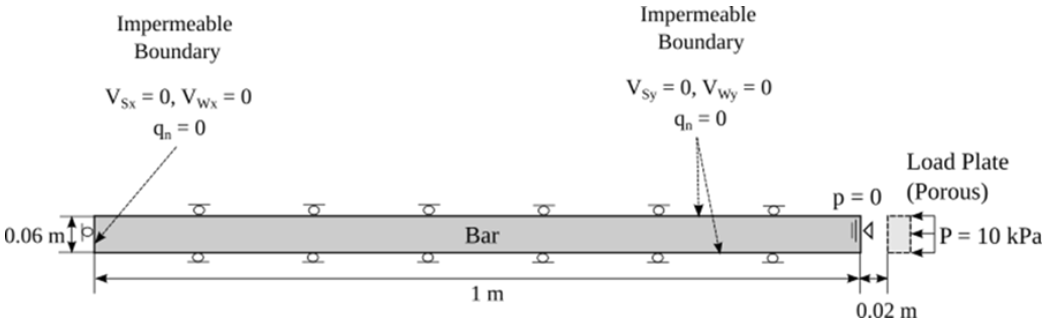


图10：一维冲击试验模拟的几何形状和边界条件

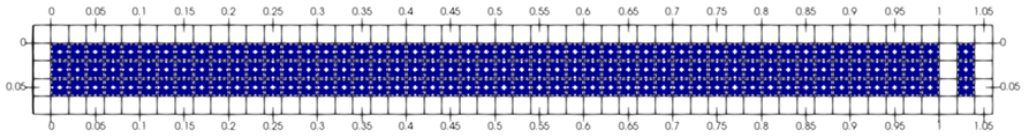


图11：动态冲击试验模拟的网格和粒子配置

图14展示了几何形状和边界条件。基础宽1米，土体宽8米、深6米。土体底部和侧面均不透水；土体表面（包括B点）采用自由排水条件。土体与条形基础之间的界面不透水。在背景网格底部施加完全固定的边界条件，而两侧仅限制水平速度。

采用 Tresca材料模型模拟土体行为。在基础顶部施加 51.4 千帕的竖向压缩牵引力，该数值为 Prandtl承载力解（Prandtl，1920）。这一牵引荷载在一秒内逐渐从 0 千帕增加至 51.4 千帕，之后保持恒定。荷载历程如图15所示。总模拟时间为两秒，时间步长为 1E-4 秒。采用尺寸为 0.2 米 × 0.2 米的四边形单元，每个单元格内布置九个粒子。我们监测不排水界面附近孔隙压力和有效应力的产生情况、基础的位移，以及界面边缘（B点）处土体的有效应力集中和破坏。物质点法模拟所采用的材料属性见表3。

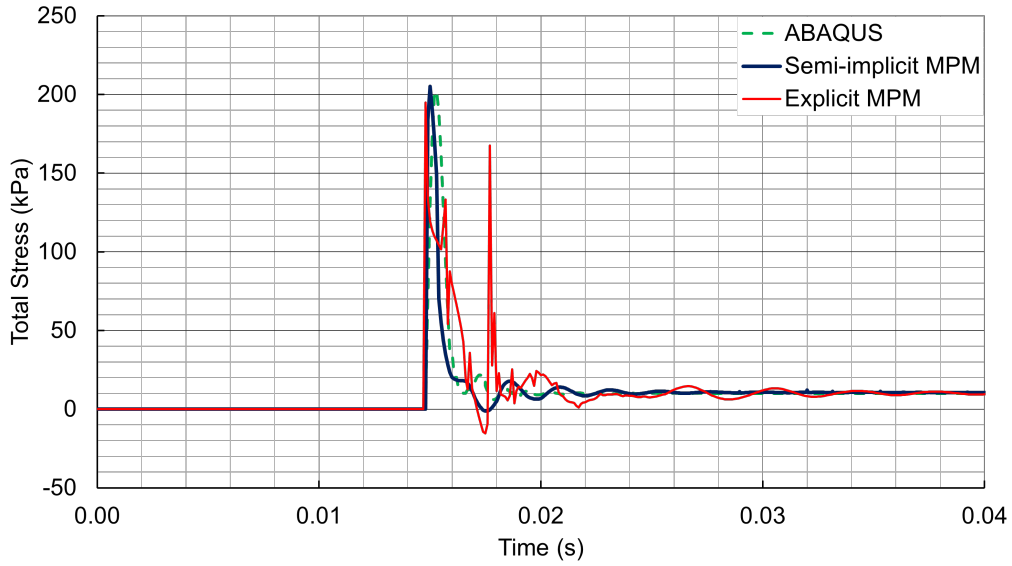


图 12：界面处总应力的比较

固体颗粒密度	2,150 kg/m^3
孔隙率	0.2
渗透率	5E-3 m/s
杨氏模量	1 MPa
泊松比	0.2
不排水抗剪强度	10 kPa

表3：土体的材料属性

我们使用 ABAQUS 2018 进行有限元模拟。几何形状、边界条件、加载条件和材料属性均与物质点法模拟相同。条形基础被建模为刚体，并在土体与基础之间的界面处施加罚函数接触。采用尺寸为 0.1 米 × 0.1 米的二维平面应变正方形单元，最大时间步长设为 1E-3 秒。ABAQUS 模拟在 0.72 秒时因收敛问题而失败，当时尝试的时间步长为 1E-9 秒。

图16展示了物质点法模拟中孔隙压力分布随时间的变化，图17则展示了物质点法模拟和 ABAQUS 模拟中基础中心下方土体（A点）的孔隙压力。

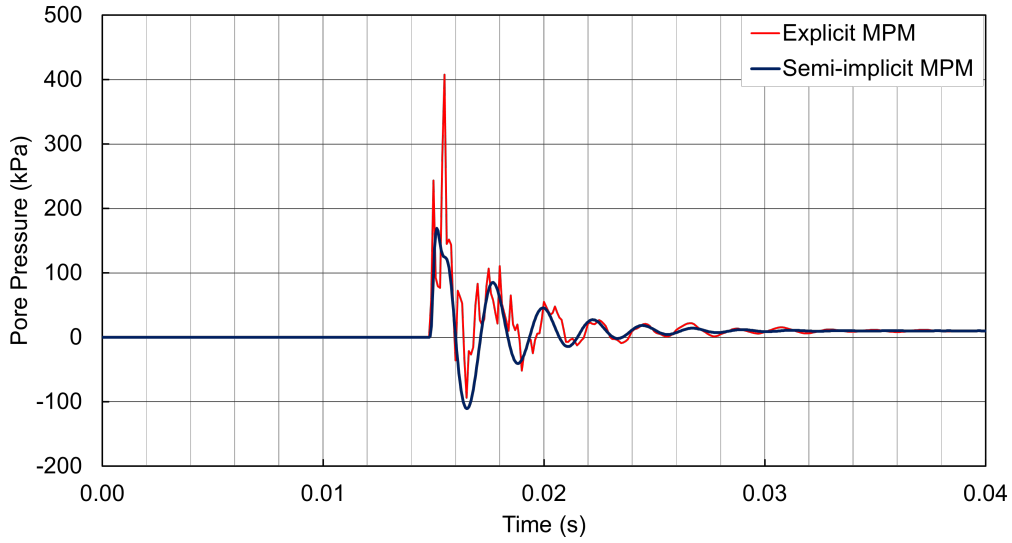


图13：两相杆中心处的孔隙压力波

MPM 接触算法准确地捕捉了不排水界面处孔隙压力的产生与消散过程，且物质点法模拟得到的孔隙压力与 ABAQUS 模拟结果相符。

图18展示了模拟时间为0.7秒时物质点法和ABAQUS模拟得到的竖向有效应力分布，此时基础上施加的竖向牵引力为43.02千帕。ABAQUS模拟在基础边缘下方的土体表面（B点）出现了过度的应力集中，导致土体单元变形时发生严重扭曲。图19展示了物质点法和ABAQUS模拟得到的基础中心（A点）和边缘（B点）下方土体中的竖向有效应力。物质点法和ABAQUS模拟在A点得出的结果相同，但ABAQUS模拟显著高估了B点的竖向有效应力，因为该处竖向有效应力超过了牵引荷载。

奇异性问题导致的过大有效应力使土体材料在较早阶段发生破坏。因此，ABAQUS模拟高估了整体基础位移，从而未能准确模拟饱和土的响应。图20展示了物质点法和ABAQUS模拟所得的竖向塑性应变分布随时间的变化。

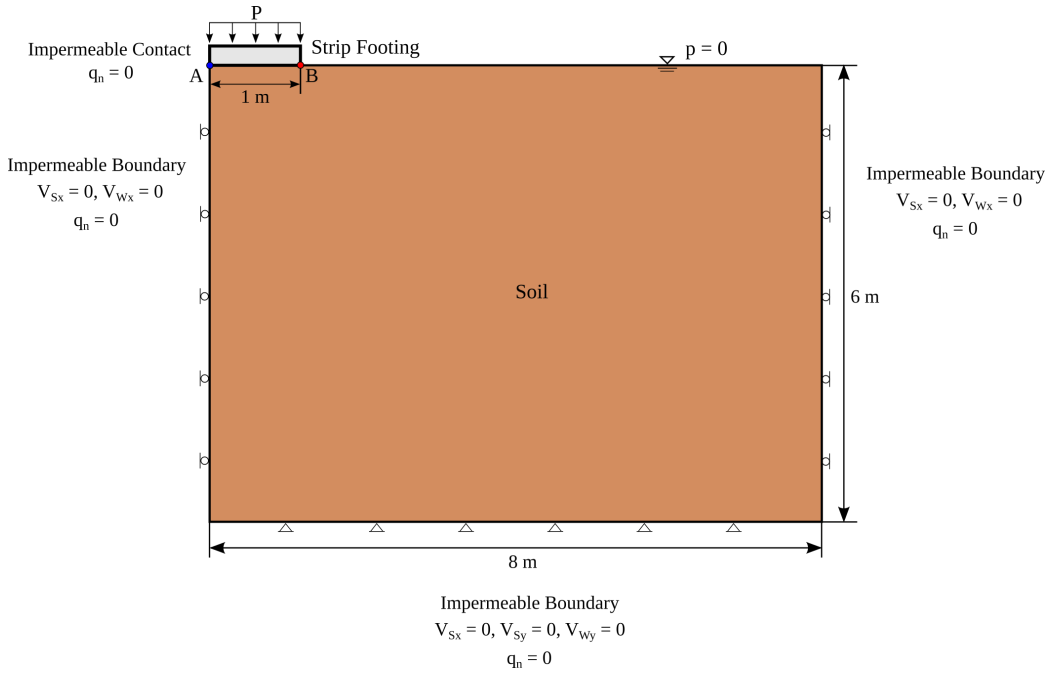


图14：条形基础模拟的几何形状和边界条件

塑性应变分布显示了材料破坏开始发生的部位。物质点法模拟显示，在0.5至0.55秒之间开始出现塑性，牵引力介于25.7千帕和30.49千帕之间，接近初始塑性的下限承载力31.4千帕。相比之下，ABAQUS模拟在0.35秒时即出现塑性，牵引力为12.09千帕，并且在相同模拟时间下产生了更大面积的失效土体。图21表明，由于应力奇异性导致材料过早破坏，ABAQUS模拟中的基础位移超过了物质点法模拟的两倍。

二维条形基础模拟展示了半隐式接触算法在处理具有不排水界面的土-结构相互作用问题时的有效性。半隐式接触物质点法能够准确模拟孔隙压力和有效应力的产生与消散，同时避免传统有限元法中的界面问题，例如应力奇异性和单元畸变。

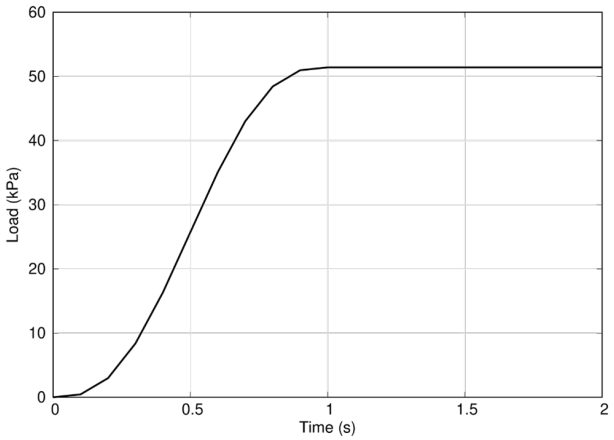


图15：条形基础模拟的荷载历程

6. 讨论与结论

我们在物质点法框架下，为土-结构相互作用问题开发了一种半隐式两相接触算法。通过引入分裂算法和半隐式时间增量格式，该两相算法继承了显式动力学公式的显著优势。该算法克服了人工压力振荡问题，并使时间增量步长不受流体可压缩性的影响。我们还引入了刚体算法，以避免刚度差异显著的材料体之间出现相互作用问题。最后，我们利用粒子在表面法向和切向上的边缘间距，准确识别界面处的节点。

我们通过实际示例模拟评估了接触算法的性能。在一维固结模拟中，我们验证了该算法在显式时间积分方案下的准确性和稳定性。即使采用较大的时间步长，半隐式接触MPM算法也能显著减少显式物质点法产生的人工振荡。所提出的接触算法在稳态下得到的孔隙压力和有效应力分布与解析解完全一致，并能准确模拟固结过程。半隐式接触算法能够模拟动力学问题，所提出的接触检测算法也能准确识别接触节点。动态冲击模拟再次验证了该算法的稳定性，并能准确、平滑地捕捉应力波和压力波。在二维

条形基础模拟中，我们证实了接触算法能够模拟不排水界面附近的孔隙水压力生成和二维固结。与传统有限元模拟相比，半隐式接触物质点法模拟具有显著优势，因为物质点法模拟不会出现应力奇异性和过度网格畸变问题。

尽管两相接触算法的稳定性已得到验证，但仍有改进空间。目前分裂法的实现以及孔隙压力的隐式更新需要额外的参数和计算，因此模拟时间比显式公式更长。此外，使用更精细的单元以获得更准确的结果，会使计算时间呈指数级增长。为解决这些问题，亟需实现先进的并行计算。目前的算法仅允许土-结构界面采用完全不透水界面或自由排水条件。为对复杂界面问题进行详细分析，建议在界面处实现更先进的排水条件。最后，为处理液化等高度动态荷载问题，建议开发采用 $u-p-w$ 公式的算法。

参考文献

[1] E. Kausel，土-结构相互作用的早期历史，Soil Dynamics and Earthquake Engineering 30(9) (2010) 822–832。[2] J. Ghaboussi, E. L. Wilson，流体饱和多孔弹性固体动力学的变分形式，Journal of the Engineering Mechanics Division 98 (1972) 947–963。[3] O. Zienkiewicz，D. Kelly，P. Bettess，有限元法与边界求解程序的耦合，《国际工程数值方法杂志》11 (1977) 355–375。[4] O. Zienkiewicz, T. Shiomi，饱和多孔介质的动力行为：广义Biot形式及其数值解，《国际岩土力学数值与分析方法杂志》8 (1984) 71–96。[5] J. H. Prevost，弹塑性固体中的变形局部化，《国际岩土力学数值与分析方法杂志》8 (1984) 187–196。

[6] B. Simon，软组织结构的多相孔弹性有限元模型，《应用力学评论》45 (1992) 191–218。[7] R. I. Borja，C. Tamagnini，E. Alarc´on，有限应变下的弹塑性固结（第二部分）：有限元实现与数值示例，《应用力学与工程中的计算方法》159 (1998) 103–122。[8] C. W. Hirt，A. A. Amsden，J. Cook，适用于所有流速的任意拉格朗日–欧拉计算方法，《计算物理学杂志》14 (1974) 227–253。[9] Y. Hu，M. Randolph，土体大变形问题的实用数值方法，《国际岩土力学数值与分析方法杂志》22 (1998) 327–350。[10] D. J. Benson，拉格朗日和欧拉水动力程序中的计算方法，《应用力学与工程中的计算方法》99 (1992) 235–394。[11]T. Hamann，G. Qiu，J. Grabe，将欧拉–拉格朗日耦合方法用于部分排水条件下的桩基施工问题，Computers and Geotechnics 63 (2015) 279–290。[12] D. Wang，B. Bienen，M. Nazem，Y. Tian，J. Zheng，T. Pucker，M. F. Randolph，岩土工程中的大变形有限元分析，Computers and Geotechnics 65 (2015) 104–114。[13] M. Souli，J. Zolesio，流体力学中的任意拉格朗日–欧拉方法与自由表面方法，《应用力学与工程中的计算方法》191 (2001) 451–466。[14] S. D.，S. J. Zhou，H. L. Schreyer，将粒子网格法应用于固体力学，《计算物理通讯》87(1-2) (1995) 236–252。[15] L. Zambrano-Cruzatty，A. Yerro，使用物质点法数值模拟自由落体式贯入仪的投放，《土与基础》60 (2020) 668–682。

[16] H. W. Zhang, K. P. Wang, Z. Chen，固体外部接触/冲击作用下饱和多孔介质动力分析的物质点法，《应用力学与工程中的计算方法》198（2016）1456–1472。[17] A. F. Phuong, N. T. V.and Van Tol, A. S. K. Elkadi, A. Rohe，固体外部接触/冲击作用下饱和多孔介质动力分析的物质点法，Computers and Geotechnics 73（2016）68–71。[18] K. Soga, E. Alonso, A. Yerro, K. Kumar, S. Bandara，采用物质点法进行滑坡体运动大变形分析的发展趋势，特别强调物质点法，G´eotechnique 66（2016）457–458。[19] P. Gresho, R. Sani，不可压缩流与有限元法，Wiley，1998。[20] S. Bandara, K. Soga，采用物质点法耦合土体变形与孔隙流体流动，Computers and Geotechnics 63（2015）199–214。[21] S. G. Bardenhagen, J. U. Brackbill, D. Sulsky，用于颗粒材料的物质点法，《应用力学与工程中的计算方法》187（2000）529–541。[22] J. Ma, D. Wang, M. Randolph，用于岩土工程模拟的物质点法新型接触算法，《国际岩土力学数值与分析方法杂志》38（2014）1197–1210。[23] P. Huang, X. Zhang, S. Ma, X. Huang，用于冲击与贯入模拟中物质点法的接触算法，《国际工程数值方法杂志》85（2011）498–517。[24] S. Kularathna，物质点法的分裂求解方案，博士论文，剑桥大学，2018。[25] A. J. Chorin，Navier-Stokes方程的数值解，Mathematics of Computation 22（1968）745–762。

[26] S. Kularathna, K. Soga，用于不可压缩材料分析的物质点法隐式公式，《应用力学与工程中的计算方法》313（2017）673–686。[27] S. G. Bardenhagen, E. M. Kober，广义插值物质点法，《工程与科学中的计算建模》5（2004年）477–496。[28] J. A. Nairn, C. C. Hammerquist, G. D. Smith，提高精度、适用于大变形问题并实现适当零空间滤波的新型物质点法接触算法，《应用力学与工程中的计算方法》362（2020年）112859。

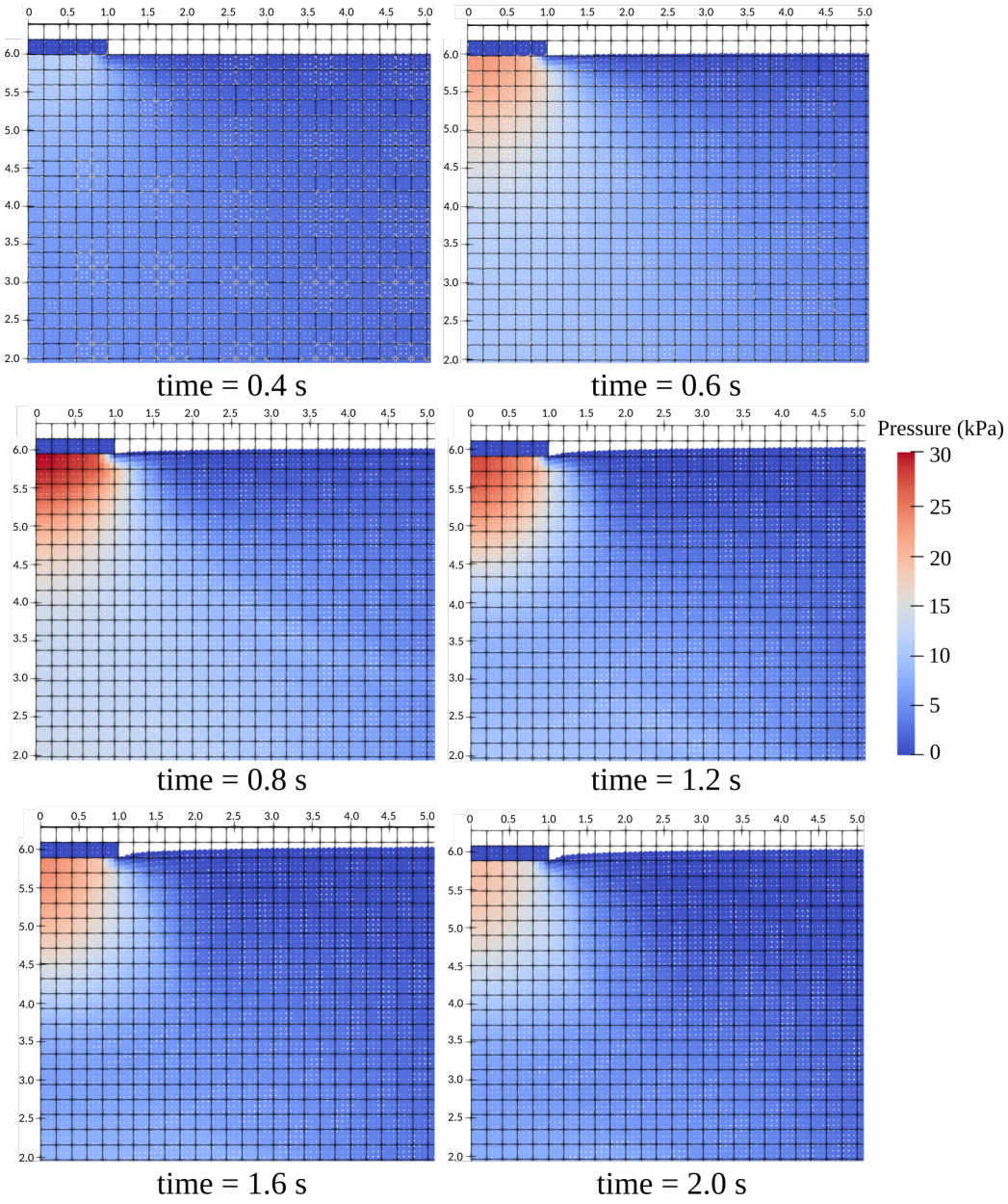
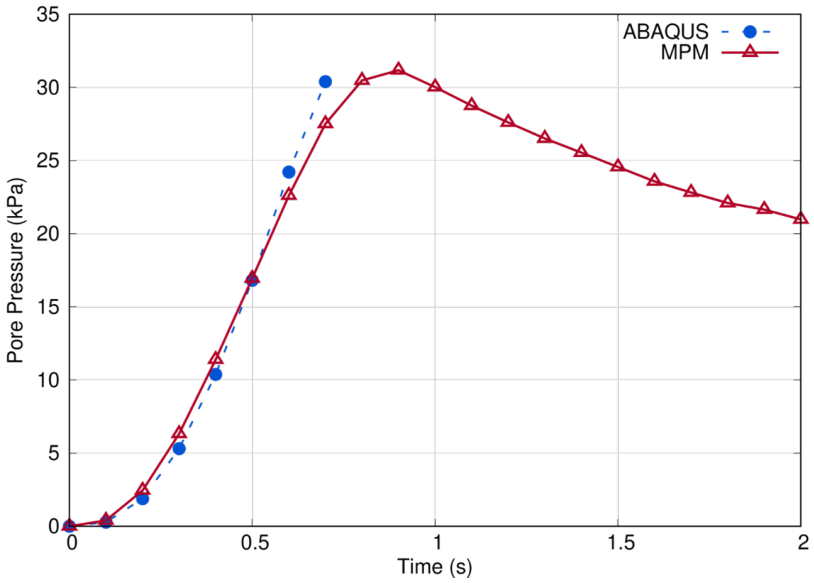


图16：物质点法和 ABAQUS 模拟中 A点孔隙压力随时间的变化对比



Fig图17：物质点法模拟中A点孔隙压力随时间的变化对比an与ABAQUS模拟

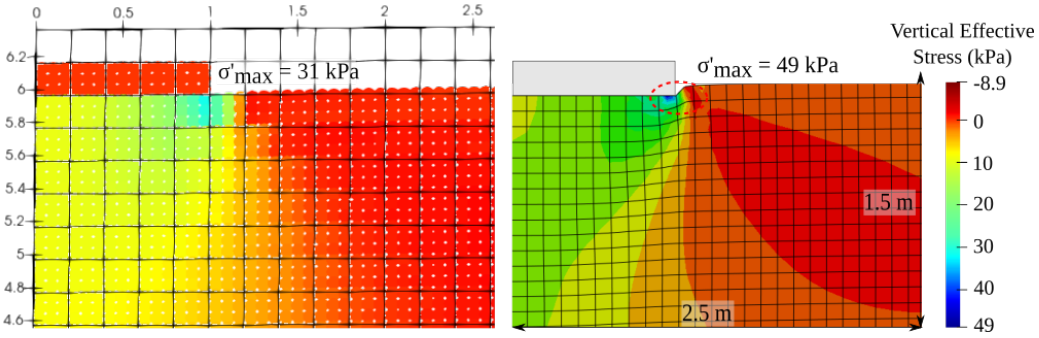


图18：模拟时间为0.7秒时，物质点法（左）和ABAQUS（右）模拟得到的竖向有效应力分布对比

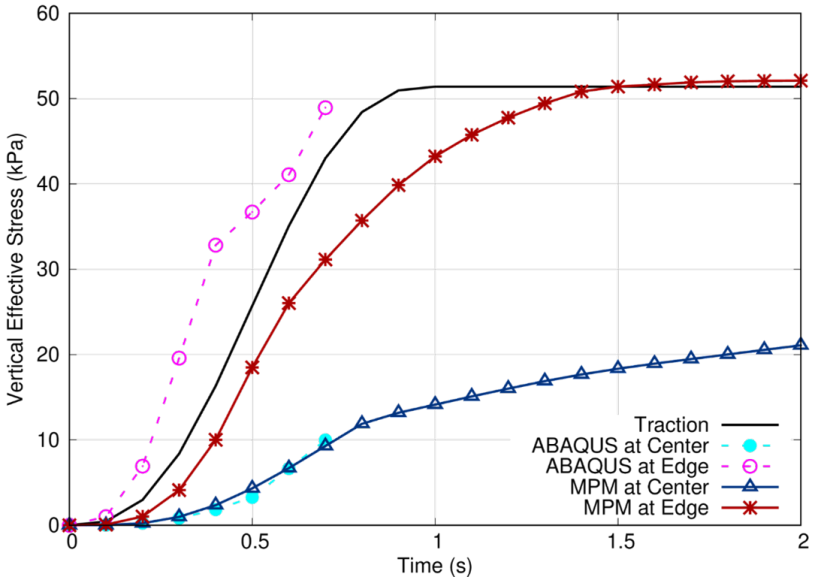


图19：物质点法和 ABAQUS 模拟中 A点和 B点处竖向有效应力的变化

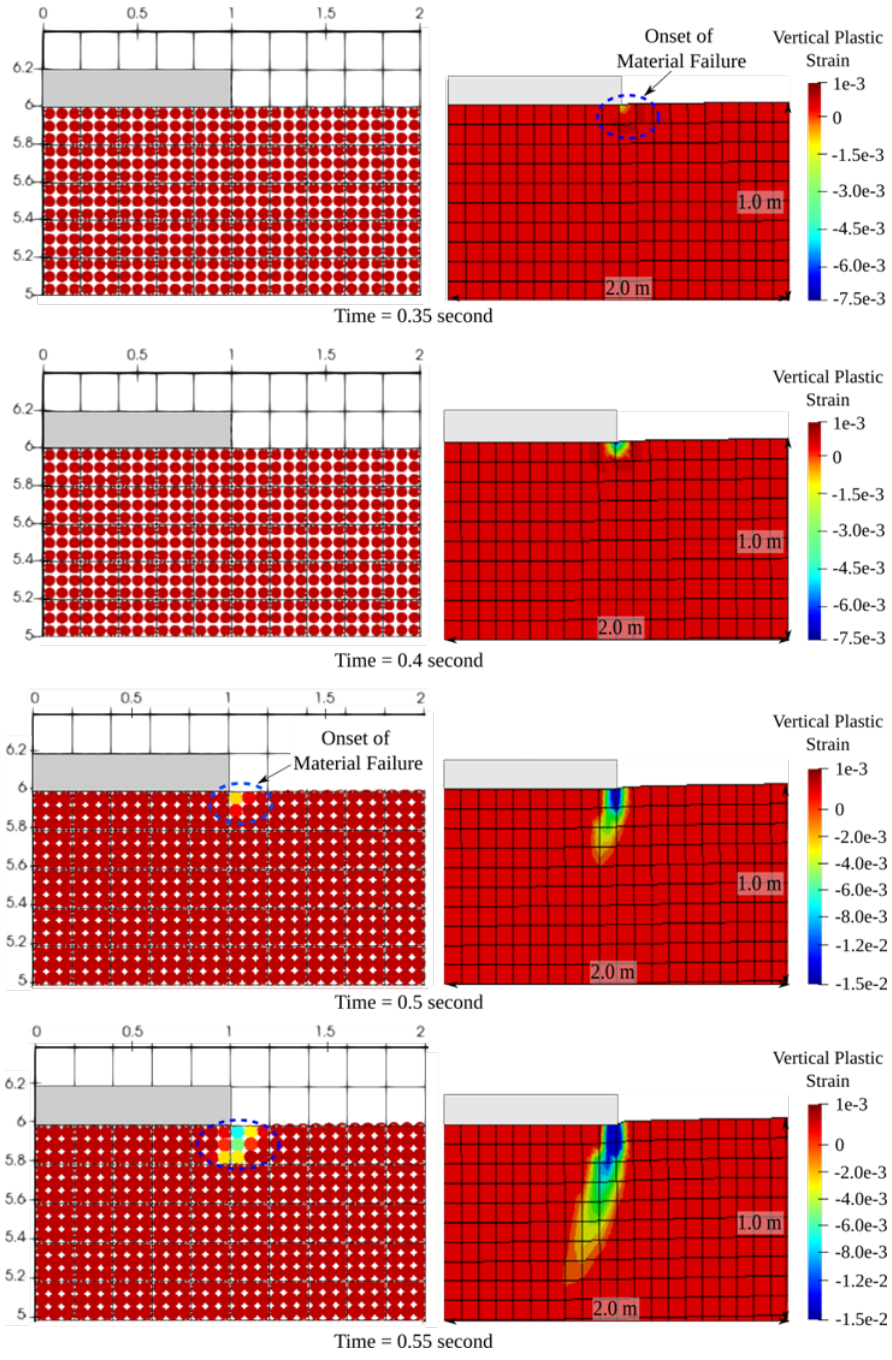


图 20：物质点法（左）和 ABAQUS（右）模拟中竖向塑性应变随时间的发展

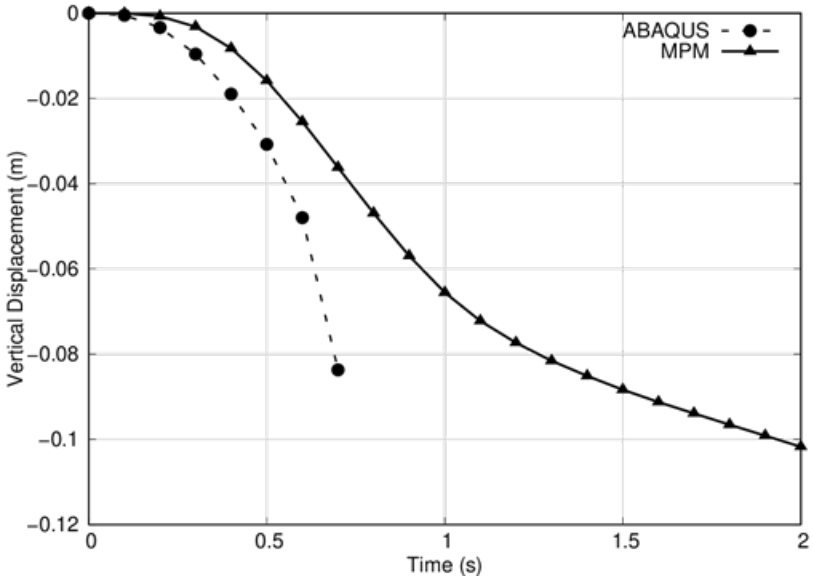


图21：物质点法与 ABAQUS 模拟得到的基础竖向位移随时间变化的对比