arXiv:2303.00862v1 [math.RA] 1 Mar 2023

非退化演化代数*

Antonio Jes´us Calder´on Mart´ın†，Amir Fern´andez Ouaridi‡ 和 Ivan Kaygorodov §

摘要：本文为非退化演化代数引入了一个新的不变量，该不变量由一个有序的低维演化代数序列构成，其中所有代数均属于某一特定族。我们利用该不变量提出了一种对非退化演化代数进行分类的方法，并将其应用至维数不超过3的情形。我们还利用它描述了某些演化代数族的导子，以及平方不大于1的演化代数簇。

关键词：演化代数，交换代数，代数分类，导子，不可约分支。

2020年数学主题分类：17A36，17A60，17
D92。

目录

引言2 1. 定义与预备结果 2 1.1. 非退化演化代数的 δ-指标 3 1.2. 非退化演化代数的 Δ-迹 5 2. 分类方法 7 3. 二维非退化演化代数的分类 11 3.1. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (1,1)$ 11 3.2. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (2)$ 12 4. 三维非退化演化代数的分类 12 4.1. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (1,1,1)$ 12 4.2. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (2,1)$ 15 4.3. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (3)$ 18 5. 非退化演化代数的导子 20 6. 平方维数为（一或零）的演化代数簇 22 参考文献 24

*本研究的第一部分由以下项目资助：加的斯大学 PCI 项目“Teor´ıa de Lie y Teor´ıa de Espacios de Banach”、项目编号为 FQM298 的安达卢西亚研究计划、2014年—2020年欧洲区域发展基金业务计划，以及安达卢西亚自治区政府经济、知识、商业与大学部。项目参考编号：FEDER-UCA18-107643；此外，还得到西班牙项目“Algebras no conmutativas y de caminos de Leavitt. Algebras de evoluci´on. Estructuras de Lie y variedades de Einstein”的资助；西班牙政府通过大学部提供的“Margarita Salas”资助，该资助由欧盟“下一代欧盟”计划提供资金；以及 FCT UIDB/00324/2020、UIDB/MAT/00212/2020、UIDP/MAT/00212/2020。本文第二部分由俄罗斯科学基金会通过项目 22-71-10001 资助。

†西班牙普埃托雷亚尔加的斯大学；ajesus.calderon@uca.es

‡科英布拉大学数学系，葡萄牙科英布拉；CMUC，科英布拉大学数学系，葡萄牙科英布拉；amir.fernandez.ouaridi@gmail.com §CMA-UBI，葡萄牙贝拉内陆大学，科维良；莫斯科基础与应用数学中心，俄罗斯莫斯科；圣彼得堡大学，俄罗斯；kaygorodov.ivan@gmail.com

引言

演化代数这一概念似乎最早由 Tian 于 2004 年在其论文中提出（另见他与 Vojtˇechovsk´y 合著、发表于 2006 [30] 的关于演化代数基本代数性质的首篇论文，以及发表于 2008 [29] 的一本书）。演化代数是一类新型遗传代数，用于描述非孟德尔遗传的运作，例如无性繁殖或无性遗传，也可描述动态和运动学方面的物理现象。在几何学中，演化代数可以描述嵌入三维流形中的图上粒子的运动。此外，一些随机过程，例如可数状态空间上的马尔可夫链，也可以用演化代数建模。近期发表的一篇综述 [14] 介绍了演化代数与其他结构之间的关系，以及第一个十年中对其研究的历史。

近年来，许多作者从多个不同方面研究了演化代数[1–14, 16–19, 22–30]。相关研究包括：演化代数的结构 [6, 7, 9], 、维数不超过三的演化代数的描述 [10], 、维数不超过三的单演化代数的分类 [8] ，以及维数不超过五的幂零演化代数的分类 [17]。此外，还有关于这类代数的某些导子的研究 [11], 、利用图表示演化代数的不同方式 [10, 17], ，甚至将其应用于某些特定种群问题等研究。

本文的主要目的是为非退化演化代数引入一个不变量，并说明如何利用它构建一种对非退化演化代数进行分类的通用方法，同时给出将该方法应用于二维和三维情形的示例。值得指出的是，所有已知的三维演化代数（特例）分类都没有定义非同构代数 [10, 15]。本文给出了三维非退化演化代数的非同构分类。此外，我们还展示了该不变量与代数导子之间的一些关系，尤其描述了若干族演化代数的导子。我们的出发点是将有限维演化代数分解为适当线性子空间的直和，如 [1] 中所示。

1. 定义与预备结果

与其他非结合代数类不同，演化代数类并非由一组恒等式定义，而是按以下方式定义：

定义 1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域。演化代数是配备有基 $\mathbf{B} = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ 的代数 $\mathbb{A}$，使得 $e_i e_j = 0$，其中 $i \neq j$。这样的基 B 称为自然基。在 $\mathbb{A}$ 中固定一个自然基 B，满足 $e_i^2 = \sum_{k\in\Lambda} w_{ki} e_k$ 的标量 $w_{ki} \in \mathbb{F}$ 称为 $\mathbb{A}$ 相对于 B 的结构常数，而矩阵 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) := (w_{ki})$ 称为 $\mathbb{A}$ 相对于 B 的结构矩阵。因此，每个演化代数都由其结构矩阵唯一确定。

本文中的任意代数均为有限维代数，且定义在代数闭基域 $\mathbb{F}$ 上。我们用 $\mathbb{S}_n$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上所有置换构成的对称群。下面继续介绍一些定义和结果。

定义 2. 演化代数 $\mathbb{A}$ 中的自然向量是指可以扩展为自然基的向量。自然集是指可以扩展为 $\mathbb{A}$ 的自然基的线性无关向量集合。由自然集生成的 $\mathbb{A}$ 的任意（线性）子空间 $\mathbb{E}$ 称为 $\mathbb{A}$ 的扩展演化子空间。这样的族称为 $\mathbb{E}$ 的扩展自然基。

定义 3. 给定代数 $\mathbb{A}$，该代数的湮灭子是理想

$$\mathrm{Ann}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} : x\mathbb{A} + \mathbb{A}x = 0\}$$

如果一个代数具有平凡湮灭子，我们就称它是非退化的。

The 以下注记是关于非退化演化代数的一个众所周知的事实 s.

注4. 给定一个非退化演化代数，则对于每个自然向量 e，我们有 $e^2 \neq 0$。因此，任意自然基上的结构矩阵都不含零列。

定理5（ [10]）。设 $\mathbb{A}$ 是一个演化代数，且 $\mathbf{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个自然基，其结构矩阵为 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A})$。那么，对于 $\mathbb{A}$ 的另一个自然基 $\mathbf{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$，以及自然基 $\mathbf{B}'$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的基变换 $\mathbf{C} = (c_{ij})$，即 $f_j = \sum_i c_{ij} e_i$，则

$$\mathbf{M_{B'}}(\mathbb{A}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M_B}(\mathbb{A})\mathbf{C}^{(2)},$$

其中 $\mathbf{C}^{(2)} = (c_{ij}^2)$。

我们的分类方法从以下分解出发。

定理 6（ [1], 定理2.11）。设 $\mathbb{A}$ 是一个演化代数。那么

$$\mathbb{A} = \mathrm{Ann}(\mathbb{A}) \oplus \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r,$$

其中， $\mathbb{E}_1$，...， $\mathbb{E}_r$ 是 $\mathbb{A}$ 的扩展演化子空间，满足

$$\dim(\mathbb{E}_i^2) = 1,\ \mathbb{E}_i\mathbb{E}_j = 0 \ \textit{and}\ \dim(\mathbb{E}_i^2 + \mathbb{E}_j^2) = 2 \textit{ for } i \neq j.$$

此外，若 $\mathbb{A}$ 是非退化的，则该分解是唯一的（在线性子空间的置换意义下）。

定义7. 设 $\mathbb{A}$ 为一个非退化演化代数。如下唯一的（在线性子空间的置换意义下）分解

$$\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r,$$

其中， $\mathbb{E}_1$，...， $\mathbb{E}_r$ 是 $\mathbb{A}$ 的扩展演化子空间，且满足定理 6中的条件，称为 $\mathbb{A}$的标准扩张演化子空间分解。

1.1. 非退化演化代数的 δ-指标。在本小节中，我们将定义分类方法中使用的第一个不变量。它是以下引理的一个推论。

引理 8. 设 $\mathbb{A}$、 $\mathbb{A}'$ 为两个非退化演化代数，其标准扩张演化分解分别为 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$ 和 $\mathbb{A}' = \mathbb{E}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}'_s$。若 $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$，则 $r = s$ 且 $\phi(\mathbb{E}_i) = \mathbb{E}'_{\sigma(i)}$，其中 $\sigma \in \mathbb{S}_r$ 为一个置换。

证明。记 $\phi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 为一个同构。则 $\phi(\mathbb{E}_i)^2 = \phi(\mathbb{E}_i^2)$ 的维数为 1。此外，对于 $i \neq j$， $\phi(\mathbb{E}_i)^2 + \phi(\mathbb{E}_j)^2 = \phi(\mathbb{E}_i^2 + \mathbb{E}_j^2)$ 的维数为 2。又由于对于 $i \neq j$， $\phi(\mathbb{E}_i)\phi(\mathbb{E}_j) = \phi(\mathbb{E}_i\mathbb{E}_j) = 0$，因此 $\mathbb{A}' = \phi(\mathbb{E}_1) \oplus \ldots \oplus \phi(\mathbb{E}_r)$ 是 $\mathbb{A}'$ 的一个标准扩展演化分解。根据该分解的唯一性，我们得到 $r = s$，并且对于某个置换 $\sigma \in \mathbb{S}_r$，有 $\phi(\mathbb{E}_i) = \mathbb{E}'_{\sigma(i)}$。□

根据定理 6，以下指标定义良好。

定义 9. 设 $\mathbb{A}$ 是一个非退化演化代数，其标准扩展子空间分解为 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$。则我们将 δ定义为 $\mathbb{A}$ 的指标序列

$$\delta(\mathbb{A}) := \big(\dim(\mathbb{E}_1), \dim(\mathbb{E}_2), \ldots, \dim(\mathbb{E}_r)\big)$$

其中 $\dim(\mathbb{E}_i) \geq \dim(\mathbb{E}_{i+1})$。

推论 10。设 $\mathbb{A}$、 $\mathbb{A}'$ 是两个同构的非退化演化代数。则 $\delta(\mathbb{A}) = \delta(\mathbb{A}'$).

如下例所示，推论 10 的逆命题不成立。

例 11. 考虑如下定义的非退化演化代数

$$\mathbb{A}:\ e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2 \textit{ and } \mathbb{A}':\ e_1^2 = e_2,\ e_2^2 = e_1.$$

我们有 $\delta(\mathbb{A}) = \delta(\mathbb{A}') = (2, 1)$，但 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbb{A}'$不同构。

注意，每个完全演化代数的 δ-指标都等于 $(1, \ldots, 1)$。回想一下，每个简单代数都是完全的。关于自然基的变换，我们可以作如下备注。

备注 12. 给定一个非退化演化代数 $\mathbb{A}$，其满足 $\delta(\mathbb{A}) = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$，以及 $\mathbb{A}$的标准扩展子空间分解所给出的 $\mathbb{A}$ 的两个自然基 $\mathrm{B} = \mathrm{B_1} \cup \mathrm{B_2} \cup \ldots \cup \mathrm{B_r}$ 和 $\mathrm{B}' = \mathrm{B}'_1 \cup \mathrm{B}'_2 \cup \ldots \cup \mathrm{B}'_r$。那么，基变换矩阵具有如下分块形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_r \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}$$

其中，任意 D_i 都是由 $\mathbb{A}$ 的自然向量组成的 $\delta_i \times \delta_i$ 块（以列为向量），而 P 是一个置换矩阵。

注意，若在上述备注中，对于每个 $1 \le i \le r$ 都有 $\delta_i = 1$，那么自然基的变换仅为对角矩阵与置换矩阵的乘积；这些变换在此前的 [10] 中研究过，且在复合运算下构成一个群。

定理 13. 设 $\mathbb{A}$是一个具有 $\delta(\mathbb{A}) = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ 的非退化演化代数。则存在 $\mathbb{A}$ 的一个自然基 $\mathrm{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$，使得结构矩阵 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A})$ 的列具有如下形式

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r),$$

使得对于 $i \neq j$，$\dim(\mathbb{F}v_i + \mathbb{F}v_j) = 2$。

证明. 设 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$ 是 $\mathbb{A}$ 的标准扩展子空间分解，并假设 $\dim(\mathbb{E}_i) \ge \dim(\mathbb{E}_{i+1})$。对于任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，取 $\mathrm{B}_i = \left\{e_1^i, \ldots, e_{\delta_i}^i\right\}$ 为$\mathbb{E}_i$的一个扩展自然基。那么 $\mathrm{B} = \cup_{i\in\{1,\ldots,r\}}\mathrm{B}_i$ 是 $\mathbb{A}$的一个自然基。对于此基，我们按列写出 $\mathbb{A}$ 的结构矩阵如下:

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = (v_1\ \ \lambda_{1,2}v_1 \ldots \lambda_{1,\delta_1}v_1 | v_2\ \ \lambda_{2,2}v_2 \ldots \lambda_{2,\delta_2}v_2 | \ldots\ldots | v_r\ \ \lambda_{r,2}v_r \ldots \lambda_{r,\delta_r}v_r)$$

对于任意 $\lambda_{r,\ s} \in \mathbb{F}$，且满足 $\dim(\mathbb{F}v_i + \mathbb{F}v_j) = 2$，其中 $i \neq j$。

现在，考虑包含以下向量的新集合 B'：

- $f_1^i = e_1^i$ for every $1 \le i \le r$.
- $f_j^i = \lambda_{i,j}^{-\frac{1}{2}} e_j^i$ for every $1 \le i \le r$ and $2 \le j \le \delta_i$.

F根据备注 12，集合 B' 是 $\mathbb{A}$的自然基；由定理5可得 e

$$\mathbf{M_{B'}}(\mathbb{A}) = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r),$$

由此完成证明。 □

根据定理 13，固定一个基 B，每个满足 $\delta(\mathbb{A}) = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ 的非退化演化代数 $\mathbb{A}$ 都同构于一个结构矩阵的列为.....的代数 $\mathbb{A}'$

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}') = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r),$$

满足 $\dim(\mathbb{F}v_i + \mathbb{F}v_j) = 2$ for $i \neq j$。因此，要对非退化演化代数进行分类，只需考虑结构矩阵具有上述形式的代数。此外，保持这一形状的自然基变换为备注 12 中的 $\mathrm{D}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_i = \lambda_i \mathbf{1}_{\delta_i}$，其中某个 $\lambda_i \in \mathbb{F}$，且 $\mathbf{1}_{\delta_i}$ 表示 $\delta_i \times \delta_i$ 单位矩阵。

1.2. 非退化演化代数的 Δ-迹。设 $\mathbb{A}$ 为一个非退化演化代数，其标准扩展子空间分解为 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$. 。我们的下一个目标是引入一列与该分解相关联的 r 演化代数。对于任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，记为

$$\pi_{\mathbb{E}_i} : \mathbb{A} \to \mathbb{E}_i$$

到 $\mathbb{E}_i$上的投影映射。接着，我们考虑由乘法定义在向量空间 $\mathbb{E}_i$ 上的代数 $\mathbb{A}_i$

$$\mathbb{A}_i : x \cdot_{\mathbb{A}_i} y = \pi_{\mathbb{E}_i}(x \cdot_{\mathbb{A}} y)$$

对任意 x、$y \in \mathbb{E}_i$。我们称代数 $\mathbb{A}_i$ 为与 $\mathbb{E}_i$相关联的代数。

注 14. 设 $\mathbb{A}$ 是一个非退化演化代数，其标准扩张子空间分解为 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$. 。那么，对任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，与 $\mathbb{E}_i$ 相关联的代数 $\mathbb{A}_i$ 满足：
(1) $\mathbb{A}_i$ 是一个演化代数。(2) $\dim \mathbb{A}_i^2 \leq 1$. (3) $\mathbb{A}_i$ 在任意自然基下的结构矩阵都具有成比例的列（见引理 8）。(4) $\mathbb{A}_i$ 要么是零乘积代数 $\mathbf{O_{n_i}}$，要么是满足 $\dim(\mathbb{A}_i^2) = 1$ 的非退化演化代数。

定义 15. 设 $\mathbb{A}$ 是一个非退化演化代数，其标准扩张子空间分解为 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$，并对任意 $\mathbb{E}_i$ 考虑其演化相关代数 $\mathbb{A}_i$。我们将这一系列代数称为

$$(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_r),$$

（代数的排列唯一）， $\mathbb{A}$.的代数标准序列

例 16. 设 $\mathbb{A}$ 是一个演化代数，且 $\mathbf{B} = \{e_1, \ldots, e_5\}$ 是 $\mathbb{A}$ 的自然基，使得 $\mathbb{A}$ 相对于基 B 的结构矩阵为：

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{A}$ 分解为扩展演化子空间的唯一分解为 $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \oplus \mathbb{E}_3$，其中 $\mathbb{E}_1 = \langle e_1、\ e_3 \rangle$、$\mathbb{E}_2 = \langle e_2、\ e_5 \rangle$ 和 $\mathbb{E}_3 = \langle e_4 \rangle$。因此， δ（$\mathbb{A}$） = （2, 2, 1）。此外， $\mathbb{A}$ 的代数标准序列（$\mathbb{A}_1$、$\mathbb{A}_2$、$\mathbb{A}_3$）由结构矩阵如下的演化代数组成：

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1}}(\mathbb{A}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_2}}(\mathbb{A}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_3}}(\mathbb{A}_3) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1} = \{e_1, e_3\}$、$\mathbf{B}_{\mathbb{E}_2} = \{e_2, e_5\}$ 和 $\mathbf{B}_{\mathbb{E}_3} = \{e_4\}$。

根据注 14，我们感兴趣的是了解满足 $\dim(\mathbb{A}^2) = 1$ 的非退化演化代数 $\mathbb{A}$。对于这种代数 $\mathbb{A}$ 的任意自然基 B， $\mathbb{A}$ 的结构矩阵的列具有如下形式

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = (v \quad \lambda_2 v \quad \ldots \quad \lambda_n v),$$

其中 v 是非零列，且任意 $\lambda_r \in \mathbb{F}$ 也都是 $\delta(\mathbb{A}) = (n)$。
T这一类代数的该子类分类见以下定理：

定理 17. 设 $\mathbb{A}$ 是一个 n 维非退化演化代数，且 $\dim(\mathbb{A}^2) = 1$。我们有
(1) 若 $n = 1$ 则 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{E}_1$ 同构： $e_1^2 = e_1$。(2) 若
$n \geq 2$ 则：

(a) 若 $(\mathbb{A}^2)^2 \neq 0$，则 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{E}_n$ 同构：$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_n^2 = e_1$。(b) 若 $(\mathbb{A}^2)^2 = 0$，则 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{I}_n$ 同构：$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_n^2 = e_1 + \mathbf{i}e_2$。

证明。设 $\mathbb{A}$ 是维数为 $= 1$ 的非退化演化代数。情形 $n = 1$ 是平凡的，因此我们假设 $n \geq 2$。由于 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，根据定理 13，存在 $\mathbb{A}$ 的一个自然基 $\mathbf{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$，使得 $e_i^2 = v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$。

(a) 假设 $(\mathbb{A}^2)^2 \neq 0$。现在，若 $\lambda = \sum \lambda_i e_i$ 是一个幂等元，则 $\lambda^2 = \sum \lambda_i^2 e_i^2 = \sum \lambda_i^2 e_1^2 = \sum \lambda_i e_i$。比较各标量，得到以下方程组：

$$(\sum \lambda_i^2)v_1 = \lambda_1, \quad (\sum \lambda_i^2)v_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad (\sum \lambda_i^2)v_n = \lambda_n,$$

当且仅当 $v^2 \neq 0$ 时，该方程组有解，且解为 $\lambda_i = \frac{v_i}{\sum v_i^2}$。由于 $(\mathbb{A}^2)^2 \neq 0$ 意味着 $v^2 \neq 0$，我们找到了一个自然幂等元 λ。由此，构造基变换便很直接。

(b) 假设 $(\mathbb{A}^2)^2 = 0$，则 $v^2 = 0$。令 $u \in \mathbb{A}$ 满足 $uv = v$，并定义向量 $w := -\frac{1}{2}u^2 + u$。显然，$wv = v$ 且 $w^2 = 0$。由于 $\dim\big(\ker(\sum v_i x_i)\big) = n - 1$，存在一组 $\{\lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ 线性无关的正交向量，使得 $\lambda_i v = 0$。不妨设 $\lambda_i^2 = v$。定义 $z_i := \lambda_i - \lambda_i w$，则 $\{z_3, \ldots, z_n\}$ 是一组线性无关的正交向量，使得 $z_i^2 = v$ 且 $z_i v = z_i w = 0$。最后，构造线性映射 $\phi : \mathbb{A} \to \mathbf{I}_n$，使得

$$\begin{array}{rcl} \phi(v) & = & e_1 + \mathbf{i}e_2, \\ \phi(w) & = & \frac{1}{2}e_1 - \frac{\mathbf{i}}{2}e_2, \\ \phi(z_i) & = & e_i, \text{ for } i = 3, \ldots, n. \end{array}$$

容易验证，这就是我们所要寻找的同构。

□

定理 17 允许我们在满足 $\dim(\mathbb{A}^2) \leq 1$ 的非退化演化代数类中引入如下序关系。

定义 18. 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 是两个非退化演化代数，满足 $\dim(\mathbb{A}^2) \leq 1$，$\dim((\mathbb{A}')^2) \leq 1$。我们称 $\mathbb{A} \geq_* \mathbb{A}'$，如果：

- 要么 $\dim(\mathbb{A}) \geq \dim(\mathbb{A}')$，要么
- $\dim(\mathbb{A}) = \dim(\mathbb{A}')$，且 (i) $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{O}_n$ 同构，并且 $\mathbb{A}'$ 与 $\mathbf{O}_n$ 或 $\mathbf{E}_n$ 或 $\mathbf{I}_n$同构。(ii) $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{E}_n$ 同构，并且 $\mathbb{A}'$ 与 $\mathbf{E}_n$ 或 $\mathbf{I}_n$同构。(iii) $\mathbb{A}$ 与 $\mathbf{I}_n$ 同构，并且 $\mathbb{A}'$ 也与 $\mathbf{I}_n$同构。

定理 17 还允许我们引入以下记号：

记号 19. 设 $\mathbb{A}$ 是一个 n 维非退化演化代数，满足 $\dim(\mathbb{A}^2) \leq 1$。我们记为

$$\overline{\mathbb{A}} = \begin{cases} \mathbf{O}_n & \textit{if } \mathbb{A} \textit{ is isomorphic to } \mathbf{O}_n \\ \mathbf{E}_n & \textit{if } \mathbb{A} \textit{ is isomorphic to } \mathbf{E}_n \\ \mathbf{I}_n & \textit{if } \mathbb{A} \textit{ is isomorphic to } \mathbf{I}_n \end{cases}$$

现在我们来引入本文推导中的主要不变量。

定义 20. 设 $\mathbb{A}$ 是一个非退化演化代数，其代数标准序列为 $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_r)$，且满足 $\mathbb{A}_i \geq_* \mathbb{A}_{i+1}$。那么我们定义 $\mathbb{A}$ 的 Δ-迹为

$$\Delta(\mathbb{A}) := (\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r}).$$

例 21. 设 $\mathbb{A}$ 为例 16 中的演化代数。其代数标准序列为（$\mathbb{A}_1$、$\mathbb{A}_2$、$\mathbb{A}_3$），其中

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1}}(\mathbb{A}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_2}}(\mathbb{A}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{\mathbf{B}_{\mathbb{E}_3}}(\mathbb{A}_3) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbb{A}_1$ 和 $\mathbb{A}_2$ 都与 $\mathbf{E}_2$ 同构，而 $\mathbb{A}_3$ 与 $\mathbf{O}_1$, 同构，因此我们有 *t*

$$\Delta(\mathbb{A}) := (\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{O}_1).$$

这一概念在某种意义上将具有唯一自然基的演化代数的对角子空间概念（例如，参见 [8]）推广到了非退化演化代数的情形。注意，具有唯一自然基的演化代数恰好是 δ-指标为全 1 序列的非退化演化代数，这类代数有时称为 2LI（参见 [1]）。下面的结果表明，Δ 在同构意义下是一个不变量。

定理22. 设 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{A}'$是两个同构的非退化演化代数。则 $\Delta(\mathbb{A}) = \Delta(\mathbb{A}'$).

证明。我们将 $\phi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 记为这些代数之间的同构，并记作

$$\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$$

标准扩展子空间分解 $\mathbb{A}$。根据定理 8，我们有

$$\mathbb{A}' = \phi(\mathbb{E}_1) \oplus \ldots \oplus \phi(\mathbb{E}_r).$$

考虑代数 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{A}'_i$，其中 $\mathbb{A}'_i : x \cdot_{\mathbb{A}'_i} y = \pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(x \cdot_{\mathbb{A}'} y)$。注意到它们具有相同的维数 δ_i。现在，由于对于 $x, y \in \mathbb{E}_i$，有 $x \cdot_{\mathbb{A}} y = \phi^{-1}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y))$，我们得到

$$x \cdot_{\mathbb{A}_i} y = \pi_{\mathbb{E}_i}(x \cdot_{\mathbb{A}} y) = \pi_{\mathbb{E}_i}\big(\phi^{-1}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y))\big) = \phi^{-1}\big(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y))\big) = \phi^{-1}\big(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'_i} \phi(y)\big).$$

于是，$\mathbb{A}_i^2 = 0$ 当且仅当（$\mathbb{A}'_i$）$^2 = 0$，并且它们是代数 $\mathbf{O}_{\delta_i}$。此外，对于 $x, y, z, w \in \mathbb{E}_i$，我们得到

$$\begin{aligned}
(x \cdot_{\mathbb{A}_i} y) \cdot_{\mathbb{A}_i} (z \cdot_{\mathbb{A}_i} w) &= \pi_{\mathbb{E}_i}(\pi_{\mathbb{E}_i}(x \cdot_{\mathbb{A}} y) \cdot_{\mathbb{A}} \pi_{\mathbb{E}_i}(z \cdot_{\mathbb{A}} w)) \\
&= \pi_{\mathbb{E}_i}(\phi^{-1}(\phi(\pi_{\mathbb{E}_i}(\phi^{-1}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y)))) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(\pi_{\mathbb{E}_i}(\phi^{-1}(\phi(z) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(w)))))) \\
&= \phi^{-1}(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(\phi^{-1}(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y)))) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(\phi^{-1}(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(z) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(w)))))) \\
&= \phi^{-1}(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(y)) \cdot_{\mathbb{A}'} \pi_{\phi(\mathbb{E}_i)}(\phi(z) \cdot_{\mathbb{A}'} \phi(w)))) \\
&= \phi^{-1}((\phi(x) \cdot_{\mathbb{A}'_i} \phi(y)) \cdot_{\mathbb{A}'_i} (\phi(z) \cdot_{\mathbb{A}'_i} \phi(w))).
\end{aligned}$$

于是，$(\mathbb{A}_i^2)^{\,2} = 0$ 当且仅当（$(\mathbb{A}'_i)^{\,2}$）$^2 = 0$，并且根据定理 17，它们同构于代数 $\mathbf{I}_{\delta_i}$。否则，它们同构于 $\mathbf{E}_{\delta_i}$。□

从现在起，如果我们给出演化代数的 Δ-迹，就假定它是非退化的。

2. 分类方法

在上一节中，我们介绍了非退化演化代数的 Δ-迹。本节将基于这一不变量构造非退化演化代数的分类方法。为此，以下结果至关重要。

定理 23. 设 $\mathbb{A}$ 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上满足 $\Delta(\mathbb{A}) := (\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$ 的非退化演化代数。那么，存在 $\mathbb{A}$ 的一个自然基 B，使得 $\mathbb{A}$ 关于 B 的结构矩阵具有以下对角分块:

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{A}_1} & * & * & * \\ * & \overline{\mathbb{A}_2} & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & \overline{\mathbb{A}_r} \end{pmatrix}.$$

此外，$\mathbf{M_B}(\mathbb{A})$具有如下列形式

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r).$$

证明。考虑 $\mathbb{A} = \mathbb{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{E}_r$，即 $\mathbb{A}$ 的扩展演化子空间分解。根据定理 13，对于任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，存在 $\mathbb{E}_i$ 的一个自然基 $\mathrm{B}'_i = \{e_{i,1}, \ldots, e_{i,k_i}\}$，使得 $\mathbb{A}$ 关于基 B′ 的结构矩阵 $= \cup_{i=1}^{r} \mathrm{B}'_i$ 具有如下列形式

$$\mathbf{M_{B'}}(\mathbb{A}) = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r)$$

当 $i \neq j$ 时，$\dim(\mathbb{F}v_i + \mathbb{F}v_j) = 2$。

由于对于任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，与线性子空间 $\mathbb{E}_i$ 相关联的代数 $\mathbb{A}_i$ 同构于代数 $\mathrm{C}_i \in \{\mathrm{O}_{k_i}、\mathrm{E}^{k_i}、\mathrm{I}_{k_i}\}$，因此当 $\mathrm{C}_i \in \{\mathrm{E}^{k_i}、\mathrm{I}_{k_i}\}$ 时，存在从 $\mathbb{A}_i$ 到 C_i 的自然基变换 ϕ_i（如定理 17 所述）。若 $\mathrm{C}_i = \mathrm{O}_{k_i}$，则定义 $\phi_i = \mathbf{1}_{k_i}$。由此，对于任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$，我们得到 E_i 的一个基 $\mathrm{B}_i = \{\phi(e_{i,\ 1}) \ldots, \phi(e_{i,\ k_i})\}$。

现在考虑 $\mathbb{A}$ 的基 B，由 $\mathrm{B} = \cup_{i=1}^{r} \mathrm{B}_i$. 给出。这是 $\mathbb{A}$ 的一个自然基，并且 $\mathbb{A}$ 关于它的结构矩阵为

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{A}_1} & * & * & * \\ * & \overline{\mathbb{A}_2} & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & \overline{\mathbb{A}_r} \end{pmatrix}.$$

此外，如定理 13 中所示，我们得到 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A})$ 具有如下列形式

$$\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = (v_1 \ldots v_1 | v_2 \ldots v_2 | \ldots\ldots | v_r \ldots v_r).$$

□

此时，固定一个基 B，要对给定维数 n 的非退化演化代数进行分类，只需对结构矩阵如定理 23 所示的演化代数 $\mathbb{A}$ 进行分类。

定义 24. 我们用 $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$ 表示满足 $\Delta(\mathbb{A}) = (\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$ 的非退化演化代数 $\mathbb{A}$ 的集合。

注 25. 以下断言成立:

(i) $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$ 中任意两个代数 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 之间的同构都具有备注 12 中的形式，使得 D_i 是 $\overline{\mathbb{A}_i}$ 的自同构，且 $\mathrm{D}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_i = \lambda_i \mathbf{1}_{\delta_i}$；并且 P 置换对角线上的块 i 和 j 当且仅当 $\overline{\mathbb{A}_i} = \overline{\mathbb{A}_j}$。

注意到 t　　其同构不依赖于固定的代数 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 在 $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r}$　　).

(ii) 所有这些自同构构成一个群，其运算为复合，记作

$$\mathcal{G}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r}).$$

该群包含以下子群

$$\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$$

所有分块对角矩阵组成的子群（借助 $\mathbf{D}_i$），以及

$$\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$$

所有在 $\overline{\mathbb{A}_i}=\overline{\mathbb{A}_j}$ 时对块 i 和 j 进行置换的子群。

$\mathcal{G}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$ 中的任意元素，都是 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$ 中的一个元素与 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$ 中的一个元素的复合。

(iii) 我们有如下作用

$$\mathcal{G}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})\times\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})\to\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1},\ldots,\overline{\mathbb{A}_r})$$
$$(\phi,\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}))\mapsto\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)}.$$

此时，我们可以构建一种对非退化演化代数进行分类的方法。不过，这种方法需要代数 $\mathbf{E_n}$ 和 $\mathbf{I}_n$ 的自同构群。

定理 26。$\mathbf{E}_n$ 的自同构群由形如下式的元素 ϕ 构成：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&v_{22}&v_{23}&\ldots&v_{2n}\\0&v_{32}&v_{33}&\ldots&v_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&v_{n2}&v_{n3}&\ldots&v_{nn}\end{pmatrix},$$

其中，对于 $i\neq j$，$\sum_{k=2}^{n}v_{ki}^2=1$ 和 $\sum_{k=2}^{n}v_{ki}v_{kj}=0$。即 $\phi^{\mathrm{T}}\phi=\mathbf{1}_n$。

证明。设 $\phi\in\mathbf{Aut(E}_n\mathbf{)}$为$\mathbf{E}_n$的自同构群，并记 $\phi(e_i)=v_{1i}e_1+\ldots+v_{ni}e_n$，则

$$\phi(e_i)\phi(e_i)=(v_{1i}^2+\ldots+v_{ni}^2)e_1.$$

一方面，对于 $i=1$：

$$v_{11}e_1+\ldots+v_{n1}e_n=\phi(e_1)=\phi(e_1^2)=\phi(e_1)\phi(e_1)=(v_{11}^2+\ldots+v_{n1}^2)e_1.$$

因此，对于 $i>1$ 和 $v_{11}^2=v_{11}$，有 $v_{i1}=0$，于是 $\phi(e_1)=e_1$。

另一方面，$\phi(e_i)\phi(e_i)=\phi(e_i^2)=\phi(e_1)=e_1$ 蕴含 $(v_{1i}^2+\ldots+v_{ni}^2)e_1=e_1$，从而

$$(v_{1i}^2+\ldots+v_{ni}^2)=1.$$

最后，由于 $\phi(e_1)\phi(e_i)=e_1\phi(e_i)=0$，则 $v_{1i}=0$。反之则可直接验证。 □

定理 27。$\mathbf{I}_n$ 的自同构群由以下形式的元素组成：

$$\phi=\begin{pmatrix}v_{11}&v_{12}&v_{13}&\ldots&v_{1n}\\\mathbf{i}v_{11}-\mathbf{i}&\mathbf{i}v_{12}+1&v_{23}&\ldots&v_{2n}\\v_{31}&\mathbf{i}v_{31}&v_{33}&\ldots&v_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\v_{n1}&\mathbf{i}v_{n1}&v_{n3}&\ldots&v_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $v_{1i}^2+\ldots+v_{ni}^2=v_{11}+\mathbf{i}v_{12}$，且 $\sum_{k=1}^{n}v_{ki}v_{kj}=0$ 对于 $i\neq j$。也就是说 $\phi^{\mathrm{T}}\phi=(v_{11}+\mathbf{i}v_{12})\,\mathbf{1}_n$。

证明。设 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{I}_n)$，并记 $\phi(e_i) = v_{1i}e_1 + \ldots + v_{ni}e_n$，则

$$\phi(e_i)\phi(e_i) = (v_{1i}^2 + \ldots + v_{ni}^2)(e_1 + \mathbf{i}e_2).$$

我们有 $\phi(e_i)\phi(e_i) = \phi(e_i^2) = \phi(e_1 + \mathbf{i}e_2) = \phi(e_1) + \mathbf{i}\phi(e_2)$，因此

$$v_{k2} = \mathbf{i}v_{k1}, \text{ for } k \geq 3.$$

此外，$(v_{1i}^2 + \ldots + v_{ni}^2)(e_1 + \mathbf{i}e_2) = (v_{11} + \mathbf{i}v_{12})e_1 + (v_{21} + \mathbf{i}v_{22})e_2$。因此，

$$\mathbf{i}v_{11} - v_{12} = v_{21} + \mathbf{i}v_{22} \text{ and } v_{1i}^2 + \ldots + v_{ni}^2 = v_{11} + \mathbf{i}v_{12}.$$

对于 $i = 1$，2，我们得到以下方程组：

$$\begin{aligned} v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{31}^2 + \ldots + v_{n1}^2 &= v_{11} + \mathbf{i}v_{12}, \\ v_{12}^2 + v_{22}^2 - v_{31}^2 - \ldots - v_{n1}^2 &= v_{11} + \mathbf{i}v_{12}, \\ \mathbf{i}v_{11} - v_{12} &= v_{21} + \mathbf{i}v_{22}. \end{aligned}$$

由此 $v_{2\ \ \ 1} = \mathbf{i}v_{11} - \mathbf{i}$ 和 $v_{22} = \mathbf{i}v_{12} + 1$。反向结论可直接验证 . □

为了描述非退化演化代数的分类，我们将采用 [17], 中引入的记号，因为它使我们能够研究作用

$$\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r}) \times \mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r}) \to \mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$$

以一种舒适的方式。

接下来 [17], 我们回顾：给定一个 n维演化代数 $\mathbb{A}$，其相对于自然基 B 的结构矩阵为 $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}) = (w_{ki})$，带有 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和$E = \{(i, j)$ 的图 $(V, E) \in V \times V : w_{i,\ j} \neq 0\}$ 称为相对于 B 与 $\mathbb{A}$ 关联的图。若用映射 $\omega : E \to \mathbb{F}$（定义为 $\omega((i, j)) = w_{i,\ j}$为图 (V, E) 标注顶点，则得到所谓的相对于 B 与 $\mathbb{A}$ 关联的加权图。

注意，给定一个置换 $\mathrm{P} \in \mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$，有 $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathrm{P}^{(2)} = \mathrm{P}$。因此，群 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$ 通过共轭作用于 $\mathcal{E}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$。回顾一下，图关于同构的等价类包含顶点的所有排列，可以视为去掉顶点标签后的代表图。注意，图同构通过共轭作用于邻接矩阵。因此，只需考虑相对于 B 与 $\mathbb{A}$ 关联且顶点未标记的图，即可在 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$的作用下，得到代数 $\mathbb{A}$ 模的表示。

我们已经得到了一种对 n 维非退化演化代数 $\mathbb{A}$ 进行分类的方法。该方法包括以下步骤：

(1) 确定 $\Delta(\mathbb{A})$ 的可能取值（即 n 表示为自然数之和的形式）。(2) 对于任意取值 $\mathfrak{s} \in \Delta(\mathbb{A})$，构造集合 $\mathcal{E}(\mathfrak{s})$，其元素为所有可能的 $\Delta(\mathbb{A})$，使得 $\Delta(\mathbb{A}) = \mathfrak{s}$。(3) 对于任意 $\Delta(\mathbb{A}) \in \mathcal{E}(\mathfrak{s})$。(a) 计算群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\Delta(\mathbb{A}))$。(b) 计算该作用的轨道

$$\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\Delta(\mathbb{A})) \times \mathcal{E}(\Delta(\mathbb{A})) \to \mathcal{E}(\Delta(\mathbb{A})),$$

（见注释 25-(c)）。

(c)（可选）对于每个轨道，构造一个加权图，其邻接矩阵为该族某个代表元对应的结构矩阵。删除图中的顶点标签。如果对于同一个 $\Delta(\mathbb{A})$ 得到多个轨道族，则可能存在一个族，在某些权重取值下包含其他族。

将它们合并，以减少族的数量。

3. 分　　类二维非退化演化代数　　S

作为上一节所提出方法的应用，本节对二维非退化演化代数进行分类。固定基 B $=\{e_1,e_2\}$。为简便起见，我们可以仅用代数 $\mathbb{A}$ 在基 B 下的结构矩阵来指代该代数。此外，在接下来的技术性章节中，我们可以假设基域的特征为零。现在，为了对二维非退化演化代数进行分类，我们需要研究以下情形。

3.1. 情形 $\delta(\mathbb{A})=(1,1)$。设标准扩张演化子空间分解为$\mathbb{E}_1=\langle e_1\rangle, \mathbb{E}_2=\langle e_2\rangle$。我们有 3 个子情形。

3.1.1. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(O_1,O_1)$。在此子情形中，我们考虑族中的代数　　y:

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & 0\end{pmatrix},\ \text{where } a_{12}a_{21}\neq 0\right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(O_1,O_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成:

$$\phi=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & x_2\end{pmatrix}\ \text{where } x_1x_2\neq 0$$

该群对 $\mathcal{E}(O_1,O_1)$ 中任意元素的作用为:

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & a_{12}x_2^2x_1^{-1}\\ a_{21}x_1^2x_2^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

通过选取 $x_1=(a_{12}a_{21}^2)^{-\frac{1}{3}}$ 和 $x_2=(a_{12}^2a_{21})^{-\frac{1}{3}}$，我们得到一个 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(O_1,O_1)$-轨道，其代表元为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。这里，群 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(O_1,O_1)=\mathbb{S}_2$ 将我们的代表元映射到其自身。

3.1.2. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(O_1,E_1)$。在此子情形中，我们考虑该族的代数　　:

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_1,\mathbf{E}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & 1\end{pmatrix},\ \text{where } a_{12}a_{21}\neq 0\right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(O_1,E_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成:

$$\phi=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{where } x_1\neq 0$$

且该群对 $\mathcal{E}(O_1,E_1)$ 中任意元素的作用由下式给出:

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & a_{12}x_1^{-1}\\ a_{21}x_1^2 & 1\end{pmatrix}.$$

如果 $x_1=a_{21}^{-\frac{1}{2}}$，我们得到 $\alpha\in\mathbb{F}^*$ 的代表元 $\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 1\end{pmatrix}$。这里，群 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}(O_1,E_1)$ 是平凡的。

3.1.3. 子情形 Δ （$\mathbb{A}$） $=$ (E$_1$,E$_1$)。在此子情形中，我们考虑族中的代数 y:

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) = \left\{ \mathbb{A} : \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}, \text{ where } a_{12}a_{21} \neq 1 \right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$(E$_1$,E$_1$)是平凡的，该群在 $\mathcal{E}$(E$_1$,E$_1$)的任意元素上的作用都会将其映射到自身。因此， $\mathcal{E}$(E$_1$, E$_1$)中的每个元素都对应一个 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$(E$_1$,E$_1$)-轨道。现在，由于群$\mathcal{G}_{\mathbf{P}}$(E$_1$, E$_1$) $= \mathbb{S}_2$，我们得到代表元 $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$，对应于$(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}^2$ 且满足 $\alpha\beta \neq 1$，其中(α, β)和(β, α)产生同构代数。

3.2. 情形 $\delta(\mathbb{A}) = (2)$。根据定理 17， $\mathbb{A}$ 要么同构于E$_2$ ，要么同构于I$_2$。

综上，本节得到如下分类定理。

定理28. 给定代数闭域 $\mathbb{F}$（特征为零）上的二维非退化演化代数 $\mathbb{A}$ ，则它仅同构于下列代数之一:

- *If* $\delta(\mathbb{A}) = (1, 1)$.
  - *If* $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_1)$. *Then it is isomorphic to the algebra* $\mathbf{A}_{2,1} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  - *If* $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathbf{O}_1, \mathbf{E}_1)$. *Then it is isomorphic to* $\mathbf{A}^{\alpha}_{2,2} : \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *for some* $\alpha \in \mathbb{F}^*$.
  - *If* $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1)$. *Then it is isomorphic to* $\mathbf{A}^{\alpha,\beta}_{2,3} : \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ *for* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}^2$ *and* $\alpha\beta \neq 1$.

  唯一的同构发生在同一族的代数之间，且它们是基元素的置换。具体而言，唯一的同构为 $\mathbb{A}^{\alpha}_{23} \cong \mathbb{A}^{\beta}_{23}$, $\mathbb{A}^{\beta}_{23} \cong \mathbb{A}^{\alpha}_{23}$。
- 若 $\delta(\mathbb{A}) = (2)$。则它同构于 E$_2$ 或 I$_2$。

4. 三维非退化演化代数的分类

通过类似的过程，我们可以得到三维非退化演化代数的分类。固定一个基 B $= \{e_1, e_2, e_3\}$。本节将用到以下注记。

注29. 根据 定理 26 和定理 27，我们有以下自同构群:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{E}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathrm{Aut}(\mathbf{I}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mathbf{i} - \mathbf{i}x \\ \mathbf{i}x - \mathbf{i} & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{F} \setminus \left\{ \tfrac{1}{2} \right\} \right\}.$$

为了对三维 非退化演化代数进行分类，我们必须研究以下情形 s.

4.1. 情形 $\delta(\mathbb{A}) =$ (1,1,1)。假设标准扩张演化子空间分解为 $\mathbb{E}_1 = \langle e_1 \rangle$、 $\mathbb{E}_2 = \langle e_2 \rangle$ 和 $\mathbb{E}_3 = \langle e_3 \rangle$。

4.1.1. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) =$ (O$_1$,O$_1$,O$_1$). 在此子情形中，我们考虑以下族的代数:

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_1, \mathbf{O}_1) = \left\{ \mathbb{A} : \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \delta(\mathbb{A}) = (1, 1, 1) \right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成:

$$\phi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \text{ where } x_1x_2x_3 \neq 0$$

a该群对 $\mathcal{E}(\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_1)$ 中任意元素的作用由下式给出 :

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}x_2^2x_1^{-1} & a_{13}x_3^2x_1^{-1} \\ a_{21}x_1^2x_2^{-1} & 0 & a_{23}x_3^2x_2^{-1} \\ a_{31}x_1^2x_3^{-1} & a_{32}x_2^2x_3^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le设 τ_{ij} 表示交换基中元素 e_i 和 e_j 的换位。

- 若 $a_{12} \neq 0$、$a_{23} \neq 0$ 和 $a_{31} \neq 0$，则对任意 α、β、$\gamma \in \mathbb{F}$，有 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$。
- 若 $a_{12} = 0$、$a_{23} \neq 0$ 和 $a_{31} \neq 0$，则对 α、$\beta \in \mathbb{F}$、$\beta \neq 0$，有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。出现两种情形：– 若 $\alpha \neq 0$，选择基的置换 τ_{12}，即可得到第一种情形的代数。– 若 $\alpha = 0$，则存在一零行，因此它不可能与第一种情形同构。故而，对于 $\beta \in \mathbb{F}^*$，我们得到第二个族 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。
- 若 $a_{12} \neq 0$、$a_{23} = 0$ 且 $a_{31} \neq 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \end{pmatrix}$，其中 α、$\beta \in \mathbb{F}$、$\beta \neq 0$。– 若 $\alpha \neq 0$，则再次选择置换 τ_{12}，得到第一种情形。– 若 $\alpha = 0$，则选择 τ_{12}，得到第二族。
- 若 $a_{12} \neq 0$、$a_{23} \neq 0$ 且 $a_{31} = 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$，其中 α、$\beta \in \mathbb{F}$、$\beta \neq 0$。– 若 $\alpha \neq 0$，则存在一个适当的基置换，可得到第一种情形的代数。– 若 $\alpha = 0$，则选择 τ_{13}，得到第二族。
- 若 $a_{12} = 0$、$a_{23} = 0$ 和 $a_{31} \neq 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\alpha \in \mathbb{F}^*$。
- 若 $a_{12} = 0$、$a_{23} \neq 0$ 和 $a_{31} = 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\alpha \in \mathbb{F}^*$。
- 若 $a_{12} \neq 0$、$a_{23} = 0$ 和 $a_{31} = 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\alpha \in \mathbb{F}^*$。
- 若 $a_{12} = 0$、$a_{23} = 0$ 和 $a_{31} = 0$，则有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

注意，对最后四种情形应用 τ_{12} 会得到第一种情形。

4.1.2. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_1,\mathbf{E}_1) = \left\{ \mathbb{A} : \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \delta(\mathbb{A}) = (1,1,1) \right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ where } x_1 x_2 \neq 0$$

该群对 $\mathcal{E}(\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1)$ 中任意元素的作用由下式给出：

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}x_2^2x_1^{-1} & a_{13}x_1^{-1} \\ a_{21}x_1^2x_2^{-1} & 0 & a_{23}x_2^{-1} \\ a_{31}x_1^2 & a_{32}x_2^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时会出现以下情形：

- 如果 $a_{32} \neq 0$ 且 $a_{32} \neq 0$，那么对于 α、β、γ、$\epsilon \in \mathbb{F}$，有 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \gamma & 0 & \epsilon \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。
- 如果 $a_{32} = 0$ 且 $a_{32} \neq 0$，那么 $a_{21} \neq 0$，并且对于 α、β、$\gamma \in \mathbb{F}$，有 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。
- 如果 $a_{31} \neq 0$ 且 $a_{32} = 0$，那么 $a_{12} \neq 0$；取 τ_{12}，便属于前一种情形。
- 若 $a_{31} = 0$ 且 $a_{32} = 0$，则 $a_{12} \neq 0$ 且 $a_{21} \neq 0$，并且我们有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对于 α，$\beta \in \mathbb{F}$。

回顾一下，前面各情形中的参数满足条件 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_1)$。4.1.3. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_1,\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1) = \left\{ \mathbb{A} : \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \delta(\mathbb{A}) = (1,1,1) \right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成：

$$\phi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ where } x_1 \neq 0$$

该群在 $\mathcal{E}(\mathrm{O}_1,\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_1)$ 的任意元素上的作用为：

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}x_1^{-1} & a_{13}x_1^{-1} \\ a_{21}x_1^2 & 1 & a_{23} \\ a_{31}x_1^2 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，这里我们必须区分以下两种情形：

- If $a_{21} \neq 0$, then we have $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \\ \epsilon & \zeta & 1 \end{pmatrix}$ for $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta \in \mathbb{F}$, such that $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathbf{O}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1)$.

• 如果 $a_{21}=0$，那么 $a_{31}\neq 0$，通过适当的置换，我们就回到了前一种情形。

4.1.4. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&1&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&1\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(1,1,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1)$ 是平凡的，且该群对 $\mathcal{E}(\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1)$ 中任意元素的作用都将其映射为自身。因此，对于 $\mathcal{E}(\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1)$ 中的每个元素，我们都有一个 $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}(\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_1)$-轨道。

4.2. 情形 $\delta(\mathbb{A})=(2,1)$。假设标准扩张演化子空间分解由$\mathbb{E}_1=\langle e_1、\ e_2\rangle、\ \mathbb{E}_2=\langle e_3\rangle$给出。注意，由于 $\mathcal{G}_{\mathbf{P}}$ 是平凡的，因此 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$。

4.2.1. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_2,\mathbf{O}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}\\0&0&a_{23}\\a_{31}&a_{31}&0\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(2,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}(\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 构成：

$$\phi=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&0\\x_{21}&x_{22}&0\\0&0&x_{33}\end{pmatrix},$$

其中 $x_{11}x_{22}x_{33}\neq x_{12}x_{21}x_{33}$和 $\phi_1^{\mathrm{T}}\phi_1=\lambda\mathbf{1}_2$ 对于 $\lambda\in\mathbb{F}$ 和 $\phi_1=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$.

该群在 $\mathcal{E}(\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_1)$ 的任意元素上的作用为：

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{(a_{23}x_{12}-a_{13}x_{22})x_{33}^2}{x_{12}x_{21}-x_{11}x_{22}}\\0&0&\frac{(a_{13}x_{21}-a_{23}x_{11})x_{33}^2}{x_{12}x_{21}-x_{11}x_{22}}\\\frac{a_{31}(x_{11}^2+x_{21}^2)}{x_{33}}&\frac{a_{31}(x_{12}^2+x_{22}^2)}{x_{33}}&0\end{pmatrix},$$

其中 $x_{11}^2+x_{21}^2=x_{12}^2+x_{22}^2=\lambda$.

这里有两种情形：

• 如果 $a_{23}^2+a_{13}^2\neq 0$，则得到与矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 对应的代数。

• If $a_{23}^2+a_{13}^2=0$, we obtain $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&i\\1&1&0\end{pmatrix}$.

4.2.2. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(\mathsf{O}_2,\mathsf{E}_1))$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{O}_2,\mathbf{E}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}\\0&0&a_{23}\\a_{31}&a_{31}&1\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(2,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}(O_2,E_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 构成:

$$\phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中，当 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $\phi_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. 时， $x_{11}x_{22} \neq x_{12}x_{21}$, $\phi_1^{\mathrm{T}}\phi_1 = \lambda \mathbf{1}_2$。该群对 $\mathcal{E}(O_2,E_1)$的任意元素的作用由下式给出:

$$\phi^{-1}\mathbf{M_B}(\mathbb{A})\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a_{23}x_{12}-a_{13}x_{22}}{x_{12}x_{21}-x_{11}x_{22}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{13}x_{21}-a_{23}x_{11}}{x_{12}x_{21}-x_{11}x_{22}} \\ a_{31}(x_{11}^2+x_{21}^2) & a_{31}(x_{12}^2+x_{22}^2) & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $x_{11}^2 + x_{21}^2 = x_{12}^2 + x_{22}^2 = \lambda$.

现在，我们必须区分两种情形:

- If $a_{23}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, we obtain the family $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ for $\alpha \in \mathbb{F}^*$.
- If $a_{23}^2 + a_{13}^2 = 0$, we obtain $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.3. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) = (E_2,O_1)$。在这一子情形中，我们考虑该族代数 :

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}_2, \mathbf{O}_1) = \left\{ \mathbb{A} : \mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \delta(\mathbb{A}) = (2,1) \right\}.$$

群 $\mathcal{G}(E_2,O_1)$由满足下列条件的映射 ϕ 组成:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}, \text{ where } x_1 \neq 0$$

且该群对 $\mathcal{E}(E_2,O_1)$ 中任意元素的作用为:

$$\phi^{-1}\mathbf{M_B}(\mathbb{A})\phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13}x_1^2 \\ 0 & 0 & \pm a_{23}x_1^2 \\ a_{31}x_1^{-1} & a_{31}x_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

这里有两种情形:

- 若 $a_{31} \neq 0$，则得到族 $\mathbb{W}^{\alpha,\beta}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 当 α, $\beta \in \mathbb{F}$，其中 $\mathbb{W}^{\alpha,\beta} \cong \mathbb{W}^{\alpha,-\beta}$.
- 如果 $a_{31} = 0$，我们得到 $\mathbb{W}_2^{\alpha}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 对于 $\alpha \in \mathbb{F}$，其中 $\mathbb{W}_2^{\alpha} \cong \mathbb{W}_2^{-\alpha}$。

4.2.4. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M_B}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}1&1&a_{13}\\0&0&a_{23}\\a_{31}&a_{31}&1\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(2,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成：

$$\phi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\pm1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

该群对 $\mathcal{E}(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_1)$ 中任意元素的作用如下：

$$\phi^{-1}\mathbf{M_B}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&a_{13}\\0&0&\pm a_{23}\\a_{31}&a_{31}&1\end{pmatrix}.$$

显然，我们有一个族 $\mathbb{W}^{\alpha}_{,\beta,3}{}^{\gamma}:\begin{pmatrix}1&1&\beta\\0&0&\gamma\\\alpha&\alpha&1\end{pmatrix}$ 当 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{F}$，其中 $\mathbb{W}^{\alpha}_{,\beta,3}{}^{\gamma}\cong\mathbb{W}^{\alpha}_{,\beta,3}{}^{-\gamma}$.

4.2.5. 子情形 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathrm{I}_2,\mathrm{O}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}_2,\mathbf{O}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M_B}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}1&1&a_{13}\\\mathbf{i}&\mathbf{i}&a_{23}\\a_{31}&a_{31}&0\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(2,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}(\mathrm{I}_2,\mathrm{O}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 组成：

$$\phi=\begin{pmatrix}x_1&\mathbf{i}-\mathbf{i}x_1&0\\\mathbf{i}x_1-\mathbf{i}&x_1&0\\0&0&x_2\end{pmatrix},\ \text{where } 2x_1\neq x_2$$

该群对 $\mathcal{E}(\mathrm{I}_2,\mathrm{O}_1)$ 中任意元素的作用如下：

$$\phi^{-1}\mathbf{M_B}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&\frac{(\mathbf{i}a_{23}(x_1-1)+a_{13}x_1)x_2^2}{2x_1-1}\\\mathbf{i}&\mathbf{i}&\frac{(\mathbf{i}a_{13}(1-x_1)+a_{23}x_1)x_2^2}{2x_1-1}\\\frac{a_{31}(2x_1-1)}{x_2}&\frac{a_{31}(2x_1-1)}{x_2}&0\end{pmatrix}.$$

由此，我们得到以下情形：

- 若 $a_{31}\neq0$ 且 $a_{23}^2+a_{13}^2\neq0$，则得到族 $\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\&&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}$，其中 $\alpha\in\mathbb{F}^*$。
- 若 $a_{31}\neq0$ 且 $a_{23}^2+a_{13}^2=0$，则有两个代数分别对应于 $\begin{pmatrix}1&1&1\\&&\pm\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}$。
- 如果 $a_{31}=0$ 和 $a_{23}^2+a_{13}^2\neq0$，则有 $\begin{pmatrix}1&1&1\\&&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}$。

- If $a_{31}=0$ and $a_{23}^2+a_{13}^2=0$, we obtain the algebra $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & -\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

4.2.6. 子情形 $\Delta(\mathbb{A})=(\mathbf{I}_2,\mathbf{E}_1)$。在此子情形中，我们考虑以下族的代数：

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}_2,\mathbf{E}_1)=\left\{\mathbb{A}:\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})=\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{13}\\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & a_{23}\\ a_{31} & a_{31} & 1\end{pmatrix}\text{ and }\delta(\mathbb{A})=(2,1)\right\}.$$

群 $\mathcal{G}(\mathbf{I}_2,\mathbf{E}_1)$ 由满足以下条件的映射 ϕ 构成：

$$\phi=\begin{pmatrix}x_1 & \mathbf{i}-\mathbf{i}x_1 & 0\\ \mathbf{i}x_1-\mathbf{i} & x_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ where }2x_1\neq 1$$

该群对 $\mathcal{E}(\mathbf{I}_2,\mathbf{E}_1)$ 中任意元素的作用如下：

$$\phi^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbb{A})\phi^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{\mathbf{i}a_{23}(x_1-1)+a_{13}x_1}{2x_1-1}\\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & \frac{\mathbf{i}a_{13}(1-x_1)+a_{23}x_1}{2x_1-1}\\ a_{31}(2x_1-1) & a_{31}(2x_1-1) & 1\end{pmatrix}.$$

由此，我们得到以下情形：

- 若 $a_{31}\neq 0$，则得到族 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ & & \beta\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$，且 $(\alpha,\beta)\neq(\mathbf{1},\mathbf{i})$。
- 若 $a_{31}=0$ 且 $a_{23}^2+a_{13}^2\neq 0$，则有代数 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ & & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}$，其中 $\alpha\in\mathbb{F}^*$。
- 若 $a_{31}=0$ 且 $a_{23}^2+a_{13}^2=0$，则得到代数 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ & & \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ & & -\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{i}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}$，其中 $\alpha\in\mathbb{F}$。

4.3. 情形 $\delta(\mathbb{A})=(3)$。根据定理 17，$\mathbb{A}$ 要么同构于 $\mathbf{E}_3$，要么同构于 $\mathbf{I}_3$。

我们以如下分类定理结束本节。

定理30. 给定代数闭域特征零域 $\mathbb{F}$ 上的三维非退化演化代数 $\mathbb{A}$，则它同构于以下代数中的唯一一个：

- *If* $\delta(\mathbb{A})=(1,1,1)$.
  - *If* $\Delta(\mathbb{A})=(\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_1)$. *Then it is isomorphic to one of the following algebras:*

    a) $\mathbf{A}_{3,1}^{\alpha,\beta,\gamma}:\begin{pmatrix}0 & 1 & \alpha\\ \beta & 0 & 1\\ 1 & \gamma & 0\end{pmatrix}$, *b)* $\mathbf{A}_{3,2}^{\alpha}:\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \alpha & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
  - *If* $\Delta(\mathbb{A})=(\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_1,\mathbf{E}_1)$. *Then it is isomorphic to one of the following algebras:*

    a) $\mathbf{A}_{3,3}^{\Lambda}:\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ \gamma & 0 & \epsilon\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, *b)* $\mathbf{A}_{3,4}^{\alpha,\beta,\gamma}:\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 1 & 0 & \gamma\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, *c)* $\mathbf{A}_{3,5}^{\alpha,\beta}:\begin{pmatrix}0 & 1 & \alpha\\ 1 & 0 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

– 如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (O_1,E_1,E_1)$。它同构于 $A^{\Lambda}_{3,\,6}$：$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \\ \epsilon & \zeta & 1 \end{pmatrix}$。–

如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (E_1,E_1,E_1)$。它同构于 $A^{\Lambda}_{3,\,7}$：$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \gamma & 1 & \epsilon \\ \zeta & \xi & 1 \end{pmatrix}$。

唯一的同构发生在同一族的代数之间，并且它们是基元素的置换。

• 如果 $\delta(\mathbb{A}) = (2,1)$。– 如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (O_2,O_1)$。那么它同构于以下代数之一：

a) $\mathbf{B}_{3,1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *b)* $\mathbf{B}_{3,2}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

– 如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (O_2,E_1)$。那么它同构于以下代数之一：$B^{\alpha}_{3},3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, a) – 如果 $\Delta\ \mathbb{A}\ = E_2,O_1$。那么它同构于以下代数之一：

b) $\mathbf{B}_{3,4}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

本节中的同构为 $B^{\alpha\,\beta}_{3\,1},,_5 \cong B^{\alpha\,-\beta}_{3\,5},,$ 以及 $B^{\alpha}_{3},6 \cong B^{-\alpha}_{3\,6},$。– 如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (E_2,E_1)$。它同构于 $B^{\alpha\ \ \gamma}_{3\,7},_{\beta},,:\begin{pmatrix} 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$。我们有 $B^{\alpha\ \ \gamma}_{3},_{\beta},,_7 \cong B^{\alpha}_{3\,7}\begin{pmatrix} 1-\gamma & 1 & \\ & & \alpha \\ & & \end{pmatrix},_{\beta},,$。– 如果 $\Delta(\mathbb{A}) =$

a) $\mathbf{B}^{\alpha,\beta}_{3,5}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, *b)* $\mathbf{B}^{\alpha}_{3,6}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I_2,O_1)。那么它同构于以下代数之一：$B^{\alpha}_{3},8: \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ & & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i i, a) $B^{\pm}_{3},9: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \pm \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i i i, b) $B_{3,10}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i i, c) $B_{3,11}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & - \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i i i。d) – 如果 $\Delta(\mathbb{A}) = (I_2,$

$E_1)$。那么它同构于以下代数之一：$B^{\alpha\,\beta}_{3},,12: \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ & & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i i, a) $B^{\alpha\neq 0}_{3\,13},:$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i i, b) $B^{\alpha}_{3},15: \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ & & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i i i d)

c) $\mathbf{B}_{3,14}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

• 如果 $\delta(\mathbb{A}) = (3)$。那么它要么同构于 E_3，要么同构于 I_3。

每个族 $A^{*}_{3,\,*}$ 或 $B^{*}_{3,\,*}$ 中的参数均可在 $\mathbb{F}$ 中自由取值，但须使所得代数具有与该族对应的 δ-指数。

5. 非退化演化代数的导子

给定非退化演化代数 $\mathbb{A}$，满足 $\delta(\mathbb{A}) = (n_1, \ldots, n_r)$ 且 $\Delta(\mathbb{A}) := (\overline{\mathbb{A}_1}, \ldots, \overline{\mathbb{A}_r})$。固定基 $\mathbf{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$，如定理 23 所述，则对于 $\mathbb{A}$ 的一个导子 $\mathfrak{D}$，其矩阵为 (d_{ij})，我们有：

$$\mathfrak{D}(e_i e_j) = \mathfrak{D}(e_i)e_j + e_i\mathfrak{D}(e_j).$$

若 $i \neq j$，则 $d_{ij}e_i^2 + d_{ji}e_j^2 = 0$。因此，$d_{ij} = -d_{ji}$ 若 e_i，则 $e_j \in \mathbb{A}_k$，其中 k；否则为 $d_{ij} = d_{ji} = 0$。由此，$\mathfrak{D}$ 的矩阵是一个分块对角矩阵，其分块为 D_k，对应于大小为 $n_k \times n_k$的 $1 \leq k \leq r$，其中 D_k 是一个对角矩阵与一个反对称矩阵之和。现在，若 $i = j$，则 $\mathfrak{D}(e_i^2) = 2e_i\mathfrak{D}(e_i)$ 当且仅当 $\mathfrak{D}(e_i^2) = 2d_{ii}e_i^2$（注意，$e_i^2$ 是 $\mathfrak{D}$ 的一个特征向量，对应于特征值 $2d_{ii}$）。这等价于对任意 $1 \leq i、\ j \leq n$，以下方程成立：

$$\sum_k d_{jk}w_{ki} = 2d_{ii}w_{ji},$$

其中 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) := (w_{ki})$。此外，注意若 $e_i,\ e_j \in \mathbb{A}_k$，则 $\mathfrak{D}(e_i^2) = \mathfrak{D}(e_j^2)$，$2d_{ii}e_i^2 = 2d_{jj}e_j^2$且 $d_{ii} = d_{jj}$。本节假设代数闭基域 $\mathbb{F}$ 的特征不为二。

定理 31. 与矩阵 D_k 对应的映射是$\overline{\mathbb{A}_k}$的导子，其中 $1 \leq k \leq r$。

证明. 注意到，由于 $\mathfrak{D}$ 是分块对角的，因此 $\mathfrak{D}(e_i^2) = 2e_i\mathfrak{D}(e_i)$可以写成

$$\begin{pmatrix} D_1\overline{\mathbb{A}_1} & D_1\mathbb{A}_{12} & \ldots & D_1\mathbb{A}_{1r} \\ D_2\mathbb{A}_{21} & D_2\overline{\mathbb{A}_2} & \ldots & D_2\mathbb{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_r\mathbb{A}_{r1} & D_r\mathbb{A}_{r2} & \ldots & D_r\overline{\mathbb{A}_r} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} d_{11}\overline{\mathbb{A}_1} & d_{22}\mathbb{A}_{12} & \ldots & d_{rr}\mathbb{A}_{1r} \\ d_{11}\mathbb{A}_{21} & d_{22}\overline{\mathbb{A}_2} & \ldots & d_{rr}\mathbb{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{11}\mathbb{A}_{r1} & d_{22}\mathbb{A}_{r2} & \ldots & d_{rr}\overline{\mathbb{A}_r} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{M_B}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{A}_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\mathbb{A}_r} \end{pmatrix}$。因此，我们有 $D_k\overline{\mathbb{A}_k} = 2d_{kk}\overline{\mathbb{A}_k}$，所以 D_k 是 $\overline{\mathbb{A}_k}$的导子。

□

注意，若 $\mathbb{A}$ 是代数 $\overline{\mathbb{A}_k}$的直和，则定理 31 的逆命题成立。然而，一般而言该命题并不成立，因为还需要满足附加条件：对于每个 $1 \leq i \leq \dim(\mathbb{A})$，$e_i^2$ 是对应于特征值 $2d_{ii}$ 的导子的特征向量。

现在，根据前面的结果，我们关注 $\mathbf{E}_n$ 和 $\mathbf{I}_n$ 的导子（对于 $\mathbf{O}_n$，结果是平凡的）。

引理 32. $\mathbf{E}_n$ 的导子 $\mathfrak{D}$ 具有如下形式 $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}$，其中 $D_0 = -D_0^{\mathrm{T}} = (d_{ij})_{i,j}^{n-1}$。

此外，$\dim \mathfrak{Der}(\mathbf{E}_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$。

证明。用方便的基表示导子 $\mathfrak{D}$ 的矩阵，记为 (d_{ij})。由于对于 $i \neq j$，有$\mathfrak{D}(e_ie_j) = \mathfrak{D}(e_i)e_j + \mathfrak{D}(e_j)e_i = 0$，因此 $d_{ij} = -d_{ji}$。此外，$\mathfrak{D}(e_i^2) = 2\mathfrak{D}(e_i)e_i$意味着 $\mathfrak{D}(e_1) = 2d_{ii}e_1$，所以 $d_{ii} = d_{jj}$。最后，方程 $\sum_k d_{k1}e_k = 2d_{11}e_1$ 意味着，对于 $1 \leq k \leq n$，有 $d_{k1} = 0$。

□

引理 33。$\mathbf{I}_n$ 的导子 $\mathfrak{D}$ 具有如下形式：

$$D=\begin{pmatrix} d & -d\mathbf{i} & -d_{23}\mathbf{i} & \dots & -d_{2(n-1)}\mathbf{i} & -d_{2n}\mathbf{i} \\ d\mathbf{i} & d & d_{23} & \dots & d_{2(n-1)} & d_{2n} \\ d_{23}\mathbf{i} & -d_{23} & d & \dots & d_{3(n-1)} & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{2(n-1)}\mathbf{i} & -d_{2(n-1)} & -d_{3(n-1)} & \dots & d & d_{(n-1)n} \\ d_{2n}\mathbf{i} & -d_{2n} & -d_{3n} & \dots & -d_{(n-1)n} & d \end{pmatrix}$$

此外，$\dim \mathfrak{Der}(\mathbf{I}_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$。

证明。将导子 $\mathfrak{D}$ 在一个方便的基下的矩阵记为（d_{ij}）。同样，对于 $i \neq j$，则有 $d_{ij} = -d_{ji}$。由于 $\mathfrak{D}(e_i^2) = 2\mathfrak{D}(e_i)e_i$，我们有 $\mathfrak{D}(e_1 + \mathbf{i}e_2) = 2d_{ii}(e_1 + e_2)$。因此，

$$2d_{jj}e_1 + 2d_{jj}\mathbf{i}e_2 = 2d_{ii}e_1 + 2d_{ii}\mathbf{i}e_2, \text{ so } d := d_{ii} = d_{jj}.$$

此外，我们可以写成

$$\sum_k (d_{k1} + d_{k2}\mathbf{i})e_k = 2d_{ii}e_1 + 2d_{ii}\mathbf{i}e_2.$$

对于 $k = 1$，我们有 $d_{11} + d_{12}\mathbf{i} = 2d_{ii}$，因此，$d_{12} = -d\mathbf{i}$。对于 $k = 2$，我们有 $d_{21} + d_{22}\mathbf{i} = 2d_{ii}\mathbf{i}$，所以 $d_{21} = d\mathbf{i}$。最后，对于 $k > 2$，我们有 $d_{k1} = -d_{k2}\mathbf{i}$。□

根据前面的结果，$\mathbf{E}_n$ 或 $\mathbf{I}_n$ 的每个导子都是奇异的。然而，存在具有非奇异导子的非退化演化代数的例子，例如

$$\mathbb{A} : e_1^2 = e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = e_1 + \mathbf{i}e_2.$$

因此，我们得到以下推论。

推论 34. 设一个非退化演化代数存在非奇异导子，则其 Δ-迹为 $(\mathbf{O}_{n_1}, \dots, \mathbf{O}_{n_r})$，其中 $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$。

众所周知，完全演化代数的每个导子都是零，这一事实可以推广如下。该结果首次发表于一篇近期论文 [4], 中；为了丰富演化代数领域的文献，我们在此给出一种不同但有趣的证明思路。

定理 35. 假设 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}$ 不是梅森素数。设演化代数 $\mathbb{A}$ 满足 $\delta(\mathbb{A}) = (1, \dots, 1)$，则每个导子都为零。

证明. 设 $\Delta(\mathbb{A}) = (\mathbf{O}_1, \dots, \mathbf{O}_1, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_1)$，其中有 n_1 个 $\mathbf{O}_1$ 和 n_2 个 $\mathbf{E}_1$，对于 $0 \leq n_1, n_2 \leq n$ 满足 $n_1 + n_2 = n$。固定一个基 $\mathbf{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$，如定理 23 中所述，并将 $\mathbb{A}$ 的结构矩阵记为 (w_{ki})。注意，对每个 $1 \leq i \leq n$，都存在某个 $k(i)$，使得 $w_{k(i)i} \neq 0$。任取映射 $k\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$，使其对每个 $1 \leq i \leq n$都满足 $w_{k(i)i} \neq 0$。显然，由于 $\mathbb{A}$ 是非退化的，这样的映射存在。

现在，根据定理 31，$\mathbb{A}$的导子 $\mathfrak{D}$ 具有对角矩阵，其对角线为 $(d_1, \dots, d_{n_1}, 0, \dots, 0)$，其中 $d_i \in \mathbb{F}$。于是，方程 $\sum_k d_{jk}w_{ki} = 2d_{ii}w_{ji}$ 等价于 $d_j w_{ji} = 2d_i w_{ji}$，利用映射 k，我们可以写成 $d_{k^s(i)} = 2^s d_i$，其中 k^s 表示将映射 k 应用 s 次。现在，对于任意 $i \leq n_1$，可能出现以下三种情况：

(1) 若对某个 s，$n_1 < k^s(i)$，则 $d_{k^s(i)} = 0$ 且 $d_i = 0$。(2) 若对某个 s，$k^s(i) = i$，则 $d_i = 2^s d_i$，并且由于 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}$ 不是梅森素数，我们有 $d_i = 0$。(3) 若对任意 s，$k^s(i) \neq i$ 且 $k^s(i) \leq n_1$，则存在某个 $s \neq 0$ 和某个 $p \neq 0$，使得$k^s(i) = k^{s+p}(i)$，并且有 $d_{k^s(i)} = 2^p d_{k^s(i)}$。因此，$d_{k^s(i)} = 0$ 且 $d_i = 0$。

因此，我们得出结论：$d_1 = \ldots = d_{n_1} = 0$。 □

如果特征是梅森素数，则先前的结果不成立。

例 36. 设 $p = 2^n - 1$ 是一个梅森素数。考虑由 $e_i^2 = e_{i+1}$ 给出的 n维演化代数，其中 $i < n$ 且 $e_n^2 = e_1$。我们证明，由 $\mathfrak{D}$定义的同态 $\mathfrak{D}$ 是一个导子：对于 $1 \le i \le n$，有 $e_i = 2^{i-1}e_i$。若 $i \neq j$，则 $0 = \mathfrak{D}(e_ie_j) = \mathfrak{D}(e_i)e_j + e_i\mathfrak{D}(e_j) = 0$。现在，若 $i < n$，则

$$\mathfrak{D}(e_i^2) = \mathfrak{D}(e_{i+1}) = 2^i e_{i+1} = 2(2^{i-1}e_i^2) = 2\mathfrak{D}(e_i)e_i.$$

若 $i = n$，则

$$\mathfrak{D}(e_n^2) = \mathfrak{D}(e_1) = e_1 = e_n^2 = 2^n e_n^2 = 2(2^{n-1}e_n^2) = 2\mathfrak{D}(e_n)e_n.$$

因此， $\mathfrak{D}$是一个导子。

6. 演化代数簇　的平方维数为（一或零）的演化代数　E

尽管已知演化代数类不是一个簇，但研究其中包含的一些簇仍然是一个有趣的课题。本节研究平方维数为（一或零）的复演化代数类，并证明它是一个不可约簇。

定理 37. 任意一个复数 n维交换代数 $\mathbb{A}$ with $\dim \mathbb{A}^2 = 1$ 都是演化代数。

证明. 设 $\mathbb{A}$ 是一个满足 $\dim \mathbb{A}^2 = 1$的复交换代数。设 $\mathbb{A}^2 = \langle e_1 \rangle$，取定一个基 $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 并令 $e_ie_j = m_{ij}e_1$对任意 $1 \le i$、$j \le n$，其中 $m_{ij} \in \mathbb{C}$。考虑其乘法结构矩阵 $M_1 = m_{ij}$、$M_k = (0)$，其中 $k \neq 1$。于是， $\mathbb{A}$ 是演化代数，当且仅当 M_1，.....，M_n（见 [3]）通过合同同时对角化。然而，我们只有一个矩阵需要对角化，并且它是对称矩阵，因此根据高木定理，存在一个酉矩阵 V，使得 $V^TM_1V = D$，其中某个对角矩阵的对角元均为非负实数。因此， $\mathbb{A}$ 是演化代数。□

由此，我们得到以下结果。

推论38. 复数域上平方为一维的 n 维演化代数与平凡代数构成一个簇，我们将其称为 $\mathfrak{E}^n$.

在以下结果中，我们证明这个簇是不可约的。为此，我们需要引入一些概念。关于退化主题的进一步介绍，参见例如 [20,21] 及其中的参考文献。给定一个 n 维向量空间 V，集合 Hom(V $\otimes$ V, V) $\cong$ V* $\otimes$ V* $\otimes$ V 是一个维数为 n^3 的向量空间。该空间具有仿射簇 $\mathbb{C}^{n^3}$. 的结构。事实上，固定 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$。那么，任意 $\mu \in$ Hom(V $\otimes$ V, V) 都由其结构常数 $n^3_{,\ j} \in \mathbb{C}$ 确定，其中 $\mu(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^n c_{i,\ j}^k e_k$。如果 Hom(V $\otimes$ V, V) 的一个子集可以由变量 $c_{i,\ j}^k (1 \le i, j, k \le n)$ 中的一组多项式方程定义，则称其为扎里斯基闭集。

设 T 为一组多项式恒等式。V 上满足 T 中所有多项式恒等式的代数结构构成簇 Hom(V $\otimes$ V, V) 的一个扎里斯基闭子集。我们将该子集记为$\mathbb{L}(T)$。一般线性群 GL(V) 通过共轭作用于 $\mathbb{L}(T)$：

$$(g * \mu)(x \otimes y) = g\mu(g^{-1}x \otimes g^{-1}y)$$

对于 $x, y \in$ V， $\mu \in \mathbb{L}(T) \subset$ Hom(V $\otimes$ V, V)，且 $g \in$ GL(V)。因此， $\mathbb{L}(T)$ 分解为 GL(V) 轨道，这些轨道对应于代数的同构类。令 $O(\mu)$ 表示 $\mu \in \mathbb{L}(T)$ 的 GL(V) 轨道，$O(\mu)$ 表示其扎里斯基闭包。设 A 和 B 是两个满足 T和 μ 中恒等式的 n 维代数， $\lambda \in \mathbb{L}(T)$ 分别表示 A 和 B。若 A 退化到 B，记作 A $\to$ ~~B，~~当且仅当 $\lambda \in O(\mu)$。注意，此~~时有 $O(\lambda) \subset$~~ $O(\mu)$。因此，定义

退化不依赖于 μ 和 λ 的选择。若 A $\ncong$ B，则称命题 A $\to$ B 为真退化。若 $\lambda \notin O(\mu)$，记作 A $\not\to$ B。设 A 由 $\mu \in \mathbb{L}(T)$ 表示。若 $O(\mu)$ 是 $\mathbb{L}(T)$ 的开子集，则称 A 在 $\mathbb{L}(T)$ 中是刚性的。回顾一下，若簇的一个子集不能表示为两个非平凡闭子集的并，则称其为不可约。簇的极大不可约闭子集称为不可约分支。众所周知，任意仿射簇都可以唯一地表示为其有限个不可约分支的并。当且仅当 $O(\mu)$ 是 $\mathbb{L}(T)$ 的一个不可约分支时，代数 A 在 $\mathbb{L}(T)$ 中是刚性的。

最后一个结果刻画了簇 $\mathfrak{Em}$.

定理 39. 簇 $\mathfrak{Em}$ 不可约，且 $\mathbf{E}_n$ 是刚性的。

证明. $n = 1$ 的情形是平凡的。因此，我们将考虑 $n > 1$. 。由 [2], 可知， $\mathfrak{Em}$中的所有代数都具有以下类型:

(1) 幂零代数。(2) 对于 $1 \leq k \leq n.$，类型为 $\mathbf{E}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$ 的非幂零代数。(3) 对于 $2 \leq k \leq n.$，类型为 $\mathbf{I}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$ 的非幂零代数

该簇中的非退化代数恰好是 $\mathbf{E}_n$ 和 $\mathbf{I}_n$。在引理 32 和 33 中，我们已经证明，平方为一维且具有平凡湮灭子的两个演化代数的导子代数维数相差 1。也就是说，$\dim \mathfrak{Der}(\mathbf{I}_n) = \dim \mathfrak{Der}(\mathbf{E}_n) + 1$。回顾一下， n 维代数 $\mathbb{A}$ 的轨道维数为 $n^2 - \dim \mathfrak{Der}(\mathbb{A})$。因此， $\mathbf{E}_n$ 和 $\mathbf{I}_n$ 的轨道维数也相差 1。此外，$\mathbf{E}_n \to \mathbf{I}_n$，如下文所示。

考虑由下式给出的参数化同构

$$g(e_1)(t) = (1+t^2)e_1 + \mathbf{i}e_2, \quad g(e_2)(t) = \mathbf{i}(1-t^2)e_1 - e_2, \quad g(e_k)(t) = \sqrt{2}te_k, \text{ for } 3 \leq k \leq n,$$

及其逆映射，由下式给出

$$g(e_1)(t) = \frac{1}{2t^2}e_1 + \frac{\mathbf{i}}{2t^2}e_2, \quad g(e_2)(t) = \frac{\mathbf{i}(1-t^2)}{2t^2}e_1 - \frac{1+t^2}{2t^2}e_2, \quad g(e_k)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}t}e_k.$$

那么， g 的作用给出了交换代数族 $g(t) * \mathbf{E}_n$，其定义如下:

$$\begin{array}{rclrcl} e_1^2 &=& (1+\frac{t^2}{2})e_1 + (1+\frac{t^2}{2})\mathbf{i}e_2, & e_1e_2 &=& -\frac{\mathbf{i}t^2}{2}e_1 + \frac{t^2}{2}e_2, \\ e_2^2 &=& (1-\frac{t^2}{2})e_1 + (1-\frac{t^2}{2})\mathbf{i}e_2, & e_k^2 &=& e_1 + \mathbf{i}e_2, \end{array}$$

当 $3 \leq k \leq n$ 时。从这里可以清楚地看出，$\lim_{t\to 0} {}^g(t) * \mathbf{E}_n = \mathbf{I}_n$。此外，由导子代数的维数可知，这一退化是初等的。

由于复数域上 n 维、平方的维数不超过一的幂零交换代数簇是不可约的，其一般代数为 $\mathbf{N}_n$，乘法表如下： $e_2^2 = \ldots = e_n^2 = e_1$.

那么，$\mathbf{n}$ 的其余部分 必要的退化为（这里 g 是参数化同构的逆映射） :

$$\begin{array}{rcl:rcl} \mathbf{E}_n & \to & \mathbf{N}_n & g(e_1) = t^2e_1, & g(e_k) = te_k, & \text{for } 2 \leq k \leq n. \\ \mathbf{E}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k} & \to & \mathbf{E}_{k-1} \oplus \mathbb{C}^{n-k+1} & g(e_k) = te_k, & g(e_m) = e_m, & \text{for } 1 \leq m \neq k \leq n. \\ \mathbf{I}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k} & \to & \mathbf{I}_{k-1} \oplus \mathbb{C}^{n-k+1} & g(e_k) = te_k, & g(e_m) = e_m, & \text{for } 1 \leq m \neq k \leq n. \end{array}$$

综上，我们已证明 $\mathfrak{Em}$ 中的每个代数都属于 $\mathbf{E}_n$. 轨道的闭包 □

根据定理 39，为了描述定义簇 $\mathfrak{Em}$ 的恒等式，只需研究 $\mathbf{E}_n$ 满足的多项式恒等式。下面的结果使这个问题稍微简化了一些。

定理 40. 给定一个次数为 n 的恒等式。若 E_n 满足该恒等式，则对 $k \in \mathbb{N}$，E_k 也满足该恒等式。

证明。假设 E_n 满足一个次数为 n 的恒等式 $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$。若 $k \leq n$，则 E_k 满足该恒等式，因为 $\mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$，所以 $\mathrm{E}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$ 满足该恒等式，进而 $\mathrm{E}_k \oplus \mathbb{C}^{n-k}/\mathbb{C}^{n-k} \cong \mathrm{E}_k$ 也满足该恒等式。

若 $k > n$，则对于 $i_l \leq n$，有 $p(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$。现在，对于 $p(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$，其中 $j_l \leq k$，我们为每个指标 j_l 指定一个指标 $i_l \leq n$，规则如下：当且仅当 $i_l = 1$ 时，$j_l = 1$；当且仅当 $i_l = i_m$ 时，$j_l = j_m$。于是有 $p(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = p(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$。□

因此，如果我们想检查 E_n 是否满足次数为 $k \leq n$ 的恒等式，只需检查 E_k 是否满足该恒等式。

命题 41. 簇 $\mathfrak{E}^n$ 不满足三次非平凡恒等式，但满足一个四次非平凡恒等式：$((xy)z)t = ((xy)t)z$.

本命题可通过直接计算得到，并由此引出以下问题。开放问题。用一组恒等式刻画簇 $\mathfrak{E}^n$。

参考文献

[1] Boudi N., Cabrera Casado Y., Siles Molina M.，《演化代数中的自然族》，Publicacions Matem`àtiques, 66（2022），1，159–181。[2] Brache C., Mart´ín Barquero D., Mart´ín Gonz´ález C., S´ánchez-Ortega J.，《具有一维平方的演化代数》，arXiv:2103.01625（2021）。[3] Bustamante M.D., Mellon P., Velasco M.V.，《判定一个代数何时为演化代数》，Mathematics，（2020），8，1349。[4] Cabrera Casado Y., Cadavid P., Reis T.，《某些演化代数的导子与环》，arXiv: 2203.13657（2022）。[5] Cabrera Casado Y., Cadavid P., Rodi˜ño Montoya M., Rodriguez P.，《关于演化代数导子空间的刻画》，Annali di Matematica Pura ed Applicata（4），200（2021），2，737–755。[6] Cabrera Casado Y., Kanuni M., Siles Molina M.，《演化代数中的基本理想》，Linear Algebra and its Applications，570（2019），148–180。[7] Cabrera Casado Y., Mart´ín Barquero D., Mart´ín Gonz´ález C., Tocino A.，《演化代数的张量积》，Mediterranean Journal of Mathematics，20（2023），1，43。[8] Cabrera Casado Y., Mart´ín Barquero D., Mart´ín Gonz´ález C., Tocino A.，《关于二维和三维单演化代数：构造单演化代数和半单演化代数》，arXiv: 2206.13912（2022）。[9] Cabrera Casado, Y., Siles Molina, M., Velasco, M.V.，《任意维演化代数及其分解》，Linear Algebra and its Applications，495（2016），122–162。[10] Cabrera Casado Y., Siles Molina M., Velasco M.V.，《三维演化代数的分类》，Linear Algebra and its Applications，524（2017），68–108。[11] Camacho L.M., G´ómez J.R., Omirov B.，《某些演化代数的导子》，Linear and Multilinear Algebra，61（2013），309–322。[12] Cardoso Gonc¸alves M., Gonc¸alves D., Mart´ín Barquero D., Mart´ín Gonz´ález C., Siles Molina M.，《二维演化代数的平方与结合表示》，Journal of Algebra and Its Applications，20（2021），6，2150090。[13] Casas J. M., Ladra M., Rozikov U.，《演化代数链》，Linear Algebra and its Applications，435（2011），4，852–870。[14] Ceballos M., Falc´on R., N´u˜nez-Vald´és J., Tenorio A.，《Tian 演化代数的历史视角》，Expositiones Mathematicae，40（2022），3，819–843。[15] Celorrio M., Velasco M.，《二维和三维演化代数分类》，Mathematics，7（2019），12，1236。[16] Costoya C., Ligouras P., Tocino A., Viruel A.，《正则演化代数普遍有限》，Proceedings of the American Mathematical Society，150（2022），3，919–925。[17] Elduque A., Labra A.，《幂零演化代数》，Linear Algebra and its Applications，505（2016），11–31。[18] Elduque A., Labra A.，《演化代数、自同构与图》，Linear and Multilinear Algebra，69（2021），2，331–342。[19] Falc´on O., Falc´on R., N´u˜nez J.，《利用定义在任意域上的强等位演化代数对无性二倍体生物进行分类》，Journal of Algebra，472（2017），573–593。

[20] Fern´andez Ouaridi A., Kaygorodov I., Khrypchenko M., Volkov Yu.，《幂零代数的退化》，Journal of Pure and Applied Algebra，226（2022），3，106850。[21] Ignatyev M., KaygorodovI., Popov Yu.，《二步幂零代数的几何分类及其应用》，Revista Matem´atica Complutense，35（2022），3，907–922。[22] Labra A., Ladra M., Rozikov U.，《群体遗传学中的一种演化代数》，Linear Algebra and its Applications，457（2014），348–362。[23] Ladra M., Rozikov U.，《双性群体的演化代数》，Journal of Algebra，378（2013），153–172。[24] Ladra M., Rozikov U.，《有限维代数流》，Journal of Algebra，470（2017），263–288。[25] Murodov Sh.，《二维演化代数链的分类动力学》，International Journal of Mathematics，25（2014），2，1450012。[26] Paniello I.，《遗传余代数中的内演化算子》，Linear Algebra and its Applications，614（2021），197–207。[27] Rozikov U., Murodov Sh.，《“鸡”群体的演化代数链》，Linear Algebra and its Applications，450（2014），186–201。[28] Sriwongsa S., Zou Yi M.，《幂等演化代数的自同构群》，Linear Algebra and its Applications，641（2022），143–155。[29] Tian J.，《演化代数及其应用》，数学讲义丛书，1921。施普林格，柏林，2008年。xii+125页[30] Tian J., Vojtˇechovsk´ý P.，《非孟德尔遗传学中演化代数的数学概念》，Quasigroups and Related Systems，14（2006年），1，111–122。