arXiv:2303.00876v2 [math.FA] 3 Aug 2023

关于 ℓ^2 上的加权移位的数值半径作为 ℓ^∞ 上的范数及其与 Banach极限的联系

AKRAM SHARIF

摘要。我们研究 ℓ^2 上的加权移位的数值半径作为 ℓ^∞上的范数。在此过程中，我们证明，实值巴拿赫极限作用于有界序列的绝对值序列时所能取得的最大值，大于或等于相应加权移位的谱半径，并小于或等于其数值半径。此外，我们比较了 ℓ^∞ 上的算子范数（相对于一致范数）与作为范数的加权移位的数值半径。我们表明，二者通常并不相同；但对于乘法算子和 ℓ^∞上的加权移位，二者都等于相应权的统一范数。此外，我们证明，所有复值Banach极限都满足关于加权移位的数值半径的范数不等式，并将我们的结果应用于 Banach 极限理论。

1. 引言与预备知识

加权移位在文献中得到了广泛研究，因为它们是希尔伯特空间和巴拿赫空间上有界线性算子的经典例子，并且由于其结构和谱性质，还是泛函分析中重要的例子 [12] 以及动力系统中的重要例子 [19]。此外，它们还与数值分析和信息论密切相关 [4]。加权移位的谱性质在文献中得到了深入研究，相关成果可见于诸如 [13], [17]等文献。此外，加权移位的数值域和数值半径也一直受到广泛研究 [5, 6, 7, 18, 22, 24, 28, 29],，因为加权移位的数值域与其谱一样，总是一个以原点为中心的圆盘。然而，确定该圆盘是开圆盘还是闭圆盘，以及计算其半径，通常并非易事（更多参考文献请见下文的文献列表）。

本文旨在将 ℓ^2 上的加权移位的数值半径视为 ℓ^∞上的范数，并研究其中包括其与一致范数的关系，以及其与 Banach 极限领域的联系等问题，即研究归一化的、移位不变的保范线性泛函。这些泛函将极限泛函从收敛序列空间延拓到 ℓ^∞。我们的主要结果之一是，对于任意复值有界序列$a \in \ell^\infty$，有

$$r(T_a) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \leq w(T_a), \tag{1}$$

其中，$r(T_a)$ 是加权移位T_a 的谱半径，而$w(T_a)$ 是其数值半径；中间的表达式根据 Sucheston [25] 是实值 Banach 极限在有界序列的绝对值序列上所能取得的最大值。

我们用 $\mathcal{B}(X)$ 表示复巴拿赫空间X上所有有界线性算子构成的代数。现在设H 是一个复希尔伯特空间。于是，$T \in \mathcal{B}(H)$ 的数值域定义为集合

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

众所周知，$W(T)$ 是有界且凸的（参见 [11, 定理 1.1-2]）。T 的数值半径定义为

$$w(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

More关于数值域和半径，我们有以下众所周知的性质：

2020 数学主题分类。 15A60、47A12、47B37。关键词和短语。 数值域、数值半径、单边加权移位、Banach 极限。

1. $w(T)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的一个范数，并且对每个$T \in \mathcal{B}(H)$，都有

$$w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T) \tag{2}$$

若T 是次正规算子，即若$T^*T - TT^*$ 是正定的，则$w(T) = \|T\|$。

2. σ(T) $\subseteq \overline{\text{W(T)}}$ 3. 若 T 是紧算子，则 W(T) 是紧的 4. 对所有酉算子 U $\in \mathcal{B}$(H)，W(U*TU) = W(T) 5. W($\Re$(T)) = {Re(z) : z $\in$ W(T)}，其中 $\Re$(T) = $\frac{1}{2}$(T + T*) 是 T 的厄米实部

有关数值域的参考文献、证明及更多背景，我们参见 [11, 第 1.1–1.5 章和第 6 章。2]。

定义 1.1。设$T \in \mathcal{B}(H)$。则称T 为

1. 正规拟谱，若$w(T) = \|T\|$。2.

凸拟谱，若$W(T) = \text{conv}\sigma(T)$。

注意，对于 $T \in \mathcal{B}(H)$ [11, 第 6.1 章 - 6.2]

$$T \text{ hyponormal} \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}: \ T - \lambda I \text{ normaloid} \quad \Rightarrow \quad T \text{ convexoid} \tag{3}$$

下文中，我们分别令 ω 为所有复值序列构成的向量空间，ℓ^2 为平方可和单边序列构成的复希尔伯特空间，ℓ^∞ 为有界序列构成的复巴拿赫空间。若 a, b $\in \ell^\infty$，则将乘积序列 ab 记为 ab := ($a_k b_k$) $\in \ell^\infty$。此外，令 1 := (1, 1, ...) $\in \ell^\infty$；对于任意序列 a = (a_k) $\in \ell^\infty$，将其绝对值序列记为 |a|，即 |a| := (|a_k|) $\in \ell^\infty$。为便于叙述，对于满足以下条件的任意两个实值序列 a、b $\in \ell^\infty$，我们也引入记号 a $\leq$ b：对所有 k $\in \mathbb{N}$，均有 $a_k \leq b_k$。最后，对于周期为 N $\in \mathbb{N}$的周期序列 a $\in \ell^\infty$，显然 a $\in \ell^\infty$，其中 $\|a\|_\infty$ =max {|a_1|, ..., |a_N|}；我们将 a 的算术平均值记为

$$\overline{a} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} a_k.$$

定义 1.2. 令 $a = (a_k) \in \omega$. 则我们定义为

$$T_a : \omega \to \omega, \ (x_k) \mapsto (0, a_1 x_1, a_2 x_2, ...)$$

与序列 a相关联的（单边）加权（前向）移位。如果 a 的周期为 $N \in \mathbb{N}$，我们有时也写作 $T_{(a_1,...,a_N)}$，而不是 T_a。

此外，我们简单地用 $T: \ell^2 \to \ell^2$ 表示（单边）前向移位算子，用 $S: \ell^2 \to \ell^2$表示（单边）后向移位。

本文仅关注单边前向移位。不过，我们提及的结果也有一部分可推广到加权后向移位及双边情形。关于加权移位矩阵的联系，请参阅 [28] 和 [29]，以及其中列出的参考文献。

下面列出一些关于加权移位、其谱以及数值域和半径的众所周知的事实：

1. $T_a \in \mathcal{B}\left(\ell^2\right)$ 当且仅当 $a \in \ell^\infty$。因此，从现在起我们总是假设 $a \in \ell^\infty$。

2. $\|T_a\| = \|a\|_\infty$ 更一般地，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|T_a^n\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right|.$$

3. Kell ey [13] 证明了 $\sigma(T_a)$ 是一个以原点为中心的闭圆盘，其谱半径 s

$$r(T_a) = \lim_{n\to\infty} \|T_a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right|\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

4. Shields [22] 证明了，两个加权移位 T_a、T_b 当且仅当 $|a| = |b|$时酉等价；特别地，对于任意 $\theta \in \mathbb{R}$ a 加权移位 T_a ，它都与$e^{i\theta}T_a$酉等价。这表明，只需考虑权重为实数且非负的移位；此外，由于数值域在酉共轭下保持不变，这意味着加权移位的数值域是一个以原点为中心的圆盘。因此，对数值域的分析归结为以下问题

(P1) 判断$W(T_a)$ 是开圆盘还是闭圆盘 (P2) 求$w(T_a)$的精确值

5. Berger 和 Stampfli [1] 计算了权为$(r, 1, 1, 1, ...)$ 的加权移位在$r \geq 0$时的数值域和半径。他们证明

$$w(T_{(r,1,1,\dots)}) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}\left(\left(r^2-1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(r^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right), & \text{if } \sqrt{2} < r. \end{cases}$$

6. Eckstein 和 Rasz [9] 用充要条件刻画了所有权$a \in \ell^\infty$，其中 d 定义数值半径压缩算子，即满足 数值半径$(T_a) \leq 1$。

7. Ridge [17, 定理 1] 证明，对于周期为 $\in \ell^\infty$ 的$N \in \mathbb{N}$ ，有

$$w(T_a) = \max\left\{|a_1|\, x_1x_2 + \dots + |a_N|\, x_Nx_1 \,:\, x \in \mathbb{R}^N,\, \|x\|_2^2 = 1\right\} \tag{5}$$

并在同一篇论文中猜想，若a 的所有元素均非零，则$W(T_a)$ 是开集。

8. Stout [24] 证明了Ridge猜想，并进一步指出，对于希尔伯特–施密特类的加权移位，即$a \in \ell^2$，可以用代数问题取代变分问题

$$\begin{aligned} w(T_a) &= \sup\left\{|\langle T_a x, x\rangle| \,:\, x \in \ell^2,\, \|x\|_{\ell^2} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k x_{k+1}^*\right| \,:\, x \in \ell^2,\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 1\right\}. \end{aligned}$$

。更确切地说，暂且不失一般性地考虑任意非负的 a $\in \ell^\infty$。由于加权移位的数值域是以原点为圆心的圆盘，因此可得等式 w(T$_a$) = w (ℜ(T$_a$))。注意， ℜ(T$_a$)是正规算子，因此有 w (ℜ (T $_a$)) = $\|$ℜ(T $_a$)$\|$。现在，若再假设 a $\in \ell^2$，则可以证明 $\|\Re(T_a)\| = \lambda^{-1}$，其中 λ 是解析函数的最小正根

$$F_a(z) = \det\left(I - z\Re\left(T_a\right)\right),$$

可将其显式表示为 [24, 定理 3，第 497] 页（或参见概述[28,第 945] 页）。

正如前面的列表所示，要针对一般权重回答问题 (P1) 和 (P2) 相当复杂。不过，已有许多研究探讨这些问题，针对某些权重给出了求解方法、刻画或部分答案:

(1) Chien 和 Nakazato [5] 计算了权重为几何权重 $(1, r, r^2, ...)$ 的加权移位的数值半径的上界和下界，其中 $0 < r < 1$，并证明了相关加权移位的数值域是闭的 (2) Wang 和 Wu [29] 除其他成果外，还为加权移位的数值半径给出了佩龙-弗罗贝尼乌斯型结果，并给出了 Eckstein-Rasz 定理的新证明及其改进，以便对问题 (P1) 和 (P2) 作出一些回答 (3) 文献 [2, 3, 5, 6, 7, 14,26, 27, 28, 29] 研究了权重分别为 $(r, 1, 1, \dots)$、$(1, r, 1, 1, \dots)$、$(1, \dots, 1, r, 1, 1, \dots)$（其中 r 位于第 m 个位置）、$(r, r^2, r^3, \dots)$ 以及 (h, k, a, b, a, b, ...) 且更一般地为 (h_1,..., h_m, a, b, a, b...) 的加权移位的半径的计算、估计和刻画。

接下来，我们想概述加权移位的数值半径作为 ℓ^∞ 上范数所发挥的作用。更准确地说，注意到

$$\Phi : \ell^\infty \to \mathcal{B}(\ell^2),\ a \mapsto T_a$$

是一个线性等距，这使我们可以将 ℓ^∞ 与 Φ 的像等同，并令 $\|a\|_w := w(T_a) \ = w(\Phi(a))$ 对所有$a \in \ell^\infty$ 成立。因此，映射$\|\cdot\|_w : \ell^\infty \to [0,\infty)$ 是 ℓ^∞ 上的一个范数，并由不等式（2）可得，对所有$a \in \ell^\infty$

$$\|a\|_w \le \|T_a\| = \|a\|_\infty \le 2\|a\|_w . \tag{6}$$

因此，$\|\cdot\|_w$ 与 ℓ^∞上的一致范数等价。

定义 1.3。 范数 $\|\cdot\| : \ell^\infty \to [0,\infty)$ 称为

1. 绝对的，如果

$$\forall a, b \in \ell^\infty : \qquad |a| = |b| \quad \Rightarrow \|a\|_\infty = \|b\|_\infty .$$

2. 单调的，如果

$$\forall a, b \in \ell^\infty : \qquad |a| \le |b| \quad \Rightarrow \|a\|_\infty \le \|b\|_\infty .$$

注意，在 ℓ^∞ 上，任何单调范数都是绝对的。在有限维空间中，反之亦然，即在 $\mathbb{C}^n$ 上，一个范数是单调的当且仅当它是绝对的。作者不知道这在ℓ^∞上是否成立。

显然，一致范数是绝对的且是单调的。根据 Shields 的进一步结果 [22]，同样显然$\|\cdot\|_w$ 是绝对的。利用这一事实，很容易证明$\|\cdot\|_w$ 是单调的 [29, 命题 2.5 (a)]。Wang 和 Wu 进一步证明了 [29, 引理 4.4 (c)]：对于周期序列 a、$b \in \ell^\infty$，若它们具有相同的周期 $N \in \mathbb{N}$，并且存在一个数 $n_0 \in \mathbb{N}$使得 $|a_{n_0}| < |b_{n_0}|$，则有

$$\|a\|_w < \|b\|_w ,$$

显然，一致范数也具有这一性质。

定义 1.4。 设 $R :\ \ell^\infty \to \ell^\infty$ 为线性的。于是，我们定义 R 相对于$\|\cdot\|_w$ 的算子范数为

$$\|R\|_w := \inf\{c > 0 : \|Ra\|_w \le c \cdot \|a\|_w ,\ \forall a \in \ell^\infty\} = \sup_{\|a\|_w = 1} \|Ra\|_w .$$

此外，对于线性映射 $\phi : \ell^\infty \to \mathbb{C}$，我们将 ϕ 关于 $\|\cdot\|_w$ 的算子范数定义为

$$\|\phi\|_w := \sup_{\|a\|_w = 1} |\phi(a)| = \sup_{\|a\|_w \neq 0} \frac{|\phi(a)|}{\|a\|_w}$$

根据此定义和（6），即一致范数与$\|\cdot\|_w$等价，可直接得出

1. 对所有 $R \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$，我们有

$$\frac{\|R\|}{2} \le \|R\|_w \le 2\|R\| \tag{7}$$

2. 对所有$\phi \in (\ell^\infty)^*$

$$\|\phi\| \le \|\phi\|_w \le 2\|\phi\| . \tag{8}$$

注 1.5. 设 $R \in \ell^\infty$。若赋予 ℓ^∞ 混合范数，我们将 R 的算子范数定义为

$$\|R\|_{\infty,w} := \sup_{\|a\|_\infty = 1} \|Ra\|_w , \quad \|R\|_{w,\infty} := \sup_{\|a\|_w = 1} \|Ra\|_\infty .$$

在这种情况下，我们得出结论

$$\frac{\|R\|}{2} \le \|R\|_{\infty,w} \le \|R\|_w \le \|R\|_{w,\infty} \le 2\|R\| ,$$

因为对于任意$a \in \ell^\infty$，我们都有

$$\|Ra\|_w \le \|R\|_w \|a\|_w \le \|R\|_w \|a\|_\infty, \quad \frac{1}{2}\|Ra\|_\infty \le \|Ra\|_w$$

and

$$\|Ra\|_\infty \le \|R\| \|a\|_\infty \le 2\|R\| \|a\|_w, \quad \|Ra\|_w \le \|Ra\|_\infty.$$

当然，也可以调整将加权移位的数值半径用作范数这一思路，从而在 $\mathbb{C}^N$ 上定义一个范数，如下例所示。

例 1.6。 设 $N \in \mathbb{N}$。对于任意 $a \in \mathbb{C}^N$，定义 $\|a\|_{w,N} := w(T(a_1,\ldots,a_N))$。那么 $\|\cdot\|_{w,N}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 上的一个范数。显然，它与一致范数等价，因为 $\mathbb{C}^n$ 上的所有范数都等价，并且我们有

$$\|a\|_{w,N} \le \max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\} \le 2\|a\|_{w,N}, \quad \forall a \in \mathbb{C}^N.$$

注意，对于 $N = 1$ 和 $a \in \mathbb{C}$，我们有

$$\|a\|_{w,1} = |a|$$

且对于 $N = 2$ 和 $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\|a\|_{w,2} = \frac{|a_1| + |a_2|}{2}.$$

对于任意 $N \in \mathbb{N}$，可以使用 Ridge 的结果，即等式（5），从而对任意 $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$

$$\|a\|_{w,N} = \max\left\{|a_1|\, x_1x_2 + \ldots + |a_N|\, x_Nx_1 : x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_2^2 = 1\right\}.$$

本文的其余部分组织如下。在第2节中，我们证明 Banach 极限在有界序列上所能取得的最大值是 $\|\cdot\|_w$ 的下界，并由此得到（1）。此外，我们针对某些权重（例如 Cesàro收敛权重）对该下界进行了特化。随后，我们给出一些示例，说明这些下界如何提供有用信息，并证明（7）和（8）中的不等式可以是严格的，且常数 12 和 2 是最优的（见示例 2.8和示例 2.9）。此外，我们推广 Tam 的一个结果 [26, 定理 1 (a)]，并证明非恒定周期移位是非凸拟谱。第3节讨论乘法算子和加权移位在 ℓ^∞ 上关于 $\|\cdot\|_w$ 的算子范数。在第 4 节中，我们结合 Sucheston 定理 $\|L\|_w = 1$ （ [25, 定理，第 309] 页）关于 Banach 极限在序列上的最大值和最小值，以及第2节中的下界，证明所有复值 Banach 极限都满足。此外，我们讨论（12）所给出的、Banach 极限在有界序列的绝对值序列上所能取得的最大值与谱半径和数值半径之间联系的一个应用。最后，第5节致力于给出其他 ℓ^∞ 上的范数也满足如下性质的充分条件：相对于这些范数，所有复值 Banach 极限的算子范数都等于 1。

致谢： 作者谨向其毕业论文导师 Agnes Radl 致以诚挚谢意，感谢她引导作者了解有界算子的数值域，为本研究奠定了基础。此外，作者衷心感谢 Alexandr Usachev 对本研究的关注，并向作者介绍 Sucheston 的论文；这不仅帮助作者解决了本研究早期版本中的一个问题，也改进了本文的主要结果。此外，作者感谢 Martin Tautenhahn 进行了有益的讨论。最后，作者感谢波恩（德国）的 Hausdorff数学研究所，在作者访问期间为其提供了卓越的研究环境。本研究部分由德国研究联合会（DFG）通过德国卓越战略资助，项目编号为 EXC-2047/1 – 390685813。

2. 下界估计及其推论

正如我们在引言中所指出的，对于任意权重，加权移位的数值半径很难计算。据作者所知，文献中也没有针对任意权重的一般性下界估计。下一个定理利用 Sucheston 关于 Banach 极限的思想，给出这样一个一般性下界估计 [25]。

定理 2.1. 设 $a \in \ell^\infty$。则

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \leq \|a\|_w . \tag{9}$$

证明。 暂时固定任意的$j \in \mathbb{N}$ 和$n \in \mathbb{N}$。则对于任意$x \in \ell^2$，有

$$\langle T_a x, x\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k x_{k+1}^*.$$

因此，对于每个满足 $\|x\|_{\ell^2} = 1$ 的$x \in \ell^2$，我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, x_k x_{k+1}^* = \left\langle T_{|a|} x, x \right\rangle_{\ell^2} \leq \||a|\|_w = \|a\|_w$$

对于每个$n \in \mathbb{N}$，我们选择$x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1} e^{k+j-1}$，其中$e_k$ 是 ℓ^2 中的第k个单位向量。于是，对于所有$n \in \mathbb{N}$，有$x_n \in \ell^2$, $\|x_n\|_{\ell^2} = 1$ 和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left|a_{k+j-1}\right| \leq \|a\|_w . \tag{10}$$

接下来，对于每个$n \in \mathbb{N}$，我们考虑线性映射$C_n \colon \ell^\infty \to \ell^\infty$，其定义为

$$C_n a := \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k+j-1} \right)_{j\in\mathbb{N}}, \quad a \in \ell^\infty.$$

显然 $C_n \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，并选取足够大的 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $j \in \mathbb{N}$，由式 (10) 可得

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \overset{(10)}{\leq} \|a\|_w + \frac{\left|a_{n+j-1}\right|}{n} \leq \|a\|_w + \frac{\|a\|_\infty}{n},$$

由此可得

$$c_n := \|C_n |a|\|_\infty \leq \|a\|_w + \frac{\|a\|_\infty}{n}.$$

最后，注意到借助 [25, p. 309]，序列(c_n) 收敛，这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \|a\|_w .$$

□

现在，对于任意$a \in \ell^\infty$，定义

$$M(|a|) := \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| .$$

注意，根据 Sucheston 定理 [25, 定理，第 309]数 $M(|a|)$ 是实值 Banach 极限在 4.1（定义见定义）所达到的最大值，其作用对象为绝对值序列

一个 $\in \ell^\infty$。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{N}$，算术平均数与几何平均数不等式给出

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|, \quad \forall a \in \ell^\infty.$$

因此，对于所有 $a \in \ell^\infty$，我们得出

$$r(T_a) = \lim_{n\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\prod_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right| = M(|a|), \tag{11}$$

这意味着对于所有 $a \in \ell^\infty$

$$r(T_a) \leq M(|a|) \leq \|a\|_\infty = \|T_a\|.$$

这建立了序列 $|a|$ 的 Banach 极限最大值与给定序列 $a \in \ell^\infty$ （参见 [25, 定理，第 309]页）所对应的加权移位的谱半径和范数之间的联系。注意，不等式（9）进一步明确了 Banach 极限与加权移位之间的这种联系：

推论2.2。 对于所有 $a \in \ell^\infty$，我们有

$$r(T_a) \leq M(|a|) \leq \|a\|_w \leq \|a\|_\infty. \tag{12}$$

因此，我们证明了（1），而且实值 Banach 极限在序列 $|a|$ 上的最大值与对应于 $a \in \ell^\infty$ 的加权移位的谱半径和数值半径之间，实际上存在更强的联系。下一个例子表明，上述任一不等式都可能是严格的：

例2.3。设 $a \in \ell^\infty$ 是一个周期为 $N = 3$ 的周期序列，其中 $a_1 = a_3 = \frac{2}{3}$ 且 $a_2 = 1$。那么

$$\begin{aligned} r(T_a) &= \sqrt[3]{a_1a_2a_3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.7631 \\ M(|a|) &= \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{7}{9} \approx 0.7777 \\ \|a\|_w &= \frac{3+\sqrt{41}}{12} \approx 0.7836 \\ \|a\|_\infty &= 1. \end{aligned}$$

这里我们用到：每当$a \in \ell^\infty$ 是一个周期为 $N \in \mathbb{N}$的周期序列时，我们有

$$\begin{aligned} r(T_a) &= \left(\prod_{k=1}^{N}a_k\right)^{\frac{1}{N}} \\ M(|a|) &= \overline{|a|} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|a_k| \end{aligned}$$

且 $\|a\|_w$ 可以由（5）计算得出（见 Ridge定理 [18, 定理 1，第 107]页，或 [18, 例（2），第 110]页）。

现在我们来讨论不等式（9）的进一步推论和应用。下一个结果展示了它的几种特化情形，即 Cesàro 收敛序列、收敛序列和周期序列的情形。

推论 2.4。 设 $a \in \ell^\infty$。则以下结论成立

(a) 若 $|a|$ 是 *Cesàro* 收敛的，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \|a\|_w.$$

(b) 若 $|a|$ 收敛，则有

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \le \|a\|_w . \tag{13}$$

(c) 若 a 的周期为 $N \in \mathbb{N}$，则有

$$\overline{|a|} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |a_k| \le \|a\|_w . \tag{14}$$

(d) 若存在一个周期序列 $a_1 \in \ell^\infty$ 和一个收敛序列 a_2，使得 $a = a_1 + a_2$，则有

$$\left|\overline{a_1} + \lim_{k\to\infty} a_{2,k}\right| \le \|a\|_w . \tag{15}$$

证明。由前一项的证明可知，对任意 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \|C_n\,|a|\|_\infty$$

因此，我们得到

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \le \|a\|_w .$$

因此，(a) 立即成立，而 (b)、(c) 和 (d) 均由 (b) 推出。 □

注记2.5. 1. 周期情形下的下界（14）对于常数序列显然是精确的。此外，对于 2-周期序列，该下界也可以取到（证明见 [18, 例（1）]），即有

$$\|a\|_w = \frac{|a_1| + |a_2|}{2} = \overline{|a|}$$

2. 注意，取 $x \in \mathbb{R}^N$ 为所有分量均等于 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 的单位向量，也可以从等式（14）中推出不等式（14）。，由方程（5）可得不等式（14）。

3. 不等式（13）最早由 Wang 和 Wu 证明 [29, 命题 2.2 (b)]，他们采用了涉及本质数值域的另一种方法。我们想指出，也可以证明

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le M(|a|) \le \limsup_{n\to\infty} |a_n|, \quad \forall a \in \ell^\infty.$$

因此，若$a \in \ell^\infty$ 和 $|a|$ 收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| = \lim_{k\to\infty} |a_k| .$$

因此，当 $|a|$ 收敛时，不等式（9）化为不等式（13）。此外，不等式（13）实际上表明极限算子

$$\lim : c \to \mathbb{C},\ (a_k) \mapsto \lim_{k\to\infty} a_k$$

在复值收敛序列构成的巴拿赫空间$(c, \|\cdot\|_w)$ 上连续，该空间赋有范数 $\|\cdot\|_w$，且其算子范数等于 1。此等式可由考察序列$a = \mathbb{1} = (1, 1, \dots)$得到。

4. 请注意，在前一个推论的情形 (d) 中，不等式 (15) 实际上给出了任意收敛序列与周期序列的有限线性组合的界，因为有限个收敛序列的线性组合仍然收敛，同样，有限个周期序列的线性组合仍然是周期序列。

5. 最后，我们想指出，对于任意 $a \in \ell^\infty$，一致范数满足以下不等式

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k| \le \|a\|_\infty .$$

然而，$\|\cdot\|_w$ 一般并不满足这样的不等式；一方面，对于任意收敛序列$a \in \ell^\infty$

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} |a_k| \le \|a\|_w ,$$

但另一方面，对于任意 2-周期序列$a \in \ell^\infty$

$$\|a\|_w = \frac{|a_1|+|a_2|}{2} \le \|a\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|\} = \limsup_{k\to\infty} |a_k| .$$

注意，这两个不等式都可能是严格的，例如对于收敛序列$a = \left(\frac{k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$和周期序列$a = (0, 1, 0, 1, \dots)$。

现在我们来看一些例子，在这些例子中，我们利用前面的不等式，首先给出某些权所对应的加权移位的数值半径的下界估计。

例2.6。我们考虑由下式定义的序列$a = (a_n) \in \ell^\infty$

$$a_n := \begin{cases} 2 - \frac{1}{n}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{else.} \end{cases}$$

于是，a 是收敛序列$d := \left((-1)^n \frac{1}{n}\right) \in c_0$ 与周期序列$b = (1, 2, 1, 2, \dots)$之和，因此我们得到以下界

$$\frac{3}{2} \overset{(15)}{\le} \|a\|_w \le \|a\|_\infty = 2.$$

例 2.7。我们考虑形如 $a = (h, k, a_1, a_2, a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty$ 的序列，其中 h、k、$a_1, a_2 \in \mathbb{C}$。这样的权重是收敛序列 $(h - a_1, k - a_2, 0, 0, \dots)$ 与趋于零的 2-周期序列 $(a_1, a_2, a_1, a_2, \dots)$ 之和。因此，我们可以应用不等式 (15)，得到以下估计

$$\frac{|a_1|+|a_2|}{2} \le \|a\|_w .$$

此外，在 $|h| \le |a_1|$ 且 $|k| \le |a_2|$的情况下，由加权移位的数值半径的单调性可得，

$$\|a\|_w = \frac{|a_1|+|a_2|}{2}.$$

例2.8。 在本例中，我们证明存在一个算子 $R \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 满足 $\|R\| = 1$ 且$\|R\|_w = 2$。为此，我们对每个 $m \in \mathbb{N}$ 考虑由下式给出的有界线性算子 $R_m : \ell^\infty \to \ell^\infty$

$$R_m a := (a_m, a_m, \dots) = a_m \cdot \mathbb{1}, \quad \forall a \in \ell^\infty.$$

因此，对于所有 $a \in \ell^\infty$

$$\|R_m a\|_\infty = |a_m| = \|R_m a\|_w .$$

这立即表明 $\|R_m\| = 1$ 且

$$\|R_m a\|_w = |a_m| = 2 \cdot \frac{|a_m|}{2} \overset{(10)}{\le} 2\|a\|_w .$$

最后，若m 为奇数，则序列$a = (2, 0, 2, 0, \dots)$ 满足 $\|a\|_w = 1$ 且 $\|R_m a\|_w = 2$。若m 为偶数，则序列 $a = (0, 2, 0, 2, \dots)$ 会得到相同结果。这表明 $\|R_m\|_w = 2$。

例 2.9. 本例中，我们给出泛函 $\phi \in (\ell^\infty)^*$，它们满足 $\|\phi\|_w = 2\|\phi\|$，是前一个例子的类似情形。更确切地说，令 $m \in \mathbb{N}$ 且 ϕ_m: $\ell^\infty \to \mathbb{C}$ 为到第 m 个坐标的投影，即对所有 $a \in \ell^\infty$，设 $\phi_m(a) := a_m$。显然 $\|\phi_m\| = 1$，而 $\|\phi_m\|_w = 2$ 可用与前一个例子相同的方法推出。

虽然前面的例子表明，这些初等估计在某些情况下可能会有用，但一般而言，它们无法提供有用的信息。例如，Chien 和 Nakazato [5]已经证明，对于几何权重的加权移位 $a = (1, r, r^2, r^3, \ldots)$，$0 \leq r \leq 1$，通过在 ℓ^2 中选取“合适”的向量，可以得到一个漂亮的下界，而无需使用估计式（13），后者只能给出平凡的下界 0。

接下来，我们将 Tam 的一个结果 [26, 定理 1 (a)] 稍作推广。该结果指出，对于任意 $K > 0$ 以及满足 $|a| \leq K$ 和 $a_k \to K$ 的 $a \in \ell^\infty$，有 $W(T_a) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < K\}$。我们将收敛条件放宽为一个涉及 Banach 极限在有界序列的绝对值序列上所能取到的最大值的条件。请注意，我们在备注 2.11 中指出，在该结果的其他假设成立时，它也涵盖了 Cesàro 收敛的情形；这进一步说明了该结果是一个推广，但实际上只是对原结果的小幅改进，因为在这种情况下，这些假设意味着存在一个密度为 1 的集合 $J \subseteq \mathbb{N}$，使得 $|a|$ 沿 J 收敛到 K。请注意，Tam 的证明仍可照常使用。

推论 2.10. 设 $K > 0$，$a \in \ell^\infty$ 使得 $|a| \leq K$，且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| = K. \tag{16}$$

那么 $W(T_a) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < K\}$。

证明。 由不等式 (9)，我们得出

$$K = \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \leq \|a\|_w \leq \|a\|_\infty \leq K.$$

因此 $\|T_a\| = \|a\|_w = K$，又因为 $W(T_a)$ 是以原点为中心的圆盘，所以只需验证 $W(T_a)$ 是开集。现在假设存在 $\lambda \in \sigma_p(T_a)$，$\lambda \neq 0$。那么存在 $x \in \ell^2, x \neq 0$ 使得 $T_a x = \lambda x$，也就是说

$$\lambda x_1 = 0, \quad a_k x_k = \lambda x_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

我们很容易得出，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$x_k = 0$，所以 $x = 0$，这与假设矛盾，因此不存在这样的 λ。所以 $\sigma_p(T_a) \subseteq \{0\}$。现在若 $W(T_a)$ 是闭集且 $\lambda \in \partial W(T_a)$，那么 $|\lambda| = \|T_a\| = K$；根据一个经典结果，$\lambda \in \sigma_p(T_a)$（见 [12, 解答 212，p. 316]），这与假设矛盾，因为 $K > 0$。因此 $W(T_a)$ 是开集。□

备注 2.11. 下面对条件（16）的一种特化情形，即 Cesàro 收敛的情况，作几点说明：

(1) 若将前一个推论中的条件（16）替换为

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = K,$$

那么，由于推论的假设，我们立即得到（16）。因此，前一个推论的结论也适用于 Cesàro 收敛的 $|a|$，其 Cesàro 极限为 K。

(2) 注意，正如 Tam 得出的结论 [26, 定理 1 (a) 的证明],条件 $K > 0$ 和 $a \in \ell^\infty$ 满足 $|a| \to K$，显然意味着 $|a|$ 中只有有限多个项可以等于零，而其余所有项

其他项都必须大于零。然而，条件 $|a| \le K$ 和

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = K$$

不会得出如此强的结论。更准确地说，当切萨罗平均序列$\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ 收敛到 $K > 0$时，要么 $\sigma_n \neq 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，要么存在某个最小指标 $N \in \mathbb{N}$，使得我们有 $\sigma_1 = \ldots = \sigma_N = 0$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$、$n > N$，$|\sigma_n| \neq 0$ 都成立。然而，利用等式 $(n+1)\sigma_{n+1} - n\sigma_n = a_{n+1}$，这意味着 $a_1 = \ldots = a_N = 0$且 $a_{N+1} \neq 0$。不过，由于 σ_n 是 a 中各项的平均值，我们无法获知序列 a 的后续项；例如，a_{N+2} 可能为零，而我们仍然有$\sigma_{N+2} \neq 0$。为说明这一点，我们考虑序列 $a = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots)$；更准确地说，考虑通过以下方式定义的 $a = (a_n)$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n = \frac{l^2+3l}{2} \text{ for } l \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{else.} \end{cases}$$

那么显然 $\sigma_n > 0$，$a_n \le 1$ 对所有$n \in \mathbb{N}$ 都成立，而且很容易证明 $\sigma_n \to 1$。因此，前面的推论适用，并得出$W(T_a)$ 是以原点为中心的开单位圆盘。然而，a 有无穷多个项等于零，且这些项组成的集合的密度等于 0；但a 沿着一个密度为 1 的集合收敛到它的 Cesàro 极限$K = 1$。

(3) 上一条中的最后几个结论对任何满足以下条件的序列都成立：设$K > 0$，$a \in \ell^\infty$ 满足 $|a| \le K$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = K.$$

那么，我们有

$$0 \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |K - |a_k|| \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} K - |a_k| \to 0.$$

因此，根据 Koopman-von Neumann 引理 [10, 引理 9。16],可知，存在一个密度等于 1 的集合 $J \subseteq \mathbb{N}$，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{1, \ldots, n\} \cap J|}{n} = 1,$$

使得

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in J}} |a_n| = K.$$

因此，只有有限个点$j_1, \ldots, j_m \in J$满足$a_{j_i} = 0$，$i = 1, \ldots, m$，因为$K > 0$。因此，集合$M := \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ 的密度等于 1，因为我们有$J \setminus \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq M$，由此还可得出集合 $\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\}$的密度等于 0。

在本节的最后一个结果中，我们证明任何具有非恒定周期权重的加权移位都是非凸拟圆盘，而任何具有常权重的加权移位显然都是凸拟谱。

推论 2.12. 设 $a \in \ell^\infty$ 是周期为 N 的周期函数。若存在 $i, j \in \{1, \ldots, N\}$，满足 $i \neq j$ 且$|a_i| \neq |a_j|$，那么

$$r(T_a) < \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |a_k| \le \|a\|_w < \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|\},$$

也就是说，T_a 是非正规半径型且为非凸拟圆盘。

证明。 由于加权移位的谱和数值域的闭包都是以原点为中心的闭圆盘，因此加权移位是凸拟谱，当且仅当其谱半径与数值半径相同。现在，由于$a \in \ell^\infty$ 不是常数，因此特别地不为零。常数序列$b := (\|a\|_\infty)$ 的周期为N ，并且存在某个$n_0 \in \mathbb{N}$ 满足$|a_{n_0}| < |b_{n_0}|$，因此利用 [?，由引理 4.4 (c)],可得

$$\|a\|_w < \|b\|_w = \|a\|_\infty$$

尤其是T_a 是非正规半径型的。进一步，由（14），我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|a_k| \le \|a\|_w .$$

我们记 $A := \prod_{k=1}^{N} a_k$，并由谱半径的盖尔范德公式得出

$$r(T_a) = \lim_{n\to\infty}\|T_a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty}\left\|T_a^{kN}\right\|^{\frac{1}{kN}} = \lim_{k\to\infty}\left(A^k\right)^{\frac{1}{kN}} = A^{\frac{1}{N}} = \left(\prod_{k=1}^{N} a_k\right)^{\frac{1}{N}}$$

因此，由算术平均数与几何平均数不等式可得

$$r(T_a) = \left(\prod_{k=1}^{N} a_k\right)^{\frac{1}{N}} < \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|a_k| \le \|a\|_w .$$

因此，我们已经证明 T_a 是非凸拟圆盘。 □

注2.13。如前一定理所示，权重为 $a \in \ell^\infty$ 的加权移位是凸拟谱，当且仅当$r(T_a) = \|a\|_w$。满足此条件的算子称为谱半径型(参见[11, 第6章导论，第 150]页）。迄今为止，文献中似乎尚未针对加权移位给出能够保证其为（非）谱半径型或（非）正规半径型的条件及进一步刻画（针对复希尔伯特空间上任意算子的相关条件和刻画除外；参见 [11, 第6.1、6.2、6.3]节及其中的参考文献）。我们想指出，由于（12），若$a \in \ell^\infty$ 满足以下条件之一

$$r(T_a) < M(|a|) \quad \text{or} \quad M(|a|) < \|a\|_w ,$$

由此可知，T_a 是非谱半径型的，因此也是非凸拟圆盘的。不过，一般来说，如何验证这两个条件还不明确。因此，寻找其他可能更易验证的条件或刻画将会很有意义。

3. 乘法算子和加权移位在 ℓ^∞上的范数

尽管我们已在例 2.8 中证明，一般而言，算子 $\mathrm{R} \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 关于一致范数的算子范数与加权移位的数值半径（在定义域和像空间上）可能不同，但我们将在本章看到，对于乘法算子和 ℓ^∞上的加权移位，这种差异并不存在。为避免与 ℓ^2上的前向移位 T 和后向移位 S 混淆，我们用 $\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 表示前向移位，用 $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 表示后向移位。进一步，对于 $\mathrm{d} \in \ell^\infty$，我们分别用 $\mathrm{m}_d \in \mathcal{B}\left(\ell^2\right)$ 和 $\mathrm{M}_d \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 表示 ℓ^2 和 ℓ^∞ 上对应于 d 的乘法算子。最后，我们用 $\mathrm{F}_d \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 和 $\mathrm{B}_d \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ 分别表示 ℓ^∞ 上与 d 相关联的（单边）加权前向移位和加权后向移位。同样，我们所说的“移位”仅指前向移位。

正如我们在引言部分所见，关于上述算子的算子范数，一个初步估计可由以下关系得出：$\|\cdot\|_w$ 由（7）可得

$$\frac{\|d\|_\infty}{2} \le \|M_d\|_w, \|F_d\|_w, \|B_d\|_w \le 2\|d\|_\infty, \quad \forall d \in \ell^\infty.$$

这自然引出了一个问题：这些不等式中的常数 12 和 2-是否为最优常数。如下定理表明，事实并非如此，正如我们上文已经指出的。

定理 3.1. 设 $d \in \ell^\infty$。则有 $\|M_d\|_w = \|F_d\|_w = \|B_d\|_w = \|d\|_\infty$。

证明。 我们分别计算每个算子的范数。

(a) 对于 $a \in \ell^\infty$，我们有

$$|(M_d a)_k| = |d_k a_k| \leq \|d\|_\infty \cdot |a_k|,$$

因此 $|M_d a| \leq \|d\|_\infty \cdot |a|$。由单调性可得

$$\|M_d a\|_w = \||M_d a|\|_w \leq \|d\|_\infty \|a\|_w .$$

还需证明等号成立。为此，取 $k \in \mathbb{N}$ 并令 $e_k \in \ell^\infty$ 为 k 阶标准单位向量，位于 ℓ^∞中。容易验证 $\|2e_k\|_w = 1$。进一步地，由不等式（10）取 $n = 2$ 和 $l = 1$可得

$$\|M_d 2e_k\|_w = \|2d_k e_k\|_w = |2d_k| \|e_k\|_w \overset{(10)}{\geq} \frac{|2d_k|}{2} = |d_k| .$$

最后，这与第一个不等式一起得出

$$\|d\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |d_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|M_d 2e_k\|_w \leq \|d\|_\infty ,$$

这证明了关于 M_d 的断言。

(b) 我们验证关于 B_d 的断言。但首先，令 $z \in W(T_{Ba})$。那么存在 $x \in \ell^2$，满足 $\|x\|_{\ell^2} = 1$，使得 $z = \langle T_{Ba}x,x\rangle_{\ell^2}$。利用 $ST = Id$ 和 $S = T^*$，我们得到

$$z = \langle T_{Ba}x, x\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}x_k\overline{x_{k+1}} = \langle m_a Tx, x\rangle_{\ell^2} = \langle Tm_a Tx, Tx\rangle_{\ell^2} = \langle T_a Tx, Tx\rangle_{\ell^2}$$

由于 $\|Tx\|_{\ell^2} = \|x\|_{\ell^2} = 1$，我们有 $z \in W(T_a)$，因此 $\|Ba\|_w \leq \|a\|_w$。于是我们得到

$$\|B_d a\|_w = \|d \cdot Ba\|_w = \||d| \cdot |Ba|\|_w \leq \|d\|_\infty \cdot \|B|a|\|_w \leq \|d\|_\infty \|a\|_w .$$

同样，可以像对 M_d 那样证明这个等式。

(c) 我们验证关于F_d 的断言。对于 $a \in \ell^\infty$ 和 $x \in \ell^2$，我们有

$$m_{F_d a}x = (0, d_1a_1x_2, d_2a_2x_3, \ldots) = T_{da}Sx = T_{M_d a}Sx$$

因此我们有

$$T_{F_d a} = Tm_{F_d a} = TT_{M_d a}S,$$

由此可得，因$T^* = S$

$$\left\langle T_{F_d a}x, x\right\rangle_{\ell^2} = \left\langle T_{M_d a}Sx, Sx\right\rangle_{\ell^2}, \quad \forall x \in \ell^2. \tag{17}$$

因此我们得到

$$\left|\left\langle T_{F_d a}x, x\right\rangle\right| \overset{(17)}{\leq} w\left(T_{M_d a}\right)\|Sx\|_{\ell^2}^2 \leq \|M_d a\|_w \|x\|_{\ell^2}^2 \leq \|d\|_\infty \|a\|_w \|x\|_{\ell^2}^2 ,$$

由此我们得出 $\|F_d a\|_w \leq \|d\|_\infty \|a\|_w$，因此 $\|F_d\|_w \leq \|d\|_\infty$。类似于前述论证，对于$M_d$，同样的论证表明等式成立。

□

4. 加权移位的数值半径及其在 Banach 极限中的应用

回忆一下 $\mathbb{1} = (1,1,\ldots) \in \ell^\infty$，并注意，对于 $a \in \ell^\infty$，不等式 $a \geq 0$ 表示对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $a_k \geq 0$。此外，我们用 c 表示由所有复值有界序列构成的复巴拿赫空间。Banach 极限是归一化的移位不变线性泛函，它们以一致范数连续地将极限泛函从 c 延拓到 ℓ^∞，即

定义 4.1.（复值Banach极限）线性泛函$L: \ell^\infty \to \mathbb{C}$ 称为（复值）*Banach* 极限，如果它满足下列条件

(1) $L(a) = L(Ba), \forall a \in \ell^\infty.$

(2) $L(a) \geq 0, \forall a \in \ell^\infty, a \geq 0$. (3) $L(\mathbb{1}) = 1$ 以及 $|L(a)| \leq \|a\|_\infty, \forall a \in \ell^\infty$. (4) $L(a) =$ 极限$_{n\to\infty} a_n, \forall a \in c$.

Banach极限是从巴拿赫空间中的极限算子到$(c, \|\cdot\|_\infty)$这一有界序列的巴拿赫空间上的连续线性延拓$(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$。不过，也可以将 Banach 极限构造为切萨罗极限算子在切萨罗收敛序列闭子空间上的连续线性延拓。无论如何，Banach 极限的存在性都是哈恩–巴拿赫延拓定理的推论。关于证明，参见 [8, III. §7，第82] 以及 [25, 定理，第 309]。注意，Sucheston 还证明了，实值巴拿赫极限在序列$a \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$上的最大值为

$$M(a) := \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{n+j-1}.$$

此外，实值巴拿赫极限的存在性还可导出复值 Banach 极限。关于这一事实的经典证明，同样可以在 Conway 的著作 [8, III. §7，第 83] 页中找到。

Banach 极限的一般理论与不变测度和密度的存在性有关。关于近期的发展，请参阅 [20],[21] 和 [23] 及其中的参考文献。此外，我们想强调的是，从测度论视角来看，Banach 极限与自然数上的“纯”有限可加测度有关，这些测度集中于 $'\infty'$，即它们不是 σ-可加的，并定义了介于上密度和下密度 [16, Example 2.1.3 (9)]之间的测度。

任意复值 Banach 极限 $L: \ell^\infty \to \mathbb{C}$ 显然满足 $\|L\| = 1$。由此，对于其关于$\|\cdot\|_w$的范数，我们首先得到如下估计：$\|L\|_w \leq 2$，并且可以预期 $\|L\|_w = 2$，因为我们已经在示例 2.9 中证明，非常简单的泛函满足这一等式。然而，根据（9）以及 $M(a)$ 是在给定序列 $a \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$上实 Banach 极限能够取得的最大值这一事实，我们立即得到以下结论：

推论 4.2. 任意实值巴拿赫极限 $L: \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 对于所有 $a \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ 均满足范数估计

$$|L(a)| \leq \|a\|_w .$$

现在采用 Conway 的著作 $\|\cdot\|_\infty$中所述的、关于 [8, III. §7 第 83],页的复值 Banach 极限构造，遵循其中的证明并应用前一个推论，即可得到复值 Banach 极限的相同不等式。不过，为方便读者，我们在此给出完整证明，因为我们明确需要 $\|\cdot\|_w$ 的单调性来完成证明。

定理 4.3. 存在一个线性泛函 $L: \ell^\infty \to \mathbb{C}$ 使得

(1) $L(a) = L(Ba), \forall a \in \ell^\infty$. (2) $L(a) \geq 0, \forall a \in \ell^\infty, a \geq 0$. (3) $L(1) = 1$ 且 $|L(a)| \leq \|a\|_w, \forall a \in \ell^\infty$. (4) $L(a) = lim_{n\to\infty} a_n, \forall a \in c$.

证明。我们可以将每个$a \in \ell^\infty$ 拆分为唯一的序列 $\mathrm{Re}(a) := (\mathrm{Re}(a_k)) \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathrm{Im}(a) := (\mathrm{Im}(a_k)) \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$，使得有$a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)$。令 $\tilde{L}: \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 为任意实值巴拿赫极限。那么，我们通过以下方式定义的映射$L: \ell^\infty \to \mathbb{C}$

$$L(a) := \tilde{L}(\mathrm{Re}(a)) + i\tilde{L}(\mathrm{Im}(a)), \quad a \in \ell^\infty$$

是一个满足 (1)、(2)、(4) 以及 $L(\mathbb{1}) = 1$ 的线性映射，因此只需证明 (3) 中的范数估计。为此，设 $E_1, ..., E_m \subseteq \mathbb{N}$ 为 $\mathbb{N}$ 的两两不相交子集，且 $a_1, ..., a_m \in \mathbb{C}$。我们用$_m\chi_k$ 表示 E_k、$k = 1$、...、m 的特征序列，并考虑一个序列 $a := \sum_{k=1} a_k\chi_k \in \ell^\infty$。我们将

仿照阶梯函数，今后将这样的序列称为阶梯序列 。于是我们有

$$L(a)=\sum_{k=1}^{m} a_k \tilde{L}\left(\chi_k\right),$$

作为 $0 \leq \chi_k \leq \mathbb{1}$ 因此，根据定义和 (b)，我们有 $0 \leq \tilde{L}(\chi_k)=L(\chi_k) \leq 1$。假设 $\|a\|_w \leq 1$，于是我们根据推论 4.2

$$|L(a)|=\left|\sum_{k=1}^{m} a_k \tilde{L}\left(\chi_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\left|a_k\right| \tilde{L}\left(\chi_k\right)=\sum_{k=1}^{m} \tilde{L}\left(\left|a_k\right| \chi_k\right)=\tilde{L}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|a_k\right| \chi_k\right)=\tilde{L}(|a|) \leq\|a\|_w \leq 1.$$

接下来，我们应用标准结果（见引理 A.1）：对于每个 $a \in \ell^\infty$，都存在一个由阶梯序列组成的序列 $\left(a(n)\right) \subseteq \ell^\infty$，使得 $\left\|a-a(n)\right\|_w \rightarrow 0$，且 $\left|a(n)\right| \leq |a|$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。现在，给定一个满足 $\|a\|_w \leq 1$ 的元素 $a \in \ell^\infty$ 以及这样一个由阶梯序列组成的序列，加权移位数值半径的单调性给出 $\left\|a(n)\right\|_w \leq 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。结合 L 的连续性与前面的估计，我们由此得出 (c) 成立。□

由于所有复 Banach 极限都源自实值Banach极限，因此可得，

推论 4.4。对于任意复值 *Banach* 极限 L：$\ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$，有 $\|L\|_w=1$。

最后，在本节的最后一个结果中，我们基于不等式（12）给出序列 $a \in \ell^\infty$ 满足 $\|a\|_\infty \leq 1$ 时的充要条件，使得所有 Banach极限 L： $\ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ 都满足$|L(a)|<1$。

定理 4.5。设 $a \in \ell^\infty$ 满足 $\|a\|_\infty=1$。则以下各项等价

(1) $r(T_a)<1$(2) $M(|a|)<1$(3) $\|a\|_w<1$

(4) 存在 $C>0$ 和 $\lambda \in (0,1)$ 使得

$$\prod_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right| \leq C \lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

证明 r 需要以下辅助结果（证明见 [?，定理 1.3-2 的证明，第 10] 页） .

定理 4.6. 设 H 是复希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(H)$。若 $\lambda \in W(T)$ 且 $|\lambda|=\|T\|$，则$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$，其中 σ_{ap} 表示近似点谱，即

$$\sigma_{ap}(T)=\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \exists\left(x_n\right) \subseteq H,\|x_n\|=1 \text{ such that } \|(\lambda-T) x_n\| \rightarrow 0\right\}.$$

定理 *4.6* 的证明. 由（12），对任意 $a \in \ell^\infty$

$$r(T_a) \leq M(|a|) \leq\|a\|_w \leq\|a\|_\infty.$$

因此 (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)。此外，由于 $\|T_a\|=\|a\|_\infty=1$，根据定理 4.6，可得 $W(T_a) \cap \overline{\mathbb{T}} \subseteq \sigma(T_a) \cap \mathbb{T}$，其中 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆。反向包含关系也成立，因为 $\sigma(T_a) \subseteq W(T_a)$，所以 $W(T_a) \cap \overline{\mathbb{T}}=\sigma(T_a) \cap \mathbb{T}$。由于加权移位的谱和数值域都是以原点为中心的圆盘，可知 (1) $\Rightarrow$ (3)。因此，我们有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。还需证明 (1) $\Leftrightarrow$ (4)。若 (4) 成立，则有

$$r(T_a)=\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}}\left(\prod_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{n}} \lambda=\lambda<1.$$

若（1）成立，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty}\left\|T_a^n\right\|^{\frac{1}{n}}=r(T_a)<1.$$

因此，对于所有 $\lambda \in (r(T_a), 1)$，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $n \geq N$ 的$n \in \mathbb{N}$，都有

$$\|T_a^n\|^{\frac{1}{n}} < \lambda.$$

取

$$C := \max\left\{1, \lambda^{-1}\|T_a\|, \lambda^{-2}\left\|T_a^{-2}\right\|, \ldots, \lambda^{-N}\left\|T_a^{-N}\right\|\right\} + 1,$$

我们发现

$$\|T_a^n\| \leq C\lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

现在，由于

$$\|T_a^n\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right|,$$

(4) 得证。 □

例子4.7。 一个不满足定理 $\|a\|_\infty = 1$中任何条件的序列，4.5 如下：$a = (1,0,1,1,0,1,1,1,0,\ldots)$。这就是备注2.11第二项中讨论的例子。对于这个序列，我们有

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq M(|a|) \leq \|a\|_w \leq 1,$$

因此 $\|a\|_w = M(|a|) = 1$。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都可以找到一个数 $j \in \mathbb{N}$，使得

$$\prod_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| = 1,$$

因为序列 a 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 都包含一个长度为n 且所有元素均为 1 的块。因此，定理4.5 的条件 (4) 不满足，并且我们有 $r(T_a) = 1$。

我们将 $\partial B_1^\infty := \{a \in \ell^\infty : \|a\|_\infty = 1\}$ 记作 ℓ^∞ 中的标准单位球面。在本小节的最后一个定理中，我们证明，最后一个定理适用的 ∂B_1^∞ 中序列的集合在 ∂B_1^∞ 中稠密。因此集合

$$D := \left\{a \in \ell^\infty : \exists C > 0, \lambda \in (0,1) \text{ with } \prod_{k=1}^{n} \left|a_{k+j-1}\right| \leq C\lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\right\}$$

以及 $D_1 := D \cap \partial B_1^\infty$。于是我们有

定理4.8. *D_1 在 ∂B_1^∞ 中稠密。*

证明。 为证明第二个结论，我们固定一个$a \in \partial B_1^\infty$。现在存在一个子序列$(a_{k_l}) \subseteq (a_k) = a$，使得 $|a_{k_l}| \to 1$。不失一般性，我们可以假设对于所有$l \in \mathbb{N}$，都有 $k_{l+1} - k_l \geq 2$（否则可以转而取一个子序列）。我们通过如下方式定义一个序列$(b_m) \subseteq \ell^\infty$：对于所有$m \in \mathbb{N}$和$k \in \mathbb{N}$

$$(b_m)_k := \begin{cases} a_k, & \text{if } k = k_l \text{ for some } l \in \mathbb{N}, \\ \frac{m-1}{m} \cdot a_k, & \text{else.} \end{cases}$$

不难验证，$\lim_{m\to\infty} \|b_m - a\|_\infty = 0$，且对所有的$m \in \mathbb{N}$，都有$b_m \in D_1 \cap \partial B_1^\infty$，其中 $\lambda_m = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$ and $C_m \geq \sqrt{\frac{m}{m-1}}$. □

注记 4.9. 注意，根据 Sucheston 定理 [25, 定理，第 309]以及定理4.5，集合 D_1 是 ∂B_1^∞中的最大集合，使得对于所有 Banach 极限 $L : \ell^\infty \to \mathbb{C}$，都有

$$|L(a)| < 1, \quad \forall a \in D_1.$$

5. 关于l∞上的范数满足 ℓ^∞ 的若干充分条件推论4.4

本节总结了任意 ℓ^∞ 范数满足的条件，这些条件可确保任意复 Banach 极限 $L:\ell^\infty\to\mathbb{C}$ 相对于给定范数的算子范数等于 1。根据 Sucheston 定理，显然，范数 $\|\cdot\|:\ell^\infty\to[0,\infty)$ 若要满足推论 4.2和推论 4.4 中的论述，必须满足

$$\text{(A1)}\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|\le\|a\|,\quad \forall a\in\ell^\infty.$$

此外，为了使所得拓扑与一致范数所诱导的拓扑相同，我们要求满足：(A2) 存在常数$C\ge 1$，使得对所有$a\in\ell^\infty$，都有

$$\|a\|\le\|a\|_\infty\le C\|a\|.$$

因此，(A2)就是说，$\|\cdot\|$ 在 ℓ^∞上等价于一致范数，等价常数为$C\ge 1$ 和$c=1$。后者保证所有Banach极限都满足 $\|L\|=1$。

有了这两个条件，我们便可通过采用定理4.3的证明，直接得出以下结果：

定理 5.1. 设 $\|\cdot\|:\ell^\infty\to[0,\infty)$ 是满足 (A1) 和 (A2) 且具有 $\in\ell^\infty$ 的单调范数。那么，对所有复值 *Banach* 极限 $L:\ell^\infty\to\mathbb{C}$，以及所有 $a\in\ell^\infty$，均满足范数估计

$$|L(a)|\le\|a\|.$$

接下来，我们给出一个充分条件，使 ℓ^∞ 上的范数满足 (A1)。

定义 5.2. 若存在$l\in\mathbb{N}$ 和$p\in\mathbb{Z}$，使得对于所有满足$n\ge l+|p|$ 的$n\in\mathbb{N}$ 以及$j\in\mathbb{N}$，不等式成立，则称范数 $\|\cdot\|:\ell^\infty\to[0,\infty)$ 满足移位不变算术平均型估计，简称为 (S-IAM)：

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=l}^{n-p}a_{k+j-1}\right|\le\|a\|,\quad\forall a\in\ell^\infty.$$

例 5.3. 显然，一致范数满足 (S-IAM)，其中$l=1$ 且$p=0$；而$\|\cdot\|_w$ 满足 (S-IAM)，其中$l=1$ 且$p=1$，正如我们在 (10) 中所示。此外，可以证明（这里不予证明），对于任意$m\in\mathbb{N}$，映射$\|\cdot\|_m:\ell^\infty\to[0,\infty)$ 由下式给出

$$\|a\|_m:=w(T^{m-1}T_a),\quad a\in\ell^\infty,$$

是 ℓ^∞ 上满足 (A2) 的单调范数。此外，对于所有$n\in\mathbb{N}$ 满足$n\ge m$ 的情形，以及每个$j\in\mathbb{N}$，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-m}|a_{k+j-1}|\le\|a\|_m,\quad\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|a_{k+j-1}|\le\|a\|_m.$$

因此，每个$\|\cdot\|_m$ 都满足 (S-IAM)，其中$l=0$ 且$p=-m$，或者$l=m+1$ 且$p=0$。因此，还有其他满足条件 (S-IAM) 和 (A2) 的范数例子。

最后，我们证明满足 (S-IAM) 的绝对范数（因此也包括单调范数）满足 (A1)。

定理 5.4。 L 设 $\|\cdot\|:\ell^\infty\to[0,\infty)$ 为满足(S-IAM)的绝对范数。那么对于任意 $a\in\ell^\infty$，我们有 e

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right|\le\|a\|.$$

推论的进一步结论 *(a)* - *(d)* 2.4 对于范数 $\|\cdot\|$同样成立。

证明。 与定理 2.1 的证明类似，我们采用 Sucheston 的策略 [25]。再次考虑任意$n \in \mathbb{N}$ 给出的线性映射 $C_n\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ 定义如下

$$C_n a := \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k+j-1}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \quad a \in \ell^\infty.$$

并回忆一下，由下式给出的序列(c_n)

$$c_n := \|C_n |a|\|_\infty$$

是收敛的。此外，对于所有$n \in \mathbb{N}$，满足$n \geq l + |p|$的情形，其中$p \in \mathbb{Z}$ 和$l \in \mathbb{N}$ 来自 **(A1)**，并且对于所有$j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{k+j-1}\right| \overset{\text{(S-IAM)}}{\leq} \||a|\| + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{l-1}\left|a_{k+j-1}\right| + \sum_{k=\min\{n,n-p+1\}}^{\max\{n,n-p+1\}}\left|a_{k+j-1}\right|\right) \leq \||a|\| + \frac{\|a\|_\infty (l-1+|p|)}{n},$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{k+j-1}\right| = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \||a|\| = \|a\|.$$

□

参考文献

[1] Berger, C. A.; Stampfli, J. G. 数值域的映射定理，《美国数学杂志》，第 89 卷，第 4 期（ 1967 1047 1055 10 2307 2373416 年 10 月），第 - 页。DOI：。 / Chakraborty B. I., Ojha S., Birbonshi R. 某些加权移位算子的数值域，《线性代数及其应用》，第 640 卷，2022 年，第 179–190 页。-。[3] Chakraborty B. I., Ojha S., Birbonshi R. 利用行列式多项式研究加权移位算子的数值半径，《算子与矩阵》。2022 年；第 16 卷，第 1155–1174 页。[4] Chen X. J.; Yamamoto T. 数值分析。Corena 出版社，东京，2002 年。[5] Chien, M.-T.; Nakazato, H. 几何权重加权移位算子的数值半径。《电子线性代数杂志》，2009 年；第 18 卷，第 58–63 页。[6] Chien, M.-T.; Sheu, H. A. 加权移位矩阵与算子的数值半径。《算子与矩阵》。2013 年；第 7 卷，第 197–204 页。[7] Chien, M.-T.; Nakazato, H.; Undrakh, B.; Vandanjav, A. 加权移位算子的行列式多项式。《线性与多重线性代数》，第 64 1, 2 13, 10 1080 03081087 2014 1003528 卷：第 - 页。DOI：。 / . . Conway, J. B. 泛函分析教程。施普林格出版社（纽约），1985 年。DOI:10.1007/978-1-4757-3828-5。[9] Eckstein, G.; Rácz, A. $\mathcal{C}_p$类加权移位，《塞格德数学学报》，第 35 卷，1973 年，第 187–194 页。[10] Eisner, T.; Farkas, B.; Haase, M.; Nagel, R.：《遍历理论的算子理论方面》，《数学研究生教材》，Springer，2015 年。628 页。[11] Gustafson, K. E.; Rao, D. K. M.《数值域：线性算子与矩阵的值域》。施普林格出版社（纽约），1997 年。DOI:10.1007/978-1-4613-8498-4 1978 84 47001 Halmos P. R.《希尔伯特空间问题集》，Springer-Verlag，纽约，。MR e: Kelley, R. L. 希尔伯特空间上的加权移位，博士论文，密歇根大学，安娜堡，密歇根州，1966 年。[14] Lasser, R.; Obermaier, J. 加权移位算子、正交多项式与链序列，《塞格德数学学报》86，331–342（ 2020 10 14232 019 152 4）。https://doi.org/ 。/actasm- - - Marcus M.; Shure B.N. 某些 - 矩阵的数值域，《线性与多重线性代数》7（1979），111–120。MR 80c:15015[16] Bhaskara Rao, K. P. S.; Bhaskara Rao, M.《电荷理论——有限可加测度研究》。纯数学与应用数学丛书——专著与教材系列。学术出版社，伦敦，1983 年。[17] Ridge, W. C. 加权移位的近似点谱，《美国数学会汇刊》，第 147 卷，第 2 1970 349 356 10 2307 1995198 期（2 月），第 - 页。DOI：。/ Ridge, W. C. 周期权重加权移位的数值域，《美国数学学会会刊》，第 55, 1 1976 107 110 10 2307 2041852 卷，第 期（2 月），第 - 页。DOI：。/ Salas, H. N. 超循环加权移位。《美国数学会汇刊》347（1995），993–1004。[20] Semenov, E. M.; Sukochev, F. A. 不变巴拿赫极限及其应用，《泛函分析杂志》259（2010），1517–1541。[21] Semenov, E. M.; Sukochev, F. A.; Usachev, A. 巴拿赫极限的几何及其应用，《俄罗斯数学综述》75:4（2020），725–763。[22] Shields, A. L. 加权移位算子与解析函数理论，《数学调查》，《算子理论专题》（C. Pearcy 编）。第 13 卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会；《数学调查》，1974 年。

[23]Sofi, M.A. *Banach* 极限：一些新的思考与观点。《J Anal》29，591–606（2021）。
https://doi.org/10.1007/s41478-019-00184-2[24] Stout, Q. F. 加权移位的数值域，《美国数学学会会刊》，第 88 卷，第 3 期，第 495–502 页，1983 年。DOI: 10.1090/S0002-9939-1983-0699421-1
[25] 74 1967 308 311 0225145 L. Sucheston，*Banach* 极限，《美国
[26] 125 1997 3581 3592
数学月刊》（），–。MR Tam, T.-Y. 关于 *Ridge* 猜想，《美国数学学会会刊》（），–。[27] Undrakh, B., Vandanjav A.：某些加权移位矩阵与算子的数值域。《线性代数及其应用》2014 年；第 449 卷，第 76–88 页。[28] Undrakh, B.; Chien, M.-T.; Nakazato, H.; Vandanjav, A. 加权移位算子的数值半径。《电子线性代数杂志》，第 30 卷，第 944–963 页，2015 年 12 月。[29] Wang, K.-Z.; Wu, P. Y. 加权移位的数值域，《数学分析及其应用杂志》，第 381 卷，第 2 期，第 897–909 页，2011 年。DOI：https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.010

附录A。

以下引理是关于测度空间$f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ 上的函数的标准结果。不过，我们这里只对序列陈述该结果，即在 $\Omega=\mathbb{N}, \mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是$\mathbb{N}$ 的幂集且 $\mu=|\cdot|$ 是计数测度的情形下。

引理 A.1. 设 $\|\cdot\|:\ \ell^\infty \to [0,\infty)$ 是满足*(A2)*的范数，且有 $\in \ell^\infty$。那么存在由阶梯序列构成的序列 $a(n)\in\ell^\infty$，使得 $\left\|a(n)-a\right\| \to 0$ 且 $\left|a(n)\right| \le |a|$，即

$$\left|a_k^{(n)}\right| \le |a_k|, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

德累斯顿工业大学，德国德累斯顿 D-01062；莱比锡大学数学研究所，德国莱比锡 D-04109电子邮箱：
akram.sharif@tu-dresden.de, akram.sharif@math.uni-leipzig.de