arXiv:2303.00887v1 [math.AP] 6 Feb 2023

高阶非线性广义 Camassa-Holm 方程在临界 Besov 空间中的适定性问题

Wei Deng[1], Min Li[2*]、Xing Wu[3] 和 Weipeng Zhu[4] 赣州师范学院数学系，中国赣州 341000[2] 江西财经大学数学系，中国南昌 330032[3] 河南农业大学信息与管理科学学院，中国郑州 450002[4] 佛山大学数学与大数据学院，中国广东佛山 528000

2023年3月3日

摘要：本文证明，高阶非线性广义 Camassa-Holm 方程的柯西问题在临界 Besov 空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中不适定。《微分方程杂志》327:127-144，2022年中已证明 Camassa-Holm 方程在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中不适定。本文则关注 Hakkaev 和 Kirchev 提出的 Camassa-Holm 方程的高阶非线性推广形式（《偏微分方程通讯》30:761-781，2005年）。通过构造新的初始数据，我们在临界空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中得到范数膨胀，从而导出其不适定性。

关键词：广义 Camassa-Holm 方程；适定性问题；临界 Besov 空间。2010年数学主题分类：35Q53，37K10。

1 引言

本文研究高阶非线性广义 Camassa-Holm 方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + \frac{(Q+2)(Q+1)}{2}u^Q u_x = (\frac{Q}{2}u^{Q-1}u_x^2 + u^Q u_{xx})_x, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $Q \geqslant 1$ 为正整数，且 $u(t,x)$ 表示时刻 $t \geqslant 0$ 空间方向上的流体速度。方程（1.1）由 Hakkaev 和 Kirchev [15] 在更一般的情形下引入

$$u_t - u_{xxt} + (a(u))_x = (\frac{b'(u)}{2}u_x^2 + b(u)u_{xx})_x,$$

取 $a(u) = \frac{Q+2}{2}u^{Q+1}$，$b(u) = u^Q$ 我们得到方程（1.1）。当 $Q = 1$ 时，（1.1）化为著名的 Camassa-Holm 方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_xu_{xx} + uu_{xxx}. \tag{CH}$$

*电子邮箱：limin@jxufe.edu.cn（通讯作者）

Camassa-Holm 方程（CH）最初由 Fuchssteiner 和 Fokas 提出 [12]，作为具有双哈密顿结构的 Korteweg-de-Vries（KdV）方程的完全可积推广；随后 Camassa 和 Holm 将其重新推导为一种水波模型[4]，用于描述浅水波在平坦水底上的单向传播。尤为重要的是，CH 方程具有形如 $Ce^{-|x-Ct|}$ 的峰子解，这引起了物理学界的广泛关注，参见 [7, 25]。关于 CH 方程的强适定性、弱解以及解析或几何性质，已有大量研究，下面列举其中一些。文献 [8, 11, 13]研究了 CH 方程柯西问题的局部适定性和适定性问题。文献 [6, 8–10]讨论了强解的爆破解及整体存在性。文献 [2,3,27], 研究了整体弱解和耗散解的存在性。更多结果可参见其中的参考文献。

正如 Hakkaev 和 Kirchev 在 [16], (1.1) 中所提到的，该方程是 Camassa-Holm 方程的一种推广，它保留了 (CH) 的两个重要守恒律，即

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2)dx, \quad F(u) = \int_{\mathbb{R}} (u^{Q+2} + u^Q u_x^2)dx. \tag{1.2}$$

这些是研究 (CH) 孤立波解的轨道稳定性与不稳定性的关键守恒量。我们主要关注 (1.1) 的柯西问题，下面简要回顾相关文献。Hakkafv 和 Kirchev [15] 证明了 (1.1) 在初始数据属于 $H^s(\mathbb{R})$、$s > \frac{3}{2}$ 时局部适定，并且还获得了峰子的稳定性以及 (1.1) 孤立波解的轨道稳定性。Yan 等人 [28] 证明了柯西问题 (1.1) 的解对 $H^s(\mathbb{R})$ 中的初始数据不具有一致连续依赖性，其中 $s < \frac{3}{2}$，并证明了其在 $B^{3/2}_{2,1}(\mathbb{R})$ 中局部适定。

近年来，大量文献致力于研究临界 Besov 空间中 Camassa-Holm 型方程的适定性（尤其是非一致依赖性和适定性问题） [17, 18, 26]。例如，Guo 等人 [13]证明了 Camassa-Holm 方程在临界 Sobolev 空间 $H^{3/2}(\mathbb{R})$中的范数膨胀，从而证明其不适定性，解决了 Danchin [11]留下的开放问题。事实上，在 [13] 中，他们证明了当 $(p, r) \in [1, \infty] \times (1, \infty]$ 时，Camassa-Holm 型方程在 Besov 空间 $B^{1+1/p}_{p,r}(\mathbb{R})$中的不适定性，这意味着 $B^{1+1/p}_{p,1}$ 是临界 Besov 空间。随后，Li 等人[19, 20] 证明了 Camassa-Holm 型方程在 $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$中的非连续性和尖锐非适定性，其中 $s > \max\{\frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{p}\}$。之后，Ye 等人 [29]通过紧性论证和拉格朗日坐标变换，证明了当 $p \in [1, \infty)$时，Camassa-Holm 型方程在 $B^{1+1/p}_{p,1}(\mathbb{R})$中的局部适定性。对于剩余情形 $p = \infty$，Guo 等人[14] 通过展示范数膨胀，证明了 CH 方程在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$中的不适定性；随后 Li 等人[21] 也证明了 Novikov 方程在相同空间中的不适定性。出乎意料的是，Li 等人 [22] 发现，Degasperis-Procesi 方程在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$中是适定的。本文将推导柯西问题 (1.1) 在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$中的不适定性。由于方程 (1.1) 具有强非线性，我们构造初始数据的方法与以往证明截然不同。

我们首先将（1.1）改写为以下等价的非局部形式

$$\begin{cases} u_t + u^Q \partial_x u = -\partial_x (1 - \partial_x^2)^{-1} [\frac{Q^2+3Q}{2(Q+1)} u^{Q+1} + \frac{Q}{2} u^{Q-1} (\partial_x u)^2], & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.3}$$

令 $\Lambda^{-2} = (1 - \partial_x^2)^{-1}$，则 $\Lambda^{-2} f = G * f$，其中 $G(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ 是算子 Λ^{-2} 的核。我们

可以将其转化为 将广义 Camassa-Holm 方程化为以下输运型方程 n

$$\begin{cases} u_t + u^Q u_x = \mathbf{P}_1(u) + \mathbf{P}_2(u), \\ u(x, t=0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中

$$\mathbf{P}_1(u) = -\Lambda^{-2}(c_1 u^{Q-2} u_x^3) - \partial_x \Lambda^{-2}\left(c_2 u^{Q+1}\right) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}_2(u) = -\partial_x \Lambda^{-2}\left(c_3 u^{Q-1} u_x^2\right), \tag{1.5}$$

满足 $c_1 = 0, c_2 = \frac{Q^2+3Q}{2(Q+1)}$ 且 $c_3 = \frac{Q}{2}$。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $Q \geq 2$。广义 Camassa-Holm 方程（*1.1*）的柯西问题在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中是 Hadamard 意义下的不适定问题。更确切地说，对于充分大的 $n \in \mathbb{Z}^+$，存在初始数据 $u_{0,n}$ 使得广义 Camassa-Holm 方程（*1.1*）存在一个解 $u_n \in C([0,1]; H^3)$ 满足

$$\|u_{0,n}\|_{B^1_{\infty,1}} \leq \frac{1}{\log\log n} \quad but \quad \|u_n(t_n)\|_{B^1_{\infty,1}} \geq \log\log n,$$

其中 $t_n \in \left(0, \frac{1}{\log n}\right)$。

注 1.1. 事实上，定理 *1.1* 表明空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中存在范数膨胀，这意味着方程（*1.1*）的数据到解映射在原点 $u_0 = 0$ 处不连续。按照 Hadamard 的定义，这意味着广义 Camassa-Holm 方程（*1.1*）的柯西问题在 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中是不适定的。

2 预备知识

本节将介绍一些与傅里叶变换相关的基本定义和引理，例如 Littlewood-Paley 分解、Besov 空间和 Moser 型估计。本文的一些常用记号将在最后给出。

b 回顾一下，对于所有 $f \in \mathcal{S}$，其傅里叶变换 f, 定义为

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}.$$

任意 g 的逆傅里叶变换定义为

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

接下来，我们回顾一些关于 Littlewood-Paley 分解和非齐次 Besov 空间的事实（更多细节见 [1]）。令 $\mathcal{B} := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 4/3\}$，且 $C := \{\xi \in \mathbb{R} : 3/4 \leq |\xi| \leq 8/3\}$。取一个径向、非负的光滑函数 $\chi : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$，使其支集包含于 $\mathcal{B}$，并且对于 $|\xi| \leq 3/4$，有 $\chi \equiv 1$。令 $\varphi(\xi) := \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$，则可推出 φ 的支集包含于 C。此外，

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}.$$

我们应当强调，事实 $\varphi(\xi) \equiv 1$ 对于 $4/3 \le |\xi| \le 3/2$ 成立，这一点将在下文中用到。对于每个 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$，非齐次二进频块 Δ_j 定义如下

$$\Delta_j u = \begin{cases} 0, & \text{if } j \le -2; \\ \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F} u), & \text{if } j = -1; \\ \varphi(2^{-j}D)u = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}\cdot)\mathcal{F}u\right), & \text{if } j \ge 0. \end{cases}$$

在非齐次情形下，以下 Littlewood-Paley 分解是有意义的

$$u = \sum_{j \ge -1} \Delta_j u \quad \text{for any } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

定义 2.1. 令 $s \in \mathbb{R}$ 且 $(p, r) \in [1, \infty]^2$。非齐次 Besov 空间 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$ 定义为

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \ \|f\|_{B^s_{p,r}(\mathbb{R})} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{B^s_{p,r}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum_{j \ge -1} 2^{sjr} \|\Delta_j f\|^r_{L^p(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{r}}, & \text{if } 1 \le r < \infty, \\ \sup_{j \ge -1} 2^{sj} \|\Delta_j f\|_{L^p(\mathbb{R})}, & \text{if } r = \infty. \end{cases}$$

我们需要以下不等式，这是 Bernstein 结果的推广。

引理 2.1 （[1]中的引理 2.1）。令 $\mathcal{B}$ 为一个球，令 $\mathcal{C}$ 为一个环域。存在常数 $C > 0$，使得对任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、任意 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 以及任意函数 $f \in L^p$ 满足 $1 \le p \le q \le \infty$时，都有

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \lambda \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \|\partial_x^k f\|_{L^q} \le C^{k+1} \lambda^{k+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p}, \\ &\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \lambda \mathcal{C} \ \Rightarrow \ C^{-k-1} \lambda^k \|f\|_{L^p} \le \|\partial_x^k f\|_{L^p} \le C^{k+1} \lambda^k \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

引理 2.2（[1]中的引理 2.100）。设 $1 \le r \le \infty, 1 \le p \le p_1 \le \infty$ 且 $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$。存在一个关于 p、p_1，连续依赖的常数 C，使得

$$\left\| \left(2^j \left\| [\Delta_j, v\partial_x] f \right\|_{L^p} \right)_j \right\|_{\ell^r} \le C \left(\|\partial_x v\|_{L^\infty} \|f\|_{B^1_{p,r}} + \|\partial_x f\|_{L^{p_2}} \|\partial_x v\|_{B^0_{p_1,r}} \right).$$

记号：C 表示某个与 n 无关的正常数，该常数可在不同的行中取不同的值。符号 $A \approx B$ 表示 $C^{-1} B \le A \le CB$。我们将球 $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \text{ 称为: } |x - x_0| \le R\}$，其中 $R > 0$；将环域 $\mathcal{C}(0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R} \text{ 称为: } 0 < r_1 \le |x| \le r_2\}$，其中$0 < r_1 < r_2$。给定一个 Banach 空间 X，我们用 $\|\cdot\|_X$ 表示其范数。如果不引起歧义，我们将使用简写记号 $\|f, \cdots, g\|_X = \|f\|_X + \cdots + \|g\|_X$。我们还将利用范数 $\|f\|_{C^{0,1}} = \|f\|_{L^\infty} + \|\partial_x f\|_{L^\infty}$ 定义 Lipschitz 空间 $C^{0,1}$。对于 $I \subset \mathbb{R}$，我们用 $\mathcal{C}(I; X)$ 表示定义在 I 上且取值于 X 的连续函数所组成的集合。有时我们将 $L^p(0, T; X)$ 记作 $L^p T X$。

3 初始数据的构造

定义一个光滑的截断函数 χ，其取值于 $[0,1]$，并满足

$$\chi(\xi)=\begin{cases}1, & \text{if } |\xi|\le \frac{1}{4^{Q}},\\ 0, & \text{if } |\xi|\ge \frac{1}{2^{Q}}.\end{cases}$$

为简单起见，我们设 $\gamma:=\frac{17}{24}$ 并记

$$n\in 16\mathbb{N}=\{16,32,48,\cdots\}\quad \text{and}\quad \mathbb{N}(n)=\left\{k\in 8\mathbb{N}:\frac{n}{4}\le k\le \frac{n}{2}\right\}.$$

我们引入以下新记号，该记号将在本文中频繁使用

$$\|f\|_{B^{k}_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}=\sum_{j\in\mathbb{N}(n)}2^{k}\|\Delta_j f\|_{L^\infty},\quad k\in\{0,1\}.$$

受 [14,21], w 启发　我们定义包含高频和低频的初始数据 u_0 为

$$u_{0,n}=n^{-\frac{1}{Q+1}}\left(u^{\mathrm{H}}_{0,n}+u^{\mathrm{L}}_{0,n}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{H}}_{0,n}&:=2^{-n}\log n\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^{n}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^{\ell}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma),\\ u^{\mathrm{L}}_{0,n}&:=\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma).\end{aligned}$$

对于任意 $1\le \mathrm{M}\le \mathrm{Q}$，容易验证

$$\begin{aligned}&\operatorname{supp}\mathcal{F}\left(\cos\left(2^{n}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^{\ell}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}^{M}(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\\ &\quad\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}:\ 2^{n}\gamma-2^{\ell}\gamma-\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2^{n}\gamma+2^{\ell}\gamma+\frac{1}{2}\right\},\end{aligned}\tag{3.6}$$

这意味着

$$\operatorname{supp}\widehat{u^{\mathrm{L}}_{0,n}}\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}:\ |\xi|\le\frac{1}{2^{Q}}\right\},\qquad \operatorname{supp}\widehat{u^{\mathrm{H}}_{0,n}}\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}:\ \frac{4}{3}2^{n-1}\le|\xi|\le\frac{3}{2}2^{n-1}\right\}.\tag{3.7}$$

引理 3.1. 存在一个与 n 无关的正常数 C，使得

$$2^{n}\|u^{\mathrm{H}}_{0,n}\|_{L^\infty}+\|\partial_x u^{\mathrm{H}}_{0,n}\|_{L^\infty}\le C\log n,\qquad \|u^{\mathrm{L}}_{0,n}\|_{C^{0,1}}\le C.$$

引理 3.2. 存在一个与 n 无关的正常数 c，使得

$$\left\|u^{Q-1}_{0,n}(\partial_x u_{0,n})^2\right\|_{B^{0}_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\ge c(\log n)^2,\qquad n\gg 1.$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
&u_{0,n}^{Q-1}(\partial_x u_{0,n})^2\\
=&\underbrace{\frac{1}{n}(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}(\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{H}})^2}_{=:\,\mathbf{I}_1}+\underbrace{\frac{1}{n}[u_{0,n}^{Q-1}-(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}](\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{H}}+\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{L}})^2}_{=:\,\mathbf{I}_2}\\
&+\underbrace{\frac{1}{n}(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}\left((\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{L}})^2+2\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{H}}\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{L}}\right)}_{=:\,\mathbf{I}_3}.
\end{aligned}$$

对于项 $\mathbf{I}_2$, 由引理3.1 可得

$$\|\mathbf{I}_2\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\le Cn\|\mathbf{I}_2\|_{L^\infty}\le C\|u_{0,n}^{\mathrm{H}}\|_{L^\infty}\|u_{0,n}\|_{L^\infty}^{Q-2}\|\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{H}},\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{L}}\|_{L^\infty}^2\le C2^{-n}(\log n)^{Q+1}. \tag{3.8}$$

对于项 $\mathbf{I}_3$, 利用（3.7）， 有

$$\Delta_j\mathbf{I}_3=0\quad\text{for } j\in\mathbb{N}(n)\quad\Rightarrow\quad\|\mathbf{I}_3\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}=0. \tag{3.9}$$

对于项 I_1, ， 注意到

$$\begin{aligned}
\partial_x u_{0,n}^{\mathrm{H}}=&-\gamma\log n\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\sin\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\\
&+2^{-n}\log n\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\partial_x\Big(\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\Big),
\end{aligned}$$

于是我们将 I_1 分解如下

$$\mathbf{I}_1=\frac{1}{n}(\log n)^2\left(\mathbf{I}_{11}+\mathbf{I}_{12}-\mathbf{I}_{13}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{11}=&\gamma^2(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\sin\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)^2,\\
\mathbf{I}_{12}=&2^{-2n}(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\partial_x\Big(\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\Big)\right)^2,\\
\mathbf{I}_{13}=&2\gamma2^{-n}(u_{0,n}^{\mathrm{L}})^{Q-1}\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\sin\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\\
&\times\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^n\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\partial_x\Big(\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\Big).
\end{aligned}$$

经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{I}_{12}\|_{L^\infty}&\le C2^{-2n}\|u_{0,n}^{\mathrm{L}}\|_{L^\infty}^{Q-1}\left\|\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\partial_x\Big(\cos\left(2^\ell\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\Big)\right\|_{L^\infty}^2\\
&\le C2^{-2n}\left\|\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\frac{2^\ell}{(1+|x+2^{\ell+1}\gamma|)^M}\right\|_{L^\infty}^2\le C2^{-n},
\end{aligned}$$

这意味着

$$\|\mathbf{I}_{12}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))} \le Cn2^{-n}. \tag{3.10}$$

同理，我们有

$$\|\mathbf{I}_{13}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))} \le Cn2^{-\frac{n}{2}}. \tag{3.11}$$

利用正弦^{2}a 余弦^{2}b = $\frac{1}{4}$(1 − 余弦(2a))(1 + 余弦(2b))，我们可以将 I_{11} 分解为

$$\mathbf{I}_{11} = \gamma^2 \sum_{i=1}^{5} \mathbf{I}_{11i}, \quad \text{where}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{111} &= \frac{1}{4}(u^{\mathrm{L}}_{0,n})^{Q-1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)} \cos\left(2^{\ell+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\check{\chi}^2(x+2^{\ell+1}\gamma),\\
\mathbf{I}_{112} &= \frac{1}{4}(u^{\mathrm{L}}_{0,n})^{Q-1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)} \check{\chi}^2(x+2^{\ell+1}\gamma),\\
\mathbf{I}_{113} &= -\frac{1}{4}(u^{\mathrm{L}}_{0,n})^{Q-1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)} \cos\left(2^{n+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}^2(x+2^{\ell+1}\gamma),\\
\mathbf{I}_{114} &= -\frac{1}{4}(u^{\mathrm{L}}_{0,n})^{Q-1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)} \cos\left(2^{n+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^{\ell+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}^2(x+2^{\ell+1}\gamma),\\
\mathbf{I}_{115} &= (u^{\mathrm{L}}_{0,n})^{Q-1} \sum_{\substack{\ell,j\in\mathbb{N}(n)\\ \ell\neq j}} \Big(\sin\left(2^{n}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^{\ell}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\\
&\qquad \times \sin\left(2^{n}\gamma(x+2^{j+1}\gamma)\right)\cdot\cos\left(2^{j}\gamma(x+2^{j+1}\gamma)\right)\cdot\check{\chi}(x+2^{j+1}\gamma)\Big).
\end{aligned}$$

根据（3.6），我们有

$$\Delta_j\mathbf{I}_{112} = \Delta_j\mathbf{I}_{113} = \Delta_j\mathbf{I}_{114} = 0 \quad \text{for } j\in\mathbb{N}(n) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{I}_{112},\mathbf{I}_{113},\mathbf{I}_{114}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))} = 0. \tag{3.12}$$

利用引理3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{I}_{115}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))} &\le Cn\|\mathbf{I}_{115}\|_{L^\infty} \le Cn\|u^{\mathrm{L}}_{0,n}\|^{Q-1}_{L^\infty} \sum_{\substack{\ell,j\in\mathbb{N}(n)\\ \ell\neq j}} \left\|\check{\chi}(x+2^{\ell+1}\gamma)\cdot\check{\chi}(x+2^{j+1}\gamma)\right\|_{L^\infty}\\
&\le Cn \sum_{j>\ell\in\mathbb{N}(n)} \left\|(1+|x+2^{j+1}\gamma|^2)^{-M}(1+|x+2^{\ell+1}\gamma|^2)^{-M}\right\|_{L^\infty}\\
&\le Cn \sum_{j>\ell\in\mathbb{N}(n)} \left\|(1+|x|^2)^{-M}(1+|x-(2^{j+1}-2^{\ell+1})\gamma|^2))^{-M}\right\|_{L^\infty}\\
&\le Cn \sum_{j>\ell\in\mathbb{N}(n)} \left(\gamma(2^j-2^\ell)\right)^{-2M} \le Cn^3 2^{-\frac{nM}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

最后，我们可以将 I_{111} 分解为三部分

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{111} &= \frac{1}{4}\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^{\ell+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\check{\chi}^{Q+1}(x+2^{\ell+1}\gamma)\\ &\quad+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\ell,j\in\mathbb{N}(n)\\ \ell\neq j}}\cos\left(2^{\ell+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\check{\chi}^{2}(x+2^{\ell+1}\gamma)\check{\chi}^{Q-1}(x+2^{j+1}\gamma)\\ &\quad+\frac{1}{4}\sum_{\ell\in\mathbb{N}(n)}\cos\left(2^{\ell+1}\gamma(x+2^{\ell+1}\gamma)\right)\check{\chi}^{2}(x+2^{\ell+1}\gamma)\cdot\sum_{\substack{\ell_1,\cdots,\ell_{Q-1}\in\mathbb{N}(n)\\ \exists\ell_i\neq\ell_j,\ 1\leq i\neq j\leq Q-1}}\check{\chi}(x+2^{\ell_1+1}\gamma)\cdots\check{\chi}(x+2^{\ell_{Q-1}+1}\gamma)\\ &:=\frac{1}{4}\mathbf{I}_{1111}+\frac{1}{4}\mathbf{I}_{1112}+\frac{1}{4}\mathbf{I}_{1113}.\end{aligned}$$

由（3.6），我们有

$$\dot{\Delta}_j\mathbf{I}_{1111}=\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}\cdot)\mathcal{F}\mathbf{I}_{1111}\right)=\begin{cases}\cos\left(2^{j+1}\gamma(x+2^{j+1}\gamma)\right)\check{\chi}^{Q+1}(x+2^{j+1}\gamma), & \text{if } \ell=j,\\ 0, & \text{if } \ell\neq j,\end{cases}$$

这意味着

$$\|\mathbf{I}_{1111}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}=\sum_{j\in\mathbb{N}(n)}\left\|\cos\left(2^{j+1}\gamma(x+2^{j+1}\gamma)\right)\check{\chi}^{Q+1}(x+2^{j+1}\gamma)\right\|_{L^\infty}\geq\sum_{j\in\mathbb{N}(n)}\check{\chi}^{Q+1}(0)\geq cn. \tag{3.14}$$

按照相同的步骤，如 I_{115},，我们得到

$$\|\mathbf{I}_{1112},\mathbf{I}_{1113}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\leq Cn^Q2^{-\frac{nM}{2}}, \tag{3.15}$$

结合上述估计（3.8）-（3.15），当 n 足够大时，我们得到

$$\begin{aligned}&\|u_{0,n}^{Q-1}(\partial_x u_{0,n})^2\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\\ &\geq\|\mathbf{I}_1\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}-\|\mathbf{I}_2\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\\ &\geq c\frac{1}{n}(\log n)^2\left(\|\mathbf{I}_{1111}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}-\|\mathbf{I}_{12},\mathbf{I}_{13},\mathbf{I}_{115},\mathbf{I}_{1112},\mathbf{I}_{1113}\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))}\right)-C2^{-n}(\log n)^{Q+1}\\ &\geq c(\log n)^2.\end{aligned}$$

引理 3.2 的证明至此完成。 □

4 主定理的证明

根据经典结果，我们可以得到广义 Camassa-Holm 方程存在一个解 $\mathrm{u}_n\in C([0,1];\mathrm{H}^3)$，其初始数据为 $\mathrm{u}_{0,\ n}$。令 ϕ_n 满足以下常微分方程：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n(t,x)=u_n^Q(t,\phi_n(t,x)),\\ \phi_n(0,x)=x,\end{cases} \tag{4.16}$$

这等价于

$$\phi_n(t,x) = x + \int_0^t u_n^Q(\tau, \phi_n(\tau,x))\mathrm{d}\tau. \tag{4.17}$$

考虑输运方程

$$\begin{cases} \partial_t v + u_n^Q \partial_x v = P, \\ v(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.18}$$

由（4.18）可得

$$\partial_t(\Delta_j v) + u_n^Q \partial_x \Delta_j v = R_j + \Delta_j P,$$

其中 $R_j = [u_n^Q, \Delta_j]\partial_x v = u_n^Q \Delta_j \partial_x v - \Delta_j(u_n^Q \partial_x v)$ 。由（4.16），于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\Delta_j v)\circ\phi_n\right) = R_j \circ \phi_n + \Delta_j P \circ \phi_n,$$

这意味着

$$\Delta_j v \circ \phi_n = \Delta_j v_0 + \int_0^t R_j \circ \phi_n \mathrm{d}\tau + \int_0^t \Delta_j P \circ \phi_n \mathrm{d}\tau. \tag{4.19}$$

对于 n $\gg 1$，当 t $\in [0,1]$ 时，有

$$\|u_n\|_{C^{0,1}} \le C\|u_{0,n}\|_{C^{0,1}} \le C n^{-\frac{1}{Q+1}} \log n.$$

T要证明定理 1.1，只需证明存在 $\mathrm{t}_0 \in (0, \frac{1}{\log n}]$ 使得

$$\|u(t_0,\cdot)\|_{B^1_{\infty,1}} \ge \log\log n. \tag{4.20}$$

如果（4.20）不成立，那么

$$\sup_{t\in(0,\frac{1}{\log n}]} \|u(t,\cdot)\|_{B^1_{\infty,1}} < \log\log n. \tag{4.21}$$

利用（4.19）至（1.4）可得

$$\begin{aligned}(\Delta_j u_n)\circ\phi_n = \Delta_j u_{0,n} &+ \int_0^t R^1_{j,n}\circ\phi_n \mathrm{d}\tau + \int_0^t \Delta_j F_n \circ \phi_n \mathrm{d}\tau \\ &+ c_3 \int_0^t (\Delta_j E_n \circ \phi_n - \Delta_j E_{0,n})\mathrm{d}\tau + c_3 t \Delta_j E_{0,n},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R^1_{j,n} &= [u_n^Q, \Delta_j]\partial_x u_n, \qquad F_n = -\Lambda^{-2}\left(c_1 u_n^{Q-2}(\partial_x u_n)^3 + c_2 \partial_x (u_n^{Q+1})\right), \\ E_n &= -\partial_x \Lambda^{-2}\left(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2\right), \qquad E_{0,n} = -\partial_x \Lambda^{-2}\left(u_{0,n}^{Q-1}(\partial_x u_{0,n})^2\right). \end{aligned}$$

由引理3.2，可推出

$$\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty} \approx \sum_{j\in\mathbb{N}(n)} \|\Delta_j\partial_x E_{0,n}\|_{L^\infty} \geq c\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} \left\|\Delta_j[u_{0,n}^{Q-1}(\partial_x u_{0,n})^2]\right\|_{L^\infty} \geq c(\log n)^2. \tag{4.22}$$

接着，利用以下事实 $\|f(t,\phi_n(t,x))\|_{L^\infty} = \|f(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ 以及引理 2.2，可得

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq -1} 2^j\|R^1_{j,n}\circ\phi_n\|_{L^\infty} &= \sum_{j\geq -1} 2^j\|R^1_{j,n}\|_{L^\infty}\\ &\leq C\|\partial_x(u_n^Q)\|_{B^0_{\infty,1}}\|u_n\|_{B^1_{\infty,1}}\\ &\leq C\|u_n\|^{Q-1}_{C^{0,1}}\|u_n\|^2_{B^1_{\infty,1}} \leq Cn^{-\frac{Q-1}{Q+1}}(\log n)^{Q+1}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j F_n\circ\phi_n\|_{L^\infty} &\leq C\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j F_n\|_{L^\infty}\\ &\leq C\|u_n^{Q-2}(\partial_x u_n)^3 + \partial_x(u_n^{Q+1})\|_{L^\infty}\\ &\leq C\|u_n\|^{Q+1}_{C^{0,1}} \leq C\|u_{0,n}\|^{Q+1}_{C^{0,1}} \leq Cn^{-1}(\log n)^{Q+1}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

结合（4.22）-（4.24）并利用引理 3.1-3.2 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|(\Delta_j u_n)\circ\phi_n\|_{L^\infty} &\geq t\sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty} - \sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j E_n\circ\phi_n - \Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty}\\ &\quad - Cn^{-\frac{Q-1}{Q+1}}(\log n)^{Q+1} - C\|u_{0,n}\|_{B^1_{\infty,1}}\\ &\geq ct\log^2 n - \sum_{j\in\mathbb{N}(n)} 2^j\|\Delta_j E_n\circ\phi_n - \Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty} - Cn^{-\frac{1}{Q+1}}(\log n)^{Q+1}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

接下来，我们需要估计项 $\Delta_j E_n\circ\phi_n - \Delta_j E_{0,n}$。利用

$$\begin{aligned}&\partial_x\Lambda^{-2}[(Q-1)u_n^{2Q-2}(\partial_x u_n)^3 + 2u_n^{Q-1}\partial_x(u_n^Q\partial_x u_n)\partial_x u_n]\\ &= \partial_x\Lambda^{-2}[Qu_n^{2Q-2}(\partial_x u_n)^3 + \partial_x(u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2)]\\ &= Q\partial_x\Lambda^{-2}(u_n^{2Q-2}(\partial_x u_n)^3) + \Lambda^{-2}(u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2) - u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2,\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&\partial_t E_n + u_n^Q\partial_x E_n\\ &= -\partial_x\Lambda^{-2}\partial_t(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2) - u_n^Q\partial_x^2\Lambda^{-2}(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2)\\ &= -\partial_x\Lambda^{-2}((Q-1)u_n^{Q-2}\partial_t u_n(\partial_x u_n)^2 + 2u_n^{Q-1}\partial_x u_n\partial_t\partial_x u_n) + u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2 - u_n^Q\Lambda^{-2}(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2)\\ &= \mathrm{J}_n + \partial_x\Lambda^{-2}[(Q-1)u_n^{2Q-2}(\partial_x u_n)^3 + 2u_n^{Q-1}\partial_x(u_n^Q\partial_x u_n)\partial_x u_n] + u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2 - u_n^Q\Lambda^{-2}(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2)\\ &= \mathrm{J}_n + \mathrm{K}_n,\end{aligned} \tag{4.26}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n &= -\partial_x\Lambda^{-2}\left((Q-1)u_n^{Q-2}[\mathbf{P}_1(u_n)+\mathbf{P}_2(u_n)](\partial_x u_n)^2 + 2\partial_x[\mathbf{P}_1(u_n)+\mathbf{P}_2(u_n)]u_n^{Q-1}\partial_x u_n\right),\\ \mathrm{K}_n &= Q\partial_x\Lambda^{-2}(u_n^{2Q-2}(\partial_x u_n)^3) + \Lambda^{-2}(u_n^{2Q-1}(\partial_x u_n)^2) - u_n^Q\Lambda^{-2}(u_n^{Q-1}(\partial_x u_n)^2).\end{aligned}$$

利用（4.19）至（4.26）可得

$$\Delta_j E_n \circ \phi_n - \Delta_j E_{0,n} = \int_0^t [u_n^Q, \Delta_j]\partial_x E_n \circ \phi_n \mathrm{d}\tau + \int_0^t \Delta_j(\mathrm{J}_n + \mathrm{K}_n) \circ \phi_n \mathrm{d}\tau.$$

利用引理中的交换子估计2.2，可得

$$\begin{aligned} 2^j \|[u_n^Q, \Delta_j]\partial_x E_n\|_{L^\infty} &\leq C(\|\partial_x(u_n^Q)\|_{L^\infty}\|E_n\|_{B^1_{\infty,\infty}} + \|\partial_x E_n\|_{L^\infty}\|u_n^Q\|_{B^1_{\infty,\infty}}) \\ &\leq C\|u_n\|_{C^{0,1}}^{2Q+1} \leq Cn^{-\frac{2Q+1}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1}. \end{aligned}$$

由于以下事实

$$\|\Lambda^{-2} f\|_{L^\infty} + \|\partial_x \Lambda^{-2} f\|_{L^\infty} \leq 2\|f\|_{L^\infty} \quad \Rightarrow \quad \|\partial_x^2 \Lambda^{-2} f\|_{L^\infty} \leq 2\|f\|_{L^\infty},$$

于是我们有

$$2^j \|\Delta_j \mathrm{J}_n\|_{L^\infty} \approx \|\partial_x \mathrm{J}_n\|_{L^\infty} \leq C\|u_n\|_{C^{0,1}}^{2Q+1} \leq Cn^{-\frac{2Q+1}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1}.$$

类似地，

$$2^j \|\Delta_j \mathrm{K}_n\|_{L^\infty} \leq C\|u_n\|_{C^{0,1}}^{2Q+1} \leq Cn^{-\frac{2Q+1}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1}.$$

因此，我们推得

$$2^j \|\Delta_j E_n \circ \phi_n - \Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty} \leq C\|u_n\|_{C^{0,1}}^{2Q+1} \leq Cn^{-\frac{2Q+1}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1},$$

这导致

$$\sum_{j \in \mathbb{N}(n)} 2^j \|\Delta_j E_n \circ \phi_n - \Delta_j E_{0,n}\|_{L^\infty} \leq Cn^{-\frac{Q}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1}. \tag{4.27}$$

结合（4.25）和（4.27），则当 $\mathrm{t} = {}^1\!/_{\log n}$ 时，对于 $\mathrm{n} \gg 1$，我们得到

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{B^1_{\infty,1}} &\geq \|u_n(t)\|_{B^1_{\infty,1}(\mathbb{N}(n))} \\ &\geq c \sum_{j \in \mathbb{N}(n)} 2^j \|(\Delta_j u) \circ \phi\|_{L^\infty} \\ &\geq ct(\log n)^2 - Cn^{-\frac{Q}{Q+1}}(\log n)^{2Q+1} - Cn^{-\frac{1}{Q+1}}(\log n)^{Q+1} \\ &\geq \log\log n, \end{aligned}$$

这与假设（4.21）矛盾。因此，定理 1.1 得证。 □

致谢

M. Li 获江西省自然科学基金（20212BAB211011）资助。W. Zhu 获国家自然科学基金（12201118）和广东省基础与应用基础研究基金（2021A1515111018）资助。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] H. Bahouri, J. Y. Chemin, R. Danchin, 《傅里叶分析与非线性偏微分方程》, 数学科学基础丛书, 施普林格, 海德堡, 2011年。[2] A. Bressan 和 A. Constantin, Camassa-Holm 方程的整体保守解, 《Arch. Ration. Mech. Anal.》, 183 (2007), 215-239。[3] A. Bressan 和 A. Constantin, Camassa-Holm 方程的整体耗散解, 《Anal. Appl.》, 5 (2007), 1-27。[4] R. Camassa 和 D. D. Holm, 具有尖峰孤子的可积浅水方程, 《Phys. Rev. Lett.》, 71 (1993), 1661-1664。[5] D. Chae 和 J. Liu, Euler-Poincar´e 方程的爆破、零 α 极限与李维尔型定理, 《Comm. Math. Phys.》, 314 (2012), 671-687。[6] A. Constantin, 浅水方程中永久波与破碎波的存在性：一种几何方法, 《Ann. Inst. Fourier (Grenoble)》, 50 (2000), 321-362。[7] A. Constantin, 斯托克斯波中的粒子轨迹, 《Invent. Math.》, 166 (2006), 523-535。[8] A. Constantin 和 J. Escher, 周期拟线性双曲方程的适定性、整体存在性与爆破现象, 《Comm. Pure Appl. Math.》, 51 (1998), 475-504。[9] A. Constantin 和 J. Escher, 非线性非局部浅水方程的波破碎, 《Acta Math.》, 181 (1998), 229-243。[10] A. Constantin 和 J. Escher, 浅水方程的整体存在性与爆破, 《Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)》, 26 (1998), 303-328。[11] R. Danchin, 关于 Camassa-Holm 方程适定性的一则注记, 《微分方程杂志》, 192 (2003), 429-444。[12] B. Fuchssteiner 和 A. S. Fokas, 辛结构、其 B?cklund 变换及遗传对称性, 《Phys. D》, 4(1) (1981), 47-66。[13] Z. Guo、X. Liu、M. Luc 和 Z. Yin, Camassa-Holm 方程及相关方程在临界空间中的适定性问题, 《微分方程杂志》, 266 (2019), 1698-1707。[14] Y. Guo、W. Ye 和 Z. Yin, Camassa-Holm 方程在 $B^{1}_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中柯西问题的适定性问题, 《微分方程杂志》, 327 (2022), 127-144。[15] S. Hakkaev 和 K. Kirchev, 广义 Camassa-Holm 方程孤立波解的局部适定性与轨道稳定性, 《纯粹与应用数学通讯》, 30 (2005), 761-781。

[16] S. Hakkaev 和 K. Kirchev，广义 Camassa-Holm 方程峰子的适定性与稳定性，《国际非线性科学杂志》，1 (2006)，139-148。[17] A. Himonas 和 C. Kenig，直线上 CH 方程对初始数据的非一致依赖性，《微分与积分方程》，22 (2009)，201–224。[18] A. Himonas、C. Kenig 和 Misiołek，周期 CH 方程的非一致依赖性，《纯粹与应用数学通讯》，35 (2010)，1145–1162。[19] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu，Camassa-Holm 方程在 Besov 空间中对初始数据的非一致依赖性，《微分方程杂志》，269 (2020)，8686–8700。[20] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu，Camassa-Holm 方程及相关方程在 Besov 空间中的适定性问题，《微分方程杂志》，306 (2022)，403–417。[21] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu，Novikov 方程在临界 Besov 空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ 中的适定性问题，arXiv:2210.02677。[22] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu，Degasperis-Procesi 方程在临界 Besov 空间中的适定性与连续性性质，《数学月刊》，(2022) doi.org/10.1007/s00605-022-01691-4[23] J. Li、X. Wu、Y. Yu 和 W. Zhu，Camassa-Holm 方程在临界 Besov 空间中对初始数据的非一致依赖性，《数学流体力学杂志》，23 (2021)，1422-6928。[24] J. Li 和 Z. Yin，关于 Camassa-Holm 型方程在 Besov 空间中适定性的评注，《微分方程杂志》，261 (2016)，6125-6143。[25] J. F. Toland，斯托克斯波，《拓扑方法与非线性分析》，7 (1996)，1-48。[26] X. Wu、Y. Yu 和 Y. Xiao，广义 Camassa-Holm-Novikov 方程在 Besov 空间中对初始数据的非一致依赖性，《数学流体力学杂志》，(2021) 23:104。[27] Z. Xin 和 P. Zhang，关于浅水方程弱解的研究，《Comm. Pure Appl. Math.》，53 (2000)，1411-1433。[28] W. Yan、Y. Li 和 Y. Zhang，广义 Camassa-Holm 方程在 Besov 空间中的柯西问题，《微分方程杂志》，256 (2014)，2876-2901。[29] W. Ye、Z. Yin 和 Y. Guo，关于 Camassa-Holm 型方程在临界 Besov 空间 $B^{1+1/p}{}_{p,1}$, $1 \le p < \infty$ 中局部适定性的新结果，arXiv: 2101.00803,202。