arXiv:2303.00906v1 [math.GT] 2 Mar 2023

带分界集的多重截面与 Weinstein 4-流形

GABRIEL ISLAMBOULI 和 LAURA STARKSTON

1. Introduction

将 4维流形以图示方式编码有多种方法，每种方法都基于一个分解定理，将流形分解为若干简单部分，使图示能够编码这些部分的粘合方式（例如把手分解、Lefschetz 铅笔/纤维化）。最近发展出的此类方法是 Gay 和 Kirby 提出的三分解 [GK16], ，并在 [IN20]中推广为多截面。由于与规范理论的联系，辛结构在 4维拓扑中发挥了关键作用。辛拓扑与把手分解之间的兼容性源自 Weinstein 的构造 [Wei91]，而在 4维情形下，Gompf [Gom98]通过 Legendrian 手术图以图示方式对其进行了编码。类似地，辛流形与 Lefschetz 铅笔及纤维化之间的兼容性也已得到确立 [Don99、GS99a、LP01], , 因此辛流形可以通过纤维、基底曲面、铅笔点和有序消失圈来编码。关于三分解与辛流形之间兼容性的概念见于 [LM18] ，并在 [LMS20], 中证明其存在；但这种兼容性并未提供一种简单的图示方法来编码辛结构（提出这一概念的动机是尝试获得亏格界）。

本文定义了多截面与辛结构之间一种更强的相容性，它可以通过曲面上的曲线集以图示方式编码。除了光滑多截面的图示数据外，我们还追踪另一条多重曲线，它表示接触流形中凸曲面的分界集 。因此，我们将辛流形的这种分解称为带分割的多截面。我们的主要结果是，每个 4 维 Weinstein 域都允许带分割的多截面。

定义 1.1。 辛填充 (W,ω)（其接触边界为 $(\partial W,\xi)$）的**带分割的多截面** 是一个分解 $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$，满足

- $W_i \cong \natural_{k_i} S^1 \times D^3$。
- $W_i \cap W_{i+1} =: \quad H_{i+1} \cong \natural_g S^1 \times D^2$ 对 $i = 1, \ldots, n-1$。
- $\Sigma := W_1 \cap \cdots \cap W_n = \partial H_i$ 对所有 i
- 每个 $(W_i, \ \omega|_{W_i})$ 都是 $(\partial W_i, \ \xi_i)$ 的辛填充。
- $H_i \cup H_{i+1}$ 是 $(\partial W_i, \ \xi_i)$ 的接触 Heegaard 分解
- $H_1 \cup H_{n+1}$ 是 $(\partial W, \ \xi)$ 的接触 Heegaard 分解

带分割的双截面是带分割的多截面，并具有 $n = 2$。

使用接触 Heegaard 分解的优势在于，每个把手体都带有一个标准的正和一个标准的负接触结构，并且二者接触同胚。这是我们用来使多截面与辛几何和接触几何相容的关键思想之一。

注记 1.2。 在定义 1.1 的第四个要点中，我们要求 $(W_i, \omega|_{W_i})$ 是一个辛填充。请注意，在我们的设定中，弱、强、Liouville 和 Weinstein 可填充性彼此等价，因为 $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ 存在唯一的弱辛填充（相差辛变形），而且这个填充实际上是 Weinstein 填充（因而也是强填充和 Liouville 填充） [NW11]。

LS 得到了美国国家科学基金会项目 1904074、美国国家科学基金会项目 2042345 以及斯隆研究奖学金的支持

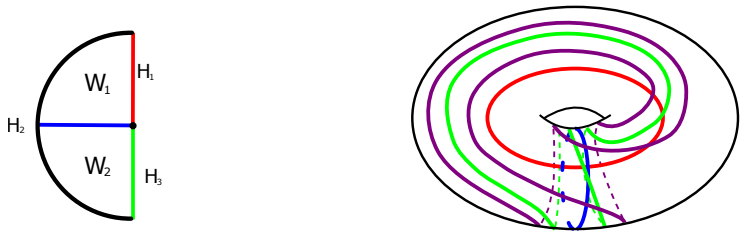


FIGURE 1. 左：带分割的双截面示意图。每个 W_i 都是一个四维 Weinstein 1-把手体，而每个 H_i 都是通过取勒让德图的邻域得到的三维 1-把手体。右： S^2上单位余切丛的带分界线的双分割图。红色、蓝色和绿色曲线表示分别在相应把手体中围成压缩圆盘的曲线，紫色曲线则是曲面的分界集。

带分割的多截面的一个重要特征是，它们可以编码为一系列切割系统，以及闭曲面上的一个固定分界集。图示表示的一个例子，以及其所编码内容的示意图，可见图 1。

我们能够以图示方式编码辛几何数据，因为我们的带分界线的多重分解在几何上受到严格限制：我们要求每个 Heegaard 分解都是一个接触 *Heegaard* 分解(定义见第2.1 节)。即使是如 [LM18、LMS20]中所说的“Weinstein 多重分解”，一般的辛流形多重分解也不太可能满足这一条件。因此，令人惊讶的是，这种在几何上受到严格限制的多重分解实际上普遍存在。我们的主要定理如下。

定理。 每个紧致四维 *Weinstein* 域都具有带分割的多截面。

我们给出该定理的两种证明，各自具有不同的优点。这两种证明还都产生了用于构造带分割的多截面图示的算法方法。第一种证明以 Kirby-Weinstein 图示为输入，并产生一个带分割的双截面。该算法的缺点是，核心曲面的亏格通常会非常高，因此效率往往很低。另一方面，其输出只有两个扇区，而不是任意多个扇区。

第二种证明以正容许 Lefschetz 纤维化（PALF）为输入，并产生一个带分割的多截面。在这种情况下，亏格更易于控制，由 PALF 的纤维拓扑决定；然而，扇区可能很多（潜在地每个 Lefschetz 奇点对应一个扇区）。更具体地说，我们证明如下结果。

定理。 令 $f\colon\ W^4 \to D^2$ 为一个 *PALF*，其正则纤维是一个具有 b 个边界分支、亏格为 g 的曲面，并且具有 n 个奇异纤维。则 W^4 具有一个带分割的亏格为 $2g+b-1$ n的多截面。

可以将这些结果以及定义 1.1 与 [LM18、LMS20] 中关于闭辛流形的 Weinstein 三分解的定义进行比较。主要区别在于，先前的定义并未要求每个扇区边界上诱导的接触结构与三分解所诱导的边界 Heegaard 分解之间具有任何兼容性。因此，这些先前定义中没有简单的图示数据能够编码接触拓扑和辛拓扑。（最有可能作为此类图示数据的，是每个把手体上的带权叶状结构，但带权叶状结构的数据并非离散的。）相比之下，在我们限制更严格的带分割的多截面概念中，辛几何和接触几何可以通过核心曲面上的单个分界集以图示方式编码。

注 1.3： 光滑多分解既适用于闭流形，也适用于带边流形。本文在辛流形具有接触边界的情况下，给出了带分割的多截面的定义。该定义可以自然地推广到闭流形。

尽管本文建立的是 Weinstein 域而非闭辛流形存在相应分解，但这是通过 Donaldson [Don96] 和 Giroux [Gir02a，Gir17]的结果，为证明所有闭辛流形都存在带分割的类似多截面所迈出的关键一步。

Lefschetz 纤维化的单值化是右手 Dehn 扭转的乘积。一般来说，同一个映射类元素可以有多种表示为右手 Dehn 扭转乘积的方式。将其中一种表示替换为另一种表示称为单值化替换。许多重要的辛切割与粘贴操作（如有理吹降）都可以看作 Lefschetz 纤维化上的单值化替换操作 [EG10] [EMVHM11]。通过算法追踪单值化替换对 PALF 所产生的变化，我们能够在带分割的多截面上实现这些切割与粘贴操作。在图 15中，我们对由灯笼关系产生的单值化替换作了明确展示；该替换会诱导一个 C_2-有理吹降。

本文最后给出带分割的亏格1多重分解的分类。带边界的光滑亏格1多重分解此前在 [IKLM22] 中被分类为当且仅当该流形是由2-球面构成的线性铅垂时存在。我们要求多截面与亏格1接触 Heegaard 分解相容，这一条件使范围进一步大幅缩小，具体如下述定理所示。

定理。 带分割弧的亏格-*1* n分解对应于对 $n-1$ 个*2*-球面上的圆盘丛进行的铅垂和，每个圆盘丛的欧拉数为 -2。

本文的结构安排如下。第 2 节讨论如何要求接触结构与 Heegaard 分解及三维把手体相容。第 3 节给出主定理的第一个证明，展示如何将 Kirby-Weinstein 体柄图转化为带分割的多截面。第4 节给出主定理的第二个证明，展示如何将正向 Lefschetz 纤维化转化为带分割的多截面。第 5 节对带分割弧的亏格1多重分解进行分类，并展示如何通过稳定化带分割集的多重分解图来提高曲面的亏格。最后，第6 节讨论一些未来研究的问题。

2. Contact geometry and Heegaard splittings

本节说明接触结构与 Heegaard 分解之间的相容条件；我们将在每个扇区的边界上要求满足这一条件。我们还将给出这种相容性的图示表述。首先介绍接触流形中曲面的一些背景知识。

一个曲面 Σ 嵌入接触 3-流形（Y，ξ）中，称为**凸**，若存在一个接触向量场 v，对于（Y，ξ），使得 v 与 Σ横截。凸曲面是一般性的，也就是说，每个光滑嵌入曲面都可以通过一个 C^∞-小同痕变为凸曲面 [Gir91，Hon00]。给定一个 v 与 Σ 横截的接触向量场，我们得到一条称为**分界集**的多重曲线，记为 Γ_Σ。这条多重曲线由 $\Gamma_\Sigma = \{x \in \Sigma | v_x \subset \xi\}$ 定义，而这条曲线的同痕类是 Σ 在凸曲面上的同痕意义下的嵌入不变量。

分界集捕捉了在接触向量场流动所得到的邻域 $\Sigma \times [-\epsilon, \epsilon]$ 中，Σ 的全部接触几何信息。更确切地说，我们有 Giroux 柔性定理。

定理 *2.1.*（[*Gir*91]）设 Σ 是一个闭可定向曲面，且 $f_0 \colon \Sigma \to (Y, \xi)$ 和 $g \colon \Sigma \to (Y', \xi')$ 是 Σ 的凸嵌入。设 v 是一个与 (Y, ξ) 横截的接触向量场。若定向多重曲线 $f_0^{-1}(\Gamma_{f_0(\Sigma)})$ 和 $g^{-1}(\Gamma_{g(\Sigma)})$ 同痕，则存在一个针对 $t \in [0,1]$ 的同痕 f_t，使得 $f_1^*(\xi|_{f_1(\Sigma)}) = g^*(\xi|_{f_1(\Sigma)})$。

给定一个把手体，H，一个**骨架**对于 H 是一个图，G，满足 H 收缩到 G。如果 H 此外还带有接触结构，那么一个骨架，G，若被称为**Legendrian骨架**，则其每条边都是Legendrian弧或结。结合Darboux定理与Legendrian对象的标准邻域 [Gei08，定理2.5。8]，我们可以看到，Legendrian骨架具有一个标准的紧接触邻域，该邻域由与接触平面相切的骨架的带状邻域决定。

2.1. **接触 Heegaard 分解**。

定义2.2。接触流形（Y， ξ）的接触 *Heegaard* 分解是一个Heegaard 分解$Y = H_1 \cup_\Sigma H_2$，满足 H_1 和 H_2 分别与Legendrian骨架 L_1 和 L_2的标准邻域接触同胚。

我们将作为勒让德图标准邻域的把手体称为标准接触把手体。请注意，给定亏格的光滑把手体通常具有多种不同的“标准”接触结构，而这些结构由边界上分界集的分支数加以区分。不同的选项源于这样一个事实：通常存在多个不同的带边界曲面，其双倍是一个亏格为 g 的曲面（由边界分支数决定）。

接触 Heegaard 分解这一概念起源于 Giroux [Gir02b]，Torisu 也对其进行了发展 [Tor00]，并且它可以等价地表述如下。

引理 2.3 ([Gir02b，Tor00])。设 $H_1 \cup_\Sigma H_2$ 是 $(Y，\xi)$ 的一个 *Heegaard* 分解，其中 Σ 为凸曲面。以下各项等价

(1) H_1 和 H_2 是勒让德图的标准邻域(2) H_1 和 H_2 是支撑$(Y，\xi)$ 的开书分解的两个部分 (3) 对于每个把手体 H_i，都存在一组压缩圆盘，将 H_i 切割成一个球，使得每个压缩圆盘的边界与 Σ 上的分界集恰好相交于两个点。

虽然这些等价关系已为人所知，我们仍回顾如何在它们之间转换。若将 H_1 和H_2 视为勒让德图的标准邻域，我们可以将相应开书分解的页 F 看作该勒让德图的接触框架带。接触平面沿勒让德图与F 相切，因此在标准邻域中， $d\alpha$ 限制在该页上时是一个正面积形式。此外，在标准模型中，我们可以识别出 $H_i = F \times I/\sim$（其中（x、t）$\sim$（x、t'）对于$x \in \partial F$），使得 $d\alpha$ 在每个 $F \times \{t\}$上均为正。由此可见，第一种刻画导出了第二种刻画。反过来，给定一个支撑开书分解，我们可以在两页上将骨架实现为勒让德图。将抽象开书上定义的接触结构限制在半数页面上，可见这就是该勒让德骨架的一个标准邻域。勒让德图标准邻域边界上的分界集，恰好是接触框架带与 $\Sigma = \partial H_i$的交集。因此，图的每条边的子午线与分界集恰好相交于两点。类似地，若 H_1 和 H_2 是开书分解的两半，则 $\Sigma = \partial H_1 = \partial H_2$ 上的分界集就是开书 ∂F的绑定。 $F \times I/\sim$的一组压缩圆盘为 $a_j \times I/\sim$，其中 $\{a_j\}$ 是F 上的一组弧，它们将 F 切割成一个圆盘。每个 $a_j \times I/\sim$ 都与绑定恰好相交于两点（即 ∂F 中 a_j 的端点）。如果一个 Heegaard 分解的每个把手体都配有压缩圆盘，且每个圆盘均与分界集相交于两点，那么沿这些压缩圆盘切割，就会得到一个带有唯一紧接触结构的球。反向进行这些切割，相当于附加标准接触1-柄，从而得到勒让德图的标准邻域。

要使多截面与辛结构相兼容，面临着一个根本性的挑战。多截面中的每个内部三维把手体都会出现在两个四维扇区的边界上，但这两个边界定向彼此相反。将一个扇区视为其边界的辛填充，会在边界上诱导出一种接触结构；相对于边界 定向，这是一种正 接触结构。接触结构的正负号（相对于固定定向而言）是接触平面固有的性质，用来衡量接触平面扭转的方向或旋向。请注意，这与接触结构的余定向并不相同；余定向仅取决于接触形式，而非接触结构。因此，在固定流形上，我们无法让完全相同的接触结构相对于固定定向同时实现正接触结构和负接触结构。一般而言，这意味着我们需要在多截面的每个内部 H_i 上定义两种不同的接触结构。然而，正如我们在

下面的引理中所示，存在正、负两种标准接触把手体，它们彼此之间存在反转定向的接触同胚。正、负接触结构都由同一个半开书支撑。

引理 2.4。设 F 为带边界曲面。设 η 为 F 上的一个1-形式，它在 F的定向边界上取正值，且 $d\eta$是 F上的面积形式。考虑 $F\times I/\sim$，其中$(x,t)\sim(x,t')$只要 $x\in\partial F$就成立。以 t 作为参数化 I 方向的坐标，令

$$\alpha^{\pm}=\pm dt+\eta.$$

那么 $\xi^{+}:=\ker(\alpha^{+})$（分别地，$\xi^{-}:=\ker(\alpha^{-})$）是 H 上的正（分别地，负）接触结构，由 $F\times I/\sim$上的平凡半开书支撑（页为 $F\times\{t\}$）。

证明。 $\xi^{\pm}$ 是一个 $\pm$ 接触结构，因为

$$(\pm dt+\eta)\wedge d(\pm dt+\eta)=\pm dt\wedge d\eta$$

是 $F\times I$上的体积形式。注意， $\pm dt+\eta$与 t无关，因此该形式在商空间 $F\times I/\sim$上定义良好。

要验证它由开书支撑，我们需要确认 $\alpha^{\pm}$ 在绑定上取正值，且 $d\alpha^{\pm}$ 是页上的正面积形式。事实上，如果 T 是正向切于 ∂F 的向量，那么 $\alpha^{\pm}(T)=\eta(T)>0$，并且根据假设， $d\alpha^{\pm}=d\eta$ 是 F 上的正面积形式。□

注2.5。注意，总能在具有非空边界的曲面 F 上找到这样的 1-形式 η。另外，观察将 $t\in I$ 映到 $-t$ 的反向定向微分同胚会将 α^{+} 映到 α^{-}。

2.2. **接触 Heegaard 图**。受引理2.3中第三种刻画的启发，我们定义接触 Heegaard 分解的图示版本。

定义 2.6. 一个**接触 Heegaard 图**是一个四元组（Σ， d， C_1， C_2），满足：

- Σ是一个闭定向曲面。
- d 是一个多重曲线，它将 Σ 分隔为两个同胚的带边界曲面。
- C_i $i\in\{1,2\}$ 是 Σ 的一个切割系统，使得每条曲线与 d 相交两次。

给定一个接触 Heegaard 图，我们可以重构一个接触流形及其接触 Heegaard 分解。特别地，若 F 是 $\Sigma\setminus d$的一半，则我们在每个把手体上赋予由 $F\times I$导出的标准接触结构。这会诱导一个以 F 为页、以 d为绑定的开书，进而诱导一个接触结构。反过来，根据引理2.3的特征刻画 (3)，每个接触 Heegaard 分解都有一个接触 Heegaard 图。

这种对应关系使我们能够对 S^3的属一接触 Heegaard 分解进行分类，详见第5.1节。特别地，根据欧拉示性数的考量，属一接触 Heegaard 分解对应于 S^3 的环带页开书分解。此时，单值化由沿该环带核的左手或右手德恩扭转构成。右手德恩扭转给出 S^3 上的紧接触结构，而左手德恩扭转则给出过扭结构。由此得到图2所示的 Heegaard 图。

2.3. **由勒让德前投影得到的标准邻域上的分界集**。在第 3 节中，我们将研究 S^3，或者更一般地说，$\#_{k_1}S^1\times S^2$，其中一个~把手体是勒让德图 Λ 的标准邻域，该图由前投影描述；另一个把手体则是其补集。为了验证该补集是标准接触把手体，我们需要准确了解如何根据前投影，在明确嵌入的勒让德图的标准邻域边界上绘制分界集。

我们将主要关注三价勒让德图。可以通过勒让德变形增添额外的勒让德边，将高价顶点拆分为三价顶点；这种变形会保持标准邻域不变，因此也保持其边界上的分界集不变。给定一个表示 $\mathbb{R}^3$ 中勒让德嵌入的前投影，我们可以画出标准邻域边界上相应的分界集。回想一下，标准接触把手体边界上的分界集是相容开书分解中页的边界。开书的一页

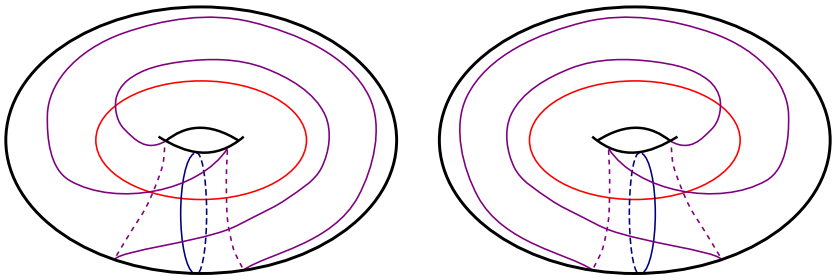


FIGURE 2. 文中所述的两个亏格1凸海加德图。左侧的是紧致的，而右侧的是过扭曲的。

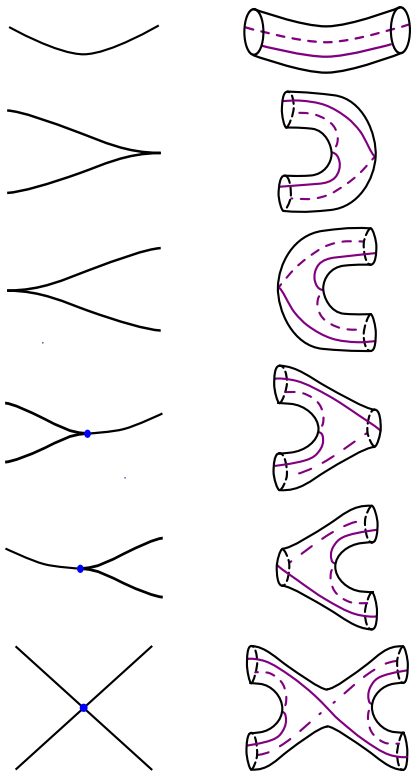


FIGURE 3. 左：三价勒让德图的局部模型。右：图的正则邻域边界上分界集的局部模型。要从前面的模型得到最后一个模型，请参见图 4。

由勒让德结的接触框架带给出。考察接触框架在左、右尖点以及左、右三价顶点处的缠绕方式，我们便得到图 3 所示的分界集局部模型。前五种模型涵盖了三价勒让德图的一般前投影。最后一种模型包含一条 Legendrian弧，它退化地投影为一个点，其两个端点均为三价顶点。我们可以将此模型同痕变形为图 4 中的一般前投影，从而根据前述模型推导出它的局部模型。为方便起见，我们保留了最后这个“复合”模型，因为在实现第 3.1 节的算法时会大量用到它。

3. Kirby-Weinstein handlebody diagrams and multisections with divides

本节将说明如何利用 Kirby-Weinstein 把体图构造带分割的双截面。证明的一个推论是，可以从 Kirby-Weinstein 图示中得到带分界线的多截面图（定义见第 3.2 节）的一个算法。

3.1. 由 Kirby-Weinstein 把体图示得到带分割的双截面的存在性。

定理 3.1 定理。每个紧致的 4 维 *Weinstein* 域都存在带分割的双截面 $s.$

证明。 根据定义，魏因斯坦 4-流形具有魏因斯坦把手结构。根据 [Gom98], ，该把手结构可以通过带有 1-柄的勒让德前投影以标准形式表示（我们将其称为 Kirby-Weinstein 图）。我们将给出一种算法，将 Gompf 标准形式的 Kirby-Weinstein 图转换为带分割弧的多截面图。如果忽略辛结构和接触结构，该算法的光滑部分本质上遵循 [GK16] 和 [MSZ16] 中用于将 Kirby 图转换为三分解的方法。

0-柄与 1-柄的并集将是 W_1。它与 $\natural_{k_i} S^1 \times D^3$ 微分同胚，并且将 W 的魏因斯坦结构限制在 W_1 上后，它是其边界的魏因斯坦填充（∂W_1，ξ_1）。

我们将构造 (∂W_1，ξ_1) 的接触 Heegaard 分解 $H_1 \cup_\Sigma H_2$，使得 W 的 2-柄的勒让德附着球面是 H_2 的勒让德核心的子集。然后，我们将定义 W_2 为 H_2 的一个领域与 W 的 2-柄之并。由于 2-柄的附着球面是 H_2 的勒让德核心的子集，我们将看到 W_2 与 $\natural_{k_2} S^1 \times D^3$ 微分同胚。由 $H_2 \cup H_3$ 给出 ∂W_2 的一个自然诱导的 Heegaard 分解，其中 H_3 通过在 2-柄的附着球面上进行勒让德手术而从 H_2 获得。随后我们将证明，这也是一个接触 Heegaard 分解，并且 $(W_2, \omega|_{W_2})$ 是该接触流形的辛填充。

设 Λ 为 W 在 $\#_{k_1} S^1 \times S^2$ 中的 2-柄所对应的勒让德附着链环。为了构造适当的接触 Heegaard 分解 $H_1 \cup H_2$ （∂W_1，ξ_1），我们将在 Λ 中添加勒让德隧道，从而得到一个包含 Λ 的勒让德图 $\widetilde{\Lambda}$。 Λ 的标准接触邻域将是 H_2，其补集将是 H_1。添加隧道的首要目的是确保 Λ 的邻域的补集是一个把手体。还将添加额外的隧道，以确保此把手体具有标准接触结构。

其构造 $\widetilde{\Lambda}$如下。

(1) 从 Λ的 Gompf 标准形式开始。(2) 如果 W 中存在腰带球面与 Λ不相交的 1-柄，则添加一个穿过该 1-柄一次的勒让德圆。(3) 对每个 1-柄，添加勒让德弧，将穿过该 1-柄的所有股线在左右两侧连接起来，如图 6所示。(4) 在图示的每个交叉点处，添加一条投影到该交叉点、连接上股线与下股线的勒让德弧。图 4 展示了勒让德同位图的一般前投影。(5) 添加勒让德弧连接非连通分支，直至该图连通。(6) 得到的前投影将平面划分为若干区域，每个区域的边界都是一个勒让德平凡结。按照图 5 所示，继续添加勒让德弧来细分各区域，使得最后每个区域都由一个勒让德平凡结围成，且具有 $tb = -1$。也就是说，前投影中的每个区域都应有唯一的“右尖点”和唯一的“左尖点”；如果区域边界上与某个顶点相接的两条边都从左侧趋近该顶点，则该顶点是该区域的右尖点；若两条边都从右侧趋近该顶点，则该顶点是左尖点。注意，此处可通过勒让德变形缩短连接两条股线的勒让德弧，从而将每个交叉点视为单个顶点。

现在，若 H_2 是 Λ的标准接触邻域，且 H_1 是其补集，我们要证明 $H_1 \cup H_2$ 是一个接触 Heegaard 分解。如果 Kirby-Weinstein 图中没有 1-柄，

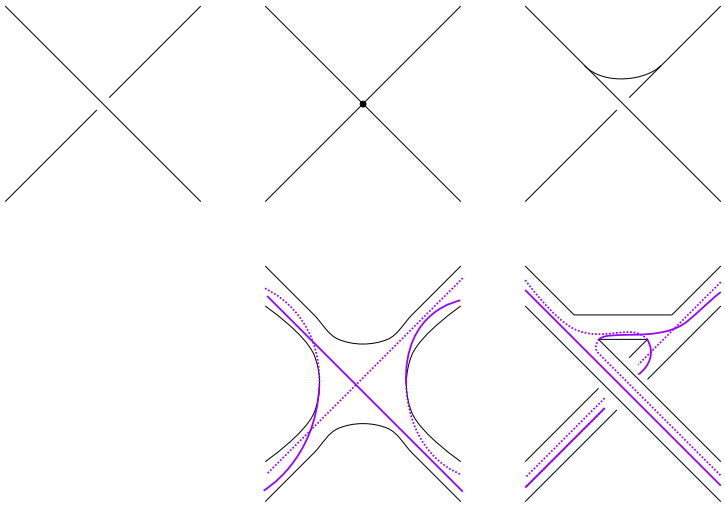


FIGURE 4. 在每个交叉点处添加一条投影到该交叉点的隧道（顶部中央），所得结果与右上方所示的一般位置前投影 Legendrian 同伦。利用标准模型可以确定邻域边界上的分界集，从而得到右下方的图示，随后通过同痕变形得到下方中央的图示。

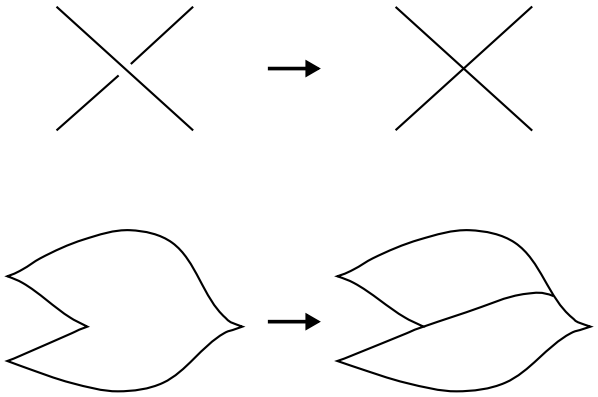


FIGURE 5. 首先，我们通过添加竖直的 Legendrian 隧道，将结中的每个交叉点展平。为了使每个区域成为具有 $tb = -1$ 的 Legendrian 平凡结，我们还可以向带有额外尖点的区域添加隧道。

H_1 是一个光滑把手体，因为我们在每个交叉点处都放置了隧道，因此 H_1 微分同胚于一个附有 $\tilde{}$个把手的 3-球，图示 Λ的每个有界平面区域对应一个把手。若 Kirby-Weinstein 图中有 1-柄，则每个 1-柄还会对应一个额外的压缩圆盘，如图 7所示。

利用图 3中的模型，我们可以绘制分界集 d 在边界 Σ 上 H_2 关于前投影的图示。为了说明 H_1 具有标准接触结构，我们证明存在一组 H_1 在 Σ 上的压缩曲线，使得每条曲线都与分界集相交于两个点。

令Λ,$\{D_j\}$并令为D_j前投影的补集中相的有的区域图中没有 1-柄，那么 $\{D_j\}$ 构成 H_1的一组$\tilde{}$压缩圆盘，它们将 H_1 切成一个球。若存在 1-柄，则每个 1-柄也有一个如图7 所示的压缩圆盘。在穿过

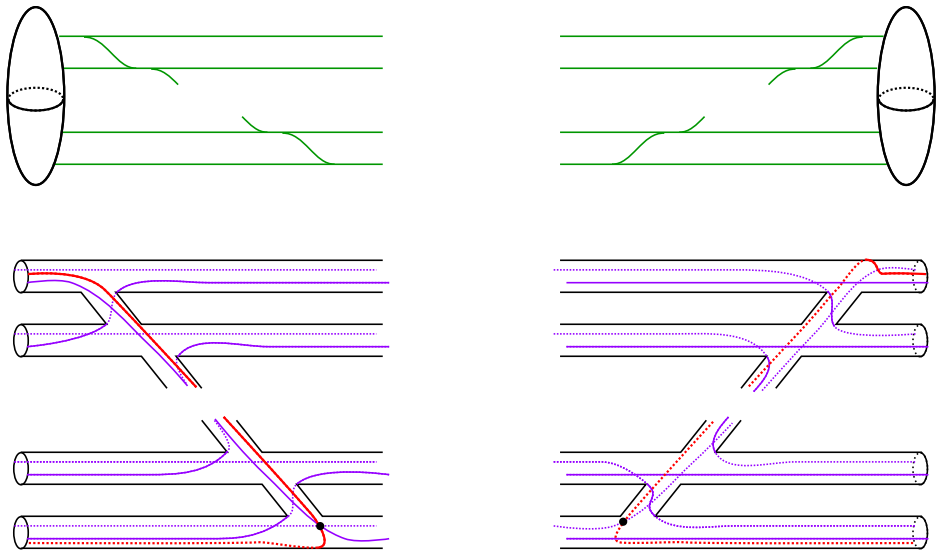
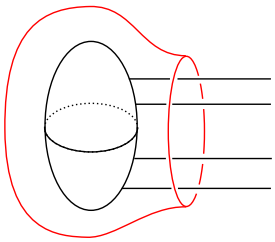


FIGURE 6. 在穿过同一个 1-柄的平行股线之间添加隧道，可以在 Leg-~endrian 图 Λ 的邻域边界上找到一条曲线；由 1-柄所诱导的手术会在外部产生一个圆盘，而这条曲线正是该圆盘的边界。严格按照图示方式选择弧，便能确保找到这样一条与分界集恰好相交于两点的曲线。图的下半部分展示了海加德曲面的相关部分，以及分界集（紫色）和压缩曲线（红色）。



每个 1-柄对应的附加压缩圆盘。

该 1-柄的区域上进行把手滑动后，我们可以将这条压缩曲线实现为图6 所示的形式，使其与分界集恰好相交于两点。为了说明每个 D_j 的边界与分界集相交于两点，~我们利用构造 Λ最后一步中的性质：每个区域都以一个 Legendrian 平凡结为边界，且 $tb = -1$，这意味着存在唯一一个左尖点（可能是一个顶点）和唯一一个右尖点（可能是一个顶点）。沿区域边界的其他顶点处，该区域边界上的两条边从不同侧进入顶点。考察图3 中的局部模型作为区域边界时可能出现的所有情形，可以看到，每个尖点（标准尖点或顶点尖点）都会贡献分界集与 ∂D_j之间的一个交点，而区域边界上的其余边和顶点不会贡献分界集与 ∂D_j之间的任何交点。因此我们看到， H_1 是一个标准接触把手体。

接下来，我们考察第二个扇区 W_2。我们需要证明 $W_2 \cong \natural_{k_2} S^1 \times D^3$，即存在一个定义在 ∂W_2 上的接触结构 ξ，并带有接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup_\Sigma H_3$，使得 $(W_2, \omega|_{W_2})$ 是 $(\partial W_2, \xi)$ 的辛填充。回想一下，W_2 是通过沿着 $\widetilde{\ }$ 上的勒让德链 $\Lambda \subset \Lambda$ 附加带有框架 $ct-1$ 的 2-把手，从 $H_2 \times I$ 得到的，其中 ct 是由接触平面诱导的框架。由于 Λ 嵌入在 $\widetilde{\Lambda}$ 中（即 H_2 的核），W_2 与 $\natural_{k_2} S^1 \times D^3$ 微分同胚。∂W_2 的一个自然 Heegaard 分解由 $H_2 \cup_\Sigma H_3$ 给出，其中 $H_3 =$（H_2）$_{ct-1}$（Λ）（沿着 Λ 对 H_2 进行 $ct-1$ 手术）。通过勒让德手术可以得到一个定义良好的接触结构，它与 H_2 在 $\partial H_3 = \Sigma$ 附近的接触结构一致（因为手术是在内部进行的）。因此，$\partial H_3 = \Sigma$ 上的分界集可视为与 $\partial H_2 = \Sigma$ 上的分界集相同，但 H_3 的压缩曲线会因手术而改变。具体而言，对于 Λ 的每个分支 Λ_k，压缩曲线会从 Λ_k 的子午线变为 Σ 上 Λ_k 的一个 $ct-1$-框架副本。由于分界集平行于 Λ_k 的 ct 框架，Λ_k 的 $ct-1$ 框架恰好与分界集相交两次。因此，H_3 是一个标准接触把手体，其接触结构由对 H_2 进行勒让德手术诱导。注意，利用引理 2.4 中 H_2 上的负接触结构，H_2 也是一个标准接触把手体。将二者结合起来，我们得到 ∂W_2 的一个接触 Heegaard 分解。

只需证明 $(W_2, \omega|_{W_2})$ 是 ∂W_2 的 Weinstein 填充，其中 ∂W_2 上的接触结构由接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup_\Sigma H_3$ 给出。为此，注意到 $H_2 \times I$ 是一个 1-把手体；将 ω 限制在 W_2 的这个子集上，并适当缩小 I 后，辛结构必定是 H_2 的各向同性脊的标准邻域。换言之，带有辛结构 ω 的 $H_2 \times I$ 与一个 Weinstein 1- 手柄体辛同胚。此外，$\partial(H_2 \times I) = \#_{k_1} S^1 \times S^2$ 上诱导的唯一紧接触结构由开书 $F \times S^1$ 支撑（将 $H_2 = F \times I$ 视为.....）。这个单值化平凡的开书恰好给出接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup H_2$（其中我们沿 ∂H_2 压缩 I）。由于 W_2（带有接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup_\Sigma H_3$）是通过沿 H_2 中的勒让德结附加 Weinstein 2-柄，从 Weinstein 1-手柄体 $H_2 \times I$（带有接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup_\Sigma H_2$）得到的，因此 W_2 是接触 Heegaard 分解 $H_2 \cup_\Sigma H_3$ 的 Weinstein 填充。

□

3.2. **带分割弧的多截面图**。 带分割弧的多截面的一个基本特征是，它们可以完全编码在一个曲面上。本节定义这类图示，并说明如何利用前面的证明，从 Kirby-Weinstein 体柄图中得到带分界线的双分割图的算法。

定义 3.2。 带分界线的多截面图由一个闭可定向曲面，以及一组分界曲线 d 和切割系统 $C_1, C_2, ..., C_n$ 组成，且对所有 $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

- C_i 中的每条曲线都与 d 相交于两点。
- $(\Sigma, d, C_i, C_{i+1})$ 是 $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ 上紧致接触结构的一种接触 Heegaard 分解，其中 $k_i \in \mathbb{N}$。

备注 3.3. 容易检验每个切割系统中的每条曲线都与分界集相交于两点这一条件。然而，要检验两个相邻的接触体柄体的并是否构成 $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ 上的紧致 接触结构，则可能相当困难。

定理 3.1 的证明给出了一种算法方法，可按如下步骤获得带分界线的多截面图。

从 Kirby-Weinstein 体柄图中，模型绘制分割集 d 于 Σ 上，使其成为 $\widetilde{\ }$ 邻域 Λ (H_2) 的边界，并以此前投影表示。

我们可以如下描述把手体 C_i $i \in \{1, 2, 3\}$ 的切割系统 H_1，H_2以及 H_3。切割系统 C_1 由平面图的各个区域，以及一条沿着垂直隧道的曲线组成；这些垂直隧道是在穿过各个 1-柄的 2-把手之间添加的，如图6所示——注意，该图中的曲线与分界集相交于两点。由于这些区域是 $tb = -1$

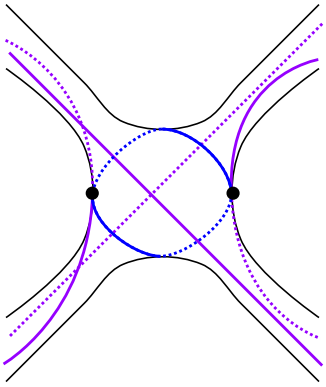


FIGURE 8. 交叉点处隧道的子午线投影为图中的蓝色曲线 he
。注意，这条曲线与分界集相交于两点。

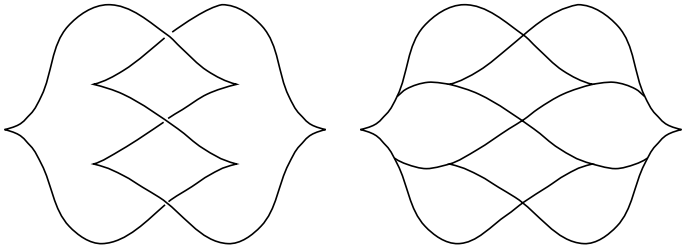


FIGURE 9. 在左侧的右手 Legendrian 三叶结上添加隧道后，得到右侧的图。注意，外部是平凡结，并且图中每个有界区域都是一个 $tb = -1$ 平凡结。

平凡结的图示，因此每条由区域边界构成的曲线都与分界集相交于两点。这确保了这一对（Σ，C_1）构成标准接触把手体的图示。

切割系统 C_2 由每条隧道的子午线与 Kirby-Weinstein 图中每个结的子午线组成。利用图 3 和图 8 顶部的局部模型，我们看到这些曲线与分界集相交两次，因此（Σ，C_2）也是一个标准接触把手体。由于（Σ，C_1，C_2，d）表示 Kirby-Weinstein 体柄图中 0-柄与 1-柄边界的 Heegaard 分解，它是辛可填充的，因此必定承载由若干个 $S^1 \times S^2$的连通和构成的流形上的紧接触结构。

为得到 C_3，我们首先在图示中的每个结分支 K_i 上取一个勒让德推离。每个这样的分支与其选定的子午线相交 C_2 一次，且完全不与分界集相交。对每个分支 K_i 沿子午线添加一个左手扭转，得到一条曲线 K_i'，其曲面框架等于接触框架 -1，并与分界集相交两次。然后，将 C_2 中的每条子午线替换为对应的 K_i'，得到图示 (Σ，d，C_2，C_3)，它表示一个由若干个 $S^1 \times S^2$的副本连通和而成的流形的接触 Heegaard 分解。因此，(Σ，d，C_1，C_2，C_3)是该流形的带分界线的双分割图。

图 9 和10 展示了这一算法在给 tb 最大右手性三叶结附加一个 Weinstein 把手后的结果；图 11 和12 则展示了 Weinstein 域 $T^*\mathbb{RP}^2$，它是一个以 $\mathbb{RP}^2$为底的圆盘丛。

请注意，我们的算法输出的切割系统 C_2 和 C_3 具有非常特殊的形式。具体而言，C_3 的每个分支 γ 要么与 β 的某个分支一致，要么与之对偶

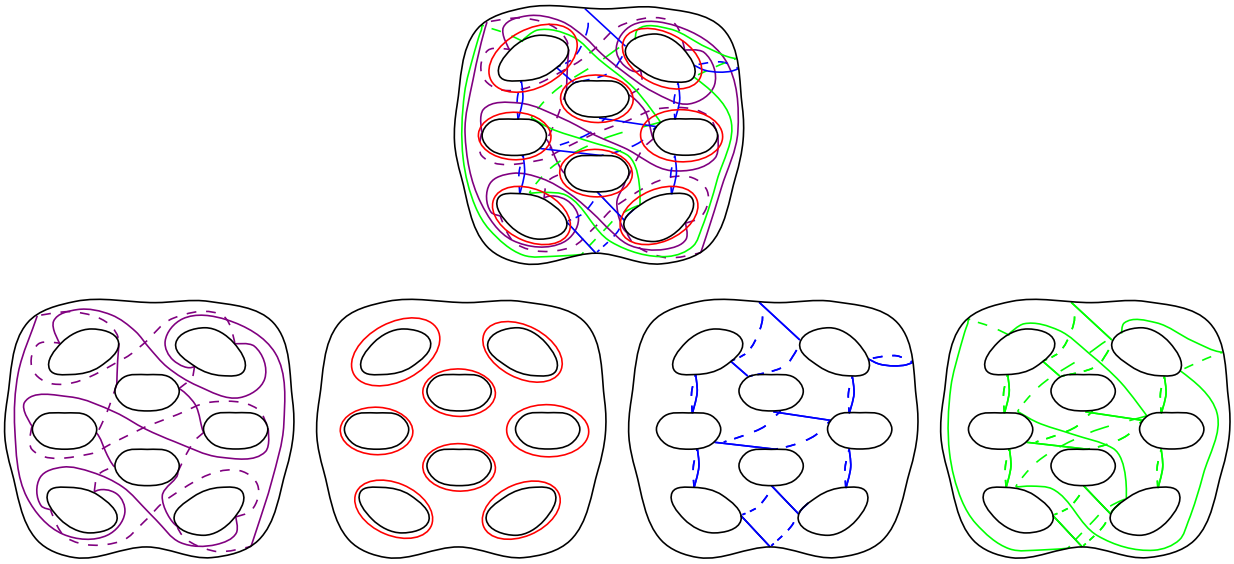


FIGURE 10. 上：通过向 max tb trefoil 附加一个 Weinstein 把手所得到的流形的双截面图。在此图中，为了视觉清晰起见，省略了许多与蓝色曲线平行的绿色曲线。下：分界集，以及随后按顺序绘出的各个切割系统。

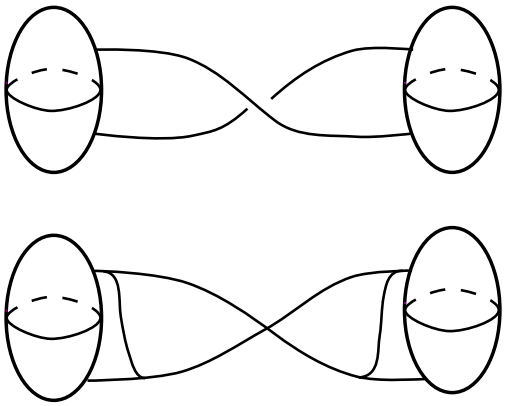


FIGURE 11. 上：的 Kirby-Weinstein 图 $T^*\mathbb{R}P^2$。下：根据定理 3.1 的证明，我们在上方的图中添加 Legendrian 隧道，使所绘隧道的外部成为标准接触把手体。

C_2。在后一种情况下，存在一条曲线 V 位于 Σ中，且与分界集不相交；相对于 C_2而言，它与分支 β 对偶，并且满足 $\gamma = \tau_\beta^{-1}(V) = \tau_V(\beta)$，其中 τ_A 是沿 A 的右手德恩扭转，其方向由 H_2的边界所诱导的 Σ 上的定向确定。我们称以这种方式相关的两个切割系统为标准温斯坦协边。将每个 V 通过同胚变形移入把手体 H_2的勒让德核心后，我们在 H_2 中得到一个勒让德链；该链的 $ct - 1$ 框架由 C_3 中相应的 γ 曲线表示（V 表示接触框架，而 β是手术环面的子午线，因此 $\tau_\beta^{-1}(V)$表示接触框架 -1）。由此可见，若两个带有分界集的切割系统是标准温斯坦协边，则相应的扇区可赋予 Weinstein 协边结构：该协边从 H_i 到 H_{i+1}，并通过向 $H_i \times I$附加 Weinstein 2-柄得到。我们总能将第一个扇区赋予 Weinstein 1-手柄体结构（因为根据定义，$(\Sigma,\ d,\ C_1,\ C_2)$ 是 $\#_{k_1} S^1 \times S^2$ 的一个接触 Heegaard 分解，其

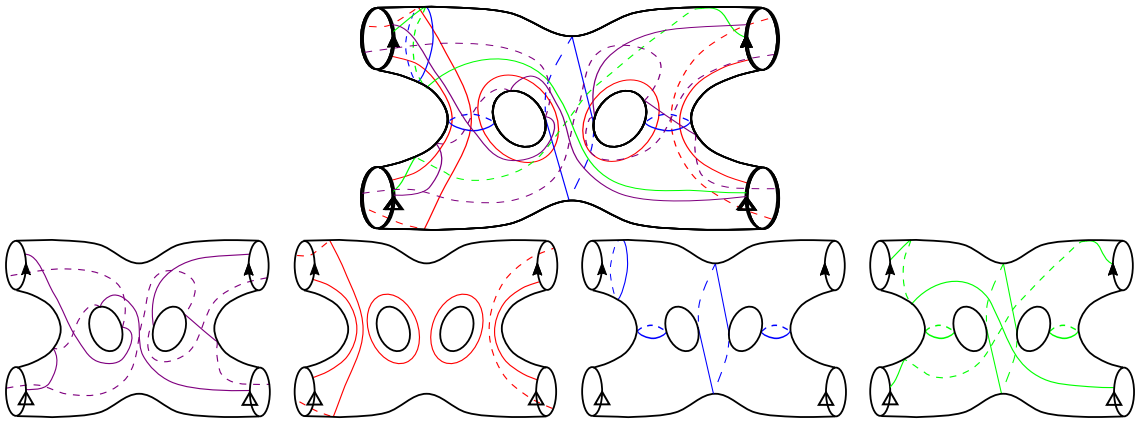


FIGURE 12. 上： $T^*\mathbb{R}P^2$的双截面图。为使图示清晰，省略了许多与蓝色曲线平行的绿色曲线。下：分别绘出分界集以及依次排列的各个切割系统。

紧致（可填充）的接触结构）。因此，我们得到一个（过于强的）条件，保证带分界集的多截面图对应一个 Weinstein 4-流形。

命题 3.4。 设$(\Sigma, C_1, \ldots, C_n, d)$ 是一个带分界集的多截面图，且(C_i, C_{i+1}, d)对 $1 < i < n$ 是标准温斯坦协边。那么$(\Sigma, C_1, \ldots, C_n, d)$ 对应一个 *Weinstein*4-流形。

在第 4节中，我们将看到另一个条件，它能保证带分界集的多截面图对应一个 Weinstein 4-流形。一个有趣的问题是，能否对所有对应 Weinstein 4-流形的带分界集多截面图给出一般性的刻画。一般而言，我们只预期带分界集的多截面图对应一个辛 4-流形，而它未必允许全局 Weinstein 结构。

4. PALFs、 MONODROMY SUBSTITUTION AND MULTISECTIONS WITH DIVIDES

4.1. **PALF 与单值化分解**。辛流形上的纤维化结构有着悠久的研究历史，可追溯至 Donaldson 在 [Don99]中的工作，其中证明了每个闭辛 4-流形都承认一个 Lefschetz 铅笔。反之，Gompf 证明了每个带有 Lefschetz 铅笔的 4-流形都承认一个辛结构 [GS99a]。Weinstein 范畴中相应的对象是正可容许 Lefschetz 纤维化。

定义 4.1。 X 上的一个*Lefschetz* 纤维化是一个映射 $\pi : X \to B$ 到一个曲面 B，使得在 π的每个临界点附近，存在局部保向坐标，使得 π 局部上由 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$给出模型。一个**正容许 Lefschetz 纤维化**（PALF）是指一个 Lefschetz 纤维化，其底空间 B 为 D^2，且其正则纤维是一个紧致带边界曲面，并且每个消失圈在同调意义下都是本质的（容许）。

根据 Loi 和 Piergallini [LP01], ，每个 Weinstein 域都存在正向 Lefschetz 纤维化。反过来，每个正向 Lefschetz 纤维化都支撑一个 Weinstein 结构 [GS99a]。

本节将展示如何利用正交向李夫希兹纤维化结构，将 Weinstein 域分解为带分割的多截面。如图 13 所示，我们将圆盘 D^2 切分为若干闭子圆盘，D_1，……， D_n，使得

- 每个 D_i 都包含 π 的一个唯一临界值，
- $D_i \cap D_{i+1}$ 对于 $i = 1$， $\cdots$、 $n-1$ 微分同胚于一个区间，
- $\partial D^2 \subset X_1 \cup X_n$，并且
- $D_1 \cap \cdots \cap D_n = \{(0, 1), (0, -1)\}$。

然后令 $X_i = \pi^{-1}(D_i)$、 $H_1 = \pi^{-1}(\partial D^2 \cap D_1)$、 $H_i = \pi^{-1}(D_{i-1} \cap D_i)$ 对于 $i = 2, \ldots, n$, $H_{n+1} = \pi^{-1}(\partial D^2 \cap D_n)$。然后 $H_i = X_{i-1} \cap X_i$ 以及 $X_1 \cap \cdots \cap X_n = \partial H_i$（沿着 $\partial F \times D^2$ 中的点对 D^2 因子取商之后；$\partial F \times D^2$ 是一个 Weinstein 同伦域）。

定理 4.2。 分解 $(X_1、\ldots\ldots、X_n)$ 是 X的带分割的多截面。

证明。 每个 H_i 都是三维把手体，因为它与 $F \times I$微分同胚。因此，要验证这是一个带分割的多截面，只需验证：(1) 每个 X_i 都与四维 Weinstein 1-把手体辛同胚；(2) $H_i \cup H_{i+1}$ 是 ∂X_i的接触 Heegaard 分解。

首先考察每个 X_i。我们将使用 $F := \pi^{-1}(0,1)$ 作为正则纤维。消失圈是 F中的曲线（$c_1、\ldots\ldots、c_n$），在从 (0，1) 到临界值的平行传输下，这些曲线会收缩到临界点。Lefschetz 奇点的模型表明， X_i 与如下流形微分同胚：从 $H_i \times I$ 沿 c_i 附加一个 2-把手，其框架比页框架少 1。 $H_i \times I$ 显然是一个 1-把手体，因此，如果这个 2-把手与 $H_i \times I$的某个 1-把手相消，所得结果仍将是一个四维 1-把手体。因此，要证明 X_i 与 1-把手体微分同胚，只需验证 H_i 中存在一个子午盘，使其与 c_i 恰好相交一次。

由于 π 是正向 Lefschetz 纤维化， $c_i \subset F$ 在同调意义下是本质的。因此，根据 Poincaré–Lefschetz 对偶性，存在一条弧 $a_i \subset F$，使得 $|a_i \cap c_i| = 1$。平行传输定义了微分同胚 $\Psi_i\colon F \times I \to H_i$，它们将 $F \times \{0\}$ 与 $F \subset H_i$对应起来。于是，$\Psi_i(a \times I)$是 H_i 的一个子午盘，它与$c_i \subset F = \Psi_i(F \times \{0\})$恰好相交于一点。因此， X_i 是一个四维 1-把手体。

由于 $X_i = \pi^{-1}(D_i)$和 D_i 是一个圆盘， X_i 具有由（限制后的）正向 Lefschetz 纤维化诱导的 Weinstein 流形结构。由于两者都与 Lefschetz 纤维化相容，这与 X 上的辛结构一致。

为了说明 $H_i \cup H_{i+1}$ 给出了 ∂X_i 的一个接触 Heegaard 分解，且其接触结构由 X_i上的魏因斯坦结构诱导，我们使用接触 Heegaard 分解的开书构造。将 π 限制到 ∂X_i ，得到 ∂X_i 的一个开书分解；由于魏因斯坦结构源自 Lefschetz 纤维化结构，该开书分解支撑由 X_i 上的魏因斯坦结构诱导的接触结构。 H_i 和 H_{i+1} 恰好是开书的两个部分，它们构成一个接触 Heegaard 分解。□

注记 4.3。 利用所有 Weinstein 流形均由 Lefschetz 纤维化支撑这一事实，定理 4.2 给出了与定理 3.1类似的结果。主要区别在于，定理 3.1得出一个双分解，而定理 4.2 通常会有远多于两个扇区。

4.2. **由正向 Lefschetz 纤维化得到的带分割集的多重分解图**。 一个正向 Lefschetz 纤维化可以通过纤维曲面 F和按序排列的消失圈集合（c_1，……， c_n）以组合方式编码。本节将说明如何利用正向 Lefschetz 纤维化的组合数据，得到与定理 4.2中的分解相对应的带分割集的多重分解图的组合数据。

围绕具有消失圈 c 的 Lefschetz 临界值的单值化是关于 c的右手德恩扭转，记作 $\tau(c)$。因此，正向 Lefschetz 纤维化也可以等价地编码为一列按序排列的、关于消失圈的右手 Dehn 扭转，称为**单值化分解**。

多截面的核心曲面 Σ与两份 F 沿其边界粘合所得的空间微分同胚。 Σ 上的分界集由 F的边界给出。更准确地说，若 $\Psi_i\colon F \times I \to H_i$ 是由平行传输定义的微分同胚，则 $\Sigma = \Psi_i(F \times \{0\} \cup F \times \{1\}) = F \cup \Psi_i(F \times \{1\})$（注意，在 ∂F中的点处，我们省略了 I 方向的商）。

为了理解带分界线的多截面图，我们希望固定 Σ的一个识别，然后为每个把手体 H_i画出切割系统。我们将使用 Ψ_1 将 $\Sigma = \partial H_1$ 识别为 $F_0 \cup F_1$。于是，将 Ψ_i 限制在 $F_0 \cup F_1$ 上，就得到一个从 Σ 到 ∂H_i的微分同胚。

设 $\{a_1, \ldots, a_k\}$ 是 F的完全弧系，即由一组适当嵌入弧构成，这些弧将 F切割成一个圆盘。于是，$\{\Psi_i(a_1 \times I) \ldots, \Psi_i(a_k \times I)\}$给出 H_i的一组圆盘切割系统。我们想在对 Σ的固定识别下考察这些圆盘的边界。具体来说，我们想描述 $F_0 \cup F_1$中的曲线$\Psi_i^{-1}(a_j \times \{0\} \cup a_j \times \{1\})$。每个 Ψ_i 在 F_0上都是恒等映射，并定义沿着从 (0,1) 到 $(0,-1)$ 的弧的平行传输， H_i 位于该弧之上。由于 Ψ_i 定义了平行传输，而我们用 Ψ_1 将 Σ 与 $F_0 \cup F_1$识别，因此可知， Σ 中的 $\Psi_i(a_j \times \{1\})$是 a_j 在……下的像

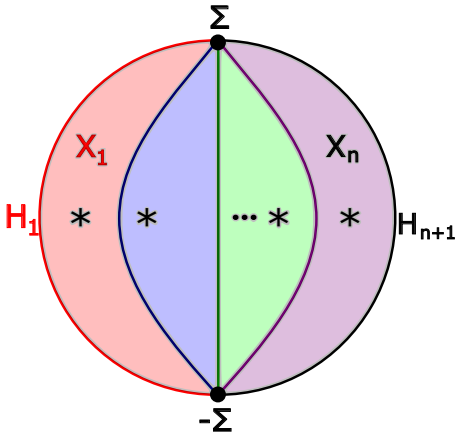


FIGURE 13. 将一个正向 Lefschetz 纤维化分解为若干块，每块恰含一个 Lefschetz 奇点，即可得到一个多截面。多截面曲面由两个纤维曲面沿其绑定粘合而成，每个把手体都是这两个曲面之间的一个乘积区域。

沿着 H_i 曲线从 $(0,-1)$ 到 $(0,1)$，然后沿着 H_1 曲线从 $(0,1)$ 到 $(0,-1)$ 的曲线绕行一周所得的单值化。该单值化为 $\tau(c_1)\ldots,\tau(c_{i-1})$。因此，对 H_i 的切割系统可由对 H_{i-1} 的切割系统施加右手德恩扭转 $\tau(c_{i-1})$得到，其中 $c_{i-1}\subset F_1$。任意选择一个完全弧系，都可以通过将 F_0 和 F_1上的同一组弧粘合起来，为 H_1 定义一组切割系统。

总之，给定一个纤维为 F、有序消失圈为 $\{c_1,\ldots,c_n\}$ 的正向 Lefschetz 纤维化，相应的带分割的多截面为

- $\Sigma = F_0 \cup_\partial F_1$ 其中 F_0 和 F_1 是 F 的副本（F_0 的定向相反）。
- 分界集 d 是 $\partial F = F_0 \cap F_1$。
- H_1 的切割系统为 $\{a_1 \cup a_1,\ldots,a_g \cup a_g\}$，其中 $\{a_1,\ldots,a_g\}$ 是 F 的完全弧系。
- 对于 $i>1$，H_i 的切割系统是通过对 $c_{i-1}\subset F_1$ 施加右手德恩扭转，从 H_{i-1} 的切割系统得到的。

注意，每条切割曲线恰好与分界集相交于两点（即弧a_j的端点）。（对于 H_1，这显然成立；对于每个 H_i 也成立，因为 Dehn 扭转是在与分界集不相交的 F_1 内部施加的。）

注 4.4. 注意，正向 Lefschetz 纤维化的输出给出了一种稍一般的条件，可确保带分割的多截面对应于一个 Weinstein 流形。在这种情况下，每一对相邻的切割系统相差一个沿着完全位于分界集 Σ_+侧的曲线进行的右手德恩扭转。我们称这样的 (C_i, C_{i+1}, d) 为广义标准温斯坦协边（gsWc）。（这推广了命题 3.4 中的标准温斯坦协边概念。）如果相邻的切割系统 C_i 和 C_{i+1} 是 gsWc，且定义它们之间德恩扭转的曲线与 C_i的某个分支对偶，那么根据引理 4.5，它们定义一个光滑多截面。此外，只要我们有 gsWc 切割系统，它们所代表的把手体 H_i 和 H_{i+1} 构成扇区 W_i边界上的 Heegaard 分解，我们就可以再次将 W_i 解释为一个从 H_i 到 H_{i+1}的 Weinstein 协边。这是因为我们可以使用 W_i 的 Lefschetz 纤维化解释，然后将勒夫谢茨临界点视为向 $H_i \times I$附加一个 Weinstein 2-柄。由于 $H_i \times I$ 既可以解释为一个填充，也可以解释为一个 Weinstein 协边，扇区 W_i 也支持一种 Weinstein 结构，使其成为其边界的填充；同时还支持另一种 Weinstein 结构，使其成为从 H_i 到 H_{i+1}的协边。这表明，只要相邻的切割系统对是 gsWc，且一对切割系统对应的德恩扭转所沿的曲线与第一个切割系统中的某条曲线对偶，命题 3.4 就在更一般的假设下成立。

前面的构造表明，多截面也可以用单值化分解来编码，而本文将证明确实如此。经过一些仔细处理，可以从一个多截面确定一个特定的单值化分解；不过，对于本文而言，给出一族可能的分解就足够了。

固定曲面 Σ，一组切割曲线可定义一个边界为 Σ 的把手体。给定一个把手体，我们可以选择任何一组在该把手体中围成圆盘的切割曲线来表示它。若指定一个从 Φ 到 Σ 的微分同胚，我们可以将该微分同胚作用于一组切割曲线，从而得到一组新的切割曲线。若原切割曲线系定义了把手体 H，则用 H_Φ 表示将映射 Φ 作用于 H 的一组切割曲线后所定义的把手体。注意，这与 H 的切割系统的选择无关，因为 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\alpha_i'\}$ 这两组 H 的不同切割系统可通过一系列把手滑动相互联系，因此 $\{\Phi(\alpha_i)\}$ 和 $\{\Phi(\alpha_i')\}$ 也可通过一系列把手滑动相互联系。我们先给出一个引理，它为 H 和 H_Φ 构成 $\#_{g-1}S^1\times S^2$ 的 Heegaard 分解提供了一个充分条件，其中 Φ 是德恩扭转。

引理 4.5. 设 Σ 是一个亏格为 g 的闭曲面，c 是 Σ 上的一条简单闭曲线，τ_c 是沿 c 进行的（右手或左手）德恩扭转。设 H 是一个边界为 Σ 的把手体。假设存在一个适当嵌入圆盘 $D\subset H$，其边界 $\partial D=E_1$ 在 Σ 上是非分离的，且满足 $|E_1\cap c|=1$。那么 $H\cup_\Sigma H_{\tau_c}$ 是 $\#_{g-1}S^1\times S^2$ 的一个 *Heegaard* 分解。

证明. 我们将构造 $H\cup_\Sigma H_{\tau_c}$ 的一个 Heegaard 图，其中包含 $g-1$ 条平行曲线以及两条相交一次的曲线，由此即可证明引理。将 E_1 扩充为 H 的一个切割系统 E。现在，可以通过以下过程消去 $c\cap(E\backslash\{E_1\})$ 上的每个交点：从交点 $c\cap E_1$ 出发，沿着 c 前进，直到遇到 $c\cap(E\backslash\{E_1\})$ 上的第一个交点；将得到的弧记为 a，将该交点处 E 上的曲线记为 E_i。沿着 a 将 E_i 滑过 E_1，即可消去这个交点，且不会在 E 与 c 之间引入新的交点。重复这一过程，并使用越来越窄的滑动带，我们可以消去 c 与 E 的所有交点，只留下交点 $c\cap E_1$。

然后，我们可以通过将由这些滑动操作得到的切割系统在 E 上绕 c 进行德恩扭转，从而得到 $H\cup_\Sigma H_{\tau_c}$ 的 Heegaard 图。由于 c 与除 E_1 之外的所有曲线都不相交，因此有 $g-1$ 条曲线在扭转后保持不变，因而彼此平行。另一方面，E_1 与 $\tau_c(E_1)$ 相交一次，从而得到所需的 Heegaard 图。□

利用上述引理，我们得到了一个充分条件：对切割系统进行德恩扭转可使多截面中的两个相邻把手体成立。反过来，下面的命题表明，所有多截面中的相邻把手体都可以通过这种方式得到。

命题 4.6. 设 $\mathfrak{M}=X_1\cup X_2\cdots\cup X_n$ 是一个亏格为 g、多截面曲面为 Σ 且具有 $X_i\cong\natural_{k_i}S^1\times D^3$ 的多截面。设 H^1、H^2、……、H^n、H^{n+1} 是位于 X_i 边界处的三维把手体。那么存在曲线 c_1^1、c_2^1、……、$c_{g-k_1}^1$、c_1^2、c_2^2、……、$c_{g-k_2}^2$、……、c_1^n、c_2^n、……、$c_{g-k_n}^n$，使得 $H^i_{\tau\,(c_1^i)\circ\tau(c_2^i)\cdots\circ\tau(c_{g-k_i}^i)}=H^{i+1}$。

证明。对于每个把手体，H^i，我们将说明如何构造曲线 $c_i^1...c_i^{g-k_i}$。回想一下，把手体 H_i 和 H_{i+1} 在多截面曲面 Σ 处相交，从而构成 $\#^{k_i}S^1\times S^2$的 Heegaard 分解。考虑 $H_i\cup H_{i+1}$的 Heegaard 图。根据瓦尔德豪森定理 [Wal68], ，经过一系列把手滑动后，存在曲线切割系统 a_1、... a_g，其中 H_i 对应于 $b_1...b_g$，H_{i+1} 对应于 $a_i=b_i$，而 $0\le i\le k_i$ 对应于$|a_n\cap b_m|=\delta_{n,\,m}$ 对应于 $k_{i+1}\le n$，$m\le g$。

对于 $k_i\le j\le g$，令 $c_i^j=\tau_{b_j}(a_j)$。于是，$^{\tau_{c_i^j}}(a_j)=b_j$。此外，由于 c_j^i不与其他任何 a_k 相交，对于 $k\ne j$，$^{\tau_{c_j^i}}(a_k)=a_k$ 对应于 $k\ne j$。于是，乘积 $\Pi_{j=1}^{k_i}\tau_{c_j^i}(a_k)$ 将H_i 的切割系统映射为 H_{i+1}的切割系统。□

我们称乘积 $\Pi_{i=1}^n\Pi_{j=1}^{g-k_i}\tau(c_j^i)$ 为 **单值化分解**，对应于 $\mathfrak{M}$。按照定理 4.2中的构造，我们可以将正向 Lefschetz 纤维化的单值化追踪到多截面的单值化，从而立即得到以下结论。

推论 4.7。 假设(X^4,ω) 是一个 *Weinstein* 流形，它具有一个正向 *Lefschetz* 纤维化，其纤维曲面为F，单值化分解为 $P=\Pi_{i=1}^n\tau(c_i)$。那么(X^4,ω) 具有一个带分割线的 *n*-截面，其

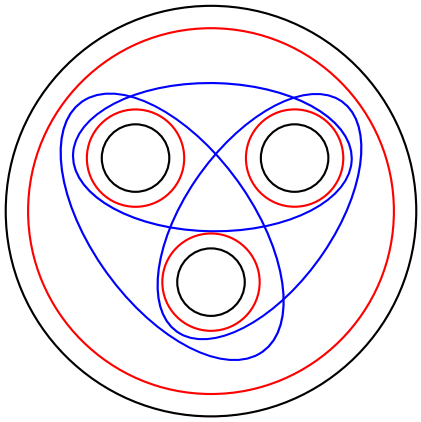


FIGURE 14. 四孔球面的映射类群中的灯笼关系指出，沿红色曲线作右手 Dehn 扭转所得的映射类，与沿蓝色曲线作右手 Dehn 扭转所得的映射类相同。

多截面曲面为 $\Sigma = F \cup -F$，分界集为 ∂F，单值化分解为 P'，这是将 P 的 *Dehn* 扭转作用于 $F \subset \Sigma$ 后得到的。

4.3. **单值化替换**。本节将说明单值化替换如何影响带分割的多截面。我们先介绍 PALF 的类似构造。

定义 4.8。设 $f\colon M^4 \to D^2$ 是一个 PALF，其纤维曲面为 Σ，单值化分解为$\Pi_{i=1}^{n}\tau(c_i)$。假设对于某些 k,l,m,n 以及曲线 $c'_m \ldots c'_n$，作为映射类有$\Pi_{i=k}^{l}\tau(c_k) = \Pi_{j=m}^{n}\tau(c'_j)$。那么，我们可以得到一个新的 Lefschetz 纤维化，其单值化分解为

$$\Pi_{i=1}^{k}\tau(c_i)\Pi_{j=m}^{n}\tau(c'_j)\Pi_{i=l+1}^{n}\tau(c_i).$$

我们称新的 Lefschetz 纤维化是在 f 上通过**单值化替换**得到的。

单值化替换已被广泛用于从已有辛流形构造新的辛流形。特别是在 [EG10], 中，作者展示了图14所示的灯笼关系可用于对构型 C_2 进行有理 blowdown（有关这些操作的介绍，参见 [GS99b]第 8.5 节）。后来，[EMVHM11] 利用雏菊关系将其推广为：可将无穷族的有理吹降实现为单值化替换。一般而言，任何单值化替换都可以被视为某种辛切割与粘贴操作。

在多截面上也存在一个类似的单值化替换过程。

定义 4.9. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个从把手体H 开始的多截面（不一定带有边界），其单值化分解由 $\Pi_{i=1}^{n}\tau(c_i)$ 给出。设 H^k 为把手体 $H_{\tau(c_1)\cdot\tau(c_2)\cdot\cdots\cdot\tau(c_k)}$，并假设 c'_{k+1}、c'_{k+2}、$\ldots$、$c'_{j'}$ 是曲线序列，使得对于所有 $l \in \{k+1, k+2, \ldots, j'\}$，都有 c'_l 与 $H^k_{\tau(c'_{k+1})\cdot\cdots\cdot\tau(c'_{l-1})}$ 中的某个圆盘对偶（这将保证引理 4.5 的假设成立）。进一步假设 $H^k_{\tau(c_{k+1})\cdot\tau(c_{k+2})\cdot\cdots\cdot\tau(c_j)} = H^k_{\tau(c'_{k+1})\cdot\tau(c'_{k+2})\cdot\ldots\cdot\tau(c'_{j'})}$。那么，我们可以得到一个新的多截面 $\mathfrak{M}_S$，它从把手体 H 开始，并由单值化分解 $\Pi_{i=1}^{k}\tau(c_i)\Pi_{i=k+1}^{j'}\tau(c'_i)\Pi_{i=j}^{n}\tau(c_i)$ 指定。我们称 $\mathfrak{M}_s$ 为 $\mathfrak{M}$ 的单值化替换。

由推论 4.7 可立即得出，通过对正向 Lefschetz 纤维化及其单值替换进行加倍，我们可以找到单值替换。将此方法用于灯笼关系，可得到带分割的多截面上的单值替换，从而实现图15所示的操作。

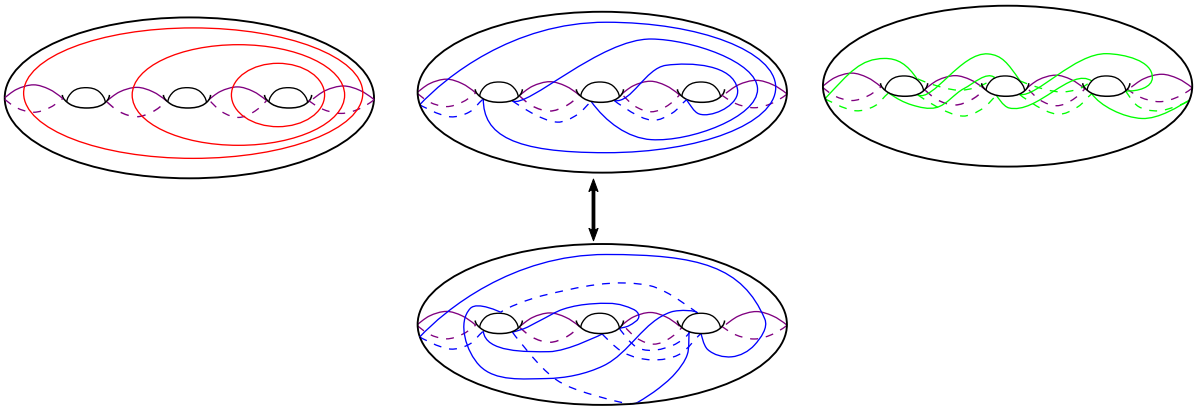


FIGURE 15. 顶部一行的三个把手体给出一个双分解，其单值化是图14中红色曲线上的右手德恩扭转的平方。将中间的把手体替换为其下方的把手体，得到一个多截面，其单值化是图 14中蓝色曲线上的右手德恩扭转的平方。包含这些把手体的双分解整体上发生的变化是一次 C_2有理 blowdown。

5. GENUS-1 MULTISECTIONS AND STABILIZATIONS

5.1. **带分割的亏格 1 多截面的分类**。 本小节将给出带分割的亏格 1 多截面的刻画。带分割的唯一 2 截面和 3 截面的图示示例见图 16。光滑亏格1多重分解可由其图示充分刻画，这些图示由序列（α_1, ...α_n）组成，其中 $|\alpha_i \cap \alpha_{i+1}| = 1$. 在 [IKLM22], 中，作者证明，带边界的光滑亏格1 n截面对应于球面上的（$n-1$）圆盘丛的线性铅垂。此外，给定定义亏格 1 多重截面图的有向割曲线序列（α_1, α_2, ...α_n），该 i^{th} 圆盘丛的欧拉数由代数交数 $\langle \alpha_{i-2}, \alpha_i \rangle$给出。

命题5.1。 对于每个 $n \geq 2$，都存在唯一的带分割线的亏格-*1 n*-截面。它们对应于球面上欧拉数为 -2 的($n-1$) 个圆盘丛的线性铅垂（T^*S^2）。

证明。 首先注意，欧拉数为 -2 的$n-1$个圆盘丛的线性铅垂支持一种正向 Lefschetz 纤维化结构，其纤维是一个环带，具有 n 个消失圈，且都平行于环带的核心圆。根据定理 4.2中的算法，这些 Weinstein 域具有亏格为 1 的多截面。

现在我们证明，这些是唯一的带分割弧的亏格 1 多截面。

对于 S^3 的接触 Heegaard 分解，分界集由两条平行曲线组成。固定 $H_1(T^2)$ 的坐标 (a, b) 后，经过一个保定向同胚，我们可以假设$\alpha_1 = (0, 1)$ 且 $\alpha_2 = (1, 0)$。分界集将是两条斜率为 d 的平行曲线。注意，α_i 与分界集相交两次，当且仅当 $|\alpha_i \cap d| = 1$。因此 $d = (1, \pm 1)$。由于 $d = (1, 1)$ 对应于 S^3 上过扭曲接触结构的接触 Heegaard 分解，我们必须有 $d = (1, -1)$。

我们先处理 $n = 2$ 的情形，然后进行归纳。在这种情况下，我们要找出 α_3 可能的斜率。由于 $|\alpha_2 \cap d| = 1$，所有与 α_2 相交一次的曲线都可由对 d 的 α_2 进行德恩扭转得到。此外，条件 $|\alpha_3 \cap d| = 1$ 意味着 α_3 是对 d 的 α_2 进行一次德恩扭转得到的。如果这次德恩扭转是左手性的，那么四元组 $(\Sigma, d, \alpha_2, \alpha_3)$ 给出了过扭曲 S^3 的一个图示，因此这次德恩扭转必须是右手性的。因此 $\alpha_3 = (1, -2)$，而根据光滑亏格 1 多截面的分类，$(\Sigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, d)$ 给出球面上欧拉数为 -2 的圆盘丛的带分割双截面。

一般而言，假设 $(\alpha_1 ... \alpha_{n-1})$ 是定义带有分割弧的 $(n-1)$-截面的曲线序列。那么，与底空间情形一样，α_{n-1} 是关于 d 对 α_{n-2} 进行的右手德恩扭转，而 α_n 是右手

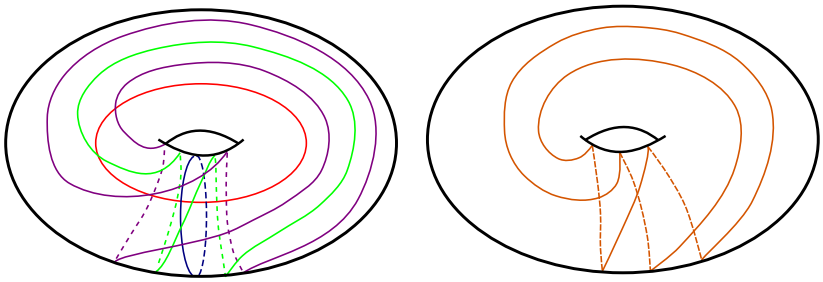


FIGURE 16. 左：对应于欧拉数为 -2 的球面上圆盘丛的唯一带分割的亏格1双截面。右：将这条曲线加入分解后，得到唯一的带分割的亏格1三截面。

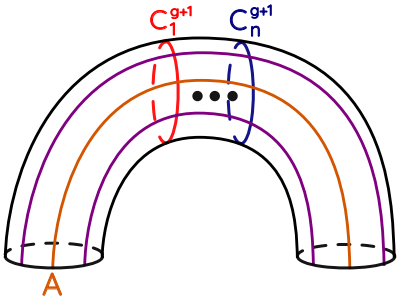


FIGURE 17. 用于对带分割的多截面进行稳定化的环带。现有的切割系统 $C_1 ... C_n$ 各自添加一条新曲线 c_i^{g+1}，从而构成适用于 $i \in \{1, ..., n\}$ 的切割系统C_i'。弧 A 与现有多截面中一条不与分界集相交的弧粘合，得到曲线 C。对切割系统 C_n' 中的每条曲线绕 C 进行德恩扭转，得到新的把手体 C_{n+1}'，使得切割系统序列 (C_1', ..., C_{n+1}') 构成新的多截面图。

手德恩扭转，关于 d 对 α_{n-1} 进行。因此，$\langle \alpha_{n-2}, \alpha_n \rangle = -2$，所以我们确实铅接了一个额外的 -2-球面。□

5.2. **稳定化**。这里，我们将介绍一种带分割的多截面上的操作，它将一个亏格为g n的截面变为一个亏格为（$g+1$）（$n+1$）的截面。图 T^*S^2 的亏格1双截面应用这一过程的具体示例见图 18。

从把手分解的角度（如第 3.1 节）或正向 Lefschetz 纤维化的角度，都可以理解这种稳定化操作。我们将着重讨论后一种视角，并回顾正向 Lefschetz 纤维化稳定化的定义。

定义 5.2。设 $f\colon M^4 \to D^2$ 是一个正向 Lefschetz 纤维化，其纤维曲面为 Σ，单值化分解为 $\Pi_{i=1}^{n} \tau(c_i)$。那么，f 的**稳定化** 是一个正向 Lefschetz 纤维化，其纤维曲面为 Σ'，单值化分解为 $\Pi_{i=1}^{n+1} \tau(c_i)$，其中 Σ' 是通过在 Σ 上附加一个二维1-把手得到的，而 c_{n+1} 是 Σ' 上的一条曲线，与所附加1-把手的腰带球面几何相交一次。

通过将正向 Lefschetz 纤维化稳定化中使用的 1-柄加倍，我们得到图示 图 17。将其与带分割的多截面适当粘合后，我们得到一个新的带分割的多截面，其构造如下定义所述。

定义 5.3. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个带分割的多截面，其图示为 $(\Sigma, d, C_1, ..., C_n)$。假设 C_i 由曲线 $(c_i^1, ..., c_i^g)$ 组成。设 p_1 和 p_2 是 d 上的两个点，A' 是 p_1 与 p_2 之间的一条弧，且包含于 Σ^+中。设 Σ' 是通过移除 p_1 和 p_2 的邻域，并将图 17 所示的曲面粘到所得边界上而得到的曲面；粘合时使弧 A 与弧 A' 相交，从而形成一条曲线 c。为稍微滥用记号，在手术后，我们仍用记号 c_i^k 表示 Σ' 上的简单闭曲线。于是，我们得到一个新的多截面 $\mathfrak{M}_S$，其图示为 $(\Sigma', d, C_1', ..., C_n', C_{n+1}')$，其中，对于 i $\in \{1, ..., n\}$，$C_i' = (c_i^1, ..., c_i^g, c_i^{g+1})$，且 $C_{n+1}' = (\tau_c(c_n^1) ... \tau_c(c_n^g)\ \tau_c(c_n^{g+1}))$。

我们很容易看出 $\mathfrak{M}_S$ 仍然是一个带分界线的多截面图。通过考察图17中的模型，并注意到我们进行德恩扭转所绕的曲线与分界集不相交，即可保证每个切割系统中的每条曲线都与分界集交于两点。这$\mathfrak{M}_S$ 仍表示一个多截面，这一点由引理4.5可直接推出。这（C_n'，C_{n+1}'，d）表示紧致接触结构在 $\#_{g-1} S^1 \times S^2$ 上的接触 Heegaard 分解；这是因为我们可以像定理4.2的证明中那样，将该接触 Heegaard 分解实现为一个正向 Lefschetz 纤维化扇区的边界。

注意，由（$\Sigma', d, C_1', \ldots, C_n'$）表示的流形，可通过附加一个 1-柄与由（$\Sigma, d, C_1, \ldots, C_n$）表示的流形关联起来。因此，若（$\Sigma, d, C_1, \ldots, C_n$）表示一个 Weinstein 域，则（$\Sigma', d, C_1', \ldots, C_n'$）也表示一个 Weinstein 域，它由附加一个 Weinstein 1-柄得到。（注意，附加 1-柄时，对其附着数据没有任何要求。）根据注 4.4，新扇区 W_n 相当于向$W'' = W_1' \cup \cdots \cup W_{n-1}'$附加一个 Weinstein 协边。因此，稳定化图示（$\Sigma', d, C_1', \ldots, C_n', C_{n+1}'$）也表示一个 Weinstein 域。此外，来自扇区 W_n 的 Weinstein 协边附加了一个 Weinstein 2-把手，它与新添的 1-柄相消（2-把手的附着球面与 1-柄的腰带球面交于一点）。因此，总体而言，我们附加了一个平凡的 Weinstein 协边（即与平凡协边 Weinstein 同伦的协边）。也就是说，若稳定化之前，带分界线的多截面图表示一个 Weinstein 域，那么稳定化之后，带分界线的多截面图在 Weinstein 同伦意义下表示同一个 Weinstein 域。我们在下面的命题中总结这一点。

命题 5.4. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个带分割的多截面，并且存在由 $(\Sigma, d, C_1, ..., C_n)$ 给出的带分界线的多截面图。设 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一次稳定化，且 $\mathfrak{M}'$ 的多截面图由 $(\Sigma', d, C_1', ..., C_{n+1}')$ 给出。那么，$\mathfrak{M}'$ 是一个带分界线的多截面图，而 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 所编码的 *Weinstein* 流形 *Weinstein* 同伦。

6. 问题

Donaldson [Don96]和 Giroux [Gir02a，Gir17] 证明了，每个辛流形都存在一个辛除子，使得该除子的标准邻域的补集是一个 Weinstein 域。为了寻找闭辛流形的图示理论，一种策略是在除子的邻域上寻找合适的结构，并像 [IN20] 中那样，将其粘合到 Weinstein 补集的带分界线的多截面上。这引出了以下问题。

问题 6.1. 我们能否为具有凹边界的辛 4-流形构造类似的带分割的多截面？特别是辛除子的凹邻域。我们是否需要不同的图示信息来表示凹边界？在多截面图中，我们如何说明如何将凸部分与凹部分进行辛粘合？

第 4 节的结果主要通过使用正向 Lefschetz 纤维化来获取关于带分割的多截面的信息，但在有利条件下（见注释 4.4），这一构造可以反向进行，从而由带分割的多截面得到一个正向 Lefschetz 纤维化。关于对应于同一个 Weinstein 4-流形的两个正向 Lefschetz 纤维化是否可通过稳定化、Hurwitz 等价和整体共轭相互关联，目前仍是一个未解决问题。我们已在第 5.2 节中将稳定化操作转译出来，并且采用类似的方法，可以很容易地将另外两种变换转译为带分割的多截面上的变换。在此，

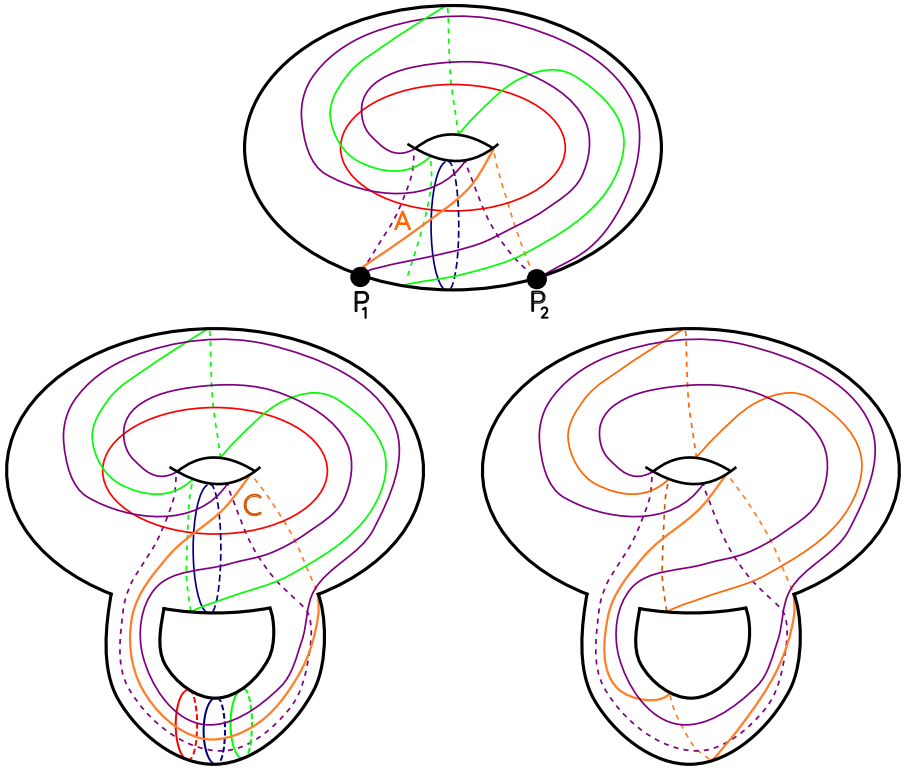


FIGURE 18. 此图展示了如何稳定化 T^*S^2 的亏格 1 多重截面图。上：T^*S^2 的亏格 1 多重截面图，以及分界集上的两个点和一条弧 A，其内部与分界集不相交。左下：将图 17 中的稳定化环带粘合后，得到稳定化所需的前三个切割系统，以及一条曲线 C。右下：沿曲线 C 对绿色切割系统进行德恩扭转，得到稳定化后多截面的最终切割系统。

用于三分解稳定等价的技术 [GK16] 可能有助于解决以下问题。

问题 6.2。通过转而考察相关的带分割的多截面，我们能否证明，对应于同一个 Weinstein 4-流形的任意两个 PALF，都可通过稳定化、Hurwitz 等价和整体共轭相互关联?

一个初步的 结果是回答上一个问题所需的条件之一，即唯一性
s result for 分割的多截面。

问题 6.3。设 W_1 和 W_2 是同一底层 Weinstein 流形 W 上带分割的多截面。有哪些变换足以将 W_1 与 W_2 联系起来?

在 [Gay19] 和 [Isl21] 中，作者证明了，每个具有多截面曲面 Σ_g 的多截面，都可以实现为 Σ_g上的光滑实值函数的一个一般路径。在这一过程中，这些函数的大部分数据都会被舍弃，因此最终，光滑拓扑由正则时刻的水平集决定。通过保留更多信息，很可能可以回答下面的问题，从而建立辛拓扑与曲面上的光滑函数理论之间的联系。

问题 6.4。 哪些光滑函数 f 的一般路径： $\Sigma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 会产生带分割的多截面?

在命题 3.4 和备注 4.4中，我们给出了一个充分条件，使带分割集的多截面图对应于一个 Weinstein 流形。该条件可能并非必要条件，而且在实践中很难检验。因此，我们提出以下问题。

问题 6.5。 哪些带分割集的多截面图对应于 Weinstein 流形?

我们对带分割的多截面所要求的条件之一，是每个扇区边界上的接触结构都是紧的。虽然检验紧性通常相当困难，但我们研究的是由 $S^1 \times S^2$ 构成的连通和这一受限类，在这种情况下，问题可能更易处理。特别地，在此情形下，Heegaard-Floer 同调中的接触不变量不消失等价于紧性 [OS05]。此外，该流形的 Heegaard-Floer 同调尤其简单。由于多截面中的每个扇区在其边界上都有一个接触 Heegaard 分解，我们提出以下问题。

问题 6.6. 是否存在一种简单的算法，可以根据接触 Heegaard 图计算 $\#_k S^1 \times S^2$ 上接触结构的接触不变量?

通过分析支撑接触结构的开书的 PALF 填充，Oszv´ath 和 Szab´o 证明了魏因斯坦可填充流形的接触不变量不为零 [OS05]。带分割的多截面似乎编码了与 PALF 类似的信息，只是由 Heegaard 分解扮演开书分解的角色。鉴于此，或许可以对此非零性结果给出更直接的证明。

问题 6.7. 给定一个带分割的多截面，确定边界的接触 Heegaard 分解所给出的三维流形的接触元。证明，如果该多截面由标准魏因斯坦协边组成（如命题 3.4 或注释 4.4中的推广），则此接触元不为零。

References

[Don96] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, 《微分几何杂志》44 (1996), no. 4, 666–705. MR 1438190[Don99] , *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, 《微分几何杂志》53 (1999), no. 2, 205–236. MR 1802722[EG10] Hisaaki Endo and Yusuf Z. Gurtas, *Lantern relations and rational blowdowns*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** 2010 3, 1131 1142 2566578 ( ), no. – . MR EMVHM Hisaaki Endo, Thomas E. Mark, and Jeremy Van Horn-Morris, *Monodromy substitutions and rational blowdowns* **4** 2011 1, 227 253 , J. Topol. ( ), no. – . MR 2783383 Gay David T. Gay,

Functions on surfaces and constructions of manifolds in dimensions three, four and five, 当代拓扑学中的广度, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 102, 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 2019, pp. 79–94. MR 3967361[Gei08] Hansj¨org Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR 2397738[Gir91] Emmanuel Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 4, 637–677. MR 1129802[Gir02a] ,

Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures, 国际数学家大会论文集, 第II卷（北京, 2002）, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 405–414. MR 1957051[Gir02b] ,

Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures, 国际数学家大会论文集, 第II卷（北京, 2002）, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 405 414 1957051 – . MR Gir ,

Remarks on Donaldson's symplectic submanifolds, Pure Appl. Math. Q. 13 (2017), no. 3, 369–388. MR 3882202[GK16] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4–manifolds*, Geom. Topol. 20 (2016), no. 6, 3097–3132. MR 3590351[Gom98] Robert E. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 2, 619–693. MR 1668563[GS99a] Robert E. Gompf and Andr´as I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathemat- ics, vol. 20, 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 1999. MR 1707327

[GS99b] Robert E. Gompf and Andr´as I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathemat- ics, vol. 20, 1999 1707327 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, . MR [00] *On the classification of tight contact structures. I* **4** 2000 Hon Ko Honda, , Geom. Topol. ( ), 309–368. MR 1786111[IKLM22] Gabriel Islambouli, Homayun Karimi, Peter Lambert-Cole, and Jeffrey Meier, *curves in rational surfaces* 2022 2206 04161 *Toric multisections and* , arXiv e-prints ( ), arXiv: . .[IN20] Gabriel Islambouli and Patrick Naylor, *Multisections of 4-manifolds*, arXiv e-prints (2020), arXiv:2010.03057.[Isl21] Gabriel Islambouli, *Uniqueness of 4-manifolds described as sequences of 3-d handlebodies*, arXiv e-prints (2021), arXiv:2111.08924.[LM18] Peter Lambert-Cole and Jeffrey Meier, *Bridge trisections in rational surfaces*, arXiv e-prints (2018), arXiv:1810.10450.[LMS20] Peter Lambert-Cole, Jeffrey Meier, and Laura Starkston, *Symplectic 4-manifolds admit Weinstein trisections* 2004 01137 2020 , arXiv e-prints arXiv: . ( ).[LP01] Andrea Loi and Riccardo Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4*, Invent. Math.**143** (2001), no. 2, 325–348. MR 1835390[MSZ16] Jeffrey Meier, Trent Schirmer, and Alexander Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture* **144** 2016 11, 4983 4997 3544545 , Proc. Amer. Math. Soc. ( ), no. – . MR [NW11] Klaus Niederkr¨uger and Chris Wendl, *Weak symplectic fillings and holomorphic curves*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup ´ 4 **44** 2011 5, 801 853 2931519 er. ( ) ( ), no. – . MR OS Peter Ozsvath and Zoltan Szabo, [05] *Heegaard Floer homology and contact structures*, Duke Math. J. **129** (2005 1, 39 61 2153455), no. – . MR [00] Tor Ichiro Torisu, *Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds*, Internat. Math. Res. Notices (2000 9, 441 454 1756943), no. – . MR Wal Friedhelm Waldhausen, [68] *Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre* **7** 1968 195 203 0227992 , Topology ( ), – . [91] *Contact surgery and symplectic handlebodies* **20** 1991 2, 241 MR Wei Alan Weinstein, , Hokkaido Math. J. ( ), no. – 251. MR 1114405