arXiv:2303.00925v1 [math.NT] 2 Mar 2023

低特征大有限域子集中的多项式模式

ETHAN ACKELSBERG 和 VITALY BERGELSON

Abstract. 我们证明了文献 [P19]，中主要结果的一个低特征对应版本。该主要结果为某些多项式族的多项式 Szemer´edi 定理建立了幂次节省界。具体而言，我们证明，若 $P_1, \dots, P_m \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 满足等分布条件（在我们的语境下，这是文献 [P19] 中独立性条件的一个自然变体），则存在 $\gamma > 0$，使得对任意 $q = p^k$ 以及任意 $A_0, A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{F}_q$，

$$\begin{aligned}&\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : x \in A_0, x + P_1(y) \in A_1, \dots, x + P_m(y) \in A_m\right\}\right| \\ &\quad = q^{-(m-1)} \prod_{i=0}^{m} |A_i| + O_{q\to\infty;P_1,\dots,P_m}\left(|A_0|^{1/2} q^{3/2-\gamma}\right).\end{aligned}$$

特别地，若 $A \subseteq \mathbb{F}_q$ 不包含基数为 $m+1$ 的模式 $\{x, x+P_1(y) \dots, x+P_m(y)\}$，则

$$|A| \ll_{P_1,\dots,P_m} q^{1-\gamma/\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

1. 引言

1.1. 背景与动机。本文的目标是建立一个低特征类比结果，对应于文献 [P19] 中关于有限域子集内多项式构型的结果。

定理 1.1（[P19], 定理 1.1）。设 $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{Z}[y]$ 为线性无关多项式，且 $P_i(0) = 0$。存在 C，$\gamma > 0$，使得对于任意特征为 $p \geq C$ 的有限域 $\mathbb{F}_q$ 以及任意集合 $A \subseteq \mathbb{F}_q$，

$$\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : x, x + P_1(y), \dots, x + P_m(y) \in A\right\}\right| = \frac{|A|^{m+1}}{q^{m-1}} + O_{q\to\infty;P_1,\dots,P_m}\left(q^{2-\gamma}\right).$$

记号 $a(q) = O_{q\to\infty;u_1,\dots,u_m}(b(q))$ 表示存在某个常数 $C = C(u_1, \dots, u_m) > 0$，使得对所有足够大的 q，都有 $|a(q)| \leq C|b(q)|$。

设 $q = p^k$。定理 1.1 讨论的是特征 p 足够大的有限域。我们希望在 p 固定且 k 足够大的情况下，得到类似性质的结果。在定理 1.1 中，多项式的系数属于 $\mathbb{Z}$。在我们的特征 p 情形下（p 固定），自然的系数选择是 $\mathbb{F}_p[t]$。

现在，研究特征为 p 的多项式时，考虑次数为 $d \geq p$ 的多项式会遇到新的现象。当多项式 P_1、.....、P_m 的次数都较低（$d < p$）时，情况比一般情形简单，只需对现有方法稍作调整即可处理；参见下文第 1.3 小节的讨论。对于高次多项式（$d \geq p$），情况要复杂得多，需要新的思路。为说明低次多项式与高次多项式之间的区别，我们简要概述特征为 p 时的 Weyl 型等分布结果。这里的记号和术语将在后文中用到，而这些等分布结果也为本文证明的有限型结果提供了重要的启发。

Date：2023年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11B30（11T06，37A25）。

Key words and phrases. 联合遍历性、全遍历性、多项式 Szemer´edi 定理、有限域。

我们研究环 $\mathbb{F}_p[t]$，并将其视为整数 $\mathbb{Z}$ 的类比。对于满足 $c_N \neq 0$ 的 $n = \sum_{j=0}^{N} c_j t^j \in \mathbb{F}_p[t]$，我们定义绝对值 $|n| = p^N$。该绝对值可延拓到有理函数域 $\mathbb{F}_p(t) = \left\{\frac{m}{n} : \ n, m \in \mathbb{F}_p[t], n \neq 0\right\}$，定义为 $\left|\frac{m}{n}\right| = \frac{|m|}{|n|}$。在由此绝对值诱导的度量下，$\mathbb{F}_p(t)$ 的完备化是域

$$\mathbb{F}_p((t^{-1})) = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{N} c_j t^j : N \in \mathbb{Z}, c_j \in \mathbb{F}_p \right\},$$

我们将其视为实数的类比物 $\mathbb{R}$。

我们称 $a : \mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{F}_p((t^{-1}))$ 模 $\mathbb{F}_p[t]$ 均匀分布，如果

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Phi_N|} \sum_{n\in\Phi_N} f(a(n)) = \int_{\mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]} f \ dm$$

对于每个连续函数 $f : \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{C}$ 以及 $\mathbb{F}_p[t]$ 中的每个 Følner 序列[1] $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$，

“环面” $\mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]$上的低次数多项式 $\mathbb{F}_p[t]$-序列的分布行为，直接类似于 $\mathbb{T}$ 中多项式 $\mathbb{Z}$-序列的 Weyl 等分布定理。若元素 $\alpha \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))$ 满足 $\alpha \notin \mathbb{F}_p(t)$，则称其为无理的。

定理 1.2（[BL16], 定理 0.2）。设 $P(n) = \alpha_d n^d + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0 \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))[n]$，其次数为$d < p$。若系数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$中至少有一个是无理的，则 $(P(n))^{n\in\mathbb{F}_p[t]}$ 模 $\mathbb{F}_p[t]$均匀分布。

高次多项式的分布行为更为复杂。例如，若 $P(n) = n^p$，则可以找到无理的 $\alpha \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]$，使得 $(P(n)\alpha)^{n\in\mathbb{F}_p[t]}$ 模 $\mathbb{F}_p[t]$ 不均匀分布。事实上，对于任意形如 $\alpha = \beta^p$ 的 α，其轨道闭包 $\{P(n)\alpha : \ n \in \mathbb{F}_p[t]\}$ 都包含于无限指数子群 $\left\{x^p : \ x \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]\right\}$ 中。

然而，有一类特殊的多项式，对定理 1.2 作直接推广仍然成立。

定义 1.3. 若多项式 $P(y) \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))[y]$ 满足 $P(y) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i y^{r_i}$ 且 $p \nmid r_i$ 对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 成立，则称其为可分的。

定理 1.4（[BL16], 推论 0.5）。设 $P(n)$ 是一个可分多项式，且除常数项外至少有一个无理系数。那么（$P(n)$）$^{n\in\mathbb{F}_p[t]}$ 模 $\mathbb{F}_p[t]$ 均匀分布。

一般而言，高次数多项式的分布行为更接近高维环面中多项式序列的分布行为。对于这一讨论，我们还需要引入另一类特殊的多项式。

定义 1.5。如果对于每个x，$y \in \mathbb{F}_p$（t^{-1}），多项式 $\eta(y) \in \mathbb{F}_p$（t^{-1}）$[y]$ 满足 $\eta(x + y) = \eta(x) + \eta(y)$，则称其为可加的。

注意，多项式 $P(y) \in \mathbb{F}_p$（t^{-1}）$[y]$ 是可加的，当且仅当对于某个$k \geq 0$ 以及某些系数 a_0、.....、$a_k \in \mathbb{F}_p$（t^{-1}），有 $P(y) = \sum_{i=0}^{k} a_i y^{p^i}$。（这简单地由二项式系数模 p的性质推出。）因此，存在高次数多项式（例如上文讨论的例子$P(n) = n^p$），其行为类似于线性多项式，因为它们是可加的。

[1] 一个 *Følner sequence* 在 $\mathbb{F}_p[t]$ 中有一个序列 $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$，由 $\mathbb{F}_p[t]$ 的有限子集构成，使得对于任意 $n \in \mathbb{F}_p[t \quad]$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|(\Phi_N + n)\triangle\Phi_N|}{|\Phi_N|} = 0.$$

例如：$\Phi_N = \left\{c_{N-1}t^{N-1} + \cdots + c_1 t + c_0 : \ c_i \in \mathbb{F}_p\right\}$（$\mathbb{F}_p$上所有次数为 $< N$的多项式的集合）以及 $\Phi'_N = \left\{t^N + c_{N-1}t^{N-1} + \cdots + c_1 t + c_0 : \ c_i \in \mathbb{F}_p\right\} = \Phi_N + t^N$（所有次数为 N的首一多项式的集合）。

这一观察引出了次数的另一种概念，对我们很有用。对于定义在 $\mathbb{F}_p(t^{-1})$ 上且取值于阿贝尔群的任意函数f，定义差分算子为$\partial_u f(x) = f(x+u) - f(x)$，其中 x、$u \in \mathbb{F}_p(t^{-1})$。

定义 1.6。多项式 $P(y) \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))[y]$的导数次数（简称 d-deg）是满足以下条件的最小 $d \geq 0$：对于任意 $u_1, \dots, u_{d+1}, y \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))$，$\partial_{u_1,\dots,u_{d+1}} P(y) = 0$。

根据定义，加性多项式的 d-deg 等于 1。单项式 y^r 的 d-deg 为 $y^r = \sum_{i=0}^{k} a_i$，其中 a_i是 r 的底数为 p的展开式中的数字，即 $r = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$, $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$。这可以通过将 $y^p = \prod_{i=0}^{k} (y^{a_i})^{p^i}$ 写成导数次数分别为$a_0, \dots, a_k$ 的单项式之积来证明（与加性多项式 $\eta_i(y) = y^{p^i}$ 复合不会改变导数次数）。

在表述 [BL16], 中的一般 Weyl 型等分布定理之前，我们需要进一步明确上文讨论的良好分布概念。若函数 $a : \mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{F}_p((t^{-1}))$ 在子群 $H \subseteq \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]$ 中模 $\mathbb{F}_p[t]$ 良好分布，则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Phi_N|} \sum_{n\in\Phi_N} f(a(n)) = \int_H f \, dm_H$$

对于每个连续函数 $f : \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{C}$ 以及 $\mathbb{F}_p[t]$中的每个 Følner 序列 $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$。对于子群 H 和有限集 $F \subseteq \mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]$，若存在 $m \in \mathbb{F}_p[t] \setminus \{0\}$，使得对每个 $k \in \mathbb{F}_p[t]$，都存在 $x \in F$，令 $(a(mn+k))_{n\in\mathbb{F}_p[t]}$ 在 $H + x$中均匀分布，则称 $a : \mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{F}_p((t^{-1}))$ 在 $H + F$的各分量中均匀分布。

定理1.7（[BL16], 定理0.3）。加性多项式 $\eta(y) \in (\mathbb{F}_p((t^{-1})))[y]$ 在子群[2] $\eta(\mathbb{F}_p[t]) = \mathcal{F}(\eta) + \eta(K)$ 中均匀分布，其中 $K \subseteq \overline{\mathbb{F}_p((t^{-1}))}/\mathbb{F}_p[t]$ 是有限子群。对于任意多项式 $P(y) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y^{r_i})$，轨道闭包 $\mathcal{O}(P) = P(\mathbb{F}_p[t])$ 的形式为 $\mathcal{F}(P) + P(K)$，其中 $\mathcal{F}(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\eta_i)$，且 K 是 $\mathbb{F}_p[t]$ 的有限子集，而 $P(y)$ 在分量 $\mathcal{F}(P) + P(k)$、$k \in K$ 中均匀分布。

1.2. 主要结果。

定义1.8。若对于任意不全为有理数的 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))$，序列族 $a_1, \dots, a_m : \mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{F}_p[t]$ 满足 $(\sum_{i=1}^{m} a_i(n)\alpha_i)_{n\in\mathbb{F}_p[t]}$ 模 $\mathbb{F}_p[t]$ 均匀分布，则称其对无理等分布是良好的。

例 1.9. 设 $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{F}_p[t]$ 是可分多项式。那么，当且仅当 $P_1, \dots, P_m$ 独立时，$\{P_1, \dots, P_m\}$ 才适用于无理等分布；也就是说，$P_1, \dots, P_m$ 的每个非平凡线性组合都是非常数多项式。这由上面的定理 1.4 得出。

在陈述主要结果之前，我们先给出一项关于单个多项式的相关结果，该结果发表于姊妹论文 [AB23]。这一结果的一个特例构成了我们归纳过程的基础，并在本文中发挥着重要作用。它也展示了无限等分布结果与有限组合结果之间的联系。为了简洁地陈述该结果，我们需要一些额外的记号。对于有限集 S 和函数 $f : S \to \mathbb{C}$，我们记

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in S} f(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{x\in S} f(x).$$

对于 $r \geq 1$，我们将 S 上的 L^r-范数定义为

$$\|f\|_{L^r(S)} := \left(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in S} |f(x)|^r \right)^{1/r}.$$

[2]在 [BL16], 中，子群 $\mathcal{F}(\eta)$ 称为 Φ-*subtorus of level* $\leq \log_p d$

我们用 $\mathbb{F}_p[t]^+$ 表示 $\mathbb{F}_p$ 上首一多项式的集合。给定 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$，我们将商环 $\mathbb{F}_p[t]/Q(t)\mathbb{F}_p[t]$ 记作 $\mathbb{F}_p[t]_Q$。如果 Q 分解为不可约多项式的乘积 $Q = \prod_{i=1}^r Q_i^{s_i}$，我们将 $\operatorname{lpf}(Q)$ 记作 $= \min_{1\le i\le r} |Q_i|$。注意，如果 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$ 是不可约的，那么 $\mathbb{F}_p[t]_Q$ 同构于有限域 $\mathbb{F}_q$，其有 $q = |Q|$，且 $\operatorname{lpf}(Q) = |Q|$。

定理 1.10（[AB23], 定理 1.18）。设 $P(y) \in \mathbb{F}_p[y]$。设 $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{F}_p[y]$ 为加性多项式，且 $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ 为不被 p 整除的互异正整数，使得 $P(y) = \sum_{i=1}^n \eta_i(y^{r_i})$。以下各项等价：

(i) $P(y)$ 适用于无理等分布；(ii) 存在加性多项式 $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{F}_p[y]$ 和 $a \in \mathbb{F}_p^\times$，使得

$$\sum_{i=1}^n (\eta_i \circ \zeta_i)(y) = ay;$$

(iii) 对任意 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$,

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{F}_p[t]_Q)}=1} \left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_p[t]_Q} f(x+P(y)) - \mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathbb{F}_p[t]_Q} f(z) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_p[t]_Q)} = o_{\operatorname{lpf}(Q)\to\infty}(1);$$

(iv) 存在 $C_1, C_2, \gamma > 0$，使得对于任意 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$，若 $\operatorname{lpf}(Q) \ge C_1$，则有

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{F}_p[t]_Q)}=1} \left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_p[t]_Q} f(x+P(y)) - \mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathbb{F}_p[t]_Q} f(z) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_p[t]_Q)} \le C_2 \cdot \operatorname{lpf}(Q)^{-\gamma};$$

(v) 存在 $C > 0$，使得如果 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$ 且 $\operatorname{lpf}(Q) \ge C$，那么 $H_Q = \mathbb{F}_p[t]$，其中 $H_Q = \sum_{i=1}^n H_{i,\,Q}$、$H_{i,\,Q} = \eta_i(\mathbb{F}_p[t]_Q)$。

(vi) 对任意 $\delta > 0$，存在 $N > 0$，使得如果 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$ 的 $\operatorname{lpf}(Q) \ge N$ 且 A、$B \subseteq \mathbb{F}_p[t]_Q$ 是满足 $|A||B| \ge \delta|Q|^2$ 的子集，那么存在 x、$y \in \mathbb{F}_p[t]_Q$，使得 $x \in A$ 且 $x + P(y) \in B$；

(vii) 该 存在 C_1、C_2、$\gamma > 0$，使得对于任意满足 $\operatorname{lpf}(Q) \ge C_1$ 的 $Q(t) \in \mathbb{F}_p[t]^+$，都有 s

$$\left| \left|\left\{(x,y) \in \mathbb{F}_p[t]_Q^2 : x \in A, x + P(y) \in B\right\}\right| - |A||B| \right| \le C_2|A|^{1/2}|B|^{1/2}|Q| \cdot \operatorname{lpf}(Q)^{-\gamma}.$$

我们还在 [AB23] 中证明，对于一般的多项式 $P(y) \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$，如果 $P(y)$ 对无理数等分布而言是良好的，那么条件 (iii)–(vii) 成立且彼此等价；参见 [AB23，《定理 1》17]。

本文的主要结果是将定理 1.10 中的条件 (iv) 提升为有限域背景下涉及多个多项式的平均结果：

定理 1.11. 假设 $\{P_1, \dots, P_m\} \subseteq (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 适用于无理等分布。则存在 $\gamma > 0$，使得对于任意 $q = p^k$ 以及任意 $f_1, \dots, f_m : \mathbb{F}_q \to \mathbb{D}$,

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^m f_i(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^m \mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathbb{F}_q} f_i(z) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \ll_{P_1,\dots,P_m} q^{-\gamma}.$$

注 1.12. (1) 定理 1.11 的一个版本可以针对商环 $\mathbb{F}_p[t]_Q$ 表述。将我们的结果扩展到这一更一般的情形是正在进行的工作。

(2) 尽管定理 1.11 将 $m = 1$ 作为特殊情形包括在内，但它并未取代 [AB23] 中的结果。相反，我们将 $m = 1$ 情形作为来自 [AB23] 的黑箱，并以此作为归纳论证的基础情形；有关证明概览，见下文第 1.3 小节。

由定理 1.11，我们推导出定理 1.1 的一个低特征（高次数）对应结论：

推论 1.13. 假设 $\{P_1,\dots,P_m\}\subseteq(\mathbb{F}_p[t])[y]$ 具有无理等分布性质。那么存在 $\gamma>0$，使得对于任意 $q=p^k$ 以及任意 $A_0,A_1,\dots,A_m\subseteq\mathbb{F}_q$，

$$\begin{aligned}&\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{F}_q^2: x\in A_0, x+P_1(y)\in A_1,\dots,x+P_m(y)\in A_m\right\}\right|\\&\qquad=q^{-(m-1)}\prod_{i=0}^{m}|A_i|+O_{q\to\infty;P_1,\dots,P_m}\left(|A_0|^{1/2}q^{3/2-\gamma}\right).\end{aligned}$$

特别地，如果 $A\subseteq\mathbb{F}_q$ 不包含任何非平凡的[3]模式 $\{x,x+P_1(y)\dots,x+P_m(y)\}$，那么

$$|A|\ll_{P_1,\dots,P_m} q^{1-\gamma/\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

我们在第 5 节证明推论 1.13。

与定理 1.1 相比，推论 1.13 的结论有两个特点。首先，我们允许使用不同的集合 $A_0,\dots,A_m$，而不是单个集合 A。其次，我们不对多项式 $P_1,\dots,P_m$ 的常数项作任何假设。这两个特点彼此相关，具体如下：如果对每个 $i=1,\dots,m$ 取 $A_i=A_0+P_i(0)$，那么 $x+P_i(y)\in A_i$ 与 $\widetilde{\ }$ 等价于 $x+P_i(y)\in A_0$，其中 $P_i=P_i-P_i(0)$ 是 P_i 的一个平移，且其常数项为零。因此，能够取 $m+1$ 不同的集合 $A_0,\dots,A_m$，反映了结果在多项式 $P_1,\dots,P_m$ 平移下的不变性。

推论 1.13 不受多项式P_1、……、P_m 的常数项行为影响，这与多项式 Szemer´edi 定理形成鲜明对比。在 [BLM05, Theorem 5.7], 中证明了：对于任意常数项为零的多项式 P_1、……、P_m 以及任意 $\delta>0$，存在 N，使得对于任意一个由次数为 $<N$、基数为 $|A|\geq\delta p^N$ 的多项式组成的子集 $A\subseteq\mathbb{F}_p[t]$，都存在一个非平凡构型 $\{x,x+P_1(y)\dots\dots,x+P_m(y)\}\subseteq A$。要求常数项为零，是为了避免“局部障碍”。事实上，要使多项式 Szemer´edi 定理的结论成立，一个必要（尽管较弱）的条件是多项式 P_1、……、P_m 联合相交，也就是说，对于每个 $Q(t)\in\mathbb{F}_p[t]^+$，多项式 P_1、……、P_m 模 Q 有公共根。为此，可以考虑集合$A_N=\{Qn:\deg n<N-\deg Q\}$。在推论 1.13 的有限域情形中，我们不会遇到局部障碍，因为当 q 足够大（取决于 Q）时，任意元素 $Q(t)\in\mathbb{F}_p[t]^+$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中都可逆。不存在局部障碍，正是 [AB23] 中讨论的渐近全遍历性现象的根源。

由于在我们的情形中局部障碍并不起作用，因此有必要讨论无理等分布在定理 1.11 和推论 1.13 中的作用。即使在只有一个多项式 ($m=1$) 的情形下，我们可以选取不同集合 A_0,A_1 这一事实也施加了一个等分布条件；参见上文定理 1.10 中的 (vi) 和 (vii)。为使讨论具体化，我们现在给出一个多项式的具体例子，在该例中推论 1.13 的结论不成立。令 $P(y)=y^p-y$。多项式 P 在 $\mathbb{F}_q$ 中有 p 个根。特别地，$\mathbb{F}_p\subseteq\mathbb{F}_q$ 的每个元素都是 P 的根。此外，P 是一个加性多项式，因此对每个 $q=p^k$，像集 $H_q=P(\mathbb{F}_q)$ 都是 $\mathbb{F}_q$ 中指数为 p 的子群。取 $A_0=H_q$ 和 A_1 为 H_q 的一个非平凡陪集，可知 $C=\{(x,y)\in\mathbb{F}_q^2:\ x\in A_0,x+P(y)\in A_1\}=\emptyset$。这与推论 1.13 的预测相矛盾；根据该预测，$C$ 的基数应为 $|C|=p^{-2}q^2+O_{q\to\infty;P}\left(q^{2-\gamma}\right)$。

1.3. 证明策略。定理 1.11 证明中的主要技术要素是以下一般判据，它可以看作 Frantzikinakis [F23]（另见 [BF22]）联合遍历性判据的有限形式，该判据基于 Peluse [P19] 以及 Peluse 和 Prendiville [PP22a] 的工作：

定理 1.14。设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群，且 $a_1,\dots,a_m:\ G_2\to G_1$。假设存在 $C>0$、$s\in\mathbb{N}$以及 $\alpha\in(0,1]$ 使得

[3]By 非平凡模式是指元素 $x,x+P_1(y)\dots,x+P_m(y)$ 两两不同。

(i) 对任意 $l \in \{1,\dots,m\}$、任意 f_1, ..., f_l: $G_1 \to \mathbb{D}$, 以及任意 χ_{l+1}, ..., $\chi_m \in G_1$,

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l} f_i(x+a_i(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \le C \|f_l\|_{U^s(G_1)}^{\alpha} + \delta_1,$$

and

(ii) 对于任意 $\chi_1,\dots,\chi_m \in G_1$, 只要它们不全是平凡特征,

$$\left| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} \chi_i(a_i(y)) \right| \le \delta_2.$$

那么存在 $\gamma_1,\gamma_2 > 0$, 使得对于任意 $f_1,\dots,f_m$: $G_1 \to \mathbb{D}$,

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} f_i(x+a_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1} f_i(z) \right\|_{L^2(G_1)} \ll_{m,C,s,\alpha} \delta_1^{\gamma_1} + \delta_2^{\gamma_2}.$$

我们将在第 2 节证明定理 1.14。

接下来只需在 $G_1 = G_2 = \mathbb{F}_q$ 和 $a_i = P_i \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 的情形下证明性质（i）和（ii）（其中 $\delta_j = q^{-\beta_j}$, 且某些 $\beta_1,\beta_2 > 0$）。

当所有多项式 $P_1,\dots,P_m$ 的次数均为 $d < p$ 时, 性质（i）可由标准 PET 归纳论证推出; 例如参见 [Pr17, P19]。性质（ii）则可由 [BBI21] 中给出的有限域上指数和的初等估计推出; 参见 [BBI21, 引理 3], 以及其证明中第 713 页页首出现的最后一个不等式（见 [BBI21]）。

在高次数情形下, 证明性质 (i) 和 (ii) 更具挑战性。为证明性质 (i), 我们采用一种新的 PET 归纳变体, 该方法基于多项式 $P_1,\dots,P_m$ 的导数次数。此论证将在第 3 节中展开。对于条件 (ii), 我们使用在 [AB23] 中证明的一项 Furstenberg–S´ark¨ozy 型结果; 参见上文定理 1.10 的 (iv) 项。

2. Joint ergodicity criterion over finite abelian groups

本节旨在证明定理 1.14, 现重述如下:

定理 1.14. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群, 且 $a_1,\dots,a_m$: $G_2 \to G_1$。假设存在 $C > 0$, $s \in \mathbb{N}$, 和 $\alpha \in (0,1]$ 使得

(i) 对任意 $l \in \{1,\dots,m\}$、任意 $f_1,\dots,f_l$: $G_1 \to \mathbb{D}$以及任意 $\chi_{l+1},\dots,\chi_m \in G_1$,

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l} f_i(x+a_i(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \le C \|f_l\|_{U^s(G_1)}^{\alpha} + \delta_1,$$

and

(ii) 对任意 $\chi_1,\dots,\chi_m \in G_1$, 它们不全是平凡特征,

$$\left| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} \chi_i(a_i(y)) \right| \le \delta_2.$$

那么存在 γ_1、$\gamma_2 > 0$, 使得对于任意 f_1、.....、f_m: $G_1 \to \mathbb{D}$,

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} f_i(x+a_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1} f_i(z) \right\|_{L^2(G_1)} \ll_{m,C,s,\alpha} \delta_1^{\gamma_1} + \delta_2^{\gamma_2}.$$

注 2.1. 定理 1.14 的结论蕴含了条件 (i) 和 (ii)，其中常数取适当值。设

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} f_i(x+a_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1} f_i(z) \right\|_{L^2(G_1)} \leq \varepsilon$$

对于每个 f_1、……、f_m：$G_1 \to \mathbb{D}$。然后根据三角不等式，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{m} f_i(x+a_i(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{U^1(G_1)} + \varepsilon \leq \min_{1\leq i\leq m} \|f_i\|_{U^1(G_1)} + \varepsilon,$$

因此 (i) 对 $C=1$、$s=1$、$\alpha=1$ 和 $\delta_1=\varepsilon$ 成立。将 $f_i=\chi_i\in G_1$ 特殊化即可立即得到带有 $\delta_2=\varepsilon$ 的 (ii)。

2.1. 证明概要。为了完成定理 1.14 的证明，我们将证明以下陈述，该陈述给出了 $l=m$ 情形下的定理 1.14：

命题 2.2. 假设 a_1、……、a_m：$G_2\to G_1$ 满足 (i) 和 (ii)。令 $l\in\{0,\dots,m\}$。存在 $\gamma_{l,1}$、$\gamma_{l,2}>0$，使得对于任意 f_1、……、f_l：$G_1\to\mathbb{D}$，以及任意 χ_{l+1}、……、$\chi_m\in G_1$，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l} f_i(x+a_i(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) - \mathbb{I}^{\chi=1} \prod_{i=1}^{l} \mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1} f_i(z) \right\|_{L^2(G_1)} \ll_{l,C,s,\alpha} \delta_1^{\gamma_{l,1}} + \delta_2^{\gamma_{l,2}}.$$

基本情形 $l=0$ 由条件 (ii) 得出。

现在我们简要说明：已知 $l-1$ 的结果时，如何证明 $l\in\{1,\dots,m\}$ 的命题 2.2。根据三角不等式，只需对以下量进行估计：

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l} f_i(x+a_i(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \tag{2.1}$$

在附加假设 $\mathbb{E}_{z\in G_1} f_l(z)=0$ 下。假设 (2.1) 中的量很大。我们首先证明（引理 2.5），将 f_l 替换为如下形式的函数后，该结论仍然成立：

$$\widetilde{f_l}(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G} f_0(x-a_l(y)) \prod_{i=1}^{l-1} f_i(x+(a_i-a_l)(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j((a_j-a_l)(y))$$

其中 $\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}$ 非常小（该界由命题 2.2 的 $l-1$ 情形给出）。于是，条件 (i) 蕴含 $\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^s(G_1)}$ 很大。接下来要证明量 $\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s-1}(G_1)}$ 也很大，并反复进行降阶过程，直到通过证明 $\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}$ 必定很大而得到矛盾。

降阶过程大致如下。U^s-范数较大意味着（命题 2.6）

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G_1^{s-2}} \left| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} \Delta_{\mathbf{h}} \widetilde{f_l}(x) \chi_{\mathbf{h}}(x) \right|$$

对 G 上某个特征族 $(\chi_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h}\in G^{s-2}}$，其值较大。接着，我们交换$\widetilde{\ }$定义中平均与差分算子的顺序，并借助引理 2.8 推得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-2}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_0(x-a_l(y))\prod_{i=1}^{l-1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(x+(a_i-a_l)(y))\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(x)\right|$$

很大，其中

$$\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}=\prod_{\omega\in\{0,1\}^{s-2}}C^{|\omega|}\chi_{\mathbf{h}^\omega}\qquad\text{and}\qquad\mathbf{h}^\omega=\left(h_1^{\omega_1},\dots,h_{s-2}^{\omega_{s-2}}\right).$$

将 x 替换为 $x+a_l(y)$ 并使用归纳假设，这意味着

$$\frac{\left|\left\{(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1)\in G_1^{2(s-2)}:\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}=1\right\}\right|}{|G_1|^{2(s-2)}}$$

很大。根据 $\chi_{\mathbf{h}^0}$的定义，$\mathbf{h}^1$，，这使我们能够将映射 $\mathbf{h}\mapsto\chi_{\mathbf{h}}$ 写成较少变量的函数乘积（至少在定义域 G_1^{s-2} 的一个大子集上）。利用特征族 $(\chi_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h}\in G_1^{s-2}}$ 的这一额外结构，我们能够得出（通过应用引理 2.7），$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s-1}(G_1)}$ 很大。

为了完整证明命题 2.2，我们需要为前述讨论中的“大”和“小”赋予精确含义，并对论证每一步中的损失进行定量控制。我们在第 2.2–2.6 小节中汇集所需的技术性引理，并在第 2.7 小节中将所有内容结合起来证明命题 2.2。

2.2. 利用多重线性进行约化。

引理 2.3. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群。设 $a_1,\dots,a_m\colon G_2\to G_1$。设 $l\in\{1,\dots,m\}$，$f_1,\dots,f_l\colon G_1\to\mathbb{D}$，且 $\chi_{l+1},\dots,\chi_m\in G_1$。假设

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}\geq\delta.$$

对每个 $i=1,\dots,l-1$，记

$$f_i=\left(f_i-\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}f_i(z)\right)+\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}f_i(z)=f_{i,0}+f_{i,1}.$$

那么存在某个 $\omega\in\{0,1\}^{l-1}$，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_{i,\omega_i}(x+a_i(y))f_l(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}\geq\frac{\delta}{2^{l-1}}.$$

证明。这是三角不等式的一个简单应用。 □

2.3. 替换 f_l 为一个结构化函数。给定半范数 $|||\cdot|||$，我们定义对偶半范数为

$$|||f|||^*=\sup_{|||g|||\leq1}|\langle f,g\rangle|.$$

引理 2.4。设 $|||\cdot|||$ 是 $\mathbb{C}^G$上的一个半范数。对于任意的 $f\colon G\to\mathbb{C}$ 以及任意的 $c>0$，存在$f_s,f_u\colon G\to\mathbb{C}$，使得 $f=f_s+f_u$ 满足

$$|||f_s|||^*\leq c^{-1}\|f\|_{L^2(G)}\qquad and\qquad|||f_u|||\leq c\|f\|_{L^2(G)}.$$

证明。若 $|||\cdot|||$ 实际上是一个范数，则该结论已在 [G10，命题 3.6] 及其紧接着的讨论中证明。关于推广到半范数的情形，参见 [Pr20，引理 7.1]。□

引理 2.5. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群，并设 $a_1,\dots,a_m\colon G_2\to G_1$。令 $l\in\{1,\dots,m\}$。假设对于任意 $f_1,\dots,f_{l-1}\colon G_1\to\mathbb{D}$ 以及任意 $\chi_l,\dots,\chi_m\in G_1$，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l}^{m}\chi_j(a_j(y))-\mathbb{I}^{\chi=1}\prod_{i=1}^{l-1}\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}f_i(z)\right\|_{L^2(G_1)}\le\varepsilon.$$

设 $f_1,\dots,f_l\colon G_1\to\mathbb{D}$ 以及 $\chi_{l+1},\dots,\chi_m\in G_1$。假设函数 $f_1,\dots,f_{l-1}$ 各自要么为常数，要么均值为零。若

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}\ge\delta,$$

则存在 $f_0:G_1\to\mathbb{D}$ 使得

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))\widetilde{f_l}(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}\ge\frac{\delta^3}{4}.$$

其中

$$\widetilde{f_l}(x)=\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}f_0(x-a_l(y))\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+(a_i-a_l)(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j((a_j-a_l)(y)).$$

此外，若 $\mathbb{E}_{x\in G_1}f_l(x)=0$，我们可以选择 f_0 使得

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\widetilde{f_l}(x)\right|\le\varepsilon.$$

证明。令

$$f_0(x)=\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l}\overline{f_i(x+a_i(y))}\prod_{j=l+1}^{m}\overline{\chi_j(a_j(y))}$$

使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}f_0(x)\prod_{i=1}^{l}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))=\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}^2\ge\delta^2.$$

根据半范数的引理 2.4，将 $f_l=f_s+f_u$ 分解

$$|||f|||=\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))f(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}$$

于是，由三角不等式和柯西–施瓦茨不等式，

$$\left|\left\langle f_s,\widetilde{f_l}\right\rangle\right|=\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}f_0(x)\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))f_s(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right|\ge\delta(\delta-c).$$

另一方面，

$$\left|\left\langle f_s,\widetilde{f_l}\right\rangle\right|\le|||f_s|||^*\left|\left|\left|\widetilde{f_l}\right|\right|\right|\le c^{-1}\left|\left|\left|\widetilde{f_l}\right|\right|\right|.$$

因此，

$$\left\|\left\|\widetilde{f_l}\right\|\right\| \geq c\delta(\delta - c).$$

取 $c = \frac{\delta}{2}$，即可得到所需的界。

现在直接根据 $\widetilde{f_l}$ 的定义计算 $\left|\mathbb{E}_{x\in G_1}\widetilde{f_l}(x)\right|$：

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\widetilde{f_l}(x)\right| = \left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} f_0(x)\prod_{i=1}^{l-1} f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right|.$$

如果函数 $f_1, \ldots, f_{l-1}$ 中至少有一个均值为零，那么由柯西–施瓦茨不等式和假设可得，

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} f_0(x)\prod_{i=1}^{l-1} f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right| \leq \left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1} f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)} \leq \varepsilon.$$

反之，如果每个 f_i 都是常数（例如，等于 c_i），那么

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\widetilde{f_l}(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} f_0(x)\prod_{i=1}^{l-1} c_i \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y)),$$

and

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} f_0(x) = \prod_{i=1}^{l-1}\overline{c}_i \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\overline{f}_l(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\overline{\chi_j(a_j(y))}.$$

将 x 替换为 $x + a_l(y)$，可知如果 $\mathbb{E}_{x\in G_1} f_l(x) = 0$，那么 $\mathbb{E}_{x\in G_1}\widetilde{f_l}(x) = 0$。 □

2.4. Gowers 范数与特征的相关性。

命题 2.6. 设 G 是一个有限阿贝尔群，且 $f\colon G \to \mathbb{D}$。存在一个定义在 G 上的特征族 $(\chi_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h}\in G^s}$，使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right| \geq \|f\|^{2^{s+2}}_{U^{s+2}(G)}.$$

证明。根据定义，

$$\|f\|^{2^{s+2}}_{U^{s+2}(G)} = \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|^4_{U^2(G)}.$$

现在，对每个 $\mathbf{h}\in G^s$，我们有

$$\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|^4_{U^2(G)} = \sum_{\chi\in\widehat{G}}\left|\widehat{\Delta_{\mathbf{h}} f}(\chi)\right|^4 \leq \sup_{\chi\in\widehat{G}}\left|\widehat{\Delta_{\mathbf{h}} f}(\chi)\right|^2 \cdot \|f\|^2_{L^2(G)},$$

因此我们可以选取 $\chi_{\mathbf{h}}\in\widehat{G}$ 满足

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|^2 \geq \|\Delta_{\mathbf{h}} f\|^4_{U^2(G)}.$$

利用 f 有界于 1 这一事实，我们得到

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right| \geq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|^2 \geq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|^4_{U^2(G)} = \|f\|^{2^{s+2}}_{U^{s+2}(G)}.$$

□

如果映射 $\mathbf{h} \mapsto \chi_{\mathbf{h}}$ 是低秩的，那么 U^{s+1} 范数也必定很大：

引理 2.7. 设 G 是一个有限阿贝尔群，并设 $f\colon G \to \mathbb{D}$。令 $\varphi_1,\dots,\varphi_m\colon G^{s-1} \to \widehat{G}, m \le s$，并定义

$$\chi_{\mathbf{h}} = \prod_{i=1}^{m} \varphi_i\left((h_j)_{j\neq i}\right)$$

对于 $\mathbf{h} \in G^s$。则

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right| \le \|f\|^{2^{s-m}}_{U^{s+1}(G)}.$$

证明。对于 $m=0$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\right| \le \left(\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\right|^2\right)^{1/2} = \|f\|^{2^s}_{U^{s+1}(G)}.$$

现在设 $m \ge 1$。令 ψ(h) 为左侧绝对值的相位的共轭，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{\mathbf{h}} f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right| \\
&\quad= \mathop{\mathbb{E}}_{h_2,\dots,h_s\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{h_2,\dots,h_s}\overline{f(x)}\varphi_1(h_2,\dots,h_s)(x)\mathop{\mathbb{E}}_{h_1\in G}\Delta_{h_2,\dots,h_s} f(x+h_1)\prod_{i=2}^{m}\varphi_i\left((h_j)_{j\neq i}\right)(x)\psi(h_1,\dots,h_s) \\
&\quad\le \left(\mathop{\mathbb{E}}_{h_2,\dots,h_s\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{h_1\in G}\Delta_{h_2,\dots,h_s} f(x+h_1)\prod_{i=2}^{m}\varphi_i\left((h_j)_{j\neq i}\right)(x)\psi(h_1,\dots,h_s)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\quad\le \left(\mathop{\mathbb{E}}_{h_2,\dots,h_s\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{h_1,h_1'\in G}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{h_1-h_1',h_2,\dots,h_s} f(x)\prod_{i=2}^{m}\varphi_i\left((h_j)_{j\neq i}\right)(x)\overline{\varphi_i\left((h_j')_{j\neq i}\right)(x)}\right|\right)^{1/2} \\
&\quad\le \left(\sup_{h_1'\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{h_1,h_2,\dots,h_s\in G}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\Delta_{h_1-h_1',h_2,\dots,h_s} f(x)\prod_{i=2}^{m}\varphi_i\left((h_j)_{j\neq i}\right)(x)\overline{\varphi_i\left((h_j')_{j\neq i}\right)(x)}\right|\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

由归纳法可知，这个量的上界为

$$\left(\|f\|^{2^{s-(m-1)}}_{U^{s+1}(G)}\right)^{1/2} = \|f\|^{2^{s-m}}_{U^{s+1}(G)}.$$

□

2.5. 差分交换引理。以下引理的一个版本以“对偶差分交换”引理的形式出现在 [PP22b, 引理 6.3] 以及 [Pr20, 引理 6.3] 中：

引理 2.8. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群。设 $f\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{D}$，并定义 $F(x) = \mathbb{E}_{y\in G_2} f(x,y)$。对于任意 $s \ge 0$、G_1 上任意一组特征 $(\chi_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h}\in G_1^s}$，以及任意子集 $\mathcal{H} \subseteq G_1^s$,

$$\left(\frac{1}{|G_1|^s}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}} F(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\right)^{2^s} \le \frac{1}{|G_1|^{2s}}\sum_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1} f(x,y)\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(x)\right|, \tag{2.2}$$

其中

$$\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1} = \prod_{\omega\in\{0,1\}^s} C^{|\omega|}\chi_{\mathbf{h}^\omega} \qquad \textit{and} \qquad \mathbf{h}^\omega = (h_1^{\omega_1},\dots,h_s^{\omega_s}).$$

证明。我们通过归纳法证明不等式（2.2）。

当 $s=0$ 时，(2.2) 的两边均等于

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} F(x)\chi(x)\right| = \left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} f(x,y)\chi(x)\right|.$$

假设 $s\geq 1$。注意，对于 $h\in G_1$,

$$\Delta_h F(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{y,y'\in G_2} f(x+h,y)\overline{f(x,y')}.$$

我们将关于 $\mathcal{H}$ 的求和拆分为迭代求和（记作 $\mathcal{H}^h=\{\mathbf{h}\in G^{s-1}:(\mathbf{h}\ h)\in\mathcal{H}\}$），并对函数 f_h: $G_1\times G_2^2\to\mathbb{D}$ 使用归纳假设，其中函数由 $f_h(x,y,y')=f(x+h,y)\overline{f(x,y')}$ 给出：

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|G_1|^s}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}F(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\right)^{2^s} &= \left(\mathop{\mathbb{E}}_{h\in G_1}\frac{1}{|G_1|^{s-1}}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}^h}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}\Delta_h F(x)\chi_{\mathbf{h},h}(x)\right|\right)^{2^s}\\ &\leq \left(\mathop{\mathbb{E}}_{h\in G_1}\left(\frac{1}{|G_1|^{s-1}}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}^h}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}\Delta_h F(x)\chi_{\mathbf{h},h}(x)\right|\right)^{2^{s-1}}\right)^2\\ &\leq \left(\mathop{\mathbb{E}}_{h\in G_1}\frac{1}{|G_1|^{2(s-1)}}\sum_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}^h}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y,y'\in G_2}\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_h(x,y,y')\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h}(x)\right|\right)^2.\end{aligned}$$

令 $\psi(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h)$ 为绝对值相位的共轭。然后我们将关于 h 的平均移至内部，并应用柯西–施瓦茨不等式：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|G_1|^s}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}F(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\right)^{2^s}\\ &= \left(\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-1}}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y,y'\in G_2}\frac{1}{|G_1|}\sum_{(\mathbf{h}^i,h)\in\mathcal{H}}\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_h(x,y,y')\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h}(x)\psi\left(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h\right)\right)^2\\ &\leq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-1}}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\left|\frac{1}{|G_1|}\sum_{(\mathbf{h}^i,h)\in\mathcal{H}}\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f(x+h,y)\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h}(x)\psi\left(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h\right)\right|^2,\end{aligned}$$

因为

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-1}}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y'\in G_2}\left|\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f(x,y')\right|^2\leq 1.$$

展开平方项后，

$$\begin{aligned}&\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G_1^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}F(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\right)^{2^s}\\ &\leq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-1}}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\frac{1}{|G_1|^2}\sum_{(\mathbf{h}^i,h_j)\in\mathcal{H}}\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f(x+h_0,y)\overline{f(x+h_1,y)}\\ &\qquad\left(\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h_0}\overline{\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h_1}}\right)(x)\psi\left(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h_0\right)\overline{\psi\left(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1,h_1\right)}\\ &\leq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in G_1^{s-1}}\frac{1}{|G_1|^2}\sum_{(\mathbf{h}^i,h_j)\in\mathcal{H}}\left|\Delta^{(1)}_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}\Delta^{(1)}_{h_0-h_1}f(x,y)\chi_{\mathbf{h}^0,h_0;\mathbf{h}^1,h_1}(x)\right|.\end{aligned}$$

□

2.6. 降阶。

引理 2.9. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群，并设 $a_1,\dots,a_m\colon G_2\to G_1$。设 $l\in\{1,\dots,m\}$。假设对任意 $f_1,\dots,f_{l-1}\colon G_1\to\mathbb{D}$ 以及任意 $\chi_l,\dots,\chi_m\in G_1$，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l}^{m}\chi_j(a_j(y))-\mathbb{I}^{\chi=1}\prod_{i=1}^{l-1}\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G}f_i(z)\right\|_{L^2(G_1)}\leq\varepsilon.$$

令 $f_0,f_1,\dots,f_l\colon G_1\to\mathbb{D}$ 和 $\chi_{l+1},\dots,\chi_m\in G_1$，并设

$$\widetilde{f}_l(x)=\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}f_0(x-a_l(y))\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+(a_i-a_l)(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j((a_j-a_l)(y)).$$

If

$$\left\|\widetilde{f}_l\right\|_{U^{s+2}(G_1)}\geq\delta,$$

then

$$\left\|\widetilde{f}_l\right\|_{U^{s+1}(G_1)}\geq\left(\frac{\delta^{2^{2s+4}}}{2^{2^{s+2}}}-\varepsilon^2\right)\cdot\frac{\delta^{2^{s+2}}}{2}.$$

证明。由命题 2.6

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G_1^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}\widetilde{f}_l(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\geq\delta^{2^{s+2}}$$

对于有限域 G_1 上某个特征族 $(\chi_{\mathbf{h}})^{\mathbf{h}\in G_1^s}$，因此，存在一个大小为 $|\mathcal{H}|\geq\frac{\delta^{2^{s+2}}}{2}|G_1|^s$ 的子集 $\mathcal{H}\subseteq G_1^s$，使得

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}\widetilde{f}_l(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\geq\frac{\delta^{2^{s+2}}}{2}$$

对每个 $\mathbf{h}\in\mathcal{H}$。

应用引理 2.8，可得

$$\frac{1}{|G_1|^{2s}}\sum_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_0(x-a_l(y))\prod_{i=1}^{l-1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(x+(a_i-a_l)(y))\prod_{j=l+1}^{m}\widetilde{\chi}_j(a_j(y))\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(x)\right|$$
$$\geq\left(\frac{\delta^{2^{s+2}}}{2}\right)^{2^{s+1}}=\frac{\delta^{2^{2s+3}}}{2^{2^{s+1}}},$$

其中

$$\widetilde{\chi}_j=\begin{cases}\chi_j, & s=0\\ 1, & s\geq 1.\end{cases}$$

将 x 替换为 $x+a_l(y)$ 后，我们得到

$$\frac{1}{|G_1|^{2s}}\sum_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_0(x)\prod_{i=1}^{l-1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\widetilde{\chi}_j(a_j(y))\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(x+a_l(y))\right|\geq\frac{\delta^{2^{2s+3}}}{2^{2^{s+1}}}.$$

由柯西–施瓦茨不等式以及 f_0 的 1-有界性，我们推得

$$\frac{1}{|G_1|^{2s}}\sum_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\widetilde{\chi}_j(a_j(y))\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(a_l(y))\right|^2\geq\frac{\delta^{2^{2s+4}}}{2^{2^{s+2}}}.$$

根据假设，对于每个 $\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\widetilde{\chi}_j(a_j(y))\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}(a_l(y))-\mathbb{I}^{\widetilde{\chi}=1}{}_{\mathbb{I}^{\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}=1}}\prod_{i=1}^{l-1}\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}^0-\mathbf{h}^1}f_i(z)\right|^2\leq\varepsilon^2.$$

由此可得

$$\left|\left\{(\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1)\in\mathcal{H}^2:\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}=1\right\}\right|\geq\left(\frac{\delta^{2^{2s+4}}}{2^{2^{s+2}}}-\varepsilon^2\right)\cdot|G_1|^{2s},$$

因此存在 $\mathbf{h}^1\in\mathcal{H}$ ，使得集合

$$\mathcal{H}'=\left\{\mathbf{h}^0\in\mathcal{H}:\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}=1\right\}$$

的基数为

$$\left|\mathcal{H}'\right|\geq\left(\frac{\delta^{2^{2s+4}}}{2^{2^{s+2}}}-\varepsilon^2\right)\cdot|G_1|^{s}.$$

现在，对于 $\mathbf{h}^0\in\mathcal{H}'$，我们有

$$\chi_{\mathbf{h}^0}=\chi_{\mathbf{h}^0}\overline{\chi_{\mathbf{h}^0,\mathbf{h}^1}}=\prod_{\omega\in\{0,1\}^s\setminus\{\mathbf{0}\}}\chi_{\mathbf{h}^\omega}.\tag{2.3}$$

由于 $\mathbf{h}^1$ 固定，(2.3) 将 $\chi_{\mathbf{h}^0}$ 表示为若干函数的乘积，其中每个函数至多依赖于 $s-1$ 个变量（$h_1^0,\ldots,h_s^0$）。根据 (2.3) 右侧的表达式定义 $\chi'_{\mathbf{h}}$。对于 $\mathbf{h}\in\mathcal{H}'$，我们有 $\chi_{\mathbf{h}}=\chi'_{\mathbf{h}}$，并且映射 $\mathbf{h}\mapsto\chi'_{\mathbf{h}}$ 满足引理 2.7 的假设，其中 $m=s$。因此，由引理 2.7 可得，

$$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}\geq\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{h}\in G_1^s}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}f(x)\chi'_{\mathbf{h}}(x)\right|\geq\frac{1}{|G_1|^s}\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}'}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1}\Delta_{\mathbf{h}}f(x)\chi_{\mathbf{h}}(x)\right|\geq\left(\frac{\delta^{2^{2s+4}}}{2^{2^{s+2}}}-\varepsilon^2\right)\cdot\frac{\delta^{2^{s+2}}}{2}.$$

□

推论 2.10. 设 G_1 和 G_2 为有限阿贝尔群，并设 $a_1,\ldots,a_m\colon G_2\to G_1$。令 $l\in\{1,\ldots,m\}$。假设对于任意 $f_1,\ldots,f_{l-1}\colon G_1\to\mathbb{D}$ 以及任意 $\chi_l,\ldots,\chi_m\in G_1$,

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l}^{m}\chi_j(a_j(y))-\mathbb{I}^{\chi=1}\prod_{i=1}^{l-1}\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}f_i(z)\right\|_{L^2(G_1)}\leq\varepsilon.$$

设 $f_0,f_1,\ldots,f_l\colon G_1\to\mathbb{D}$ 且 $\chi_{l+1},\ldots,\chi_m\in G_1$，并令

$$\widetilde{f_l}(x)=\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}f_0(x-a_l(y))\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+(a_i-a_l)(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j((a_j-a_l)(y)).$$

对于任意 $s\in\mathbb{N}$，存在 $m,n\in\mathbb{N}$（仅取决于 s），使得

$$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^s(G_1)}\ll_s\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}^{1/m}+\varepsilon^{1/n}.\tag{2.4}$$

证明。对于 $s=1$，无需证明。设 (2.4) 对某个 $s\geq 1$ 成立。由引理 2.9，

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^s(G_1)} &\geq \left(\frac{\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}^{4^{s+1}}}{2^{2^{s+1}}}-\varepsilon^2\right)\frac{\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}^{2^{s+1}}}{2}\\ &\gg_s \left(\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}-2^{1/2^{s+1}}\varepsilon^{1/2^{2s+1}}\right)^{4^{s+1}}\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}^{2^{s+1}}\\ &\geq \left(\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}-2^{1/2^{s+1}}\varepsilon^{1/2^{2s+1}}\right)^{4^{s+1}+2^{s+1}}.\end{aligned}$$

重新整理后，得到

$$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}\ll_s \left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^s(G_1)}^{1/m'}+\varepsilon^{1/n'}$$

for

$$m'=4^{s+1}+2^{s+1}\qquad\text{and}\qquad n'=2^{2s+1}.$$

根据归纳假设，

$$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^s(G_1)}^{1/m'}\ll_s \left(\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}^{1/m}+\varepsilon^{1/n}\right)^{1/m'}\leq \left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}^{1/(mm')}+\varepsilon^{1/(nm')}.$$

因此，

$$\left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^{s+1}(G_1)}\ll \left\|\widetilde{f_l}\right\|_{U^1(G_1)}^{1/(mm')}+\varepsilon^{1/n''},$$

其中 $n''=$ 最大值$\{nm',n'\}$。 □

2.7. 联合遍历性判据的证明。现在我们来完成第 2.1 小节中概述的论证。

证明 ^命题 2.2。设 $l=0$。我们要证明：对于任意 $\chi_1,\dots,\chi_m\in G_1$ ，

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{j=1}^{m}\chi_j(a_j(y))-\mathbb{I}^{\chi=1}\right|\leq\varepsilon_0 \tag{2.5}$$

其中 $\varepsilon_0=O\left(\delta^{\gamma_0,\ 1}+\delta^{\gamma_0,2\ 2}\right)$。若 $\chi_1=\cdots=\chi_m=1$，则 (2.5) 的左边等于 0。另一方面，若特征 $\chi_1,\dots,\chi_m$ 中至少有一个非平凡，则 (2.5) 化为满足 $\varepsilon_0=\delta_2$ 的性质（ii）。

现在设 $l\in\{1,\dots,m\}$，且命题 2.2 对 $l-1$ 成立。令 $f_1,\dots,f_l\colon G_1\to\mathbb{D}$ 和 $\chi_{l+1},\dots,\chi_m\in G_1$。我们要证明

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l}f_i(x+a_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))-\mathbb{I}^{\chi=1}\prod_{i=1}^{l}\mathop{\mathbb{E}}_{z\in G_1}f_i(z)\right\|_{L^2(G_1)}\leq\varepsilon_l \tag{2.6}$$

与 $\varepsilon_l=\ O\left(\delta^{\gamma_l,\ 1}+\delta^{\gamma_l,\ 2\ 2}\right)$。假设 (2.6) 不成立。那么对于 $f_l'=f_l-\mathbb{E}_{x\in G_1}f_l(x)$，我们有

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\prod_{i=1}^{l-1}f_i(x+a_i(y))f_l'(x+a_l(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(a_j(y))\right\|_{L^2(G_1)}\geq\varepsilon_l-\varepsilon_{l-1},$$

其中 $\varepsilon_{l-1} = O\left(\delta_1^{\gamma_{l-1},1} + \delta_2^{\gamma_{l-2},2}\right)$ 是由归纳假设得到的界。结合引理 2.3，我们可以假设函数 f_1、. . .、 f_{l-1} 各自要么是常数，要么均值为零， f_l 均值为零，并且

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l} f_i(x + a_i(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \geq \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1}}{2^{2l-1}}. \tag{2.7}$$

（注意，与引理 2.3 的陈述相比，多出的因子 2^l 是由于将修改后的函数除以 2，以保持函数 $f_1, . . . , f_l$ 的 1- 有界性。）由引理 2.5，存在 $f_0 \colon G_1 \to \mathbb{D}$，使得函数

$$\widetilde{f}_l(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} f_0(x - a_l(y)) \prod_{i=1}^{l-1} f_i(x + (a_i - a_l)(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j((a_j - a_l)(y))$$

满足

$$\left\|\widetilde{f}_1\right\|_{U^1(G_1)} \leq \varepsilon_{l-1} \tag{2.8}$$

and

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2} \prod_{i=1}^{l-1} f_i(x + a_i(y)) \widetilde{f}_l(x + a_l(y)) \prod_{j=l+1}^{m} \chi_j(a_j(y)) \right\|_{L^2(G_1)} \geq \frac{\delta^3}{4}$$

with

$$\delta = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1}}{2^{2l-1}}.$$

由性质 (i) 可知

$$\left\|\widetilde{f}_l\right\|_{U^s(G_1)} \geq C^{-1/\alpha} \left(\frac{\delta^3}{4} - \delta_1\right)^{1/\alpha}. \tag{2.9}$$

另一方面，由推论 2.10，存在 $m, n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left\|\widetilde{f}_l\right\|_{U^s(G_1)} \ll_s \left\|\widetilde{f}_l\right\|_{U^1(G_1)}^{1/m} + \varepsilon_{l-1}^{1/n}.$$

结合 (2.8) 和 (2.9)，我们得到

$$\left(\delta^3 - 4\delta^1\right)^{1/\alpha} \ll_{C,s,\alpha} \varepsilon_{l-1}^{1/m} + \varepsilon_{l-1}^{1/n} \ll \varepsilon_{l-1}^{1/r},$$

其中 $r = \max\{m, n\}$。因此，

$$\varepsilon_l \ll \varepsilon_{l-1} + \delta \ll \varepsilon_{l-1}^{\alpha/3r} + \delta_1^{1/3}.$$

由归纳法可得

$$\varepsilon_l \ll \delta_1^{\gamma_{l,1}} + \delta_2^{\gamma_{l,2}}$$

for

$$\gamma_{l,1} = \min\left\{\frac{\alpha}{3r}\gamma_{l-1,1}, \frac{1}{3}\right\} \qquad \text{and} \qquad \gamma_{l,2} = \frac{\alpha}{3r}\gamma_{l-1,2}.$$

□

注 2.11. 由证明可知，在定理 1.14 的结论中，我们可以取

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{3r}\right)^{s-2} \qquad \text{and} \qquad \gamma_2 = \left(\frac{\alpha}{3r}\right)^{s-1}$$

其中 r 依指数关系依赖于 s。

3. Gowers norm estimates

我们将使用联合遍历性判据（定理 1.14）证明定理 1.11。因此，首先必须控制如下形式的平均

$$\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m} f_i(x+P_i(y))$$

通过适当的 Gowers 范数。

命题 3.1. 设 $P_1,\dots,P_m \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 为非恒定且本质不同的多项式。存在 $C_1,C_2>0$, $s\in\mathbb{N}$ 和 α, $\beta\in(0,1]$，使得对任意 $q=p^k$ 及任意 $f_1,\dots,f_m\colon \mathbb{F}_q\to\mathbb{D}$,

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m} f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \le C_1 \min_{1\le i\le m}\|f_i\|^{\alpha}_{U^s(\mathbb{F}_q)} + C_2 q^{-\beta}.$$

第 k 命题 3.1 证明中的关键估计由接下来的两个引理给出。

引理 3.2. 设 G 是一个有限阿贝尔群，$H\le G$ 是一个子群。对于任意 $f\colon G\to\mathbb{D}$以及任意 $s\in\mathbb{N}$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\|\Delta_h f\|^{2^s}_{U^s(G)} \le [G:H]\cdot\|f\|^{2^{s+1}}_{U^{s+1}(G)}.$$

证明。假 设 $s=1$。展开左侧并进行傅里叶变换，我们有 e

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\|\Delta_h f\|^2_{U^1(G)} &= \mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\mathop{\mathbb{E}}_{v\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{u\in G} f(u+v+h)\overline{f(u+v)f(u+h)}f(u)\\
&= \sum_{\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi_1)\overline{\widehat{f}(\chi_2\widehat{f}(\chi_3)}\widehat{f}(\chi_4)\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}(\chi_1\overline{\chi}_2)(h)\mathop{\mathbb{E}}_{v\in G}(\chi_1\overline{\chi_3})(v)\mathop{\mathbb{E}}_{u\in G}(\chi_1\overline{\chi}_2\overline{\chi}_3\chi_4)(u)\\
&= \sum_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{\lambda\in H^\perp}\left|\widehat{f}(\chi\lambda)\right|^2\right)\left|\widehat{f}(\chi)\right|^2\\
&\le \left(\sum_{\chi\in\widehat{G}}\left|\widehat{f}(\chi)\right|^4\right)^{1/2}\left(\sum_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{\lambda\in H^\perp}\left|\widehat{f}(\chi\lambda)\right|^2\right)^2\right)^{1/2}\\
&\le \left|H^\perp\right|\sum_{\chi\in\widehat{G}}\left|\widehat{f}(\chi)\right|^4\\
&= [G:H]\cdot\|f\|^4_{U^2(G)}.
\end{aligned}$$

现在设 $s\ge 2$。然后应用上面的 $s=1$ 情形，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\|\Delta_h f\|^{2^s}_{U^s(G)} &= \mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{v}\in G^{s-1}}\|\Delta_{\mathbf{v}}\Delta_h f\|^2_{U^1(G)}\\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{v}\in G^{s-1}}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\|\Delta_h(\Delta_{\mathbf{v}}f)\|^2_{U^1(G)}\right)\\
&= [G:H]\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{v}\in G^{s-1}}\|\Delta_{\mathbf{v}}f\|^4_{U^2(G)}\\
&= [G:H]\cdot\|f\|^{2^{s+1}}_{U^{s+1}(G)}.
\end{aligned}$$

□

引理 3.3。设 $P_1,\dots,P_m \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 是非常数的、本质不同多项式。设$q=p^k$。设 $f_1,\dots,f_m$：$\mathbb{F}_q \to \mathbb{D}$。对于 $u \in \mathbb{F}_q$，令

$$\mathcal{P}_u = \{P_i(y) : 1 \le i \le m\} \cup \{P_i(y+u) : d\text{-}\deg P_i > 1\} = \{P_{u,1},\dots,P_{u,l}\},$$

并定义

$$f_{u,j}(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{if } P_{u,j}(y) = P_i(y+u) \text{ and } d\text{-}\deg P_i > 1; \\ \overline{f_i(x)}, & \text{if } P_{u,j}(y) = P_i(y) \text{ and } d\text{-}\deg P_i > 1; \\ f_i(x+P_i(u)-P_i(0))\overline{f_i(x)} & \text{if } P_{u,j}(y) = P_i(y) \text{ and } d\text{-}\deg P_i = 1 \end{cases}$$

对于 $j=2,\dots,l$。于是

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y)) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2 \le \mathop{\mathbb{E}}_{u\in\mathbb{F}_q} \left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q} \prod_{j=2}^l f_{u,j}\left(x+(P_{u,j}-P_{u,1})(y)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}.$$

证明。展开左侧，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y)) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2 = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,u} \prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y+u)) \prod_{j=1}^m \overline{f_j(x+P_j(y))}.$$

根据 $f_{u,j}$ 的定义，然后平移 $P_{u,1}(y)$，可得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y,u} \prod_{j=1}^l f_{u,j}(x+P_{u,j}(y)) = \mathop{\mathbb{E}}_{u}\mathop{\mathbb{E}}_{x}\left(f_{u,1}(x) \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{j=2}^l f_{u,j}\left(x+(P_{u,j}-P_{u,1})(y)\right)\right),$$

由此，结合 $\|f_{u,1}\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \le \|f_{u,1}\|_{L^\infty(\mathbb{F}_q)} \le 1$ 的界，应用柯西–施瓦茨不等式即可得到所需的不等式。□

我们使用 PET 归纳的一个版本来证明命题 3.1。在我们的语境中，适用的 PET 归纳版本取决于多项式 P_1、…、P_m 的导数次数，而不是它们的次数。因此，我们需要一个不同于通常含义的首项概念。具体来说，对于多项式 $P(y) \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$，我们写作 $P(y) = P_k(y) + P_{<k}(y)$，其中 $P_k(y)$ 中的每个单项式的导数次数均为 $k = \text{d- deg } P$，而 $P_{<k}$ 的导数次数为 d- deg $P_{<k} < k$。于是，我们称 P_k 为 P 的导数首项。

对于任意多项式族 $\mathcal{P} = \{P_1,\dots,P_m\} \subseteq (\mathbb{F}_p[t])[y]$，我们赋予其一个权重 $w = w(\mathcal{P}) \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$，其中 w_i 表示导数次数为 i 的不同导数首项的数量。我们使用反字典序对权重向量排序。也就是说，$w < w'$ 当存在某个 $d \in \mathbb{N}$ 使得 $w_d < w'_d$，且对于 $i > d$，$w_i = w'_i$。为了证明命题 3.1，我们将对族 $\mathcal{P}$ 的权重进行归纳。

命题 3.1 的证明。由于命题 3.1 关于多项式P_1、.....、P_m是对称的，因此只需证明

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y)) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \le C_1 \|f_1\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha} + C_2 q^{-\beta} \tag{3.1}$$

对于某些 C_1、$C_2 > 0$、$s \in \mathbb{N}$和 α、$\beta \in (0,1]$。

对于多项式族 $P_1,\dots,P_m$，令 d- deg $(P_1,\dots,P_m) = \max_{1\le i\le m}$ d- deg P_i。沿用 Leibman [L05], 的说法，若一个本质不同多项式族满足 d- deg $P_1 =$ d- deg $(P_1,\dots,P_m)$，则称其为标准族。我们将首先证明标准族满足不等式 (3.1)。

假设 $P(y) \in (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 是一个加性多项式，记作 $P(y) = \sum_{j=0}^{N} a_j p^j$。令 $H = \{P(y) : y \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q$。由于 P是一个次数为 p^N 的多项式，它在 $\mathbb{F}_q$ 中至多有 p^N 个根。因此，$[\mathbb{F}_q : H] \leq p^N$。将函数 $f : \mathbb{F}_q \to \mathbb{D}$ 展开为傅里叶级数，可以证明

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} f\left(x + P(y)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2 = \sum_{\chi \in H^\perp} \left| \widehat{f}(\chi) \right|^2, \tag{3.2}$$

其中 $H^\perp = \left\{ \chi \in \widehat{\mathbb{F}_q} : \ \chi|_H = 1 \right\}$。根据 [R90，第 2.1]，节可知，我们有一个同构 $H^\perp \cong \widehat{\mathbb{F}_q / H}$，因此$|H^\perp| = [\mathbb{F}_q : \ H]$。然后根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\left(\sum_{\chi \in H^\perp} \left| \widehat{f}(\chi) \right|^2 \right)^2 \leq |H^\perp| \sum_{\chi \in \mathbb{F}_q} \left| \widehat{f}(\chi) \right|^4 \leq p^N \left\| f \right\|_{U^2(\mathbb{F}_q)}^4. \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3)，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} f\left(x + P(y)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \leq p^{N/4} \left\| f \right\|_{U^2(\mathbb{F}_q)}.$$

这证明了对应于权重向量 (1, 0, . . . , 0) 的基本情形。

假设 (3.1) 对所有权重为 $< w(\mathcal{P})$ 的标准族都成立。设 $i_0 \in \{2, \ldots, m\}$，使得 P_{i_0} 的次数最小，并且在可能的情况下，使 P_{i_0} 的导数首项不同于 P_1 的导数首项。我们应用引理 3.3，其中取 $P_{u,\,1} = P_{i_0}$ 和 $P_{u,\,2}(y) = P_1(y + u)$，从而得到估计

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^{m} f_i(x + P_i(y)) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2 \leq \mathop{\mathbb{E}}_{u \in \mathbb{F}_q} \left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} \prod_{j=2}^{l} f_{u,j}\left(x + (P_{u,j} - P_{u,1})(y)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}. \tag{3.4}$$

（若所有多项式 $P_1, \ldots, P_m$ 的 d-deg $P_i = 1$，则我们改取 $P_{u,2} = P_1$，论证的其余部分保持不变。）

Let

$$\mathcal{P}'_u = \{P_{u,2} - P_{u,1}, \ldots, P_{u,l} - P_{u,1}\}$$

是 (3.4) 右侧出现的多项式族。我们断言 $w(\mathcal{P}'_u) < w(\mathcal{P})$。固定 $i \in \{2, \ldots, l\}$。若 d- deg $P_{u,i} >$ d- deg $P_{u,1}$，则 $P_{u,i} - P_{u,1}$ 的导数首项与 $P_{u,i}$ 的导数首项相同。若 d- deg $P_{u,i}$ = d- deg $P_{u,1}$，但 $P_{u,i}$ 和 $P_{u,1}$ 的导数首项不同，则 $P_{u,i} - P_{u,1}$ 的导数首项等于 $P_{u,i}$ 与 $P_{u,1}$ 的导数首项之差。最后，若 P_{u_i} 和 $P_{u,1}$ 的导数首项相同，则 d- deg $(P_{u,i} - P_{u,1})$ < d- deg $P_{u,i}$。因此，对于满足 d- deg P_{i_0} 的情形，权重向量 $w(\mathcal{P}'_u)$ 的第 j 个坐标与 $w(\mathcal{P}_u)$ 的第 j 个坐标相同；对于满足 d- deg P_{i_0} 的情形，则小 1。注意到 $w(\mathcal{P}_u) = w(\mathcal{P})$，我们得到 $w(\mathcal{P}'_u) < w(\mathcal{P})$，如所断言。

族 $\mathcal{P}'_u$ 也满足标准条件：d- deg $P_{u,2}$ = d- deg P_1 = d- deg $\mathcal{P}'_u$，除非所有多项式P_1、.....、P_m 具有相同的导数首项，在这种情况下 d- deg $P_{u,2}$ = d- deg $P_1 - 1$ =d- deg $\mathcal{P}'_u$。

因此，根据归纳假设，对于任意 $u \neq 0$，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{j=2}^{l} f_{u,j}\left(x + (P_{u,j} - P_{u,1})(y)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{F}1)} \leq C_1 \left\| f_{u,2} \right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha} + C_2 q^{-\beta}$$

对于某些 C_1、$C_2>0$、$s\in\mathbb{N}$ 和 α、$\beta\in(0,1]$。因此，

$$\begin{aligned}\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2 &\le \frac{1}{q}+\frac{1}{q}\sum_{u\neq 0}\left(C_1\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha}+C_2q^{-\beta}\right)\\ &\le C_1\left(\mathop{\mathbb{E}}_{u}\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}\right)^{\alpha}+2C_2q^{-\beta}.\end{aligned}$$

剩下的工作是用 f_1 的 Gowers 范数来界定 $\mathbb{E}_u\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}$。若 d-deg $P_1>1$ and$P_{u,2}(y)=P_1(y+u)$，则 $f_{u,2}=f_1$，因此特别有 $\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}=\left\|f_1\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}$。因此，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\le C_1^{1/2}\left\|f_1\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha/2}+\sqrt{2}C_2^{1/2}q^{-\beta/2}.$$

反之，设 d- deg $P_1=1$ and $P_{u,2}=P_1$。写作 $P_1(y)=\eta(y)+c$，其中 $\eta(y)=\sum_{i=0}^N a_iy^{p^i}$ 是一个次数为 p^N 的加性多项式。于是 $f_{u,2}(x)=f_1(x+\eta(u))f_1(x)=\Delta_{\eta(u)}\overline{f_1(x)}$，所以

$$\mathop{\mathbb{E}}_{u\in\mathbb{F}_q}\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}=\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\left\|\Delta_hf_1\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}\le\left(\mathop{\mathbb{E}}_{h\in H}\left\|\Delta_hf_1\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{2^s}\right)^{1/2^s},$$

其中 $H=\eta(\mathbb{F}_q)$。注意，$[\mathbb{F}_q\colon H]=|\{y\in\mathbb{F}_q\colon\eta(y)=0\}|\le p^N$。因此，由引理 3.2，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{u\in\mathbb{F}_q}\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}\le\left(p^N\cdot\left\|f_1\right\|_{U^{s+1}(\mathbb{F}_q)}^{2^{s+1}}\right)^{1/2^s}=p^{N/2^s}\left\|f_1\right\|_{U^{s+1}(\mathbb{F}_q)}^2.$$

因此，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\le p^{\alpha N/2^{s+1}}C_1^{1/2}\left\|f_1\right\|_{U^{s+1}(\mathbb{F}_q)}^{\alpha}+\sqrt{2}C_2^{1/2}q^{-\beta/2}.$$

我们已经证明，对于任意标准族 $\mathcal{P}=\{P_1,\dots,P_m\}$，都存在 C_1、$C_2>0$、$s\in\mathbb{N}$ 以及 α、$\beta\in(0,1]$，使得

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\le C_1\left\|f_1\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha}+C_2q^{-\beta/2}.$$

现在假设 $\mathcal{P}=\{P_1,\dots,P_m\}$ 不是标准的。令 $i_0\in\{2,\dots,m\}$，使得 d- deg P_{i_0} =d- deg $\mathcal{P}>1$。由引理 3.3，取 $P_{u,\,1}=P_{i_0}$ 和 $P_{u,\,2}=P_1$，可得

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^m f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}^2\le\mathop{\mathbb{E}}_{u\in\mathbb{F}_q}\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{j=2}^l f_{u,j}\left(x+(P_{u,j}-P_{u,1})(y)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}.$$

该族

$$\mathcal{P}_u'=\{P_{u,2}-P_{u,1},\dots,P_{u,l}-P_{u,1}\}$$

这是标准结论，因为 d- deg $(P_{u,\,2}-P_{u,\,1})$ =d- deg $(P_1-P_{i_0})$ =d- deg P_{i_0} =d- deg $\mathcal{P}\ge$d- deg $\mathcal{P}_u'$。因此，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y}\prod_{j=2}^l f_{u,j}\left(x+(P_{u,j}-P_{u,1})(y)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\le C_1\left\|f_{u,2}\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha}+C_2q^{-\beta}$$

对于某些 C_1、$C_2>0$、$s\in\mathbb{N}$ 以及 α、$\beta\in(0,1]$。对 $u\in\mathbb{F}_q$ 取平均并如上所述进行论证，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m}f_i(x+P_i(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\leq C_1'\left\|f_1\right\|_{U^{s'}(\mathbb{F}_q)}^{\alpha'}+C_2'q^{-\beta'}.$$

□

4. Asymptotic joint ergodicity for polynomial sequences

现在我们可以证明定理 1.11。

定理 1.11 的证明。我们将使用定理 1.14。首先，根据命题 3.1，存在常数C_1、$C_2>0$、$s\in\mathbb{N}$和 α、$\beta_1\in(0,1]$，使得对于任意 $q=p^k$、任意 $l\in\{1,\dots,m\}$、任意 f_1、……、$f_l\colon \mathbb{F}_q\to\mathbb{D}$，以及任意 χ_{l+1}、……、$\chi_m\in\mathbb{F}_q$，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{l}f_i(x+P_i(y))\prod_{j=l+1}^{m}\chi_j(P_j(y))\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\leq C_1\left\|f_l\right\|_{U^s(\mathbb{F}_q)}^{\alpha}+C_2q^{-\beta_1}.$$

也就是说，定理 1.14 中的性质 (i) 得到了满足，其中 $\delta_1=C_2q^{-\beta_1}$。

接下来，由 [AB23 定理 1.10]，，存在 $C_3>0$ 和 $\beta_2\in(0,1]$，使得对于任意线性组合 $P(y)=\sum_{i=1}^m s_iP_i(y)$、任意 $q=p^k$ 以及任意 $f\colon \mathbb{F}_q\to\mathbb{D}$，

$$\left\|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}f(x+P(y))-\mathop{\mathbb{E}}_{z\in H_q(s_1,\dots,s_m)}f(x+a_0+z)\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}\leq C_3q^{-\beta_2}\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)},$$

其中 $a_0=P(0)$，而 $H_q(s_1,\dots,s_m)$ 是由 $\{P(y)-a_0\colon y\in\mathbb{F}_q\}$ 生成的 $\mathbb{F}_q$ 子群。给定 $\chi_1,\dots,\chi_m\in\widehat{\mathbb{F}_q}$，存在 $s_i\in\mathbb{F}_p[t]$，使得 $\chi_i(x)=e(s_ix/Q)$，$Q(t)\in\mathbb{F}_p[t]^+$ 不可约，且 $|Q|=q$。取 $f(x)=e(x/Q)$，于是我们有

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m}\chi_i(P_i(y))-e(a_0/Q)\mathbb{1}_{H_q(s_1,\dots,s_m)^\perp}(1)\right|\leq C_3q^{-\beta_2}. \tag{4.1}$$

我们断言，对于所有充分大的 q 以及所有不全为零的 $s_1,\dots,s_m\in\mathbb{F}_q$，$H_q(s_1,\dots,s_m)=\mathbb{F}_q$。反设不然。令

$$A=\left\{(x_1,\dots,x_m)\in\left(\mathbb{F}_p((t^{-1}))/\mathbb{F}_p[t]\right)^m:e\left(\sum_{i=1}^{m}P_i(y)x_i\right)=1\text{ for all }y\in\mathbb{F}_p[t]\right\}.$$

由于 $x\mapsto e(x)$ 是连续同态，集合 A 是一个闭子群。假设对于任意大的 q 以及 $s_1,\dots,s_m\in\mathbb{F}_q$（不全为零），$H_q(s_1,\dots,s_m)\neq\mathbb{F}_q$，意味着 A 包含无穷多个有理点。由于 A 是一个紧群，因此 A 是不可数的。特别地，A 包含一个点 $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$，其中至少有一个 α_i 是无理的。这与 $\{P_1,\dots,P_m\}$ 对无理等分布而言是良好的假设相矛盾，因此结论成立。

根据该结论，不等式 (4.1) 简化为

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m}\chi_i(P_i(y))\right|\leq C_3q^{-\beta_2}.$$

因此，定理 1.14 中的性质（ii）成立，其中 $\delta_2=C_3q^{-\beta_2}$。

由定理 1.14，存在 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ 使得

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^{m} f_i(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{z \in \mathbb{F}_q} f_i(z) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \ll_{P_1,\dots,P_m} (C_2 q^{-\beta_1})^{\gamma_1} + (C_3 q^{-\beta_2})^{\gamma_2}$$

对于任意 $f_1, \dots, f_m \colon G \to \mathbb{D}$。取 $\gamma = \min\{\beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2\}$，即可得到所需的不等式：

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^{m} f_i(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{z \in \mathbb{F}_q} f_i(z) \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \ll_{P_1,\dots,P_m} q^{-\gamma}.$$

□

5. Power saving bound

现在，我们推导出一个幂次节省界：当多项式族具有无理等分布性质时，有限域上的多项式 Szemer´edi 定理成立。回顾引言中的推论 1.13：

推论 1.13. 假设 $\{P_1, \dots, P_m\} \subseteq (\mathbb{F}_p[t])[y]$ 具有无理等分布性质。那么存在 $\gamma > 0$，使得对于任意 $q = p^k$ 以及任意 $A_0, A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{F}_q$，

$$\begin{aligned} &\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : x \in A_0, x + P_1(y) \in A_1, \dots, x + P_m(y) \in A_m\right\}\right| \\ &\qquad = q^{-(m-1)} \prod_{i=0}^{m} |A_i| + O_{q\to\infty;P_1,\dots,P_m}\left(|A_0|^{1/2} q^{3/2-\gamma}\right). \end{aligned}$$

尤其是 ar，若 $A \subseteq \mathbb{F}_q$ 不含非平凡模式 $\{x, x + P_1(y), \dots, x + P_m(y)\}$，则

$$|A| \ll_{P_1,\dots,P_m} q^{1-\gamma/\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

证明。令

$$N(A_0, \dots, A_m) = \left|\left\{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2 : x \in A_0, x + P_1(y) \in A_1, \dots, x + P_m(y) \in A_m\right\}\right|.$$

对每个 $i \in \{0, \dots, m\}$，令 $\alpha_i = q^{-1}|A_i| = \mathbb{E}_{z} \mathbb{1}_{A_i}(z)$ 表示集合 A_i 的密度。由柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned} \left| N(A_0, \dots, A_m) - q^{-(m-1)} \prod_{i=0}^{m} |A_i| \right| &= q^2 \left| \mathop{\mathbb{E}}_{x} \mathbb{1}_{A_0}(x) \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x + P_i(y)) - \prod_{i=0}^{m} \alpha_i \right| \\ &= q^2 \left| \mathop{\mathbb{E}}_{x} \mathbb{1}_{A_0}(x) \left(\mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \alpha_i \right) \right| \\ &\le q^2 \left\| \mathbb{1}_{A_0} \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \alpha_i \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)}. \end{aligned}$$

注意，$\left\| \mathbb{1}_{A_0} \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} = \alpha_0^{1/2}$。此外，由定理 1.11，

$$\left\| \mathop{\mathbb{E}}_{y} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x + P_i(y)) - \prod_{i=1}^{m} \alpha_i \right\|_{L^2(\mathbb{F}_q)} \ll q^{-\gamma}.$$

因此，

$$\left| N(A_0, \dots, A_m) - q^{-(m-1)} \prod_{i=0}^{m} |A_i| \right| \ll |A_0|^{1/2} q^{3/2-\gamma}.$$

假设 $A \subseteq \mathbb{F}_q$ 不含非平凡模式 $\{x, x+P_1(y)\dots, P_m(y)\}$。那么根据并集界，

$$\begin{aligned} N(A,\dots,A) &\leq \left|\left\{(x,y)\in\mathbb{F}_q^2 : x\in A, |\{0,P_1(y),\dots,P_m(y)\}|\leq m\right\}\right| \\ &\leq |A|\left(\sum_{i=1}^{m}|\{y\in\mathbb{F}_q : P_i(y)=0\}| + \sum_{1\leq i<j\leq m}|\{y\in\mathbb{F}_q : (P_j-P_i)(y)=0\}|\right) \\ &\leq \left(m+\binom{m}{2}\right)d|A|, \end{aligned}$$

其中 $d = \max_{1\leq i\leq m}\deg P_i$。因此，根据上述结果，

$$q^{-(m-1)}|A|^{m+1} - D|A| \ll |A|^{1/2}q^{3/2-\gamma},$$

其中我们令 $D = \left(m+\binom{m}{2}\right)d = \binom{m+1}{2}d$。乘以 $|A|^{-1/2}q^{m-1}$ 并只保留主导项，可得

$$|A|^{m+1/2} \ll q^{m+1/2-\gamma}.$$

□

Acknowledgements

第一作者获美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-1926686。

References

[AB23] Ethan Ackelsberg 和 Vitaly Bergelson。环作用的渐近全遍历性，以及有限域和环上的 Furstenberg– S´ark¨ozy 型定理。arXiv:2303.00100 (2023) 22 页。[BBI21] Vitaly Bergelson、Andrew Best 和 Alex Iosevich。大型有限域中的幂和：一种混合方法。*Amer. Math. Monthly*, 128 (2021) 701–718。[BL16] Vitaly Bergelson 和 Alexander Leibman。有限特征下的 Weyl 型等分布定理。*Adv. Math.*, 289 (2016) 928–950。[BLM05] Vitaly Bergelson、Alexander Leibman 和 Randall McCutcheon。整环及有限域上可数模的多项式 Szemer´edi 定理。 *J. Anal. Math.*, 95 (2005) 243–296。[BF22] Andrew Best 和 Andreu Ferr´e Moragues。某些可数环作用的多项式遍历平均。*Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 42 (2022) 3379–3413。[F23] Nikos Frantzikinakis。序列的联合遍历性。 *Adv. Math.*, 417 (2023) 论文编号 108918，共 63 页。[G10] W. Timothy Gowers。分解、近似结构、迁移原理与 Hahn-Banach 定理。*Bull. Lond. Math. Soc.*, 42 (2010) 573–606。[L05] Alexander Leibman。沿多元多项式的多重遍历平均的收敛。*Israel J. Math.* **146** 2005 303 315 , ( ) – 。[P19] Sarah Peluse。有限域上的多项式 Szemer´edi 定理。 *Duke Math J.*, 168 (2019) 749–774。[PP22a] Sarah Peluse 和 Sean Prendiville。非线性 Roth 定理中的多对数界。*Int. Math. Res. Not. IMRN* **8** 2022 5658 5684 , ( ) – 。[PP22b] Sarah Peluse 和 Sean Prendiville。非线性 Roth 定理中的定量界。arXiv:1903.02592v2 (2022) 34 页。[Pr17] Sean Prendiville。多项式 Szemer´edi 定理中的定量界：齐次情形。*Discrete Anal.* 2017 5, 34 , ( ) 论文编号 页。[Pr20] Sean Prendiville。非线性 Roth 配置的逆定理：一篇阐述性文章。arXiv:2003.04121 (2020) 30 页。[R90] Walter Rudin。 *Fourier Analysis on Groups*，Wiley 经典文库（John Wiley & Sons, Inc., 纽约，1990）。

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540
Email address: eackelsberg@ias.edu

Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, OH 43210
Email address: vitaly@math.ohio-state.edu