arXiv:2303.00930v1 [math.DG] 2 Mar 2023

扭曲积流形中涉及三个量的几何不等式

KWOK-KUN KWONG 和 YONG WEI

Abstract. 本文为空间形式或其他扭曲积流形中的闭超曲面建立了两族锐几何不等式。两族不等式均比较三个不同的几何量。第一族涉及 k阶边界动量、面积和加权体积，并可应用于星形平均凸区域上的 Steklov 或 Wentzell 特征值的 Weinstock 型不等式。这推广了[12]的主要结果。第二族涉及加权 k阶平均曲率积分和两个不同的拟周长积分，并拓展了作者近期与 G. Wheeler 和 V.-M. Wheeler 合作的工作 [33] 。

Contents

1. 引言 12. 星形平均凸区域的 Weinstock 不等式 43. 扭曲积流形中沿逆平均曲率流的单调量 64. 涉及 k 阶边界动量、面积和加权体积的不等式 95. 涉及加权曲率积分和拟周长积分的不等式 12参考文献

19

1. Introduction

在本文的第一部分，我们研究如下形式的加权几何不等式（或其略微变体）：

$$\int_\Sigma \lambda^k d\mu \geq \frac{n}{n+k}\omega_n^{-\frac{k}{n}}|\Sigma|^{\frac{n+k}{n}} + k\int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv, \tag{1.1}$$

其中， $\Sigma = \partial\Omega$ 是某个光滑区域的边界， $\omega_n = |\mathbb{S}^n|$ 是单位球面 $\mathbb{S}^n$ 的面积。我们在一大类扭曲积流形 $\overline{M}^{n+1} = [a,b)\times N^n$ 上考察这些不等式，这些流形赋有黎曼度量 $\overline{g} = dr^2 + \lambda(r)^2 g_N$，其中 g_N 是底流形 N 上的黎曼度量。关于 $\overline{M}^{n+1}$和 Σ的具体假设将在下文的定理中给出。

下面我们说明考虑诸如 $\int_\Sigma \lambda(r)^k d\mu$ 和 $\int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv$ 这样的加权积分的一些动机。为了更好地理解其重要性，我们考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的情形。在这种情形下，这些积-分对应于加权周长和体积，其中权函数是到原点距离 $r = |x|$ 的幂。这些加权不等式通常称为加权

Key words and phrases. Weinstock 不等式、几何不等式、逆曲率流、扭曲积流形。

中的等周问题，或者更广泛地称为带密度流形中的等周问题[35]。例如参见 [5, 6, 13]。在过去几十年中，这些问题一直是广泛研-究的焦点。其中一个特别有趣的例子是具有高斯密度 $\exp\left(-cr^2\right)$ [7] 的等周问题，它在概-率论和统计学中有所应用。另一个值得注意的例子是具有径向密度的等周问题，其中权函数是距离 r 的某个幂。当该幂为二时，这种加权积分称为极惯性矩，它是牛顿物理学中的一个重要量。从数学角度看，人们还对加权 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 插值不等式 [14, 16], 、加权 Sobolev 不等式 [13] 以及加权等周不等式 [1, 15], 进行了广泛研究，其中积分以 r 的幂作为权函数。

通常，这些 Sobolev 不等式或等周不等式会比较两个加权积分或范数。例如，在 [1], 关于在约束条件 $\int_\Omega r^l dv = 1$下最小化 $\int_{\partial\Omega} r^k d\mu$ 的问题中，考虑光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，由此得到一类形式为$\int_{\partial\Omega} r^k d\mu \geq C_{k,l,n}\left(\int_\Omega r^l dv\right)^{\frac{k+n}{l+n+1}}$的不等式，其中 k、l 和 n取一定范围内的值。另一个类似但简单得多的不等式是

$$\int_\Sigma r d\mu \geq (n+1)|\Omega|, \tag{1.2}$$

这很容易由散度定理得到。在 [25], Gir˜ao 和 Rodrigues 证明，尽管猜想的不等式 $\int_\Sigma r d\mu \geq \omega_n \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ 即使对星形平均凸曲面也不成立（若该不等式成立，则可通过等周不等式改进（1.2））, 但不等式（1.2）仍可通过以下涉及三项的加权几何不等式得到改进，前提是超曲面 Σ 为星形且严格平均凸:

$$\int_\Sigma r d\mu \geq \frac{n}{n+1}\omega_n \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n}\right)^{\frac{n+1}{n}} + |\Omega|. \tag{1.3}$$

这是对等周不等式的改进，也是我们这一族不等式（1.1）在 $k = 1$ 且 $\lambda(r) = r$时的一个特例。事实证明，通过在不等式中引入另一项（例如，对于某个 $|\Sigma|^\alpha$，有 α），可以改进比较两个量的许多加权几何不等式；但与此同时，删去其中任何一项都无法得到改进。这也是本文研究（1.1）这类三项不等式的原因之一。

我们还想说明研究涉及三个量的不等式的另一个动机，以及这为何可能是一个具有挑战性的问题。在 [12], 中，证明了凸集 Ω 满足以下等周不等式 $\subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\int_{\partial\Omega} r^2 d\mu \geq b_{n+1}^{-\frac{2}{n+1}} |\partial\Omega||\Omega|^{\frac{2}{n+1}}. \tag{1.4}$$

这里 $b_{n+1} = |\mathbb{B}^{n+1}|$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中单位球的体积。由此进一步证明了 2.5、（2.11）中的一些 Weinstock 型不等式，适用于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中凸域的第一个非零 Steklov 和 Wenzell 特征值，从而推广了 Weinstock [44, 45]的不等式（2.2）。不等式（1.4）对任意区域并不成立（例如，对于靠近原点且边界面积很大的光滑区域）。在体积给定的集合中，球同时使边界动量 $\int_{\partial\Omega} r^2 d\mu$和表面积 $|\partial\Omega|$ 达到最小。因此，这两个量之间的竞争带来了挑战。不等式（1.4）指出，这两个量的比值的最小值由球取得，这一点远非显而易见。值得注意的是，不等式（1.4）可用初等方法由（1.3）推出。详情见第 2 节。本文不仅

将 [12] 的结果推广到了更一般的区域类，而且据我们所知，还提供了一种更简单的方法。

证明诸如（1.1）这类不等式的主要工具是逆平均曲率流（IMCF）。目前已有许多几何不等式，是通过寻找沿逆平均曲率流单调变化的单调量，并研究（重标度）极限的渐近行为而得到的。然而，以这种方式得到的大多数不等式只涉及两个几何量。也有一些例外，例如 [10,25,33],但这些结果相当零散。获得三项不等式的一种思路是，沿逆平均曲率流构造由两个几何量组成的单调量 $Q(t)$。在第3节中，我们将为每个 $Q(t) = Q_k(t)$ 找到一族这样的量。这将使我们能够系统地得到涉及三个几何量的不等式单参数族（1.1），其证明将在第4节给出。

在本文的第二部分，我们研究涉及加权曲率积分和拟周长积分的三项几何不等式。拟周长积分 $W_k(\Omega)$ 是凸几何中的基本对象，在凸集研究中发挥着核心作用。第5 节将给出拟周长积分的精确定义。这里先举几个例子：$W_0(\Omega) = |\Omega|$，$W_1(\Omega) = \frac{1}{n}|\partial\Omega|$，以及 $W_{n+1}(\Omega) = \left|\mathbb{B}^{n+1}(1)\right|$，它们适用于空间形式中的光滑区域。文献中有许多比较各类拟周长积分的不等式，例如布伦-明可夫斯基不等式和亚历山大罗夫-芬切尔不等式，参见 [39] 及其中的参考文献。从历史上看，这些不等式最初是用各种分析方法证明的。不过，直到近年，数学家才找到利用几何流，特别是逆曲率型流，证明这些不等式的方法，至少在 Ω 足够光滑时如此。例见 [2,3,9,10,17,19,20,26,27,42] 及其中的参考文献。如第一部分所述，证明这类不等式的关键通常在于找到沿流演化的单调量，并研究其渐近行为。然而，用这种方法证明的不等式通常只能比较两个几何量。这是因为流往往经过专门设计，使一个量保持不变，同时另一个量沿流单调变化。利用几何流推导涉及两个以上拟周长积分的不等式往往颇具挑战。例如，据我们所知，尚不清楚对于具有足够凸性的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的光滑区域，能否通过几何流方法得到不等式$W_k(\Omega)^2 \geq c_{k,\ n}W_{k-1}(\Omega)W_{k+1}(\Omega)$ [39, (7.66)] 。

第 5节尝试通过构造一族涉及加权曲率积分和拟周长积分的三项几何不等式来弥补这一不足。这个想法源自作者最近与 G. Wheeler 和 V.-M. Wheeler 的合作成果 [33] ，他们证明，对于 γ中的一条 $\overline{M}^2 = \mathbb{H}^2$（$\mathbb{S}^2_+$ 开半球）或 $\mathbb{R}^2$中的光滑闭凸曲线，有

$$\int_\gamma \Phi(r)\kappa ds \geq \frac{1}{2\pi}\left(L^2 - 2\pi A\right) \tag{1.5}$$

其中 $\Phi(r) = \begin{cases} 1 - \cos r, & K = 1 \\ \cosh \frac{r^2}{2} - 1, & K = -1, \\ \frac{r^2}{2}, & K = 0 \end{cases}$ 且 K 是环境曲率。这里，L 是.....的长度 $\gamma = \partial\Omega$，A 是其围成的面积。该不等式比[25, 定理 1.6] 和 [31, 定理 2], 中给出的两项不等式提供了更好的比较，其中 $\int_\gamma \Phi(r)\kappa ds \geq \frac{L^2}{4\pi}$和 $\int_\gamma \Phi(r)\kappa ds \geq A$分别成立。函数 Φ 由于环境空间$\overline{M}^2$的共形对称性而自然地出现在该不等式中。具体而言，Φ 的梯度是一个共形 Killing 向量场。这一性质使我们能够推导出涉及

加权曲率积分和拟周长积分的各种几何不等式。事实证明，这一结果有许多应用，包括为 Gir $n = 2$ ao- Pinheiro 猜想的~情形提供一个反例 [24]。注意，（1.5）是一个涉及 W_0（Ω）、 W_1（Ω）以及加权曲率积分 $\int_\gamma \Phi$（r）的三项不等式κds。

在第 5 节中，我们在区域满足各种凸性假设的情况下，将这一结果推广到高维空间形式。出于技术原因，我们分别利用三种略有不同但密切相关的逆曲率型流，来推导欧氏、双曲和球面空间形式中的结果。在每种情况下，我们都得到一族单调量，其中同时包含加权曲率积分 $\int_{\partial \Omega_t} \Phi E_k$ 和拟曲面积分 $W_{k-1}(\Omega_t)$，其中 E_k 是归一化的 k 阶平均曲率。作为我们所证明结果的一个例子，考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个光滑、闭合、星形且满足 k-凸性的超曲面 Σ，其满足 $n \geq 2$，并围成一个有界区域 Ω。那么，对于所有 $k = 1$、$\cdots$、n，以下不等式成立：

$$\int_\Sigma \Phi E_k d\mu + kW_{k-1}(\Omega) \geq \frac{n+2+k}{2(n+2-k)} \omega_n \left(\frac{n+1-k}{\omega_n} \right)^{\frac{n+2-k}{n+1-k}} W_k(\Omega)^{\frac{n+2-k}{n+1-k}}, \tag{1.6}$$

其中 $\Phi(r) = r^2/2$。等号成立当且仅当 Σ 是一个坐标球面。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们提出一种方法，将 [12] 推广到更一般的星形平均凸区域类；我们认为，该方法更加直接。在第3节中，我们介绍逆平均曲率流，并建立沿此流演化的一个关键几何量的单调性。随后，在第4 节中，我们利用该几何量证明各种扭曲积空间中一类形如（1.1）的不等式。在第5节中，我们首先介绍拟周长积分和 k阶平均曲率，随后在三个空间形式中建立类似于（1.6）的不等式。我们推导这些不等式的过程，将涉及建立一个几何量沿相应逆曲率型流的单调性；该几何量包含$W_{k-1}(\Omega_t)$和$\int_{\partial\Omega_t} \Phi E_k$ 。

致谢。澳大利亚研究委员会的FL150100126号基金资助了Kwok-Kun Kwong。Yong Wei获得了中国国家重点研发计划项目2021YFA1001800和2020YFA0713100，以及中国科学技术大学KY0010000052号研究基金的资助。

2. Weinstock inequality for star-shaped mean convex domain

在本节中，我们将采用一种更简洁的方法，将 [12] 的主要结果推广到更广泛的星形平均凸区域类。

我们首先回顾 $\mathbb{R}^{n+1}$中的第一非零Steklov特征值的 Weinstock 不等式。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个有界区域。Ω 上的 Steklov特征值问题为

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中， $\overline{\Delta}$是作用于 Ω 上函数的拉普拉斯算子， ν 是沿边界 $\partial\Omega$ 的外法向。

Ω 的第一个非零 Steklov 特征值可由以下方式刻画：

$$\sigma(\Omega) = \min \left\{ \frac{\int_\Omega |\overline{\nabla} u|^2 dv}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\mu} : \quad u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}, \int_{\partial\Omega} u d\mu = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Weinstock [44,45] 证明了，如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通的，那么

$$\sigma(\Omega)|\partial\Omega| \leq \sigma(\mathbb{B}^2)|\partial\mathbb{B}^2|, \tag{2.2}$$

其中 $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ 是一个球。对于更高维的情形，Bucur、Ferone、Nitsch 和 Trombetti [12] 证明，对于有界凸域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，有

$$\sigma(\Omega)|\partial\Omega|^{\frac{1}{n}} \leq \sigma(\mathbb{B}^{n+1})|\partial\mathbb{B}^{n+1}|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.3}$$

当且仅当 Ω 是一个球时，等号成立。(2.3) 的证明中，关键的一步是以下尖锐等周型不等式

$$\int_{\partial\Omega} r^2 d\mu \geq {b_{n+1}}^{-\frac{2}{n+1}} |\partial\Omega||\Omega|^{\frac{2}{n+1}} \tag{2.4}$$

对于凸域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其中 $r^2 = |x|^2$ 且 $b_{n+1} = |\mathbb{B}^{n+1}|$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球的体积。(2.4) 中等号成立，当且仅当 Ω 是以原点为中心的球。

在[12], 中，作者猜想 (2.4) 成立，因此 Weinstock 不等式 (2.3) 也对星形平均凸区域成立。本节通过证明 (2.4) 对这类区域成立，证实了这一猜想。利用适用于星形平均凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的不等式 (1.3)，即可完成证明；该不等式还表明，Weinstock 不等式 (2.3) 适用于这类区域。

定理 2.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个光滑有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 为星形平均凸边界。那么不等式

$$\sigma(\Omega)|\partial\Omega|^{\frac{1}{n}} \leq \sigma(\mathbb{B}^{n+1})|\partial\mathbb{B}^{n+1}|^{\frac{1}{n}} \tag{2.5}$$

成立，且等号成立当且仅当 Ω 是一个球。

证明。首先，利用 H¨older 不等式，可得

$$\left(\int_{\partial\Omega} r d\mu\right)^2 \leq |\partial\Omega| \int_{\partial\Omega} r^2 d\mu. \tag{2.6}$$

其次，利用 Young 不等式，可得

$$((n+1)|\Omega|)^{\frac{1}{n+1}} |\partial\Omega| \omega_n^{-\frac{1}{n+1}} \leq |\Omega| + \frac{n}{n+1} \omega_n^{-\frac{1}{n}} |\partial\Omega|^{\frac{n+1}{n}} \tag{2.7}$$

结合（2.6）、（2.7）并应用（1.3）可得

$$\int_{\partial\Omega} r^2 d\mu \geq \left(\frac{\omega_n}{n+1}\right)^{-\frac{2}{n+1}} |\partial\Omega||\Omega|^{\frac{2}{n+1}} = {b_{n+1}}^{-\frac{2}{n+1}} |\partial\Omega||\Omega|^{\frac{2}{n+1}}, \tag{2.8}$$

这对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的星形平均凸区域 Ω 成立。这里我们用到了这一事实：$b_{n+1} = \frac{\omega_n}{n+1}$。

应用（2.8），并按照 [12], 中定理 3.1 的证明，我们看到 Weinstock 不等式（2.5）对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的星形平均凸区域 Ω 也成立。为方便读者，我们在此给出证明。不妨设 $\partial\Omega$ 的重心为原点。将坐标函数 x_i、$i = 1$、$\cdots$、$n+1$ 作为（2.1）中的试验函数，我们得到

$$\sigma(\Omega) \int_{\partial\Omega} x_i^2 d\mu \leq \int_{\Omega} |\overline{\nabla} x_i|^2 dv, \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

对 $i = 1$、$\cdots$、$n+1$ 求和，并注意到 $|\overline{\nabla} x_i|^2 = 1$，可得

$$\sigma(\Omega) \int_{\partial\Omega} r^2 d\mu \leq (n+1)|\Omega|. \tag{2.9}$$

将（2.8）代入（2.9）可得

$$\sigma(\Omega)\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n+1}}} \leq b_{n+1}^{\frac{2}{n+1}} = \sigma(\mathbb{B}^{n+1})\frac{|\partial\mathbb{B}^{n+1}|}{|\mathbb{B}^{n+1}|^{\frac{n-1}{n+1}}}. \tag{2.10}$$

应用 经典等周不等式应用于 (2.10，我们得出等号成立于 (2.5)。 □

注 2.1. 事实上，上述证明给出了更强的不等式 (2.10，适用于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 具有星形平均凸边界 ∂ 的光滑有界区域 Ω。该不等式 (2.5 意味着

$$\sigma(\Omega) \leq \sigma(\Omega^*)$$

where Ω* 是一个球，使得 $|\partial\Omega| = |\partial\Omega^*|$。当且仅当 Ω 是一个球时，等号成立。

利用类似的思路，不等式 (1.3) 也可用于研究 Wentzell 特征值的等周不等式，该特征值是 Steklov 特征值的一种推广。回顾一下，Wentzell特征值问题是如下问题

$$\begin{cases} \overline{\Delta}u = 0 & \text{in } \Omega \\ -\beta\Delta u + \partial_\nu u = \mu u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中 β 是给定的实数， ∂_ν 表示外单位法向导数，而 Δ 表示 ∂Ω上的拉普拉斯算子。关于该问题的物理解释，请参见 [18]。这里，我们只考虑 $\beta \geq 0$的情形。与 Steklov 特征值类似，第一个非零 Wentzell特征值 μ(Ω β) 满足

$$\mu(\Omega,\beta) = \min\left\{ \frac{\int_\Omega |\overline{\nabla}u|^2 dv + \beta\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\, d\mu}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\mu} : u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}, \int_{\partial\Omega} u d\mu = 0 \right\},$$

其中 ∇ 表示沿 ∂Ω的切向梯度。

在 [12, 定理 3.2], 中已证明，在所有 $\mathbb{R}^n$ 体积相同的开凸集里，泛函 μ(Ω β) 在球上取得最大值。利用与定理2.1中相同的思路，我们可以将这一结果推广到星形平均凸区域这一类。值得注意的是，不等式（2.8）再次成为证明 [12, 定理 3.2], 的关键要素。由于证明的其他部分不需要凸性，我们将省略细节，仅陈述结果。更多详情请参见[12] 。

定理2.2。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\beta \geq 0$中的一个有界、星形且平均凸的区域。Th *en*

$$\mu(\Omega,\beta) \leq \mu(\Omega^\sharp,\beta), \tag{2.11}$$

其中 Ω♯ 是一个满足 $|\Omega| = |\Omega^\sharp|$的球。当且仅当 Ω 是一个球时，等号成立。

3. A monotone quantity along the IMCF in warped product manifolds

假设 N^n是一个带有度量 g_N的紧致黎曼流形。我们考虑配备黎曼度量的扭曲乘积流形 $\overline{M}^{n+1} = [a,b) \times N^n$

$$\overline{g} = dr^2 + \lambda(r)^2 g_N,$$

其中 $a \geq 0$， 且 b 允许为 ∞, $\lambda : [a,b) \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，并且在 (a,b) 上为正。我们也允许 $\{a\}\times N$退化为一个点。例如，空间形式可以被

视为区间 I上的扭曲积流形 $\overline{M}^{n+1}=I\times\mathbb{S}^n$。

$$\overline{M}^{n+1}=\begin{cases}\mathbb{R}^{n+1}, & \text{if } I=\mathbb{R}_{\geq}, \quad \lambda(r)=r,\\ \mathbb{H}^{n+1}, & \text{if } I=\mathbb{R}_{\geq}, \quad \lambda(r)=\sinh r,\\ \mathbb{S}^{n+1}, & \text{if } I=[0,\pi), \quad \lambda(r)=\sin r.\end{cases} \tag{3.1}$$

设 Σ 是 $\overline{M}^{n+1}$ 中的闭嵌入可定向超曲面。则有两种情形：(i).Σ 是零调的，且是某个有界区域 Ω 的边界；(ii). Σ 与边界 $\{a\}\times N^n$ 同调，且存在一个有界区域 Ω，使得 $\partial\Omega=\Sigma\cup(\{a\}\times N^n)$。为简化记号，在情形 (i) 中令 $\Gamma=\emptyset$，在情形 (ii) 中令 $\Gamma=\{a\}\times N^n$。那么，在每种情形下都有 $\partial\Omega=\Sigma\cup\Gamma$。设 ν 是 Σ的单位外法向量，并设 η 是 Γ的外法向量（当其非空时）。我们有

引理 3.1. 设 Σ 是 $\overline{M}^{n+1}$ 中的闭嵌入可定向超曲面。则

$$\int_\Sigma\lambda(r)^k d\mu\geq(n+k)\int_\Omega\lambda^{k-1}(r)\lambda'(r)dv+\lambda^k(a)|\Gamma|, \tag{3.2}$$

其中 $d\mu$ 表示 Σ 上的面积形式，且 dv 表示 $\overline{M}^{n+1}$上的体积形式。当且仅当(3.2) 中的等号成立时， Σ是一个切片 $\{r\}\times N$，其中某个 $r\in(a,b)$。

证明。回顾一下，向量场 $V=\lambda(r)\partial_r$ 是一个共形 Killing 向量场（见[8, 引理 2。2]），并满足

$$\langle\overline{\nabla}_{e_i}V,e_j\rangle=\lambda'(r)\overline{g}_{ij},$$

其中 $\lambda'(r)$表示 $\lambda(r)$关于 r的导数。令 $Y=\lambda^k(r)\partial_r$。对每个$p\in\overline{M}^{n+1}$，选取一个以 p为中心的正交标架 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使得 $e_1=\partial_r$。于是

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{div}}(Y)=&\sum_{i=1}^{n+1}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\lambda^k\partial_r),e_i\rangle\\ =&\sum_{i=1}^{n+1}\Big(e_i(\lambda^{k-1})\langle V,e_i\rangle+\lambda^{k-1}\langle\overline{\nabla}_{e_i}V,e_i\rangle\Big)\\ =&\partial_r(\lambda^{k-1})\lambda+n\lambda^{k-1}\lambda'\\ =&(n+k)\lambda^{k-1}\lambda'.\end{aligned}$$

对上述方程积分，并应用散度定理，得到

$$\begin{aligned}(n+k)\int_\Omega\lambda^{k-1}\lambda'dv=&\int_\Omega\overline{\operatorname{div}}(Y)dv\\ =&\int_\Sigma\langle Y,\nu\rangle d\mu+\int_\Gamma\langle Y,\eta\rangle d\mu\\ =&\int_\Sigma\lambda^k\langle\partial_r,\nu\rangle d\mu-\lambda^k(a)|\Gamma|\\ \leq&\int_\Sigma\lambda^k d\mu-\lambda^k(a)|\Gamma|.\end{aligned}$$

当且仅当 $\langle\partial_r,\nu\rangle=1$ 在 Σ上处处成立时，等号成立，这意味着 $\Sigma=\{r\}\times N^n$是一个切片。□

假设 Σ 是 $\overline{M}^{n+1}$ 中的一个光滑闭嵌入超曲面，且它是平均凸的，并且按如下意义是星形的： Σ 可以表示为 N^n上的一个图，

$$\Sigma = \text{graph } u_0,$$

其中 $u_0(\cdot)$ 是 N^n 上的光滑正函数。于是 Σ 与边界$\{a\} \times N^n$同调，并且存在一个有界区域 Ω，使得 $\partial\Omega = \Sigma \cup (\{a\} \times N^n)$。我们沿逆平均曲率流（IMCF）演化 Σ

$$\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{1}{H}\nu, \tag{3.3}$$

其中 ν 是演化超曲面 $\Sigma_t = X(\Sigma, t)$ 的指向外侧的单位法向量场，而 H 表示 Σ_t 的平均曲率。

考虑如下量

$$Q(\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n+k}{n}} \left(\int_\Sigma \lambda^k d\mu - k \int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma| \right),$$

其中 $\Gamma = \{a\} \times N^n$。沿逆平均曲率流（IMCF）， $Q(t)$ 满足如下单调性： $= Q(\Sigma_t)$。

命题 3.2. 假设 $\overline{M}^{n+1}$ 的扭曲函数 $\lambda(r)$ 满足 $\lambda'(r) > 0$。设 Σ_t 是逆平均曲率流的星形且平均凸解。那么 $Q'(t) \le 0$ ，并且 $Q'(t) = 0$ 当且仅当 Σ 是一个切片。

证明。首先，沿逆平均曲率流，面积形式 $d\mu_t$ 的演化为

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = d\mu_t.$$

特别地，面积的演化为

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t| = |\Sigma_t|.$$

Then

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t &= \int_{\Sigma_t} k\lambda^{k-1}\lambda' \langle Dr, \frac{\partial X}{\partial t}\rangle d\mu_t + \int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t \\
&= \int_{\Sigma_t} k\lambda^{k-1}\lambda' \langle Dr, \frac{\nu}{H}\rangle d\mu_t + \int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t \\
&\le \int_{\Sigma_t} k\lambda^{k-1}\frac{\lambda'}{H} d\mu_t + \int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t.
\end{aligned}$$

沿逆平均曲率流，由余面积公式可得

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \lambda^{k-1}\lambda' dv = \int_{\Sigma_t} k\lambda^{k-1}\frac{\lambda'}{H} d\mu_t.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t - k\int_{\Omega_t} \lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma| \right) \\
\le &\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t \\
= &\frac{n+k}{n}\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t - \frac{k}{n}\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t \\
\le &\frac{n+k}{n}\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t - \frac{k(n+k)}{n}\int_{\Omega_t} \lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n}\lambda^k(a)|\Gamma|
\end{aligned}$$

$$=\frac{n+k}{n}\left(\int_{\Sigma_t}\lambda^k d\mu_t - k\int_{\Omega_t}\lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma|\right),$$

其中在第二个不等式中用到了（3.2）。我们得出 $Q'(t) \leq 0$。当且仅当 $\langle \partial_r, \nu\rangle = 1$ 在 Σ_t上处处成立时，等号成立，这等价于 Σ_t 是一个切片。□

4. Inequalities involving k-th boundary momentum, area and weighted volume

本节中，我们利用命题 $Q(t)$ 中的单调性 3.2 以及逆平均曲率流的收敛结果，推导出如下形式的加权几何不等式 (1.1)。

4.1. 空间形式中的不等式。我们首先考察空间形式的情形。 e.

定理 4.1. 设 $k \geq 1$。假设满足以下条件之一：

(1) Σ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑的星形平均凸超曲面；或 (2) Σ 是双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中光滑的星形平均凸超曲面；或 (3) Σ 是球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中光滑的凸超曲面。

记 Ω 为由 Σ围成的有界区域。那么

$$\int_\Sigma \lambda^k d\mu \geq \frac{n}{n+k}\omega_n^{-\frac{k}{n}}|\Sigma|^{\frac{n+k}{n}} + k\int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv, \tag{4.1}$$

其中， $\omega_n = |\mathbb{S}^n|$ 是单位球面 $\mathbb{S}^n$的面积。当且仅当 Σ 是以原点为中心的测地球面时，等号成立。

*P*证明。情形 1——欧几里得空间。在此情形下， $\lambda(r) = r$ ，且量

$$Q(t) = |\Sigma_t|^{-\frac{n+k}{n}}\left(\int_{\Sigma_t} r^k - \int_{\Omega_t} kr^{k-1}\right)$$

沿逆平均曲率流（3.3）单调不增。根据 Gerhardt [21] 和 Urbas [41],的结果，逆平均曲率流的流超曲面 Σ_t 始终保持星形且平均凸，并扩张至~无穷远。重缩放逆平均曲率流收敛到球面 $\Sigma_\infty = r_\infty\mathbb{S}^n$。由于 $Q(t)$具有尺度不变性， ~ ~只需证明该不等式在球面上成立。设 Ω_∞ 为由 Σ_∞围成的球，则（3.2）表明

$$\int_{\tilde{\Sigma}_\infty} r^k - \int_{\tilde{\Omega}_\infty} kr^{k-1} \geq \frac{n}{n+k}\int_{\tilde{\Sigma}_\infty} r^k = \frac{n}{n+k}\omega_n r_\infty^{n+k}. \tag{4.2}$$

~ $\frac{k}{n}$因此 $Q(\Sigma_\infty)$ 的下界为 $\frac{n}{n+k}\omega_n{}^n$。由此可得不等式（4.1）。

情形2 - 在双曲空间中。Gerhardt [22] 证明，逆平均曲率流的解 Σ_t （3.3）始终保持星形且平均凸， Σ_t 不断扩张至无穷远，且主曲率 κ_i 以指数速度衰减至 1，当 $t \to \infty$。令 g_{ij} 为 Σ_t上的诱导度量。Gerhardt 证明的 Σ_t 沿逆平均曲率流的渐近行为 [22] 意味着

$$\sqrt{\det g} = \lambda^n\sqrt{\det g_{\mathbb{S}^n}}\left(1 + O(e^{-\frac{2}{n}t})\right)$$
$$\lambda(r) = O(e^{\frac{t}{n}}).$$

由不等式（3.2），可得

$$\int_{\Sigma_t}\lambda^k d\mu_t - k\int_{\Omega_t}\lambda^{k-1}\lambda' dv$$

$$\begin{aligned}\geq&\frac{n}{n+k}\int_{\Sigma_t}\lambda^k d\mu_t\\=&\frac{n}{n+k}\int_{\mathbb{S}^n}\lambda^{n+k}(r)d\mu_{\mathbb{S}^n}\left(1+O(e^{-\frac{2}{n}t})\right).\end{aligned}$$

另一方面，H¨older 不等式表明

$$\begin{aligned}|\Sigma_t|^{\frac{n+k}{n}}=&\left(\int_{\mathbb{S}^n}\lambda^n(r)d\mu_{\mathbb{S}^n}\left(1+O(e^{-\frac{2}{n}t})\right)\right)^{\frac{n+k}{n}}\\\leq&\omega_n^{\frac{k}{n}}\int_{\mathbb{S}^n}\lambda^{n+k}(r)d\mu_{\mathbb{S}^n}\left(1+O(e^{-\frac{2}{n}t})\right).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}Q(t)=&\lim_{t\to\infty}|\Sigma_t|^{-\frac{n+k}{n}}\left(\int_{\Sigma_t}\lambda^k d\mu_t-k\int_{\Omega_t}\lambda^{k-1}\lambda' dv\right)\\\geq&\frac{n}{n+k}\omega_n^{-\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

这意味着不等式（4.1）。

情形 3 - 在球面中。在这种情况下， $\lambda(r)$ = 正弦 r。Gerhardt [23] （另见 [34]）证明，对于球面中的光滑严格凸超曲面 $\Sigma\ \mathbb{S}^{n+1}$，逆平均曲率流（IMCF） Σ_t 的解（3.3）保持严格凸性，并在 $t\to T^*<\infty$时光滑收敛到赤道，适当缩放后的解则收敛到一个球面。我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T^*}|\Sigma_t|=&\omega_n,\\\lim_{t\to T^*}\int_{\Sigma_t}\lambda^k(r)d\mu_t=&\omega_n,\\\lim_{t\to T^*}\int_{\Omega_t}\lambda^{k-1}\lambda' dv=&\frac{\omega_n}{n+k}.\end{aligned}$$

Then

$$\lim_{t\to T^*}Q(t)=\frac{n}{n+k}\omega_n^{-\frac{k}{n}}.$$

根据 $Q(t)$的单调性，我们得到

$$Q(0)\geq\lim_{t\to T^*}Q(t)=\frac{n}{n+k}\omega_n^{-\frac{k}{n}}.$$

这等价于（4.1）。

在所有情况下，(4.1) 的等号成立意味着 $Q(0)=Q(t)$ 对所有 $t>0$均成立。特别地，$Q'(0)=0$ 因此 Σ 是一个切片。□

4.2. 扭曲积流形中的不等式。本小节将说明，在对扭曲函数施加某些条件的情况下，上述不等式在其他扭曲积流形中仍然成立。

令 $\overline{M}^{n+1}=[a,\infty)\times N^n$为一个带有如下度量的扭曲乘积流形

$$\overline{g}=dr^2+\lambda^2(r)g_N,$$

其中 $\lambda(r)$ 是定义在 (a,∞) 上的光滑正函数，且 $\lambda''(r)\geq 0$ 并且 $\lambda'(r)>0$。进一步假设扭曲函数 $\lambda(r)$ 满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\lambda''\lambda}{\lambda'^2}<\infty,\quad and\quad \limsup_{r\to\infty,\lambda''(r)>0}\frac{\lambda'''\lambda}{\lambda'\lambda''}<\infty.\tag{4.3}$$

定理 4.2。 设 $k \geq 1$，且 Σ 是扭曲乘积流形 $\overline{M}^{n+1} = [a, \infty) \times N^n$ 中的光滑闭合、平均凸且星形的超曲面，扭曲函数为 $\lambda(r)$ 并满足$\lambda''(r) \geq 0$， $\lambda'(r) > 0$ 以及 (4.3)。假设 (N^n, g_N) 具有非负截面曲率，并且以下两项条件均成立：

(1) 若 $\sup_{r>a} \lambda'(r) < \infty$，我们进一步假设 $\mathrm{Ric}_N > 0$。(2) 若 $\sup_{r>a} \lambda'(r) = \infty$，我们假设 $\liminf_{r\to\infty} \lambda''\lambda/\lambda'^2 > 0$。

记 Ω 为由 Σ 和 $\Gamma = \{a\} \times N^n$围成的区域。则

$$\int_\Sigma \lambda^k d\mu \geq \frac{n}{n+k} |N|^{-\frac{k}{n}} |\Sigma|^{\frac{n+k}{n}} + k \int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv + \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma|. \tag{4.4}$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个切片 $\{r\} \times N^n$。

证明。 我们考虑以 3.3) 中的 Σ 为初始超曲面的逆平均曲率流（IMCF）。Scheuer [37, 定理 1。3] 证明了 (3.3) 的解对所有时间 $t \in [0, +\infty)$ 都存在，且流超曲面Σ_t 以如下速率趋于脐的

$$\left| h_i^j - \frac{\lambda'}{\lambda}\delta_i^j \right| \leq \frac{ct}{\lambda'\lambda}, \quad \forall\, t \in [0, \infty),$$

其中 c 是仅依赖于初始超曲面 Σ 的常数；当 λ' 有界时，因子 t可替换为 $e^{-\alpha t}$。流超曲面 Σ_t 是定义在 N^n上的图

$$\Sigma_t = \mathrm{graph}\ u(t, \cdot)$$

其中 $u \in C^\infty([0, +\infty) \times N$，$(a, \infty))$。图函数 $u(t, \cdot)$ 趋于 ∞ 当 $t \to \infty$ 且其梯度满足如下估计（ [37,引理 4。8]）

$$\frac{|Du|^2}{\lambda^2} \leq ce^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \in [0, \infty) \tag{4.5}$$

其中 c、 α 是两个正常数。

设 g_{ij} 为 Σ_t 上的诱导度量。则

$$g_{ij} = u_i u_j + \lambda^2 \sigma_{ij} = \lambda^2(\sigma_{ij} + \lambda^{-2} u_i u_j),$$

whe其中 σ_{ij} 表示度量 g_N的分量。估计式（4.5）意味着 t

$$\sqrt{\det g} = \lambda^n \sqrt{\det g_N}\left(1 + O(e^{-\alpha t})\right). \tag{4.6}$$

由不等式（3.2），可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t - k\int_{\Omega_t} \lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma| \\
\geq &\frac{n}{n+k}\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t \\
= &\frac{n}{n+k}\int_{N^n} \lambda^{n+k}(r) d\mu_N \left(1 + O(e^{-\alpha t})\right).
\end{aligned}$$

另一方面，H¨older 不等式表明

$$\begin{aligned}
|\Sigma_t|^{\frac{n+k}{n}} = &\left(\int_{N^n} \lambda^n(r) d\mu_N \left(1 + O(e^{-\alpha t})\right)\right)^{\frac{n+k}{n}} \\
\leq &|N|^{\frac{k}{n}} \int_{N^n} \lambda^{n+k}(r) d\mu_N \left(1 + O(e^{-\alpha t})\right),
\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} |\Sigma_t|^{-\frac{n+k}{n}} \left(\int_{\Sigma_t} \lambda^k d\mu_t - k \int_{\Omega_t} \lambda^{k-1}\lambda' dv - \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma| \right)$$
$$\geq \frac{n}{n+k}|N|^{-\frac{k}{n}}.$$

这意味着不等式（4.4）。若（4.4）中等号成立，则 $Q'(t) = 0$ 对所有 $t > 0$均成立。这意味着 Σ 是一个切片，$\{r\} \times N^n$ 其中 $r > a$。□

当扭曲积 $\overline{M}^{n+1} = [a, \infty) \times N$ 的纤维 N^n 具有正里奇曲率时，也可以得到类似的结果。此时对扭曲函数 λ 的限制有所不同，具体要求是 λ' 有界。

定理 4.3。假设 $k \geq 1$，并令 Σ 表示扭曲积 $\overline{M}^{n+1} = [a, \infty) \times N$中的一个光滑、闭合、平均凸且星形的超曲面，其配备度量 $\overline{g} = dr^2 + \lambda^2(r)g_N$，其中（$N, g_N$）是一个具有正里奇曲率的闭黎曼流形。假设 λ 满足

$$C \geq \lambda'(r) > 0, \quad C \geq \lambda^{1+\alpha}(r)\lambda''(r) \geq 0$$

其中 C 和 α为正常数。记 Ω 为由 Σ 和 $\Gamma = \{a\} \times N$围成的区域。则

$$\int_\Sigma \lambda^k d\mu \geq \frac{n}{n+k}|N|^{-\frac{k}{n}}|\Sigma|^{\frac{n+k}{n}} + k\int_\Omega \lambda^{k-1}\lambda' dv + \frac{k}{n+k}\lambda^k(a)|\Gamma|.$$

当且仅当 Σ 是一个切片时，等号成立。

证明。 证明与定理 4.2几乎完全相同。在此情形下，渐近式 (4.6) 可由 H. Zhou 的工作中的定理 5.1 [46] 以及 λ' 一致有界的假设推出，当$r \to \infty$时。证明的其余部分相同。□

5. Inequalties involving weighted curvature integrals and quermassintegrals

设 $\overline{M}^{n+1}(K)$ 是截面曲率为常数 K =−1、0、1 的单连通空间形式，将其视为 (3.1) 中所述的扭曲乘积流形。定义

$$\Phi(r) = \int_0^r \lambda(s)ds = \begin{cases} \cosh r - 1, & K = -1, \\ \dfrac{r^2}{2}, & K = 0, \\ 1 - \cos r, & K = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

众所周知，向量场 $V = \overline{\nabla}\Phi = \lambda(r)\partial_r$ 在 $\overline{M}^{n+1}(K)$ 上满足 $\overline{\nabla}(\lambda(r)\partial_r) = \lambda'(r)\overline{g}$，因此是一个共形 Killing 向量场。

对于空间形式 $\overline{M}^{n+1}(K)$ 中的有界凸区域 Ω，其 k 阶拟曲面积分 W_k 定义为与 Ω 相交的全测地 k 维子空间集合的测度（ [36], [40,定义 2。1]） [1]:

$$W_k(\Omega) = \frac{\omega_{k-1}\cdots\omega_0}{\omega_{n-1}\cdots\omega_{n-k}} \int_{\mathcal{L}_k} \chi(L_k \cap \Omega)\, dL_k, \quad k = 1, \ldots, n \tag{5.2}$$

[1]定义（5.2）与 [40] 相差一个常数倍 $\frac{n+1-k}{n+1}$。

其中， $\mathcal{L}_k$ 是 $\overline{M}^{n+1}(K)$中 k维全测地子空间的空间，$\omega_k = \left|\mathbb{S}^k\right|$ 是单位圆球面 $\mathbb{S}^k$的面积，函数 χ 的定义是：若 $L_k \cap \Omega \neq \emptyset$，则取值为 1；否则取值为 0。此外，我们有

$$W_0(\Omega) = |\Omega|, \quad W_1(\Omega) = \frac{1}{n}|\partial\Omega|, \quad W_{n+1}(\Omega) = \left|\mathbb{B}^{n+1}(1)\right| = \frac{\omega_n}{n+1}.$$

假设 $\Sigma = \partial\Omega$ 是光滑的。那么，拟周长积分与 Σ 的曲率积分之间满足关系（[40, 命题 7]）

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma E_k(\kappa)d\mu &= (n-k)W_{k+1}(\Omega) - kKW_{k-1}(\Omega), \quad k = 1, \ldots, n-1, \\
\int_\Sigma E_n(\kappa)d\mu &= \omega_n - nKW_{n-1}(\Omega),
\end{aligned}$$

其中 $E_k(\kappa)$ 是 Σ 的归一化 k 阶平均曲率，定义为

$$E_k(\kappa) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_k},$$

其中 $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ 是 Σ 的主曲率。拟周长积分满足以下变分性质（见 [4, 42]）：

$$\frac{d}{dt}W_k(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} fE_k(\kappa)d\mu_t, \quad k = 0, \ldots, n \tag{5.3}$$

沿任意法向变分

$$\frac{\partial}{\partial t}X = f\nu, \tag{5.4}$$

其中 ν 表示 $\partial\Omega_t$ 的单位外法向量，且 f 是定义在 $\partial\Omega_t$ 上的光滑函数。

下文中，我们将应用逆曲率型流来建立空间形式中区域的几何不等式，其中涉及三个几何量：加权曲率积分$\int_{\partial\Omega} \Phi E_k d\mu$ 以及两个不同的拟周长积分 $W_{k-1}(\Omega)$ 和 $W_k(\Omega)$。这方面一方面推广了第二作者此前与 T. Zhou 合作得到的涉及两个量 [43] $\int_{\partial\Omega} \Phi E_k d\mu$ 和 $W_k(\Omega)$ 的不等式，另一方面也将作者与 G. Wheeler 和 V.-M. Wheeler 合作的工作 [33]推广至二维情形。

设 Σ 是空间形式 $\overline{M}^{n+1}(K)$ 中具有诱导度量 g_{ij} 的光滑闭超曲面。我们将 Σ 上与形算子 (h_i^j) 相关联的第 k 个牛顿张量 T_k 定义如下：

$$(T_k)_j^i = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k}} \epsilon^{ii_1\cdots i_k}_{jj_1\cdots j_k} h^{j_1}_{i_1} \cdots h^{j_k}_{i_k}.$$

下一个引理是众所周知的（例如见 [30]）。

引理 5.1。设 Σ 是空间形式$\overline{M}^{n+1}(K)$ 中具有诱导度量的光滑闭超曲面。设 $V = \overline{\nabla}\Phi$ 为如上的向量场，ν 为 Σ 的外单位法向量。定义 $u = \langle V, \nu\rangle$ 为 Σ 的支撑函数。则有

$$\operatorname{div}\left(T_{k-1}(\nabla\Phi)\right) = k\binom{n}{k}\left(\lambda' E_{k-1} - E_k u\right) \tag{5.5}$$

对于 $k = 1$、$\cdots$、n。因此，我们得到以下闵可夫斯基公式

$$\int_\Sigma \lambda' E_{k-1}(\kappa)d\mu = \int_\Sigma uE_k(\kappa)d\mu. \tag{5.6}$$

证明。由 [30], 中的命题 3.1 和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(T_{k-1}(\nabla\Phi)\right) =& 2\cdot\frac{1}{2}\lambda'\operatorname{tr}\left(T_{k-1}\right)-\left\langle T_{k-1},A\right\rangle u\\ =&\lambda'(n-k+1)\binom{n}{k-1}E_{k-1}-k\binom{n}{k}E_k u\\ =&\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\lambda' E_{k-1}-E_k u\right)\\ =&k\binom{n}{k}\left(\lambda' E_{k-1}-E_k u\right).\end{aligned}$$

方程（5.6）由对 Σ 积分（5.5）得到。 □

我们还需要以下变分公式。

引理 5.2。 设 Σ_t 是空间形式 $\overline{M}^{n+1}(K)$ 中的闭超曲面光滑族，满足 (5.4)。对于所有整数 $k=1,\cdots n$，有

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma_t}\Phi E_k d\mu_t+kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right)=\int_{\Sigma_t}\left((k+1)uE_k+(n-k)\Phi E_{k+1}\right)f d\mu_t. \tag{5.7}$$

证明。 这可由结合 [43] 中的引理 3.2 与演化方程（5.3）得到。 □

5.1. 欧几里得空间中的不等式。我们先考虑欧几里得空间的情形。

定理 5.3. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n\geq 2$) 中一光滑、闭合、星形且 k-凸的超曲面，并围成一个有界区域 Ω。则对所有 $k=1,\cdots,n$，有

$$\int_\Sigma \Phi E_k d\mu+kW_{k-1}\left(\Omega\right)\geq\frac{n+2+k}{2(n+2-k)}\omega_n\left(\frac{n+1-k}{\omega_n}\right)^{\frac{n+2-k}{n+1-k}}W_k(\Omega)^{\frac{n+2-k}{n+1-k}}, \tag{5.8}$$

其中 $\Phi=r^2/2$ 是 (5.1) 中定义的函数。等号成立于 (5.8) 当且仅当 Σ 是一个坐标球面时。

注 5.1. 应用 Alexandrov-Fenchel 不等式 [26]

$$W_k(\Omega)\geq c_{k,\ell}W_\ell(\Omega)^{\frac{n+1-k}{n+1-\ell}},\quad k>\ell$$

对于星形且 k-凸超曲面，我们可以将 (5.8) 的右端替换为$W_\ell(\Omega)^{\frac{n+2-k}{n+1-\ell}}$，其中 $\ell<k$。然而，当 $\ell<k$时，该不等式可化为 [43]中的定理 1.2。

证明。我们考虑逆曲率流

$$\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{E_{k-1}}{E_k}\nu,\quad k=1,\cdots,n \tag{5.9}$$

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中。若 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的初始超曲面是星形且 k-凸的，Gerhardt [21] 和 Urbas [41] 证明了 k-凸性得以保持，并且解 Σ_t 向无穷远扩张，经过适当缩放后的解在 $t\to\infty$ 时收敛到一个圆球面。

取 $f=E_{k-1}/E_k$ 代入（5.7），可知沿着流（5.9），

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma_t}\Phi E_k d\mu_t+kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right)\\ =&\int_{\Sigma_t}\left((k+1)uE_{k-1}+(n-k)\Phi E_{k+1}\frac{E_{k-1}}{E_k}\right)d\mu_t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\Sigma_t} \left((k+1)uE_{k-1} + (n-k)\Phi E_k\right) d\mu_t \\
&= \int_{\Sigma_t} \left((k+1)E_{k-2} + (n-k)\Phi E_k\right) d\mu_t \\
&=(n+2-k)(k+1)W_{k-1}\left(\Omega_t\right) + (n-k)\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t,
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

这里用到了牛顿-麦克劳林不等式

$$
E_{k+1}E_{k-1} \leq E_k^2 \tag{5.11}
$$

以及闵可夫斯基公式（5.6）。

另一方面，在（ $f = E_{k-1}/E_k$ 5.3）中取，可得

$$
\frac{d}{dt}W_k(\Omega_t) = \int_{\Sigma_t} E_{k-1} d\mu_t = (n+1-k)W_k(\Omega_t) \tag{5.12}
$$

沿着流（5.9）。定义量

$$
Q_k(t) = W_k(\Omega_t)^{-\frac{n+2-k}{n+1-k}} \left(\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t + kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right).
$$

结合（5.10）和（5.12）可得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q_k(t) =& W_k(\Omega_t)^{-\frac{n+2-k}{n+1-k}} \left(\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t + kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right)\right. \\
&\left. - \frac{n+2-k}{n+1-k}\left(\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t + kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right) W_k(\Omega_t)^{-1}\frac{d}{dt}W_k(\Omega_t)\right) \\
\leq& W_k(\Omega_t)^{-\frac{n+2-k}{n+1-k}} \left((n+2-k)(k+1)W_{k-1}(\Omega_t) + (n-k)\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t\right. \\
&\left. - (n+2-k)\left(\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t + kW_{k-1}\left(\Omega_t\right)\right)\right) \\
=& W_k(\Omega_t)^{-\frac{n+2-k}{n+1-k}} \left((n+2-k)W_{k-1}(\Omega_t) - 2\int_{\Sigma_t} \Phi E_k d\mu_t\right).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

于是由不等式可知

$$
\int_{\Sigma} \Phi(r)E_k(\kappa)d\mu \;\geq\; \frac{n+2-k}{2}W_{k-1}(\Omega), \qquad k = 1, \cdots, n \tag{5.14}
$$

Kwong 和 Miao 的 [31, 32] 对于 k-凸超曲面，（5.13）右侧非正。因此，

$$
\frac{d}{dt}Q_k(t) \leq 0 \tag{5.15}
$$

沿着流（5.9）。若在某个时刻 t，等号（5.11）在整个 Σ_t 上成立，并且 Kwong 和 Miao 的不等式（5.14）中等号也成立。这意味着 Σ_t 必定是坐标球面。

注意，量 $Q_k(t)$ 是一个尺度不变量。于是

$$
Q_k(0) \geq \lim_{t\to\infty} Q_k(t) = Q_k(\mathbb{S}^n(1)) = \frac{n+2+k}{2(n+2-k)}\omega_n \left(\frac{n+1-k}{\omega_n}\right)^{\frac{n+2-k}{n+1-}}.
$$

因此，我们得到定理5.3中的不等式（5.8），适用于光滑、星形且 k- 凸超曲面 Σ 于 $\mathbb{R}^{n+1}$中。此外，若不等式（5.8）在 Σ上等号成立，则 $\frac{d}{dt}Q_k\left(t\right) = 0$

对流（ Σ_t 5.9）的解在所有时刻 上均成立， t 这意味着初始超曲面Σ 是一个坐标球面。□

5.2. 双曲空间中的不等式。在本小节中，我们将证明双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中有界静态凸域 Ω 的一个类似不等式。这里，如果边界 $\Sigma = \partial\Omega$ 的第二基本形式满足

$$h_{ij} > \frac{u}{\lambda'} g_{ij} > 0$$

处处成立于 Σ，则称 Ω 为静态凸的。该定义最早由 Brendle 和 Wang [11], 提出，它蕴含严格凸性，但比 h-凸性弱，因为 $u = \langle \lambda \partial_r, \ \nu \rangle < \lambda'$。

下面的逆曲率型流

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{E_{k-1}}{E_k} - \frac{u}{\lambda'(r)} \right) \nu \tag{5.16}$$

由 Scheuer 和 Xia [38]进行了研究。对于初始为星形且 k-凸的超曲面 Σ 在$\mathbb{H}^{n+1}$中，他们证明了流（5.16）的解 Σ_t 始终保持星形和 k-凸性， Σ_t对所有时间均存在，并且当 $t \to \infty$时光滑收敛到以原点为中心的测地球面。后来，Hu 和 Li [28] 证明，如果初始超曲面 M 是静态凸的，那么解Σ_t 对所有 $t > 0$均为静态凸的。作为应用，以下关于静态凸域 Ω 的不等式 $\subset \mathbb{H}^{n+1}$ 由 [28]证明:

$$\int_{\partial\Omega} \lambda' E_k d\mu \geq h_k \circ \chi_\ell^{-1}(W_\ell(\Omega)), \tag{5.17}$$

对于 $k = 0, \ 1, \cdots, n, \ \ell = 0, \ 1, \cdots, k$, 其中 $h_k(r) := \int_{\partial B(r)} \lambda' E_k d\mu$ 以及 $\chi_\ell(r) := W_\ell(B(r))$。

I下面我们证明静态凸域的如下尖锐不等式 n.

定理 5.4. 若 Ω 是 $\mathbb{H}^{n+1}(n \geq 2)$ 中光滑有界的静态凸域，则

$$\int_{\partial\Omega} \Phi E_k d\mu + k W_{k-1}(\Omega) \geq (\xi_k + k\chi_{k-1}) \circ \chi_\ell^{-1}(W_\ell(\Omega)) \tag{5.18}$$

对于所有 $k = 1, \cdots, n$ 以及 $\ell = 0, \ 1, \cdots, k$, 其中 $\Phi(r) = \cosh r - 1$ 如 (5.1) 中所定义。等号成立当且仅当 Ω 是以原点为中心的测地球。这里 $\xi_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ 是由测地球 $B(r)$ 上的加权曲率积分 $\xi_k(r) := \int_{\partial B(r)} \Phi E_k d\mu$ 定义的函数，该测地球的半径为 r; 而 $\chi_\ell : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ 由 $\chi_\ell(r) := W_\ell(B(r))$ 定义。

证明。沿着流（5.16），我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} \Phi E_k d\mu_t + k W_{k-1}(\Omega_t) \right) &= \int_{\partial\Omega_t} ((k+1) u E_k + (n-k) \Phi E_{k+1}) \times \left(\frac{E_{k-1}}{E_k} - \frac{u}{\lambda'(r)} \right) \\
&= (k+1) \int_{\partial\Omega_t} \frac{u}{\lambda'} \left(\lambda' E_{k-1} - u E_k \right) \\
&\quad + (n-k) \int_{\partial\Omega_t} \frac{\Phi}{\lambda'} \left(\lambda' \frac{E_{k+1} E_{k-1}}{E_k} - u E_{k+1} \right) \\
&\leq (k+1) \int_{\partial\Omega_t} \frac{u}{\lambda'} \left(\lambda' E_{k-1} - u E_k \right) \\
&\quad + (n-k) \int_{\partial\Omega_t} \frac{\Phi}{\lambda'} \left(\lambda' E_k - u E_{k+1} \right) \\
&= \frac{k+1}{k} \binom{n}{k}^{-1} \int_{\partial\Omega_t} \frac{u}{\lambda'} \mathrm{div}(T_{k-1} \nabla \Phi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k+1}^{-1}\int_{\partial\Omega_t}\frac{\Phi}{\lambda'}\mathrm{div}(T_k\nabla\Phi)\\
=&-\frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-1}\int_{\partial\Omega_t}\left\langle T_{k-1}(\nabla\Phi),\nabla\left(\frac{u}{\lambda'}\right)\right\rangle\\
&-\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k+1}^{-1}\int_{\partial\Omega_t}\left\langle T_k(\nabla\Phi),\nabla\left(\frac{\Phi}{\lambda'}\right)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

这里我们用到了牛顿-麦克劳林不等式（5.11）、引理 5.1 以及分部积分。为估计右侧的符号，我们注意到

$$
\begin{aligned}
\nabla_i\left(\frac{u}{\lambda'}\right)=&\frac{\nabla_i u}{\lambda'}-\frac{u}{(\lambda')^2}\nabla_i\lambda'=\frac{\nabla_i\Phi}{(\lambda')^2}(\kappa_i\lambda'-u),\\
\nabla\left(\frac{\Phi}{\lambda'}\right)=&\frac{\nabla_i\Phi}{\lambda'}-\frac{\Phi}{(\lambda')^2}\nabla_i\lambda'=\frac{\nabla_i\Phi}{(\lambda')^2}.
\end{aligned}
$$

由于 $\partial\Omega_t$ 是静态凸的，我们有 $\kappa_i\lambda'-u>0$，且 T_{k-1}和T_k 均为正定的。因此

$$
\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t}\Phi E_k d\mu_t+kW_{k-1}(\Omega_t)\right)\le 0
$$

沿着流（5.16）。

另一方面，对于 $\ell\le k$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_\ell(\Omega_t)=&\int_{\partial\Omega_t}E_\ell\left(\frac{E_{k-1}}{E_k}-\frac{u}{\lambda'(r)}\right)\\
\ge&\int_{\partial\Omega_t}\frac{1}{\lambda'}\left(\lambda' E_{\ell-1}-E_\ell u\right)\\
=&\int_{\partial\Omega_t}\frac{1}{\ell\lambda'}\binom{n}{\ell}^{-1}\mathrm{div}(T_{\ell-1}\nabla\Phi)\\
=&\int_{\partial\Omega_t}\frac{1}{\ell(\lambda')^2}\binom{n}{\ell}^{-1}\langle T_{\ell-1}(\nabla\Phi),\nabla\Phi\rangle\ \ge 0,
\end{aligned}
$$

这里我们用到了牛顿-麦克劳林不等式 $E_\ell E_{k-1}\ge E_{\ell-1}E_k$ （ $\ell\le k$、引理 5.1 以及分部积分。

现在我们应用上述单调性以及流（5.16）的收敛性。将极限坐标球面记为$S_{r_\infty}=\partial\Omega_\infty$。于是

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma\Phi E_k d\mu+kW_{k-1}(\Omega_t)\ge&\lim_{t\to\infty}\left(\int_{\partial\Omega_t}\Phi E_k d\mu_t+kW_{k-1}(\Omega_t)\right)\\
=&\int_{S_{r_\infty}}\Phi E_k d\mu_\infty+kW_{k-1}(\Omega_\infty)\\
=&\xi_k(r_\infty)+k\chi_{k-1}(r_\infty),\\
W_\ell(\Omega)\le&\lim_{t\to\infty}W_\ell(\Omega_t)=W_\ell(\Omega_\infty)=\chi_\ell(r_\infty).
\end{aligned}
$$

如 [43], 两个函数 $\xi_k:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 和 $\chi_\ell:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 均严格递增。因此

$$
\int_\Sigma\Phi E_k d\mu+kW_{k-1}(\Omega)\ge\left(\xi_k+k\chi_{k-1}\right)\circ\chi_\ell^{-1}\left(W_\ell(\Omega)\right). \tag{5.19}
$$

（5.19）的刚性由单调性的刚性推出。至此，定理5.4的证明完成。□

注 5.2。根据定义，

$$\int_{\partial\Omega} E_k d\mu = (n-k)W_{k+1}(\Omega) + kW_{k-1}(\Omega),$$

(5.18) 的左侧可改写为

$$\int_{\partial\Omega} \lambda' E_k d\mu - (n-k)W_{k+1}(\Omega).$$

这意味着，我们的不等式 (5.18) 比不等式 (5.17) 更精确。

5.3. 球面中的不等式。对于球面中的凸超曲面，在 $\mathbb{S}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ $k = n$ 的情形下，我们可以证明一个与 (5.18) 类似的不等式。

定理 5.5. 设 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ 中包围有界区域 Ω 的光滑闭严格凸超曲面。则

$$\int_{\Sigma} \Phi E_n(\kappa) d\mu + nW_{n-1}(\Omega) \geq (\xi_n + n\chi_{n-1}) \circ \chi_\ell^{-1}(W_\ell(\Omega)), \quad \ell = 0, 1, \cdots, n, \tag{5.20}$$

其中 $\Phi(r) = 1 - \cos r$ 是 (5.1) 中定义的函数。等号成立于 (5.20) 当且仅当 Σ 是坐标球面。

为了证明 (5.20)，我们考虑球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的以下流

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{E_{k-1}}{E_k} \lambda'(r) - u \right) \nu, \tag{5.21}$$

这是由 Brendle、Guan 和 Li 引入的 [9]。若初始超曲面严格凸，则文献 [9] 证明了流 (5.21) 在 $k = n$ 中的球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上保持严格凸性，并光滑收敛到一个测地球面。不等式 (5.20) 的证明依赖于这一收敛结果以及以下单调性。

引理 5.6. 假设 $\Sigma_t = \partial\Omega_t$ 是 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中流 (5.21) 的一个光滑闭严格凸解。我们有，$\int_{\partial\Omega_t} \Phi E_k + kW_{k-1}(\Omega_t)$ 随时间 t 单调不增；除非 Σ_t 是坐标球面，否则它严格递减。

证明。通过选取

$$f = \frac{E_{k-1}}{E_k} \lambda'(r) - u$$

在 (5.7) 中并利用牛顿-麦克劳林不等式 (5.11)，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} \Phi E_k + kW_{k-1}(\Omega_t) \right) &= \int_{\Sigma_t} (k+1)u \left(E_{k-1}\lambda'(r) - uE_k \right) \\
&\quad + \int_{\Sigma_t} (n-k)\Phi \cdot \left(E_{k+1} \frac{E_{k-1}}{E_k} \lambda'(r) - uE_{k+1} \right) \\
&\leq \int_{\Sigma_t} (k+1)u \left(E_{k-1}\lambda'(r) - uE_k \right) \\
&\quad + \int_{\Sigma_t} (n-k)\Phi \cdot \left(E_k \lambda'(r) - uE_{k+1} \right).
\end{aligned}$$

根据引理5.1，

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} \Phi E_k + kW_{k-1}(\Omega_t) \right) \leq \frac{(k+1)}{k\binom{n}{k}} \int_{\partial\Omega_t} u \operatorname{div}\left(T_{k-1}(\nabla\Phi) \right) + \frac{(n-k)}{(k+1)\binom{n}{k+1}} \int_{\partial\Omega_t} \Phi \operatorname{div}\left(T_k(\nabla\Phi) \right)$$

$$= -\frac{(k+1)}{k\binom{n}{k}}\int_{\partial\Omega_t}\langle T_{k-1}(\nabla\Phi), A\nabla\Phi\rangle - \frac{(n-k)}{(k+1)\binom{n}{k+1}}\int_{\partial\Omega_t}\langle T_k(\nabla\Phi),\nabla\Phi\rangle$$
$$= -\int_{\partial\Omega_t}\left\langle\left(\frac{(k+1)}{k\binom{n}{k}}T_{k-1}A + \frac{(n-k)}{(k+1)\binom{n}{k+1}}T_k\right)(\nabla\Phi),\nabla\Phi\right\rangle$$

这里我们用到了事实 $\nabla u = A\nabla\Phi$。

若 Σ_t 是凸的，则算子 $\frac{(k+1)}{k\binom{n}{k}}T_{k-1}A + \frac{(n-k)}{(k+1)\binom{n}{k+1}}T_k$ 为正。因此

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t}\Phi E_k + kW_{k-1}(\Omega_t)\right) \leq 0.$$

除非 $\nabla\Phi \equiv 0$ 在 Σ_t 上恒成立，否则该不等式是严格的，这意味着 Σ_t 是以原点为中心的测地球面。□

定理 5.5 的证明。根据 [43], , ℓ 次拟曲面积分 $W_\ell(\Omega_t)$ 沿着流（5.21）单调递增。结合流（5.21）对于 $k = n$ 的收敛结果以及引理 5.6中的单调性，便可得到定理 5.5 □

References

1. A. Alvino, F. Brock, F. Chiacchio, A. Mercaldo, and M.R. Posteraro. 关于 $\mathbb{R}^N$ 上权函数 $|x|^\alpha$的一些等周不等式。 *J. Math. Anal. Appl.*, 451(1):280–318, 2017. 2. B. Andrews, X. Chen, and Y. Wei, 双曲空间中的保体积流与 Alexandrov-Fenchel 型不等式， *J. Eur. Math. Soc.* **23** (2021), 2467–2509. 3. B. Andrews, Y. Hu, and H. Li, 调和平均曲率流与几何不等式。 *Adv. Math.* **375** (2020), 107393, 28 pp. 4. J. Barbosa and A. G. Colares, 具有常

r *Ann. Global Anal.* 平均曲率的超曲

Geom. **15** 1997 3, 277 297

面的稳定性，( ), no. – . 5. M. F. Betta, F. Brock, A. Mercaldo, and M. R. Posteraro. 一种加权等周不等式及其在对称化中的应用。 *J. Inequal. Appl.*, 4 (1999), no. 3, 215–240. 6. M. F. Betta, F. Brock, A. Mercaldo, and M. R. Posteraro, $\mathbb{R}^n$ 上的加权等周不等式及其在重排中的应用。 *Math. Nachr.*, 281(4):466-498, 2008. 7. C. Borell. 高斯空间中的 Brunn-Minkowski 不等式。 *Invent. Math.*, 30(2):207–216, 1975. 8. S. Brendle, 扭曲积流形中的常平均曲率曲面。

Publ. Math. Inst. Hautes Études , – ( ) 9. S.

Sci. **117** 247 269 2013

Brendle, P. Guan and J. Li. 空间形式中的一种逆曲率型超曲面流。 *Preprint*, 2018. 10. S. Brendle, P.-K. Hung, M.-T. Wang, 反德西特-史瓦西流形中超曲面的 Minkowski 不等式， *Comm. Pure Appl. Math.* **69** (2016), no. 1, 124–144. 11. S. Brendle and M.-T. Wang, 史瓦西时空中曲面的 Gibbons-Penrose 不等式，

Comm. ( ), no. –43, 12.

Math. Phys. **330** 2014 1, 33

D. Bucur, V. Ferone, C. Nitsch and C. Trombetti, 高维中的 Weinstock 不等式，

J. Differential , ( ) – . 13. X.

Geom. **118** 2021 1 21

Cabr ´ *J. Differential* e and X.

Equations **255** 2013 11, 4312 4336

Ros-Oton, 单项式权函数下的 Sobolev 不等式和等周不等式， , ( ), no. – . 14. L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, 带权— *Compositio*

阶插值不等式， *Mathematica* **53** 1984 3, 259 275 ,

( ), no. – . 15. A. Canete, M. Miranda, and D. Vittone. 带密度平面上的一些等周问题。 *J. Geom. Anal.*, 20 2010 290 ( ), no. 2, 243– . 16. F. Catrina and Z.Q. Wang. 关于 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式：极值函数的最佳常数、存在性（和不存在性）及对称性。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 54 (2001), no. 2, 229–258. 17. M. Chen and J. Sun, 球面中的 Alexandrov-Fenchel 型不等式。 *Adv. Math.* **397** (2022), Paper No. 108203, 25 pp. 18. M. Dambrine, D. Kateb, and J. Lamboley. Wentzell–Laplace 算子的一个极值特征值问题。*Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 33 (2016), no. 2, 409–450.

19. L. L. de Lima and F. Gir˜ao, 双曲空间中的一个 Alexandrov-Fenchel 型不等式及其在彭罗斯不等式中的应用, *Ann. Henri Poincaré*, 17 (2016), no. 4, 979–1002. 20. Y. Ge, G. Wang, and J. Wu, 双曲 Alexandrov-Fenchel 混合体积不等式 II。

J. Differential , – ( ) 21.

Geom. **98** 237 260 2014
C. Gerhardt, 非凸超曲面流向球面。 *J. Differential Geom.* **32**(1), 299–314 (1990) 22. C. Gerhardt, 双曲空间中的逆曲率流, *J. Differential Geom.* **89**(3), (2011), 487–527. 23. C. Gerhardt, 球面中的曲率流, *J. Differential Geom.* **100**:2 (2015), 301–347. 24. F. Gir

˜

Ann. ao and

Global Anal. Geom. **52** 4 413 424, 2017
N. M. Pinheiro. 球面中超曲面的一个 Alexandrov-Fenchel 型不等式。, ( ): – . 25. F. Gir

˜

Bull. ao and

London Math. Soc. **52** 1 121 136, 2020
D. Rodrigues. 次静态流形中超曲面的加权几何不等式。, ( ): – . 26. P. Guan and J. Li, k-凸星形域的拟曲面积分不等式, *Adv. Math.* **221** (2009), 1725–1732. 27. P. Guan and J. Li, 空间形式中的一种平均曲率型流, *Int. Math. Res. Not.* **13** (2015), 4716–4740. 28. Y. Hu and H. Li, 双曲空间中静态凸域的几何不等式。

Trans. Amer. Math. ( ), no. – .

Soc. **375** 2022 8, 5587 5615
29. Y. Hu, H. Li, and Y. Wei. 双曲空间中的局部约束曲率流与几何不等式。*Math. Ann.*, 382 (2022), no. 3-4, 1425–1474. 30. K.-K. Kwong. Hsiung–Minkowski 公式的推广及其若干应用。 *J. Geom. Anal.*, 26(1):1– 23, 2016. 31. K.-K. Kwong and P. Miao,

$\mathbb{R}^n$ *Pacific* 中的逆平

J. Math. **267** 2 417 422, 2014
均曲率流上的一个新单调量。, ( ): – . 32. K.-K. Kwong and P. Miao, 逆曲率流中涉及加权 σ_k 积分的单调量, *Commun. Contemp. Math.* **17** (2015), no. 5, 1550014. 33. K.-K. Kwong, Y. Wei, G. Wheeler, and V.-M. Wheeler. 二维空间形式中的一种逆曲率流。 *Math. Ann.*, 384(1-2):1–24, 2022. 34. M. Makowski and J. Scheuer, 球面中的刚性结果、逆曲率流与 Alexandrov-Fenchel 型不等式, *Asian J. Math.* **20** (2016) 869–892. 35. C. Rosales, A. Ca˜nete, V. Bayle, and F. Morgan. 带密度欧几里得空间中的等周问题。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 31 (2008), no. 1, 27–46. 36. L. A. Santal´o, *Integral geometry and geometric probability*, 剑桥数学丛书，第 2 版，剑桥大学出版社，剑桥，2004。37. J. Scheuer, 黎曼翘曲积中的逆曲率流。 *J. Funct. Anal.* **276** (2019 4, 1097 1144), no. – . 38. J. Scheuer and C. Xia, 局部约束逆曲率流, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372 (2019), no. 10, 6771–6803 39. R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, 第二扩充版, 《数学百科全书及其应用》, 第 151 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014。40. G. Solanes, 常曲率空间中的积分几何与 Gauss-Bonnet 定理,

Trans. Amer. , ( ), no. – .

Math. Soc. **358** 2005 3, 1105 1115
41. J. Urbas, 由主曲率的对称函数驱动的星形超曲面膨胀，*Math. Z.* **205**, 355–372 (1990) 42. G. Wang and C. Xia, 双曲空间中的等周型问题与 Alexandrov-Fenchel 型不等式, *Adv. Math.* **259** (2014), 532-556. 43. Y. Wei and T. Zhou, 空间形式中超曲面的新加权几何不等式,

Bull. London , ( ), – .

Math. Soc. **55** 2023 263 281
44. R. Weinstock, *Inequalities for a Classical Eigenvalue Problem*, 数学系，斯坦福大学，技术报告 37 (1954)。45. R. Weinstock, 关于一个经典特征值问题的不等式。 *J. Rational Mech. Anal.*, 3 (1954), 745–753. 46. H. Zhou, 扭曲积流形中的逆平均曲率流, *J. Geom. Anal.*, 28 2, 1749 2018 1772 ( ), no. – .

Mathematical Sciences Institute,
Australian National University, Canberra, ACT 2601, Aus-tralia*Email address*:
kwok-kun.kwong@anu.edu.auSchool of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026,
P.R. China
Email address: yongwei@ustc.edu.cn