arXiv:2303.00993v1 [math.AG] 2 Mar 2023

复解析空间的广义对数典范阈值的升链条件

CHRISTOPHER HACON 和 LINGYAO XIE

Abstract.我们证明，复解析空间的广义对数典范阈值满足升链条件，并刻画其聚点。

1. Introduction

本文中，我们始终研究形如（X, B）的对，其中 X 是正规复解析簇， B 是有效的 $\mathbb{R}$-除子，且 $K_X + B$ 是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃除子。理解这类对的奇点，对于代数簇双有理分类的近期进展起着基础性作用。衡量这些奇点的一项重要指标是对数正则阈值。若（X, B）是对数典范的，且 D 是非零有效的 $\mathbb{R}$-卡蒂埃除子，那么对数正则阈值为

$$\operatorname{lct}(X, B; D) := \sup\{t | (X, B + tD) \text{ is log canonical}\}.$$

理解对数正则阈值的性质，对于诸多问题都至关重要，例如翻转的终止、模空间问题以及 K 稳定性（例如参见 [Birkar07], [HMX18], [XZ21]）。在这方面，最重要的结果或许是 Hacon-McKernan-Xu 对 Shokurov 的“对数正则阈值的升链条件猜想”的证明[HMX14] ，下面我们将回顾这一结果。

集合 I 非负实数满足升链条件（或 ACC）（分别地，降链条件（或 DCC）），如果任意非递减序列$i_1 \leq i_2 \leq \ldots$（分别地，任意非递增序列 $i_1 \geq i_2 \geq \ldots$）最终都保持不变。令 I、J 为两个非负实数降链条件集，且 n 为一个自然数。我们定义

$$\operatorname{LCT}_n(I, J) := \{\operatorname{lct}(X, B; D) | \dim X = n,\ \operatorname{coeff}(B) \in I,\ \operatorname{coeff}(D) \in J\}$$

为所有 n维 lc 对（X， B）关于除子 D 的对数正则阈值的集合，其中 B 和 D 的系数分别属于 I 和J 。当 X 为拟射影时，由 [HMX14，定理 1.1], 可知，集合 $\operatorname{LCT}_n(I, J)$ 满足升链条件，并且在对降链条件集 I、J施加温和假设时，可以刻画其聚点。由 [HMX14，定理 1.1], 可知，若 $I \subset [0, 1]$，则 I的唯一可能聚点为 1；并且若 $I = I_+ := \{0\} \cup \{j = \sum_{k=1}^{r} i_k \in [0, 1] | i_k \in I\}$，则 $\operatorname{LCT}_n(I, \mathbb{N})$ 的唯一聚点为 $\operatorname{LCT}_{n-1}(I, \mathbb{N}) \setminus \{1\}$。

近年来，广义对在双有理几何中开始发挥越来越重要的作用（参见 [Birkar21] 及其中的参考文献）。人们逐渐认识到，研究这一背景下的奇点也很重要。关于广义对的主要结果的类似结论已在[HMX14], 中得到证明 [BZ16], [Liu18],，并且已在若干重要方面得到应用。

Date：2023年3月3日。Christopher Hacon 的部分研究经费由美国国家科学基金会研究资助项目（编号：DMS- 1952522、DMS-1801851）以及西蒙斯基金会的一项资助提供；奖项编号：256202。作者感谢 J. Liu 和 O. Fujino 提供宝贵意见。

自然，人们也预期，关于对数正则阈值的升链条件将在许多其他背景中发挥重要作用，例如解析簇、叶状对、正特征与混合特征下的簇等（例如参见 [Fuj22b], [Chen 22], [Sato21]）。鉴于解析簇的极小模型纲领近期取得的进展（[DHP22],[Fuj22a]），人们预期 [HMX14] 的结果也应适用于解析簇。事实上，Fujino 已证明，Shokurov 关于对数正则阈值的升链条件猜想对解析簇成立 [Fuj22b]。解析情形中出现的一种有趣现象（在代数情形或紧解析簇中并不会出现）是：若 $\lambda = \mathrm{lct}(X, B; D)$，则 $(X, B + \lambda D)$ 可能是 Kawamata 对数终端的；也就是说，不存在除子 E 在 X 之上，其对数差异为 $a(E; X, B + \lambda D) = 0$（参见 [Fuj22b, Example 1.3]）。这多少令人不安，因为通常许多通过维数归纳进行的证明，都要研究 $K_X + B + \lambda D$ 在适当的、对数差异为 $a(E; X, B + \lambda D) = 0$的除子 E之上的限制。

本文旨在证明 [HMX14] 的结果对解析簇上的广义对仍然成立。在此过程中，我们将证明，对数正则阈值 $\lambda = \mathrm{lct}(X, B; D)$ 总是由对数差异为 0 的除子计算得出，所对应的辅助对为 $(X', B' + \lambda D')$。我们相信，这类结果将在未来关于 K¨ahler 簇的极小模型纲领研究中得到广泛应用。

现在我们将更精确地描述本文的主要结果。设I, J 为降链条件集，且 $n \in \mathbb{N}$, $f\colon X' \to X$ 是解析簇之间的真双全纯映射，$(X, B + M)$, M', P', P, D如定义 2.3所述，并满足

(1) $(X, B + M)$ 是维数为 n 的广义对数典范对，(2) $M' = \sum \mu_j M'_j$其中 M'_j是 X' 上的相对 nef 卡蒂埃除子，且 $\mu_j \in I$，(3) $P' = \sum \nu_k P'_k$其中 P'_k是 X' 上的相对 nef 卡蒂埃除子，且 $\nu_k \in J$，(4) B 的系数属于 I，且 D 的系数属于 J。

那么，广义对数典范阈值$_n(I, J) \subset \mathbb{R}$是由所有可能的广义对数典范阈值 $\mathrm{glct}(X, B + M; D + P)$ 组成的集合，其中 $(X, B + M; D + P)$ 如上所述（见定义 2.3）。

定理 1.1. 集合 $\mathrm{GLCT}_n(I, J)$ 满足升链条件。

此外，我们对 [HMX14 定理 111] 和 [Liu18 定理 1 中的广义对数典范阈值的聚点给出了精确描述：

定理 1.2. 若下降链条件集 $I \subset [0, 1]$ 和$1 \in I = I_+$的唯一聚点是 1，则 $\mathrm{GLCT}_n(I) := \mathrm{GLCT}_n(I, \mathbb{N})$ 的聚点属于 $\mathrm{GLCT}_{n-1}(I)$。

2. 预备知识

设 X 是一个正规复解析空间。X 上的素除子 P 是一个余维一的不可约约化闭子簇。X 上的 $\mathbb{R}$-除子（分别为 $\mathbb{Q}$-除子） D 是由不同素除子 D_i 构成的局部有限形式和 $D = \sum d_i D_i$，其系数为 $d_i \in \mathbb{R}$ （分别为 $d_i \in \mathbb{Q}$）。若对于某个点 $x \in X$，存在一个邻域 $x \in U \subset X$，使得 $\mathbb{R}$-除子（分别为 $\mathbb{Q}$-除子） D 在该邻域上的限制 $D|_U$ 是卡蒂埃除子的有限 $\mathbb{R}$-线性（分别为 $\mathbb{Q}$-线性）组合，则称 D 在 $x \in X$ 处是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃（分别为 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃）的。若 D 在每个 $x \in X$ 处都是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃（分别为$\mathbb{Q}$-卡蒂埃），则称 D 是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃（分别为$\mathbb{Q}$-卡蒂埃）。

定义 2.1. 如果存在一个真双全纯映射 $f\colon X' \to X$，以及一个 f-数值有效的 $\mathbb{R}$-卡蒂埃除子 M'，使得 $(X, B + M)$ 是一个广义对

(1) X' 和 X 是正规的，

(2) $M = f_*M'$ 和 $B \geq 0$, (3) $K_X + B + M$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier。

我们称 B 为广义对的边界部分，称 M 为数值有效部分。我们总可以将 X'替换为一个经由 f的更高模型，并将 M'替换为其拉回。我们可以写作

$$K_{X'} + B' + M' = f^*(K_X + B + M)$$

并称广义对 $(X, B+M)$ 在$x \in X$ 处是广义对数典范（glc）的，若存在一个邻域 $x \in U \subset X$，使得 $(X', B')|_U$ 是次对数典范（[Fuj22a，注 3.2]）；若存在一个邻域 $x \in U \subset X$，使得 $(X', B')|_U$ 是次川塔罗对数终端（[Fuj22a，注 3.2]），则称其在 $x \in X$ 处是广义川塔罗对数终端（gklt）的。对于 X上的任意除子，我们还可以定义 $a(E, X, B + M) := a(E, X', B')$。如果 $(X, B + M)$ 是广义对数典范对，则若 Z 是 (X', B') 的对数典范中心（相应地，是对数典范位），我们称 Z为其对数典范中心（相应地，对数典范位）；

如果可以选择 $f\colon X' \to X$ （定义中的）作为 (X, B) 的对数解消，使得对于每个 f-例外除子 E，其对数差异为 $a(E, X, B + M) > 0$，则称广义对数典范对 $(X, B + M)$ 为广义除子对数终端（gdlt）的。

定义 2.2. 如果集合 $I \subset \mathbb{R}$ 中任意非递减（分别为非递增）序列 $I_k \in I$ 最终都为常值，则称该集合满足升链条件（分别为降链条件）。我们令 ∂I 为 I 和 $I = I \cup \partial I$ 的聚点集合$^-$。如果 $I \subset [0, +\infty)$，那么

$$I_+ = \{0\} \cup \{\sum_{k=1}^{l} i_k \in [0, 1] \mid i_k \in I\},\ and$$

$$D(I) = \{a \leq 1 | a = \frac{m - 1 + f}{m},\ m \in \mathbb{N}^+,\ f \in I_+\}.$$

如果 $I \subset [0, 1]$，那么我们令

$$\Phi(I) = \{1 - \frac{r}{m} | r \in I, m \in \mathbb{N}^+\}.$$

定义 2.3.（复解析空间上的广义对数典范阈值）。设 $(X, B+M)$ 为广义对数典范对，且 D 是 X 上的有效 $\mathbb{R}$-Cartier$\mathbb{R}$-除子，$P = f_*P'$，其中 P' 是 X' 上的数值有效除子。令 c 为使得 $(X, B + M + t(D + P))$ 为广义对数典范的所有实数的上确界，则称 c 为 $D + P$ 关于 $(X, B + M)$ 的广义对数典范阈值，记作 $\mathrm{lct}(X, B + M; D + P)$。

引理 2.4. 若 $(X, B + M)$ 和 $D + P$ 如上所述，则 $(X, B + M + c(D + P))$ 是广义对数典范的。

证明。这直接由定义可得。 □

注 2.5。注意，上述定义与 [Fuj22b] 中的定义不同，因为对于 $(X, B + M + c(D + P))$，不一定存在非川俣对数终端中心。问题在于，X可能不是紧的。在这种情况下，我们可能没有对数解消，并且除子 D 可能具有无穷多个分支，见 [Fuj22b，例 1。3]然而，如果 X 是（相对）紧的，那么对数解消存在，这两个定义一致，并且对于 $(X, B + M + c(D + P))$，我们总能得到一个对数典范中心，见 [Fuj22b，注 1.4。]。

下一个定理是复解析情形中广义对的 dlt 爆破的类似结果：

定理 2.6。（dlt 爆破）设 X是一个正规复代数簇，且 $(X, B + M)$是定义 *2.1*中的广义对。设 U 是 X 的任意相对紧 Stein 开子集，并设 V 是 U的任意相对紧开子集。那么，我们可以

取 U 的 Stein 紧子集 W，使得 $\Gamma(W,\mathcal{O}_X)$ 是诺特的， $V\subset W$，并且在适当缩小 W 周围的 X 后，可以构造一个射影双亚纯态射 $g: Y\to X$，它来自具有以下性质的正规复代数簇 Y：

(1) Y 在 W上是 $\mathbb{Q}$-阶乘的；(2) 对每个 g-例外除子 E， ≤ 0 满足 $a(E, X, B+M)$；(3) $(Y, B_Y^{\leq 1}+M_Y)$ 是广义可除对数终端的，其中 $K_Y+B_Y+M_Y=f^*(K_X+B+M)$。

证明。我们将不再特别说明地酌情缩小 X。通过作奇点消解，我们可以假设 $f: X'\to X$ 是一个射影双亚纯态射，使得 $f^{-1}(U)$ 光滑，且 $\mathrm{Exc}(f)\cup \mathrm{Supp}(f^{-1}B)$ 是 $f^{-1}(U)$ 上的简单正交叉除子。令 E为任意满足 $f(E)\cap U\neq\emptyset$ 的 f-例外除子。然后，通过酌情扩大 V，我们可以假设 $f(E)\cap V\neq\emptyset$。由 Fuj22a 引理 2.16]，，我们可以取 U 的一个 Stein 紧子集 W，使得$\Gamma(W,\mathcal{O}_X)$ 是诺特的，且 $V\subset W$。

记 $K_{X'}+B'+M'=f^*(K_X+B+M)$，如定义 2.1所示，并令 $B'=\sum a_iD_i$为不可约分解。现在我们定义一个边界

$$\Delta=\sum_{0<a_i<1} a_iD_i+\sum_{a_i\geq 1} D_i+\epsilon\sum E_i\ ,\ 1\gg\epsilon>0,$$

其中 E_i是所有满足 $a(E,X,B+M)>0$ 的 f-例外除子。于是我们有 $K_{X'}+\Delta+M'=f^*(K_X+B+M)+F$，并且可知 $-f_*F$是有效的。取A为一般的（相对于 X）充足 $\mathbb{Q}$-除子，使得 $(X',\Delta+A+M')$ 是广义可除对数终端，且$K_{X'}+\Delta+A+M'$在 W 上数值有效。注意，对于任意 $t>0$， $tA+M'$ 都是 f-充足的。因此（相对于 W）我们可写作 $K_{X'}+\Delta+tA+M'\sim_{\mathbb{Q},f} K_{X'}+\Delta^t$，其中 (X',Δ^t) 是某个 Kawamata 对数终端对。于是根据 [Fuj22a]，我们可以在 X 上相对于 W 运行带有 A 缩放的 $(K_{X'}+\Delta+M')$- 极小模型纲领。

设 $(X_0,\Delta_0+M'):=(X',\Delta+M')$， $F_0:=F$, $M_0:=M'$以及 $A_0:=A$。于是我们得到一列除子收缩和翻转：

$$(X_0,\Delta_0+M_0)\overset{\phi_0}{\dashrightarrow}(X_1,\Delta_1+M_1)\overset{\phi_1}{\dashrightarrow}\cdots\overset{\phi_{i-1}}{\dashrightarrow}(X_i,\Delta_i+M_i)\overset{\phi_i}{\dashrightarrow}$$

其中 Δ_i, M_i, F_i, A_i 是相应的双有理变换。我们还有缩放数

$$1\geq\lambda_0\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_i\geq\cdots\geq 0$$

使得 $K_{X_i}+\Delta_i+M_i+\underline{\lambda_iA_i}$在 W上数值有效。于是根据 [Fuj22a，引理 13.7]，我们知道对于某个 $k\geq 0$，有 $K_{X_k}+\Delta_k+M_k\in\mathrm{Mov}(X_k/X;W)$。因此由负性引理（参见 [Fuj22a，引理 4.9]），我们有 $-F_k\geq 0$ 在 W上。故 $-F_k$ 在 W的某个开邻域上有效。设 $Y:=X_k$, $g: X_k\to X$, $M_Y=M_k$ 以及$K_Y+B_Y+M_Y=g^*(K_X+B+M)$。那么 (Y,B_Y+M_Y) 满足上面的 (1-3)。□

3. Proof of the main theorems

引理 3.1. 固定一个正整数 n 和一个集合 $1\in I\subset[0,\infty]$。假设$f: X'\to X$ 是射影态射，并且我们有定义在 X 上的 $\mathbb{R}$除子 $B,D\geq 0$，以及定义在 X'上的数值有效 $\mathbb{R}$除子 M',P'，使得

(1) $(X,B+M)$ 和 $(X,B+D+M+P)$ 是带有由 M'和 P'给出的数据的 $(n+1)$ 维广义对数典范对，其中 $M=f_*M', P=f_*P'$。(2) $M'=\sum\mu_jM'_j$，其中 M'_j 是相对 nef 卡蒂埃除子，且 $\mu_j\in I$。(3) $P'=\sum\nu_kP'_k$，其中 P'_k是相对 nef 卡蒂埃除子，且 $\nu_k\in I$。(4) $B,D,M'+P'$的系数属于 I。

我们进一步假设，存在（$X,B+D+M+P$）的一个非广义千禧典范中心 V，使得 V不是（$X,B+M$）的非广义千禧典范中心，且 $\dim V\leq\dim X-2$。于是

我们可以构造一个广义对数典范对$(S,\ \Delta+N)$，其中 $S'\to S$ 且 N' 如定义2.1 所述，使得

(1) S 是维数至多为 n的射影簇；(2) Δ的系数属于 $D(I)$；(3) $K_S+\Delta+N$ 数值平凡；(4) $N'=\sum a_iN'_i$，其中 N'_i是相对 nef Cartier 除子，且 $a_i\in I$；并且以下情形至少有一种成立：

(i) Δ的某个分支的系数具有以下形式

$$\frac{m-1+\alpha+c}{m}$$

其中 m 是正整数，$\alpha\in I_+$，且 $c\in I$ 是 D 或 P'某个分支的系数。(ii) 对某个 i 和 $a_i=g+\nu_k$，N'_i 不是数值平凡的，其中 $g\in I$，且$\nu_k>0$ 是 P' 的一个系数。

证明。我们可以将 V 替换为满足条件的 $(X,B+D+M+P)$ 的一个极大（相对于包含关系）广义对数典范中心：dim $V\le$dim $X-2$，且 V不是 $(X,B+M)$ 的广义对数典范中心。令 Q 为 V的一个解析意义下充分一般点。取 Q 的一个开邻域 U 以及 X 的一个 Stein 紧子集 W，使得 $U\subset W$，且 $\Gamma(W,\mathcal{O}_X)$ 是诺特的。由定理 2.6，在适当缩小 W周围的 X后，我们可以构造一个射影双亚纯态射 $\pi:Y\to X$，满足 $K_Y+B_Y+D_Y+M_Y+P_Y=\pi^*(K_X+B+D+M+P)$，使得

(1) Y在 W上是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，并且 B_Y、D_Y、M_Y、P_Y分别是 B'、D'、M'、P' 的推前（在必要时可将 X' 替换为更高模型）；(2)（Y，$B_Y+D_Y+M_Y+P_Y$）是广义可除对数终端，其中 B_Y+D_Y是边界部分，M_Y+P_Y 是数值有效部分；(3) 对每个 π-例外除子 E，$a(E,\ X,\ B+D+M+P)=0$成立；(4) 存在一个 π-例外除子 F，使得 $\pi(F)=V$。

令$\hat{D}$ 为 D 在 X' 上的双有理变换，令$\hat{D}_Y$为$\hat{D}$在 Y上的推前。我们首先断言，可以选择（4）中的 F，使得$(D_Y+P_Y)|_{F_v}$不是数值平凡的，其中 $v\in V\cap U$ 是解析意义下充分一般点。令$E=\pi^*(D+P)-\hat{D}_Y-P_Y$，那么由于（$X,\ B+M$）是广义对数典范，且每个$\pi$-例外除子 E_i都具有对数差异 $a(E_i;\ B+D+M+P)=0$，可知 $E\ge0$。此外，由于 V不是（$X,\ B+M$）的对数典范中心，E是非平凡的。因此，根据BCHM10，引理3.6.2]（另见Fuj22a，第 11]节），存在E 的一个分支 F，其具有覆盖曲线族 C（在 X上收缩），使得 $E\cdot C<0$。于是，对于这样的曲线，$\hat{}\ \hat{}$（$D_Y+P_Y)\cdot C>0$，因此$(D_Y+P_Y)|_F$在 V的充分一般点上不是数值平凡的。

将 X' 替换为更高模型后，我们可以假设 $g:\ X'\to Y$ 是一个射影态射。令 $K_{X'}+\Delta'+M'+P'=f^*(K_X+B+D+M+P)$ 和F'为 F在 X'上的双有理变换。令 $\Delta_{F'}$为由伴随 $K_{F'}+\Delta_{F'}=(K_{X'}+\Delta')|_{F'}$定义的 $\mathbb{R}$-除子，并令 Δ_F、M_F、P_F分别为$\Delta_{F'}$、$M'|_{F'}$、$P'|_{F'}$的推前，则这些数据定义了一个广义对（F，$\Delta_F+M_F+P_F$），其数值有效部分为 M_F+P_F，如定义 2.1 所示，并且我们有

$$(K_Y+B_Y+D_Y+M_Y+P_Y)|_F\sim_{\mathbb{R}}K_F+\Delta_F+M_F+P_F.$$

根据 [BZ16、定义 4.7 和注记 4。8], $(F,\ \Delta_F+M_F+P_F)$ 是广义对数典范的。

接下来我们计算 Δ_F 的系数，通过在 Y 中取超平面截面，我们可以假设 dim $Y=2$（注意，我们是在 Stein 集 W 上工作，并且 Y 在 W 上是射影的）。令 $p\in F$ 为一点，令 l_p 为 $p\in Y$ 处的 Cartier 指数。

在这种情况下，我们可以假设 F' 是一条同构于 F 的正规曲线（因为 F 已经是正规的），因此也可以将 p 视为 F' 上的一点。然后，根据 klt 曲面奇点分类，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}_p \Delta_F &= \frac{l_p-1}{l_p} + \operatorname{mult}_p(B_Y+D_Y-F)|_F + \operatorname{mult}_p((g^*(M_Y+P_Y)-M'-P')|_{F'}) \\ &= \frac{l_p-1+\beta+\gamma}{l_p} \in D(I)\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{mult}_p(B_Y+D_Y-F)|_F = \frac{\beta}{l_p}$，$\operatorname{mult}_p((g^*(M_Y+P_Y)-M'-P')|_{F'}) = \frac{\gamma}{l_p}$和$\beta$、$\gamma$、$\beta+\gamma \in I_+$，这是由关于 $B+D$和 $M'+P'$的系数的假设得到的。

令 S （分别为 S'）是 $F \to V$ （分别为$F' \to V$）的 Stein 因子分解的一般纤维，$\Delta = \Delta_F|_S$，$N' = (M'+P')|_{S'}$，$N = (M_F+P_F)|_S$。那么，这些数据定义了一个广义对（S，$\Delta+N$），其数值有效部分为 N，如定义2.1所示，并且我们有

(1) $(S, \Delta+N)$ 是广义对数典范的，(2) $K_S+\Delta+N \sim_{\mathbb{R}} 0$，(3) N' 的系数属于 I，

ˆ(4) $(D_Y+P_Y)|_S$ 不是数值平凡的。

若 $P'|_{S'}$ 不是数值平凡的，则陈述中的 (ii) 成立，证毕。因此我们可以假设 $P'|_{S'} \equiv 0$，从而 $P_F|_S \equiv 0$。若记 $g^*(P_Y) = P'+G$，并令 G_S 为 $G|_{S'}$ 在 S上的推前，则有

$$(\hat{D}_Y+P_Y)|_S = P_F|_S + G_S + \hat{D}_S \equiv G_S + \hat{D}_S \neq 0,$$

其中 ˆ D_S:=ˆ$D_Y|_S$。令 R_F为 $(g^*(M_Y+P_Y)-M'-P')|_{F'}$在$F$上的推前，并令 R_S:$= R_F|_S$，则在前面的计算中 $\operatorname{mult}_p(R_F) = \frac{\gamma}{l_p}$。注意，ˆ ˆ$D_S \leq (B_Y+D_Y-F)|_S$且 $G_S \leq R_S$，因此 $G_S+D_S \neq 0$蕴含 (i) 成立。□

定理 3.2。设 Λ 是一个由非负实数组成的下降链条件集，且 d 是一个正整数。假设 X_i，B_i，M_i，M_i'，D_i，P_i'，P_i'如定义 2.3中所述，并且对任意$i \geq 1$，

(1) (X_i, B_i+M_i) 是维数为 d 的广义对数典范对，(2) $M_i' = \sum \mu_{i,j} M_{i,j}'$其中 $M_{i,j}'$是相对 nef Cartier 除子，且 $\mu_{i,j} \in \Lambda$，(3) $P_i' = \sum \nu_{i,k} P_{i,k}'$其中 $P_{i,k}'$是相对 nef Cartier 除子，且 $\nu_{i,k} \in \Lambda$，(4) B_i 和 D_i 的系数属于 Λ，(5) $(X_i, B_i+M_i+t_iD_i+t_iP_i)$ 是广义对数典范的，且有一个广义对数典范中心 V_i，该中心对于某个 $t_i > 0$而言并非 (X_i, B_i+M_i) 的广义对数典范中心。

那么 $T = \{t_i\}_{i\geq 1}$ 是一个升链条件集。

证明。假设序列 $\{t_i\}_{i\geq 1}$ 严格递增，若 $\dim V_i = d-1$，则对于某个 $0 < \lambda_i \in \Lambda$，有 $1-t_i\lambda_i = \lambda_i' \in \Lambda \cap [0,1]$。令

$$\Gamma_1 := \{\frac{1}{\lambda} \mid 0 < \lambda \in \Lambda\},\ \Gamma_2 := \{1-\lambda' \mid \lambda' \in \Lambda \cap [0,1]\},$$

那么 Γ_1、Γ_2和 $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ 都是升链条件集，并且 $\{t_i\}_{i\geq 1} \subset \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$。这与 $\{t_i\}_{i\geq 1}$ 严格递增的假设矛盾，因此我们可以假设 $\dim V_i \leq d-2$。

令 $I := \Lambda \cup (T \cdot \Lambda) \cup (\Lambda + T \cdot \Lambda)$，则 I 也是一个降链条件集。必要时将 $\{t_i\}_{i\geq 1}$替换为一个子序列，根据引理 3.1 和 [BZ16，定理 1。6]，以下情况之一成立：

(i) 对于每个 $i \geq 1$，$\frac{m_i-1+\alpha_i+t_ic_i}{m_i}$都属于一个有限集 Λ^0，其中 $m_i \in \mathbb{N}^*$、$\alpha_i \in I_+$ 和 $0 < c_i \in I$。(ii)，k 对于每个 $i \geq 1$都属于一个有限集 Λ^0，其中 $g_i \in I$ 和，$k > 0$。

无论哪种情况，我们都可以得出结论： t_i 必须属于一个有限集 Λ^1，这就产生了矛盾，因此证明完毕。□

容易看出，定理 1.1 等价于下述定理，只需取$\Lambda = I \cup J$；其代数情形恰为[BZ16, 定理 1。5]。

定理 3.3。 (广义对数典范阈值的升链条件。) 固定 Λ 为一个非负实数的下降链条件集，并令 d 为一个自然数。那么存在一个升链条件集 Θ，仅依赖于 Λ和 d，使得若$(X, B+M)$, M', P', P, D如定义2.3所述，且

(1) $(X, B+M)$ 是维数为 d 的广义对数典范，(2) $M' = \sum \mu_j M'_j$，其中 M'_j 是相对 nef Cartier 除子，且 $\mu_j \in \Lambda$；(3) $P' = \sum \nu_k P'_k$，其中 P'_k 是相对 nef Cartier 除子，且 $\nu_k \in \Lambda$；(4) B 和 D 的系数属于 Λ,

那么， $D+P$相对于（X, $B+M$）的广义对数典范阈值 $\mathrm{glct}(X, B+M; D+P)$ 属于 Θ。

证明。假设 $c = \mathrm{glct}(X, B+M; D+P) > 0$，那么存在一个非递增序列 $c_i \geq c_{i+1} \geq \cdots$，其极限为 $_{i\to\infty} c_i = c$，以及相对紧开子集 $U_i \subset X$，使得 $c_i = \mathrm{glct}(U_i, B_i+M_i; D_i+P_i)$，其中 $B_i+M_i+D_i+P_i = (B+M+D+P)|_{U_i}$。由注 2.5 可知，$(U_i, B_i+M_i+c_iD_i+c_iP_i)$ 有一个广义对数典范中心，而该中心不是 (U_i, B_i+M_i) 的广义对数典范中心。由于下降链条件集的闭包仍是下降链条件集，只需考虑相对紧簇 X，结论便由定理 3.2 得出。□

定理 1.2 的证明。假设 c 是 $\mathrm{GLCT}_n(I)$ 的一个聚点，则同样存在一个非递增序列 $c_i \geq c_{i+1} \geq \cdots$，满足 $\lim_{i\to\infty} c_i = c$，以及相对紧开子集 $U_i \subset X$，使得 $c_i = \mathrm{glct}(U_i, B_i+M_i; D_i+P_i)$，其中 $B_i+M_i+D_i+P_i = (B+M+D+P)|_{U_i}$。因此，由引理 3.1 可知 $c_i \in \mathcal{N}_d(I, \mathbb{N}, \mathbb{N})$，其定义见 Liu18，定义 2.18]。注意，由于引理 3.1 中构造的广义对 $(S, \Delta+N)$ 是射影的，我们处于代数情形，因此证明可由 [Liu18] 得出。□

References

[Birkar07] *Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips.* Birkar, Caucher, 《杜克数学杂志》（），第–期。[Birkar21] Birkar, Caucher, 《EMS数学科学综述》8（2021），第1–2期，5–24页。[BCHM10] *Existence of minimal models for varieties of log general type* C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. M Kernan, 《美国数学会杂志》（），第–期。[BZ16] Caucher Birkar 和 De-Qi Zhang, 《*Effectivity of Iitaka fibrations and pluricanonical systemsof polarized pairs*》，《IHÉS数学出版物》，第123卷，283–331页（2016）。[22] *ACC for foliated log canonical thresholds* Chen Yen-An Chen, [22] arXiv: 。DHP O. Das、C. Hacon 和 M. Paun, 《*On the 4-dimensional minimal model program for K ähler varieties* 》，arXiv电子预印本，arXiv: 。（5月），[DHP10] J.-P. Demailly、C. Hacon、M. Paun, 《*Extension theorems Non-vanishing and the existence of good minimal models* 》，，，arXiv: 。v [22] Fuj a O. Fujino, 《*Minimal model program for projective morphisms between complex analyticspaces*》（2022）。[Fuj22b] O. Fujino, 《*ACC for log canonical thresholds for complex analytic spaces*》, https://arxiv.org/abs/ 。Liu J. Liu, 《[18] *Accumulation point theorem for generalized log canonical thresholds*》, arXiv:1810.12381v1。[HMX14] C. D. Hacon、J. McKernan、C. Xu, 《*ACC for log canonical thresholds*》，《数学年刊》（第2辑）180（2014），第2期，523–571页。[HMX18] C. D. Hacon、J. McKernan、C. Xu, *Boundedness of moduli of varieties of general type.*《欧洲数学会杂志》（JEMS）20（2018），第4期，865–901页。

[Sato21] Sato, Kenta, 《国际数学研究通知》第–期。[XZ21] Xu, Chenyang; Zhuang, Ziquan, 《剑桥数学杂志》（），第–期。Department of Mathematics, University of Utah, 155 S 1400 E, Salt Lake City, Utah84112*Email address*: hacon@math.utah.edu
Department of Mathematics, University of Utah, 155 S 1400 E, Salt Lake City, Utah 84112*Email address*: lingyao@math.utah.edu