提交至 xxxx

arXiv:2303.01024v1 [math.CO] 2 Mar 2023

关于反正则 K-超图的独立多项式和阈值

BY ERCHUAN ZHANG[1,2,a,b]

[1]学院 科学学院，伊迪斯·科文大学，a*erchuan.zhang@ecu.edu.au*

[2]西澳大利亚大学数学与统计系，b*erchuan.zhang@uwa.edu.au*

给定整数 $k \geq 3$ 和初始的 $k-1$ 个孤立顶点，通过交替添加一个孤立顶点（不与其他顶点相连）或一个支配顶点（与其他所有 $k-1$ 顶点相连），构造一个反正-则 k-超图。令 a_i 表示超图 H中基数为 i 的独立集数量，则 H 的独立多项式定义为 $I(H;x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$，其中 m 是最大独立集的大小。本文的主要目的是将反正则图独立多项式的一些结果推广到反正则 k-超图的情形。具体而言，我们推导出反正则 k-超图独立多项式的（半）闭式公式，并证明其对数凹性。此外，我们证明反正则 k-超图是 $T2$-阈值的，这意味着存在顶点集的一个标记 c 和一个阈值 τ，使得对于任意基数为 k的顶点子集 S， $\sum_{i\in S} c(i) > \tau$ 当且仅当 S 是超边。

1. 引言。 设 $G=(V,E)$ 是一个简单图（即有限、无向、无环且无重边的图），其顶点集为 V，边集为 E，那么，如果 G 的顶点度恰好取 $|V|-1$ 个不同值，也就是说有两个顶点度相同，其中 $|V|$ 是 V的基数，则称 G 为反正则 [11],拟完美 [1], 极大非正则 [14] 。

设 G_1、G_2 是两个简单图，它们的不交并记作 $G_1 \cup G_2$，是一个图 G，其顶点集为 $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$。对于给定的两个不交图 G_1 和 G_2，它们的 Zykov 和记作 $G_1 + G_2$，是一个图 G，其顶点集为 $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)\ v \in V(G_2)\}$。那么，反正则图也可以由以下递推关系定义 [11]

$$\begin{aligned} &A_1 = K_1, A_{n+1} = K_1 + \bar{A}_n, n \geq 1, \text{ or} \\ &A_1 = K_1, A_2 = K_2, A_{n+2} = K_1 + (K_1 \cup A_n), n \geq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， K_1 表示仅含一个孤立顶点的图， K_2 表示由两个顶点构成的完全图， A_n 是 A_n的补图。

根据关系式（1），反正则图可以通过交替添加孤立顶点或支配顶点来构造。如果一个顶点与其他任何顶点都不相连，则称其为孤立的；如果它与其他每个顶点都相连，则称其为支配的。因此，反正则图可以表示为一个二进制串，称为二进制构造串 [10],

$$\mathbf{00}101010\ldots \text{ or } \mathbf{01}010101\ldots, \tag{2}$$

其中，0 表示添加一个孤立顶点，1 表示添加一个支配顶点。回顾一下，图 G 称为阈值图，当且仅当它可以通过反复执行以下操作构造而成：从 K_1 开始

MSC2020 学科分类：主要分类 05C65、05C69；次要分类 05C30、05C31。关键词与短语：独立多项式、反正则超图、递推关系、对数凹性、阈值超图。

以任意顺序添加孤立顶点和支配顶点 [2]。因此，每个反正则图都是阈值图。

给定一个简单图 $G=(V,E)$，若顶点子集 $W\subseteq V$不包含两个相邻顶点，则称其为一个独立集。图 G的独立多项式 $I(G;x)$ 定义为 [6]

$$I(G;x)=\sum_{i=0}^{\alpha}s_i x^i, \tag{3}$$

其中，s_i 表示图 G中基数为 i 的独立集数目，$0\le i\le\alpha$ α 表示最大独立集的大小。

Levit 和 Mandrescu 在 [10]中推导出了反正则图 G 的独立多项式$I(G;x)$ 的闭式公式，并证明了 $I(G;x)$ 是对数凹的，且至多有两个实根。此外，他们发现，在阈值图这一类图中，反正则图可由其独立多项式唯一确定；这是因为阈值图的独立多项式具有唯一性 [8]。

本文旨在将 [10] 中关于反正则图独立多项式的一些结果推广到所谓的反正则 k-超图。一个超图$H=(V,E)$是由顶点集 V和超边集 E组成的有序对，其中每条超边 $e\in E$ 都是顶点集 V的非空子集。此外，若对任意 $e\in E$都有 $|e|=k$，则称 H 为k-均匀超图、k-超图或k-族。注意，2-超图就是通常的图。本文中，若无特别说明，我们均设 $k\ge 3$。

两个超图 H_1,H_2 的不交并是超图 $H=H_1\cup H_2$，其顶点集为 $V(H_1)$、$V(H_2)$ 的不交并，超边集为 $E(H_1)$、$E(H_2)$ 的不交并。设 H_1,H_2 是不交超图，且对于某个 $k\ge 2$，有 $|V(H_2)|\ge k-1$，它们的广义 Zykov k-和是超图 $H=H_1\oplus_k H_2$，其顶点集为 $V(H_1)\cup V(H_2)$，超边集为 $E(H_1)\cup E(H_2)\cup\{vw_1w_2\cdots w_{k-1}|v\in V(H_1)\ w_1,\cdots,w_{k-1}\in V(H_2)\}$。注意，广义 Zykov 2-和就是通常的 Zykov 和。对于 $k>2$，广义 Zykov k-和一般不满足交换律，即对于一般的超图 H_1,H_2，有 $H_1\oplus_k H_2\ne H_2\oplus_k H_1$。

现在，我们给出反正则 k-超图的形式化定义如下。

定义 1.1。对于 $k\ge 3$，反正则 k-超图可由以下递推关系定义，

$$\begin{aligned}&A_i=iK_1,1\le i\le k-1,\\&A_{n+2}=K_1\oplus_k\bar{A}_{n+1}=K_1\oplus_k(K_1\cup A_n),\text{or}\\&\bar{A}_{n+2}=K_1\cup A_{n+1}=K_1\cup(K_1\oplus_k\bar{A}_n),n\ge k-1,\end{aligned} \tag{4}$$

其中 K_1 是仅含一个孤立顶点的超图，iK_1 表示 i 个超图 K_1 的不交并，$1\le i\le k-1$ A_n 是 A_n 的补图。我们将 A_n 称为具有 n 个顶点的¯连通反正则 k- 超图，将 A_n 称为非连通的反正则超图。

与图情形类似，我们用0 表示添加一个孤立顶点（与其他顶点均不相连），用1 表示添加一个支配顶点（与其他 $k-1$顶点均相连）。那么，反正则 k-超图可以用以下二进制构造字符串表示，

$$\begin{aligned}&(k=3)\ \mathbf{000}101010\ldots\ \text{or}\ \mathbf{001}010101\ldots,\\&(k>3)\ 0[k]101010\ldots\ \text{or}\ 0[k-1]1010101\ldots,\end{aligned} \tag{5}$$

其中， $0[k]$ 表示一个含有 k 个零的字符串。如果反正则 k-超图的二进制构造串的最后一位是1，则该超图是连通的；否则，它是不连通的。更一般地，如果一个 k-超图能够按照某种顺序通过添加孤立顶点和支配顶点构造出来，我们就称它为 $\{0,1\}$-可构造的。

超图中一个顶点的顶点度是包含该顶点的超边数量。根据定义 1.1，前 k 个添加的顶点具有相同的顶点度。此外，从第 $(k+1)$ 个或第 $(k+2)$ 个添加的孤立顶点到最后一个顶点，它们的顶点度逐渐减小；而从第一个添加的支配顶点到最后一个支配顶点，它们的顶点度逐渐增大。因此，我们有以下命题。

命题 1.1。 一个反正则 k-超图中，只有 k 个顶点具有相同的顶点度。

证明。设 $b^n = 0[k-1]1010\ldots$ 是一个具有 n 个顶点的反正则 k-超图的二进制构造串 $(n \geq k)$（对于 $b^n = 0[k]1010\ldots$，证明方法类似）。我们将证明顶点度 d 满足

$$d(1) = \ldots = d(k) > d(i_1) > d(i_2) \tag{6}$$

对于任意孤立顶点 $k < i_1 < i_2$，以及

$$d(j_1) < d(j_2) \tag{7}$$

对于任意支配顶点 $j_1 < j_2$，通过对 n 使用归纳法。

若 $n=k$，则 $d(1) = \ldots = d(k) = 1$。若 $n=k+1$，则 $d(1) = \ldots = d(k) > d(k+1) = 0$。若 $n=k+2$，则 $d(i) = 1+\binom{k}{k-2}$，其中 $1 \leq i \leq k$，且 $d(k+1) = \binom{k}{k-2}$，$d(k+2) = \binom{k+1}{k-1}$。因此，$d(k-1) > d(k+1)$ 且 $d(k) < d(k+2)$。

假设 (6) 和 (7) 对 $n \leq m$ 成立。令 d'、d 分别为 b^m、b^{m+1} 的顶点度序列。若 $m+1$ 是一个孤立顶点，则 $d(m+1) = 0$，$d(i) = d'(i)$，其中 $1 \leq i \leq m$。因此，$d(m-1) > d(m+1)$。若 $m+1$ 是一个支配顶点，则 $d(m+1) = \binom{m}{k-1}$ 且 $d(i) = d'(i) + \binom{m-1}{k-2}$，其中 $1 \leq i \leq m$。因此，$d(m-1) = \binom{m-2}{k-1} + \binom{m-1}{k-2} < d(m+1)$。 □

在简单图中，独立集不包含任意两个相邻顶点，即不包含任何边。受此启发，超图$H=(V,E)$中的顶点子集 $W \subseteq V$称为独立集，如果W不包含任何超边，即 $\forall e \in E, e \nsubseteq W$。给定超图$H=(V,E)$，$H$的独立多项式 $I(H;x)$定义为 [13]

$$I(H;x) = \sum_{W \subseteq V \text{ is independent in } H} x^{|W|}. \tag{8}$$

对于 k-超图 H，任何大小小于 k 的顶点子集都不能包含超边，因此，$I(H;x)$中 x^i 的系数对于 $0 \leq i \leq k-1$ 为 $\binom{|V(H)|}{i}$，而 x^k 的系数为$\binom{|V(H)|}{k} - |E(H)|$。

本文的主要贡献如下。

• 我们推导出反正则 k-超图的独立多项式的递推关系（定理 2.2）及（半）闭式（定理 2.3、2.4）。

• 我们证明了反正则 k-超图的独立多项式是对数凹的（定理 3.2、3.4）。

• 证明了每个 $\{0,1\}$-可构造（包括反正则） k-超图都是 $T2$-阈值的（定理 4.3），这意味着存在顶点集的一个标记 c 和一个阈值 τ，使得对于任意基数为 k 的顶点子集 S，$\sum_{i \in S} c(i) > \tau$当且仅当$S$是超边。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，借助 Trinks 推导出的超图独立多项式的一般递推关系[13], ，我们给出反正则 k-超图的独立多项式递推关系，并进一步得到独立多项式的（半）闭式公式。在第 3 节中，通过对反正则 k-超图的顶点数进行归纳，我们证明反正则 k-超图的独立多项式是对数凹的。在第 4 节中，我们提出一种算法，并用它证明 $\{0,1\}$-可构造（包括反正则） k-超图是 $T2$-阈值的。结论将在下一节给出。

2. 独立多项式的闭式与半闭式。 给定一个超图$H=(V,E)$ 和一个顶点子集 $W\subseteq V$，我们定义以下超图操作:

- 删除 顶点 $w\in W$，记作 $\ominus W$，是指移除顶点 w及其关联的超边。
- 隐藏 顶点 $w\in W$，记作 $\sim W$，是指从顶点集 V及其关联的超边中移除顶点 w。

Trinks [13,定理 3]建立了超图独立多项式的以下递推关系。

引理 2.1. 设 $H=(V,E)$ 为一个超图，且 $v\in V$，则 H 的独立多项式$I(H;x)$ 满足

$$I(H;x)=\begin{cases} I(H_{\ominus v};x)+xI(H_{\sim v};x) & \text{if } \{v\}\notin E,\\ I(H_{\ominus v};x) & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{9}$$

根据反正则 k-超图的定义以及引理 2.1，现在我们可以具体推导出反正则 k-超图的独立多项式递推关系。

定理 2.2. 设 A_n 是一个具有 n 个顶点的反正则 k-超图，且 A_n 是 A_n, $n\geq 1$ 的补图，其独立多项式满足以下递推关系

$$\begin{cases} I(A_i;x)=(1+x)^i,\ 1\leq i\leq k-1,\\ I(\bar{A}_{n+1};x)=(1+x)I(A_n;x), \\ I(A_{n+2};x)=I(\bar{A}_{n+1};x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n+1}{i-1}x^i,\ n\geq k-1.\end{cases} \quad \text{or} \tag{10}$$

$$\begin{cases} I(A_i;x)=(1+x)^i,\ 1\leq i\leq k-1,\\ I(A_{n+1};x)=I(\bar{A}_n;x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n}{i-1}x^i,\\ I(\bar{A}_{n+2};x)=(1+x)I(A_{n+1};x),\ n\geq k-1.\end{cases} \tag{11}$$

证明。对于 $1\leq i\leq k-1$, $I(A_i;\ x)=I(iK_1;\ x)=(I(K_1;\ x))^i=(1+x)^i$。现在我们只证明 $A_{n+2}=K_1\oplus_k A_{n+1}=K_1\oplus_k(K_1\cup A_n)$ 的情形，另一种情形的证明类似。

由于 $\bar{A}_{n+1}=K_1\cup A_n$，我们有

$$\bar{A}_{n+1\ominus K_1}=\bar{A}_{n+1\sim K_1}=A_n.$$

由引理 2.1，可得

$$I(\bar{A}_{n+1};x)=I(\bar{A}_{n+1\ominus K_1};x)+xI(\bar{A}_{n+1\sim K_1};x)=(1+x)I(A_n;x).$$

由于 $A_{n+2}=K_1\oplus_k A_{n+1}$，我们有 $A_{n+2\ominus K_1}=A_{n+1}$ 且

$$I(A_{n+2\sim K_1};x)=\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n+1}{i}x^i,$$

这是因为，大小为 $k-1$ 的 $A_{n+2\sim K_1}$ 任一顶点子集都是一条超边。由引理2.1，可得

$$I(A_{n+2};x)=I(A_{n+2\ominus K_1};x)+xI(A_{n+2\sim K_1};x)=I(\bar{A}_{n+1};x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n+1}{i-1}x^i.$$

□

定理2.3。反正则3-超图 A_n 和 A_n的独立多项式可由以下闭式给出，

$$\begin{cases} I(A_{2n-1};x)=3(1+x)^n+(1+x)^{n-1}-2nx-3,\\ I(\bar{A}_{2n};x)=3(1+x)^{n+1}+(1+x)^n-(1+x)(2nx+3), \end{cases} \quad n\geq 1,\ or \tag{12}$$

$$\begin{cases} I(\bar{A}_{2n-1};x)=(1+x)^{n+1}+3(1+x)^n-(1+x)((2n-1)x+3),\\ I(A_{2n};x)=(1+x)^{n+1}+3(1+x)^n-(2n+1)x-3, \end{cases} \quad n\geq 1. \tag{13}$$

证明。我们只用12式关于 n 的归纳法证明该公式，另一个公式的证明类似。

若 $n=1$，则

$$I(A_1;x)=I(K_1;x)=1+x=3(1+x)+1-2x-3,$$
$$I(\bar{A}_2;x)=I(2K_1;x)=(1+x)^2=3(1+x)^2+1+x-(1+x)(2x+3).$$

假设公式（12）对 $n=1$、$\cdots$、m成立。
如果 $m+1=2s+1$，那么根据定理 2.2 和归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned} I(A_{2s+1};x)&=I(\bar{A}_{2s};x)+x(2sx+1)\\ &=3(1+x)^{s+1}+(1+x)^s-(1+x)(2sx+3)+x(2sx+1)\\ &=3(1+x)^{s+1}+(1+x)^s-2(s+1)x-3. \end{aligned}$$

如果 $m+1=2s+2$，再次利用定理 2.2 和归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned} I(\bar{A}_{2s+2};x)&=(1+x)I(A_{2s+1};x)\\ &=(1+x)\left(3(1+x)^{s+1}+(1+x)^s-2(s+1)x-3\right)\\ &=3(1+x)^{s+2}+(1+x)^{s+1}-(1+x)(2(s+1)x+3). \end{aligned}$$

因此，由归纳法可知该定理成立。 □

由上述定理可知，一旦给出独立多项式的公式，采用归纳法验证其正确性并不困难。下面，我们将直接由定理 k推导一般反正则超图的独立多项式公式。

定理 2.4. 反正则 k超图的独立多项式 A_n 和 A_n分别为（$n \geq \binom{k+1}{2}$ 时），

(14)

$$I(A_{2n-1};x)=\begin{cases}(1+x)^{n-1-\frac{k-1}{2}}\left[(1+x)^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k-1}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n-2}x^i\\ +\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-2}{i-1}x^i, \ \ k \text{ is odd},\\ (1+x)^{n-1-\frac{k}{2}}\left[(1+x)^{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n-2}x^i\\ +\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-2}{i-1}x^i, \ \ k \text{ is even},\end{cases}$$

(15)

$$I(\bar{A}_{2n};x)=\begin{cases}(1+x)^{n-\frac{k-1}{2}}\left[(1+x)^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k-1}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i, \ \ k \text{ is odd},\\ (1+x)^{n-\frac{k}{2}}\left[(1+x)^{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i, \ \ k \text{ is even},\end{cases}$$

其中$\{\alpha_i^{2n}\}$ 满足

(16)

$$\begin{cases}\alpha_0^{2n-2}-\alpha_0^{2n}=0,\\ \alpha_i^{2n-2}+\alpha_{i-1}^{2n-2}-\alpha_i^{2n}=\binom{2n-1}{i-1}, \ \ 1\leq i\leq k-1,\\ \alpha_{k-1}^{2n-2}=\binom{2n-2}{k-2}.\end{cases}$$

Or,

(17)

$$I(\bar{A}_{2n-1};x)=\begin{cases}(1+x)^{n-1-\frac{k-1}{2}}\left[(1+x)^{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{k}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{2n-1}x^i, \ \ k \text{ is odd},\\ (1+x)^{n-\frac{k}{2}}\left[(1+x)^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{k-1}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{2n-1}x^i, \ \ k \text{ is even},\end{cases}$$

(18)

$$I(A_{2n};x)=\begin{cases}(1+x)^{n-1-\frac{k-1}{2}}\left[(1+x)^{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{k}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{2n-1}x^i\\ +\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-1}{i-1}x^i, \ \ k \text{ is odd},\\ (1+x)^{n-\frac{k}{2}}\left[(1+x)^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{k-1}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i^{2n-1}x^i\\ +\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-1}{i-1}x^i, \ \ k \text{ is even},\end{cases}$$

其中 $\{\beta_i^{2n}\}$满足

(19)

$$\begin{cases}\beta_0^{2n-1}-\beta_0^{2n+1}=0,\\ \beta_i^{2n-1}+\beta_{i-1}^{2n-1}-\beta_i^{2n+1}=\binom{2n}{i-1}, \ \ 1\leq i\leq k-1,\\ \beta_{k-1}^{2n-1}=\binom{2n-1}{k-2}.\end{cases}$$

证明。我们仅给出公式（15），而（14）可由（15）以及 $I(A_{2n-1};x)$ $=I(\bar{A}_{2n-2};x)$ $+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-2}{i-1}x^i$ 直接得到。（17）和（18）的证明类似。由定理 2.2，可得

(20)

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)&=(1+x)I(A_{2n-1};x)\\ &=(1+x)\left[I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-2}{i-1}x^i\right]\\ &=(1+x)I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-1}{i-1}x^i+\binom{2n-2}{k-2}x^k,\end{aligned}$$

其中用到了公式 $\binom{2n-2}{i-1}+\binom{2n-2}{i-2}=\binom{2n-1}{i-1}$。

假设

$$I(\bar{A}_{2n};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i=(1+x)\left[I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n-2}x^i\right], \tag{21}$$

这意味着

(22)

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)&=(1+x)I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\alpha_i^{2n-2}-\alpha_i^{2n}\right)x^i+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i-1}^{2n-2}x^i\\&=(1+x)I(\bar{A}_{2n-2};x)+\alpha_0^{2n-2}-\alpha_0^{2n}+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\alpha_i^{2n-2}+\alpha_{i-1}^{2n-2}-\alpha_i^{2n}\right)x^i+\alpha_{k-1}^{2n-2}x^k.\end{aligned}$$

通过比较（20）和（22），我们发现$\{\alpha_i^{2n}\}$ 满足关系式（16）。若 k 为奇数,

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i&=(1+x)\left[I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n-2}x^i\right]\\&=(1+x)^{n-\frac{k-1}{2}}\left[I(\bar{A}_{k-1};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k-1}x^i\right].\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I(\bar{A}_{2n};x)=(1+x)^{n-\frac{k-1}{2}}\left[(1+x)^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k-1}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i.$$

若 k 为偶数,

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i&=(1+x)\left[I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n-2}x^i\right]\\&=(1+x)^{n-\frac{k}{2}}\left[I(\bar{A}_{k};x)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k}x^i\right].\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I(\bar{A}_{2n};x)=(1+x)^{n-\frac{k}{2}}\left[(1+x)^{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{k}x^i\right]-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{2n}x^i.$$

□

尽管对于较小的 k，求解代数方程（16）和（19）并不困难，但对于一般的 k，写出 α_i^{2n}和β_i^{2n+1}的闭式表达式会非常繁琐。现在我们针对 $k=2$ 和 $k=3$验证定理2.4。

对于 $k=2$，求解（16），

$$\begin{cases}\alpha_0^{2n-2}-\alpha_0^{2n}=0\\ \alpha_1^{2n-2}+\alpha_0^{2n-2}-\alpha_1^{2n}=1\\ \alpha_1^{2n-2}=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_0^{2n}=1,\\ \alpha_1^{2n}=1.\end{cases}$$

于是，根据（15），我们有

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)&=(1+x)^{n-1}\left[(1+x)^2+\alpha_0^2+\alpha_1^2x\right]-\alpha_0^{2n}-\alpha_1^{2n}x\\&=(1+x)^{n+1}+(1+x)^n-x-1,\end{aligned}$$

这也已在 [10,定理 26]中推导出。

对于 $k=3$，求解（16）

$$\begin{cases} \alpha_0^{2n-2}-\alpha_0^{2n}=0 \\ \alpha_1^{2n-2}+\alpha_0^{2n-2}-\alpha_1^{2n}=1 \\ \alpha_2^{2n-2}+\alpha_1^{2n-2}-\alpha_2^{2n}=2n-1 \\ \alpha_2^{2n-2}=2n-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0^{2n}=3, \\ \alpha_1^{2n}=2n+3, \\ \alpha_2^{2n}=2n. \end{cases}$$

那么，由（15），可得

$$\begin{aligned} I(\bar{A}_{2n};x) &= (1+x)^{n-1}\left[(1+x)^2+\alpha_0^2+\alpha_1^2x+\alpha_2^2x^2\right]-\alpha_0^{2n}-\alpha_1^{2n}x-\alpha_2^{2n}x^2 \\ &= 3(1+x)^{n+1}+(1+x)^n-(1+x)(2nx+3), \end{aligned}$$

这与定理2.3一致。

3. 独立多项式的对数凹性。实数有限序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为对数凹，如果$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$对于 $i=2,3,\cdots,n-1$。若一个多项式的系数序列是对数凹的，则称该多项式对数凹。两个对数凹多项式的乘积也是对数凹的 [9]。本节将证明，反正则 k-超图的独立多项式是对数凹的。

令$A(G)$为A_n（个含有 n 个顶点的连通（非连通）反正则 k-超图。设其独立多项式为

$$I(G;x)=\sum_{i=0}^{m}a_i^n x^i, \tag{23}$$

其中 m 是最大独立集的大小。由于大小小于k 的任何顶点子集都不可能包含超边，因此我们有

$$a_i^n=\binom{n}{i}, i=0,1,\cdots,k-1. \tag{24}$$

接下来，我们先考察反正则3-超图的独立多项式的对数凹性，再考察反正则 k-超图的对数凹性。证明的核心策略是对反正则超图的顶点数进行归纳。

引理 3.1. 反正则3-超图 A_{2n} 的独立多项式 $I(\bar{A}_{2n};x)$ 的系数 a_3^{2n}和 a_4^{2n}为

$$a_3^{2n}=\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1),\quad a_4^{2n}=\frac{1}{6}n^2(n-1)(n-2). \tag{25}$$

证明。由（12），我们得到

$$\begin{aligned} a_3^{2n} &= 3\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}=\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1), \\ a_4^{2n} &= 3\binom{n+1}{4}+\binom{n}{4}=\frac{1}{6}n^2(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

□

定理 3.2. 反正则3-超图 A_n 和 A_n的独立多项式是对数凹的。

证明。容易看出， $I(A_1;x)=1+x$ 和 $I(A_2;x)=(1+x)^2$ 是对数凹的。设 $I(A_i;x)$ 和 $I(A_i;x)$ 在 $i=1,2,\cdots,m$ 时均为对数凹。现在我们证明 $I(A_{m+1};x)$ 和 $I(A_{m+1};x)$ 是对数凹的。

若 $m+1=2n$，由定理 2.2，$I(A_{2n};x)=(1+x)I(A_{2n-1};x)$ 是对数凹的，因为两个对数凹多项式的乘积也是对数凹的。

若 $m+1=2n+1$，由定理 2.2，

$$I(A_{2n+1};x)=I(A_{2n};x)+x(2nx+1),$$

这意味着

$$a_i^{2n+1}=a_i^{2n},\quad i\geq 3.$$

由于 $I(A_{2n};x)$ 是对数凹的，因此对于 $i\geq 4$,

$$(a_i^{2n+1})^2-a_{i-1}^{2n+1}a_{i+1}^{2n+1}=(a_i^{2n})^2-a_{i-1}^{2n}a_{i+1}^{2n}\geq 0.$$

注意，由于式（$(a_1^{2n+1})^2-a_0^{2n+1}a_2^{2n+1}>0$ （24），因此我们只需检验$(a_i^{2n+1})^2-a_{i-1}^{2n+1}a_{i+1}^{2n+1}$对于 $i=2,3$的非负性。

由引理3.1 和（24），

$$\begin{aligned}(a_2^{2n+1})^2-a_1^{2n+1}a_3^{2n+1}&=\left(\binom{2n+1}{2}\right)^2-\binom{2n+1}{1}\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(8n+1)>0,\\(a_3^{2n+1})^2-a_2^{2n+1}a_4^{2n+1}&=\left(\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)\right)^2-\binom{2n+1}{2}\frac{1}{6}n^2(n-1)(n-2)\\&=\frac{1}{36}n^2(n-1)(n+1)(4n^2+6n-1)\geq 0\end{aligned}$$

因此，我们通过归纳法完成了这个证明。 □

引理 3.3. 独立多项式 $I(\bar{A}_{2n};x)$的系数 a_k^{2n}和 a_{k+1}^{2n}，其中该多项式对应反正则 k-超图 A_{2n}，由下式给出

$$a_k^{2n}=\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n}\binom{2i-1}{k-1},\quad a_{k+1}^{2n}=\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}(n-i).\tag{26}$$

证明。由定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}I(\bar{A}_{2n};x)&=(1+x)I(A_{2n-1};x)\\&=(1+x)\left[I(\bar{A}_{2n-2};x)+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-2}{i-1}x^i\right]\\&=(1+x)I(\bar{A}_{2n-2};x)+\binom{2n-2}{k-2}x^k+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{2n-1}{i-1}x^i.\end{aligned}\tag{27}$$

由（27），我们得到递推关系

$$a_k^{2n}=a_k^{2n-2}+a_{k-1}^{2n-2}+\binom{2n-2}{k-2}=a_k^{2n-2}+\binom{2n-1}{k-1},\tag{28}$$

这里我们用到了（24）和 $\binom{2n-2}{k-1}+\binom{2n-2}{k-2}=\binom{2n-1}{k-1}$。通过对（28）使用归纳法，我们得到

w

$$a_k^{2n}=\begin{cases}a_k^{k+1}+\sum_{i=\frac{k+3}{2}}^{n}\binom{2i-1}{k-1}, & k\text{ is odd}\\a_k^{k}+\sum_{i=\frac{k+2}{2}}^{n}\binom{2i-1}{k-1}, & k\text{ is even}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{n} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is odd} \\ \sum_{i=\frac{k}{2}}^{n} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is even} \end{cases}$$

$$= \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{n} \binom{2i-1}{k-1}.$$

类似地，由（27），我们得到

$$a_{k+1}^{2n} = a_{k+1}^{2n-2} + \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{n-1} \binom{2i-1}{k-1}$$

$$= \begin{cases} a_{k+1}^{k+3} + \sum_{i=\frac{k+3}{2}}^{n-1} \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{j} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is odd} \\ a_{k+1}^{k+2} + \sum_{i=\frac{k+2}{2}}^{n-1} \sum_{i=\frac{k}{2}}^{j} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is even} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{n-1} \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^{j} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is odd} \\ \sum_{i=\frac{k}{2}}^{n-1} \sum_{i=\frac{k}{2}}^{j} \binom{2i-1}{k-1}, & k \text{ is even} \end{cases}$$

$$= \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{n-1} \binom{2i-1}{k-1}(n-i).$$

□

定理 3.4. 反正则 k-超图 A_n 和 A_n的独立多项式是对数凹的。

证明。显然， $I(A_i;x) = (1+x)^i$ 对于 $1 \le i \le k-1$是对数凹的。假设对于 $i = 1, 2, \cdots, m$ ($m \ge k-1$)， $I(A_i;x)$ 和 $I(A_i; x)$ 是对数凹的。现在我们证明 $I(A_{m+1}; x)$ 和 $I(A_{m+1};x)$ 是对数凹的。

如果 $m+1 = 2n$，根据定理 2.2，$I(A_{2n};x)$是对数凹的，因为两个对数凹多项式的乘积也是对数凹的。

若 $m+1 = 2n+1$，由定理 2.2，

$$I(A_{2n+1};x) = I(\bar{A}_{2n};x) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2n}{i-1} x^i,$$

这意味着

$$a_i^{2n+1} = a_i^{2n}, \ i \ge k.$$

Denote $F_i^{2n+1} := (a_i^{2n+1})^2 - a_{i-1}^{2n+1} a_{i+1}^{2n+1}$。由于 $I(\bar{A}_{2n}; x)$是对数凹的，因此对于 $i \ge k+1$，

$$F_i^{2n+1} = (a_i^{2n})^2 - a_{i-1}^{2n} a_{i+1}^{2n} \ge 0.$$

注意，由于 (24)， $F_i^{2n+1} \ge 0$ 对于 $1 \le i \le k-2$，因此我们只需检查 F_i^{2n+1}对于 $i = k-1$， k 的非负性。

根据引理 3.3 和（24），

$$F_{k-1}^{2n+1} = \left(\binom{2n+1}{k-1} \right)^2 - \binom{2n+1}{k-2} a_k^{2n}$$

$$> \left(\binom{2n+1}{k-1} \right)^2 - \binom{2n+1}{k-2} \binom{2n+1}{k} \ge 0.$$

$$
\begin{aligned}
F_k^{2n+1} &= \left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n}\binom{2i-1}{k-1}\right)^2 - \binom{2n+1}{k-1}\left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}(n-i)\right)\\
&\geq \left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n}\binom{2i-1}{k-1}\right)^2 - \binom{2n+1}{k-1}\left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}(n-i)\right)\\
&= \left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n}\binom{2i-1}{k-1}\right)^2 - \binom{n+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}{2}\binom{2n+1}{k-1}\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}\\
&= \left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}\right)^2 + \left(2\binom{2n-1}{k-1} - \binom{n+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}{2}\binom{2n+1}{k-1}\right)\times\\
&\quad \sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1} + \left(\binom{2n-1}{k-1}\right)^2 =: \tilde{F}.
\end{aligned}
$$

我们注意到，$\tilde{F}$是 $\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1}$ 的二次型，而这个二次型

$$
r^2 + \left(2\binom{2n-1}{k-1} - \binom{n+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}{2}\binom{2n+1}{k-1}\right)r + \left(\binom{2n-1}{k-1}\right)^2
$$

有两个正根，

$$
r_{\pm} = \frac{1}{2}\left(m - 2 \pm \sqrt{m^2-4m}\right)\binom{2n-1}{k-1},
$$

其中 $m = \frac{2n}{(2n+1)}\frac{(2n-k+1)}{(2n-k+2)}\binom{n+1-\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}{2}$。根据归纳假设，$F_k^{2n-1} \geq 0$给出

$$
\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-1}\binom{2i-1}{k-1} \geq \binom{2n-1}{k-1}\left(\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-2}\binom{2i-1}{k-1}(n-1-i)\right).
$$

对于 $n \geq \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor + 3$,

$$
\sum_{i=\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{n-2}\binom{2i-1}{k-1}(n-1-i) \geq m,
$$

这是因为左侧至少为 $O(n^3)$，而右侧为 $O(n^2)$。因此，$\tilde{F} \geq 0$，这意味着 $F_k^{2n+1} \geq 0$。对于 $n = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor + 1$ 或 $n = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor + 2$，通过直接计算可得

$$
\begin{aligned}
F_k^{2\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+3} &= \begin{cases} \frac{k^2}{360}\left(7k^4+30k^3+145k^2+330k+568\right), & k \text{ is odd} \\ \frac{1}{24}\left(5k^4+6k^3+19k^2+18k+24\right), & k \text{ is even} \end{cases}\\
&> 0,\\
F_k^{2\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+5} &= \begin{cases} \frac{11}{302400}k^{10}+\ldots, & k \text{ is odd} \\ \frac{1}{960}k^8+\ldots, & k \text{ is even} \end{cases}\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

因此，我们通过归纳法完成了该证明。 □

4. 反正则超图的阈值 k。Chvátal 和 Hammer [3]将阈值图定义为具有以下性质的图：若简单图 $G=(V,E)$ 存在 c 的一个标记和一个阈值 τ，使得 $X\subseteq V$ 是稳定集[1]，即当且仅当 $\sum_{x\in X}c(x)\leq\tau$ 时， X 中任意两个顶点都不相邻，则称该图为阈值图。请注意，阈值图有几种等价的定义，读者可参阅 [4, 5, 7]。Golumbic [5] 建议将阈值图的概念推广到阈值超图，并研究其性质。本节旨在说明，反正则 k-超图以及一类更广泛的超图—— $\{0,1\}$-可构造的 k-超图——都是 $T2$-阈值的。

回顾 Golumbic [5] 提出的阈值超图定义。

定义 4.1. 设 $H=(V,E)$ 为一个 k-超图，我们考虑以下性质：

(T1) 存在 c 的一个标记和一个阈值 τ，使得对于任意顶点子集 $X\subseteq V$，X 包含一条超边，当且仅当 $\sum_{x\in X}c(x)>\tau$。

(T2) 存在 c' 的一个标记和一个阈值 τ'，使得对于任意大小为 k的顶点子集$X'\subseteq V$， $X'\in E$ 当且仅当 $\sum_{x\in X'}c'(x)>\tau'$。

(T3) 对于 $x,y\in V$，若 x 可在任意超边中替换为 y，即对于任意$\{x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}\}\in|V\setminus\{x,y\}|^{k-1}$，$\{x,x_1,\ldots,x_{k-1}\}\in E\implies\{y,x_1,\ldots,x_{k-1}\}\in E$，则定义 $x\ll y$。那么，对于任意 $x,y\in V$， $x\ll y$或 $y\ll x$ 至少有一个成立。

超图 H称为 Ti-阈值 超图，若其满足 (Ti)，其中 $i=1,2,3$。

容易看出，对于 $k=2$，$(T1)\implies(T2)\implies(T3)$及其逆命题均成立。然而，对于 $k\geq3$，$(T3)\implies(T2)$和$(T2)\implies(T1)$均不成立。一些反例如 [5, 12]所示。

定义 4.2. 若一个 k-超图可以按某种顺序，通过添加一个孤立顶点（与其他顶点均不相连）和添加一个支配顶点（与其他所有 $k-1$ 顶点均相连）这两种操作构造而成，则称其为 $\{0,1\}$-可构造的。

并非所有 k-超图都是 $\{0,1\}$-可构造的。例如，3-超图 $H=([6],\{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{1,5,6\}\})$就不是 $\{0,1\}$-可构造的，其中 $[6]=\{1,2,\ldots,6\}$。显然，所有反正则 k-超图都是 $\{0,1\}$-可构造的。图1 展示了两个 $\{0,1\}$-可构造的3-超图示例，其二进制构造字符串分别为001101和00101（反正则）。

为简单起见，我们用 b^n 表示具有 n 个顶点的 $\{0,1\}$-可构造 k-超图的二进制构造串，用 c 表示 b^n的标记，用 b^n_i表示 b^n $(1\leq i\leq n)$ 的第 i位， $b^{n,j}:=\{i\in[n]|b^n_i=j\}$ 所有孤立顶点（$j=0$）或支配顶点（$j=1$）的集合， $b^{n,j}_m$ b^n中最后的 m 个顶点，即

$$b^{n,j}_m:=\{i_1,i_2,\ldots,i_m\in b^{n,j}|\ i_1<i_2<\cdots<i_m=\max b^{n,j},\\ \forall s\in(i_1,i_m)\setminus\{i_2,\ldots,i_{m-1}\},b^n_s=1-j\},j=0,1,$$

$b^{n,0}_{c,m}$ 中取值最小的子集，即，

$$b^{n,0}_{c,m}:=\{i_1,i_2,\ldots,i_m\in b^{n,0}|\ c(i_1)\leq c(i_2)\leq\cdots\leq c(i_m),\\ \forall s\in b^{n,0}\setminus\{i_1,\ldots,i_m\},c(s)\geq c(i_m)\}.$$

[1]现在通常称为独立。

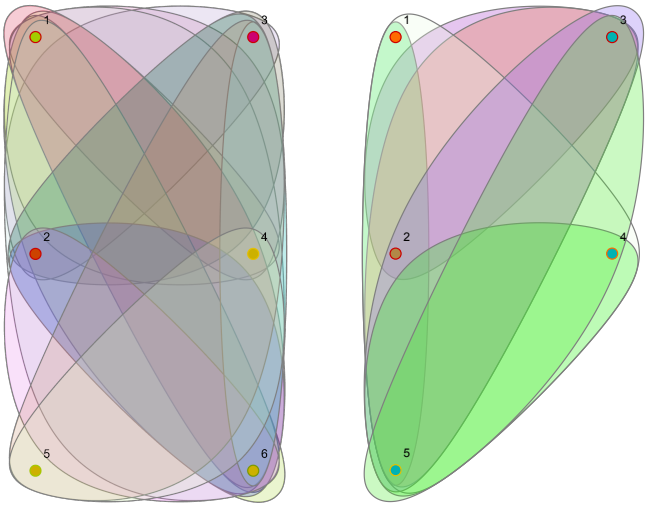

图 1。分别对应二进制构造串 001101 （左）和 00101 （右）的两个 $\{0,1\}$-可构造 3-超图。

例如，设 $b^9 = 001010001$，其中 $c = [32,32,48,24,56,4,6,7,102]$，则 $b^{7,\ 0} = \{1,2,4,6,7,8\}$，$b^{7,\ 1} = \{3,5,9\}$，$b^{7,\ 3^0} = \{6,7,8\}$，$b^{7,\ 2^1} = \{5,9\}$，$b^{7,\ c^{0},\ 2} = \{6,7\}$。

现在我们概述如下定义 $\{0,1\}$-可构造k-超图的标记和阈值的算法。

Algo算法 1 为 $\{0,1\}$-可构造 k-超图构造标签和阈值

要求： b^n 可构造 $\{0,1\}$-超图的二进制构造串，具有 k-超图 n 个顶点（$n \geq k \geq 2$）**确保：** 一个标记 $c : [n] \to \mathbb{Z}$ 和一个阈值 $\tau \in \mathbb{Z}$

假设 b^n 的前 s 个比特为 0，并且 $b^n_{s+1} = 1$，其中 $s \geq k-1$。

- 如果 $b^n = 0[s]1$，我们将标记 $c : [n] \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$c(i) = \begin{cases} 2, & \text{if } 1 \leq i < n \\ 3, & \text{if } i = n \end{cases} \tag{29}$$

并设定阈值 $\tau = 2k$。

令 b^m 表示 b^n 在前 m 个比特上的限制，$c' : [m] \to \mathbb{Z}$，并令 τ' 表示其标记和阈值。设 $m = s+1$，并继续执行以下两个步骤，直到 $m+1 = n$。

- 如果 $b^n_{m+1} = 1$，则我们将新的标记 $c : [m+1] \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$c(i) = \begin{cases} c'(i), & \text{if } 1 \leq i \leq m \\ \tau' + 1 - \sum_{j \in b^{m,0}_{c',k-1}} c'(j), & \text{if } i = m+1 \end{cases} \tag{30}$$

并设定新的阈值 $\tau = \tau'$。

- 如果 $b^n_{m+1} = 0$，则我们将新的标记 $c : [m+1] \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$c(i) = \begin{cases} 2c'(i), & \text{if } 1 \leq i \leq m \\ 2\tau' + 1 - \sum_{j \in b^{m,1}_{k-1}} 2c'(j), & \text{if } i = m+1 \text{ and } |b^{m,1}| \geq k-1 \\ 2\tau' + 1 - \sum_{j \in b^{m,1}} 2c'(j) - \sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|} 2c'(j), & \text{if } i = m+1 \text{ and } |b^{m,1}| < k-1 \end{cases} \tag{31}$$

并设定一个新的阈值 $\tau = 2\tau' + 1$。

接下来，我们将证明，算法 1 中定义的标记和阈值 $\{0,1\}$-可构造 k-超图可以使其成为 $T2$ 可阈值化的。

定理4.3. 所有 $\{0,1\}$-可构造的 k-超图都是 $T2$-阈值的，因此它们也是 $T3$-阈值的。因此，所有反正则 k-超图都是 $T2$-阈值和 $T3$-阈值的。

证明。根据算法 1 中的（29），容易验证 $b^n = 0[s]1$ 是 $T2$-阈值的。

假设 b^n 是 $T2$-阈值的，其中 $n \le m$。我们假设 b^m 的标记和阈值分别为 c'和 τ'，并通过算法1构造新的标记 c 和阈值 τ，其中 b^{m+1}。现在我们证明 b^{m+1} 关于 c和 τ是 $T2$-阈值的。

设 $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\,(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ 为大小为 k 的顶点子集。

情形 I: $b^{m+1}_{m+1} = 1$

(a) 若 $i_k < m+1$，则根据归纳假设和（30），

$$\sum_{j=1}^{k} c(i_j) = \sum_{j=1}^{k} c'(i_j) > \tau' = \tau \iff S \text{ is a hyperedge.}$$

(b) 若 $i_k = m+1$，则 S是一个超边。根据引理4.4,

$$\sum_{j=1}^{k} c(i_j) \ge c(m+1) + \sum_{j \in b^{m,0}_{c',k-1}} c'(j) = \tau' + 1 > \tau' = \tau.$$

情形 II: $b^{m+1}_{m+1} = 0$

(a) 若 $i_k < m+1$，则由归纳假设和 (31),

$$\sum_{j=1}^{k} c(i_j) = 2\sum_{j=1}^{k} c'(i_j) \ge 2(\tau'+1) = \tau + 1 > \tau \iff S \text{ is a hyperedge.}$$

(b) 若 $i_k = m+1$，则 S是一个非超边。由引理 4.4,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} c(i_j) &\le \begin{cases} c(m+1) + 2\sum_{j \in b^{m,1}_{k-1}} c'(j), & \text{if } |b^{m,1}| \ge k-1 \\ c(m+1) + 2\sum_{j \in b^{m,1}} c'(j) + 2\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|} c'(j), & \text{if } |b^{m,1}| < k-1 \end{cases} \\ &= 2\tau' + 1 = \tau.\end{aligned}$$

由此，我们完成了证明。 □

设 b^n 是一个 $\{0,1\}$-可构造超图的二进制构造串。若一个区间 $[i_1, i_2](1 \le i_1 \le i_2 \le n)$ 满足 $b^n_j = i$ 对于 $i_1 \le j \le i_2$ 和 $b^n_{i_1-1} = b^n_{i_2+1} = 1-i$（若 $i_1 - 1 \ge 1$ 和/或 $i_2 + 1 \le n$），其中 $i = 0,\ 1$，则称其为一个 i-区间 。此外，若 $i_1 = i_2$，则称 $[i_1, i_2]$ 为平凡的，否则称其为非平凡的。例如，$b^n = 00110001011$，其0-区间为 $[1,2], [5,7], [9,9]$（平凡的），而1-区间为 $[3,4], [8,8]$（平凡的）、$[10,11]$。

引理 4.4. 设 c 和 τ分别为按算法*1*构造的 b^n 的标记和阈值，其中 $[1,s]\,(s \ge k-1)$ 是 b^n 的一个 0- 区间。

(1) 设 $[i_1, i_2]$ 和 $[i_3, i_4]\,(i_2 < i_3)$ 是 b^n的任意两个1-区间，$[i_5, i_6]$ 是 b^n的任意一个非平凡的1-区间，则

$$c(i) < c(j), \quad \textit{if } i \in [i_1, i_2], j \in [i_3, i_4] \tag{32}$$

$$c(i) = c(j), \quad \textit{if } i, j \in [i_5, i_6], i < j \tag{33}$$

也就是说，从左到右，不同1区间中的顶点标签递增，而同一1区间中的顶点标签保持不变。

(2) 设 $[i_1,i_2]$ 和 $[i_3,i_4]\,(i_1>s,i_2<i_3)$ 是 b^n 的任意两个0区间，$[i_5,i_6]$ 是 b^n 的任意非平凡0区间，则

$$c(i)=c(j),\ \textit{if}\ i,j\in[1,s] \tag{34}$$

$$c(i)>c(j),\ \textit{if}\ i\in[i_1,i_2],j\in[i_3,i_4] \tag{35}$$

$$c(i)<c(j),\ \textit{if}\ i,j\in[i_5,i_6],i<j \tag{36}$$

也就是说，从左到右，对于不同0区间中的顶点，标签递减；对于同一0区间中的顶点，标签递增，$[1,s]$除外。

因此，支配顶点的标签总是大于孤立顶点的标签。

证明。（1）令 $b^{m+2}=0[s]1\ldots011$ 为 b^n、c^l、τ^l 所生成的标记和阈值，其中1 是算法，用于 $b^{m+l},l=0,1,2$。则

$$\begin{aligned}c^2(m+2)&=\tau^1+1-\sum_{j\in b^{m+1,0}_{c^1,k-1}}c^1(j)\\&=\tau^0+1-\sum_{j\in b^{m,0}_{c^0,k-1}}c^0(j)\\&=c^1(m+1)=c^2(m+1).\end{aligned}$$

因此，（33）由归纳法成立。

令 $b^{m+3}=0[s]1\ldots101$ 为 $b^n,c^l,\ \tau^l$ 所生成的标记和阈值，其中算法 1 用于 $b^{m+l},l=0,1,2,3$。则

$$\begin{aligned}c^3(m+3)&=\tau^2+1-\sum_{j\in b^{m+2,0}_{c^2,k-1}}c^2(j)\\&>2\tau^1+2-\sum_{j\in b^{m,0}_{c^1,k-1}}2c^1(j)\\&=2\tau^0+2-\sum_{j\in b^{m,0}_{c^1,k-1}}2c^0(j)\\&=2c^0(m+1)=c^3(m+1).\end{aligned}$$

因此，(32) 由归纳法得出。

(2) (34) 可由 (29) 得出，并且前 s 个比特的标签在算法 1 的所有迭代中要么保持不变，要么同时加倍。

令 $b^{m+2}=0[s]1\ldots100$ 为 $b^n,c^l,\ \tau^l$ 是算法 1 针对 $b^{m+l},l=0,1,2$生成的标记和阈值。于是

$$\begin{aligned}c^2(m+2)&=\begin{cases}2\tau^1+1-\sum_{j\in b^{m+1,1}_{k-1}}2c^1(j), & \text{if } |b^{m+1,1}|\geq k-1\\ 2\tau^1+1-\sum_{j\in b^{m+1,1}}2c^1(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m+1,1}|}2c^1(j), & \text{if } |b^{m+1,1}|<k-1\end{cases}\\&=\begin{cases}4\tau^0+3-\sum_{j\in b^{m,1}_{k-1}}4c^0(j), & \text{if } |b^{m,1}|\geq k-1\\ 4\tau^0+3-\sum_{j\in b^{m,1}}4c^0(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|}4c^0(j), & \text{if } |b^{m,1}|<k-1\end{cases}\\&>\begin{cases}2(2\tau^0+1-\sum_{j\in b^{m,1}_{k-1}}2c^0(j)), & \text{if } |b^{m,1}|\geq k-1\\ 2(2\tau^0+1-\sum_{j\in b^{m,1}}2c^0(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|}2c^0(j)), & \text{if } |b^{m,1}|<k-1\end{cases}\\&=2c^1(m+1)=c^2(m+1).\end{aligned}$$

因此，由归纳法可得式（36）成立。

令 $b^{m+3}=0[s]1\ldots010$ 为由算法 Algorithm 1 针对 $b^{m+l}, l=0,\ 1,\ 2,\ 3$生成的 b^n、c^l、τ^l标记和阈值的限制。则

$$
\begin{aligned}
c^3(m+3) &= \begin{cases} 2\tau^2+1-\sum_{j\in b_{k-1}^{m+2,1}} 2c^2(j), & \text{if } |b^{m+2,1}|\geq k-1 \\ 2\tau^2+1-\sum_{j\in b^{m+2,1}} 2c^2(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m+2,1}|} 2c^2(j), & \text{if } |b^{m+2,1}|<k-1 \end{cases} \\
&< \begin{cases} 2\tau^1-\sum_{j\in b_{k-1}^{m+1,1}} 2c^1(j), & \text{if } |b^{m+1,1}|\geq k-1 \\ 2\tau^1-\sum_{j\in b^{m+1,1}} 2c^1(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m+1,1}|} 2c^1(j), & \text{if } |b^{m,1}|<k-1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4\tau^0+2-\sum_{j\in b_{k-1}^{m,1}} 4c^0(j), & \text{if } |b^{m,1}|\geq k-1 \\ 4\tau^0+2-\sum_{j\in b^{m,1}} 4c^0(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|} 4c^0(j), & \text{if } |b^{m,1}|<k-1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2(2\tau^0+1-\sum_{j\in b_{k-1}^{m,1}} 2c^0(j)), & \text{if } |b^{m,1}|\geq k-1 \\ 2(2\tau^0+1-\sum_{j\in b^{m,1}} 2c^0(j)-\sum_{j=1}^{k-1-|b^{m,1}|} 2c^0(j)), & \text{if } |b^{m,1}|<k-1 \end{cases} \\
&= 2c^1(m+1)=c^3(m+1).
\end{aligned}
$$

因此，(35) 可由归纳法得出。 □

由于反正则k超图的二进制构造字符串 b^n 中不存在非平凡的1区间，支配顶点的标签递增。除 b^n 中的一个非平凡0区间外，孤立顶点的标签随后递减。

示例 1：给定一个 $\{0,1\}$-可构造 3-超图$b^{13}=0010100011101$，通过执行算法 1，我们得到标记

$$c=[64,64,96,48,112,8,12,14,204,204,204,-185,401]$$

以及阈值 $\tau=223$。

给定一个反正则 3-超图 $b^{13}=0010101010101$，通过执行算法 1，我们得到标记

$$c=[64,64,96,48,112,8,168,-60,276,-222,506,-559,1005]$$

以及阈值 $\tau=223$。不难看出，这些结果与引理 4.4一致。

阈值图是 $\{0,1\}$-可构造的 [2], 然而， $T2$-阈值 k-超图并不总是 $\{0,1\}$-可构造的。下面的例子说明了这一点。

例2. 设 $H=(V,E)$ 是一个4-超图，其中顶点集为 $V=\{w,-2,-1,0,1,2\}$，超边集为 $E=\{\{w\}\cup\{x_1,x_2,x_3\}|\ \sum_{i=1}^3 x_i>0\}$。通过定义标记$c:\ V\to\mathbb{Z}$,

$$c(v)=\begin{cases} 10, & v=w, \\ v, & v\in\{-2,-1,0,1,2\} \end{cases}$$

并设定阈值 $\tau=10$，我们可以轻易验证 H 是 $T2$-阈值的。

假设 H 是 $\{0,1\}$-可构造的。令 b^6 为其二进制构造串，则其最开始的三个比特必须是000。由于 H 具有4 条超边，即，

$$E=\{\{w,-2,1,2\},\{w,-1,0,2\},\{w,-1,1,2\},\{w,0,1,2\}\},$$

b^6 的最后三位比特只能是010。因此， $b^n=000010$的顶点度序列为(3，3，3，3，4，0)，这与 H的顶点度序列(4，1，2，2，3，4)相矛盾。

反正则图的独立多项式在阈值图这一类图中是唯一的。然而，据作者所知，反正则 k-超图的独立多项式在 $T2$-阈值 k-超图这一类图中是否唯一确定，尚不得而知。以下示例表明，两个不同构的k-超图可以具有相同的独立多项式。

例 3. 设

$$H_1 = ([5], \{\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}),$$
$$H_2 = ([5], \{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3,5\},\{3,4,5\}\})$$

是两个 3-超图（见图 2），其中 $[5] = \{1,2,\ldots,5\}$。那么，它们的顶点度序列分别为 $[1,2,2,3,4]$ 和 $[2,2,4,2,2]$, , 这意味着 H_1 和 H_2 不同构。尽管如此， H_1 和 H_2 具有相同的独立多项式,

$$I(H_1;x) = I(H_2;x) = 1 + 5x + 10x^2 + 6x^3 + x^4.$$

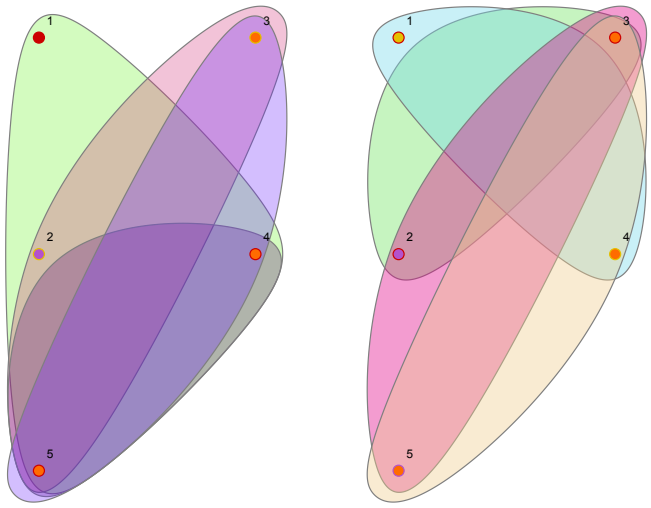

图 2 。两个不同构的3-超图 H_1 （左）和 H_2 （右）具有相同的独立多项式 *l.*

在此例中， H_1 是 $T2$-阈值的；通过定义标记 c_1 : $[5] \to \mathbb{Z}$ 为 $c_1 = [-2,-1,0,1,2]$ 并设定阈值 $\tau_1 = 0$，即可验证这一点。然而， H_2并非 $T2$-阈值的，原因如下。假设相对于标记 c_2 和阈值 τ_2， H_2 是 $T2$-阈值的。由于 $\{1,3,4\}$ 是超边，而 $\{2,3,4\}$不是，因此我们有

$$c_2(1) + c_2(3) + c_2(4) > \tau_2, \quad c_2(2) + c_2(3) + c_2(4) \le \tau_2,$$

这表明 $c_2(1) > c_2(2)$。由于 $\{2,3,5\}$ 是一条超边，我们得到

$$c_2(1) + c_2(3) + c_2(5) > c_2(2) + c_2(3) + c_2(5) > \tau_2,$$

这与 $\{1,3,5\}$ 不是超边这一事实相矛盾。因此， H_2 不是 $T2$-阈值。

5. 结论。 图性质在文献中已得到广泛研究，而超图性质受到的关注则少得多，部分原因是某些图性质无法自然地推广到超图情形。例如，阈值超图有许多彼此不等价的定义，而在图的情形中，只要将超边度（即一条超边所包含的顶点数）限制为2，这些定义就都等价。本文着重于将反正则图的一些结果推广到反正则 k-超图。

具体而言，我们找到了反正则k-超图的独立多项式的（半）闭式。此外，我们证明了独立多项式是对数凹的。这些结果与 Levit 和 Mandrescu 的工作一致 [10] ，方法是在本文中令 $k=2$ 。本文的第三项主要贡献是提出一种算法，并证明所有 $\{0,1\}$-可构造（包括反正则） k-超图都是 $T2$-阈值的。于是， k-超图的性质满足以下蕴含关系：

$$\text{antiregular} \implies \{0,1\}\text{-constructable} \implies T2\text{-threshold} \implies T3\text{-threshold}.$$

然而，对于 $k \geq 3$，逆向蕴含并不成立。本文给出了一个例子，其中 $T2$-阈值 $\not\Longrightarrow$ $\{0,1\}$-可构造。

这里尚待解决的一个问题是反正则 k-超图的独立多项式是否唯一。或者，更一般地说，问题是：给定两个具有相同独立多项式的 $T2$-阈值k-超图，它们是否同构？这些问题留待未来研究。

致谢。 作者感谢 David SUTER 教授将本文探讨的问题介绍给我，并就相关概念进行了有益的讨论。作者部分获得了澳大利亚研究委员会 DP200103448 项目资助。

参考文献

[1] BEHZAD, M. 和 CHARTRAND, G.（196774 962 963）。没有图是完美图。《美国数学月刊》–。[2] CHVÁTAL, V.（1973）。集合打包与阈值图。研究报告，滑铁卢大学计算机科学系，*1973*。[3] CHVÁTAL, V. 和 HAMMER, P.（1977）。整数规划中不等式的聚合。离散数学年刊**1** 145–162。[4] GOLUMBIC, M. C.（1976）。阈值图与同步并行进程。扬诺什·博利艾数学学会丛书，组合学，凯斯特海伊**18** 331–352。[5] GOLUMBIC, M. C.（2004）。算法图论与完美图。爱思唯尔。[6] GUTMAN, I. 和 HARARY, F. （ 1983 ）。匹配多项式的推广。《数学实用论丛》 **24** 97–106。[7] HENDERSON, P. B. 和 ZALCSTEIN, Y.（1977）。同步原语 PV 块类的图论刻画。《*SIAM* 计算杂志》**6** 88–108。 [8] HOEDE, C. 和 LI, X.（1994）。图的团多项式与独立集多项式。《离散数学》**125** 219–228。[9] KEILSON, J. 和 GERBER, H.（1971）。离散单峰性的一些结果。《美国统计学会杂志》**66** 386–389。[10] LEVIT, V. E. 和 MANDRESCU, E.（2012）。论反正则图的独立多项式。《喀尔巴阡数学杂志》279–288。 [11] MERRIS, R.（2003）。反正则图是树的通用图。《电气工程学院出版物：数学系列》1–3。[12] REITERMAN, J.、RÖDL、ŠI ˇNAJOVÁ 和 T ˇUMA, M.（1985）。阈值超图。《离散数学》**54** 193–200。[13] TRINKS, M.（2016）。超图独立多项式递推关系综述。《图与组合》**32** 2145–2158。[14] ZYKOV, A. A. （ 1990 ）。图论基础。BCS Associates。