arXiv:2303.01025v1 [math-ph] 2 Mar 2023

一对具有相同半经典不变量的非等距势

Matthew West

2023年3月3日

摘要

我们证明，对于一维半经典 Schr¨odinger 算子，存在一对非等距势函数，其谱在 $O(h^\infty)$ 阶上一致，但对应特征值的差异至少呈指数级。Guillemen 和 Hezari 在 [GH12], 中猜想了这一结果，并证明了一个非常相似的结果，但无法排除存在某个子序列 $h_k \to 0$，使得基态特征值可能一致。

1 引言

考虑半经典薛定谔算子 $H = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$，其中 $h > 0$，$V \in C^\infty(\mathbb{R})$，且 $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$。这类薛定谔算子具有离散谱，其对应的一维特征空间。我们将特征值记为 $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$，对应的归一化特征函数记为 ψ_0，ψ_1，ψ_2，$\cdots$。注意，特征值和特征函数都依赖于半经典参数 h；为简化记号，我们省略这一依赖。若半经典算子 H 和 H' 的谱在 h^∞ 阶上一致，即 $\text{spec}(H) = \text{spec}(H') + O(h^\infty)$，则称它们的谱在该阶上一致：对于每个 $E_k \in \text{spec}(H)$ 和 $E'_k \in \text{spec}(H')$，以及每个 $N \in \mathbb{N}$，都存在常数 $C_{k,N}$，使得 $|E_k - E'_k| \le C_{k,N} h^N$，其中 $h > 0$。有了这些准备，我们可以陈述主要结果（注意，定理 1 中的势函数绘于图1）。

定理 1. 存在一对非等距势函数 $V^\pm(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$，其满足 $V(x) \ge 0$，并定义了薛定谔算子 $H^\pm = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V^\pm(x)$，其半经典谱模 $O(h^\infty)$相同，但它们的特征值 $E_j^\pm$对所有 $h > 0$均不同，且 $j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。此外，$D_j e^{-\frac{d_j}{h}} \le E_j^- - E_j^+ \le C_j e^{-\frac{c_j}{h}}$，其中常数为 c_j、d_j、C_j、$D_j > 0$。

上述定理由 Guillmen 和 Hezari 在 [GH12], 中提出猜想；他们证明了基态特征值的类似结果，但无法排除存在一个子序列$h_k \to 0$，使得相应的基态一致的可能性。此外，他们没有给出基态特征值差异的下界。他们的方法依赖于 Kato-Rellich定理，该定理保证基态特征值关于 h 的解析性，从而将基态势函数在 $h = 1$处的不相等性推广到所有 $h > 0$，但可能有一个序列 $h_k \to 0$除外。我们的方法与前述论文不同：我们通过改进 Simon 在 [Sim84] 中采用的 Agmon估计方法，为基态特征值差异给出一个显式的指数下界。

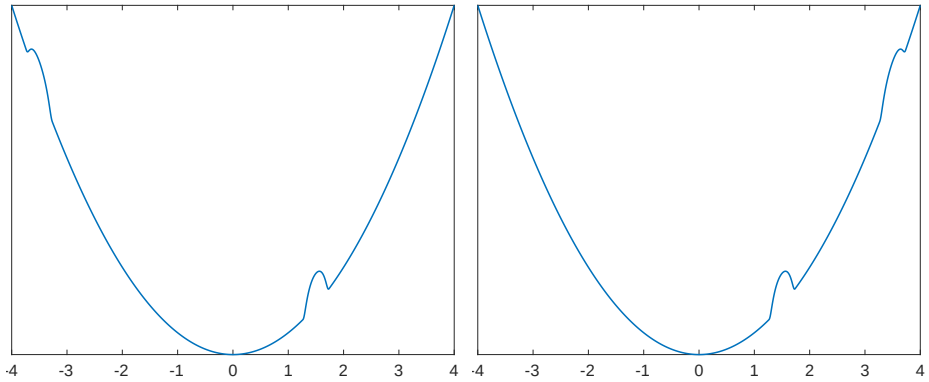


图1：两个势函数 $V^{\pm}$，其对应的半经典谱在 $O(h^{\infty})$范围内一致，但其特征值彼此不同（V^{-} 左，V^{+} 右）。

为说明我们的结果，我们考虑半经典 Schr¨odinger 算子的逆谱问题：如果两个半经典 Schr¨odinger 算子的谱相同，它们的势函数是否等距？目前已有一些肯定结果，但所采用的方法只能区分到 $O(h^{N})$ 阶的谱，其中 N 有限或 ∞。为弥补这些方法的粗糙性，人们对势函数类别作出限制。Datchev-Hezari-Ventura [DHV11] 使用 $o(h^{2})$ 阶半经典迹不变量证明，径向单调势在所有其他势函数中可由谱确定。对于在原点处有唯一全局极小值的解析势，只需掌握 $O(h^{\infty})$ 阶的低能特征值信息，就能确定势函数，参见 [GU05] 和 [Hez09]。Colin de Verdiere 在 [CdV11] 中运用 $o(h^{2})$ 阶方法研究满足对称性条件的单阱势，并猜想对称性条件是必要的。本文的主要结果给出了一个反例，从而证实了 [CdV11] 中对称性条件的必要性。

Zelditch 最初在 [Zel04]，中猜想了平面区域上拉普拉斯算子的相应局限性，Fulling-Kuchment 则在 [FK05] 中证实了这一点。研究表明，存在两个具有相同波迹不变量的非等距平面区域。图 2 中所谓的 Penrose-Lifshits 蘑菇区域已被证明具有如下性质：Tr(cos($t\sqrt{\Delta_{\Omega}}$)) − Tr(cos($t\sqrt{\Delta_{\Omega'}}$)) $\in C^{\infty}(\mathbb{R})$，也就是说，它们的波迹具有相同的奇异结构，因此波迹方法无法区分这些区域。

我谨向导师 Hamid Hezari 致谢，感谢他与我进行了许多富有启发性的讨论，并建议我研究这个问题。

2 特征函数的指数估计

在本节中，我们将　把注意力限制在半经典谐振子的微扰上　　r:

$$H = -h^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x^{2} + \gamma(x), \quad \gamma \in C_{0}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

并将半经典谐振子记为 $H_{0} = -h^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x^{2}$。我们将推导这些算子基态的局部一致上、下界，并最终将其用于

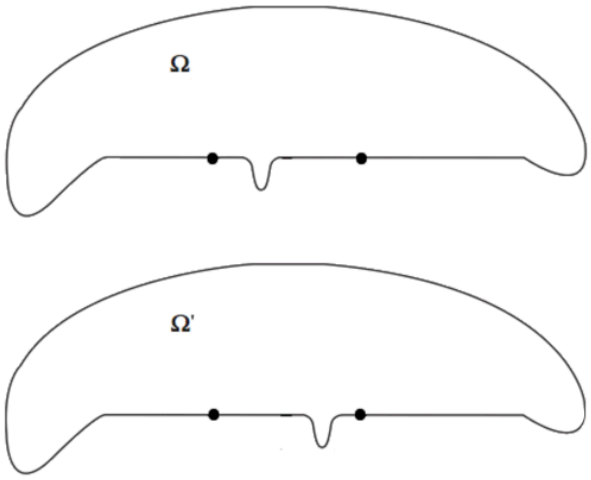


图 2：具有相同波迹不变量的两个非等距区域。

利用 Hadamard 变分公式得到特征值界。通过恰当选择 γ，即可推出定理 1，其选择方式类似于图 2 所示的区域。

首先，我们需要以下对受扰谐振子谱的刻画，

$$\mathrm{spec}(H) = \mathrm{spec}(H_0) + O(h^\infty) = \{h, 3h, 5h, 7h, \dots\} + O(h^\infty).$$

利用 Sj¨ostrand [Sj¨o92], or 在势阱底部建立的量子 Birkhoff 标准形方法，或 Colin de Verdiere [CdV05],给出的适用于所有阶的 Borh-Sommerfeld 量子化，可以看出上述结论成立。此外，谐振子的任意两个扰动的谱都一致到 $O(h^\infty)$。这一事实的依据是：对应于 $H^\pm$ 的哈密顿量的等值集所围成的面积相同，见图 3。

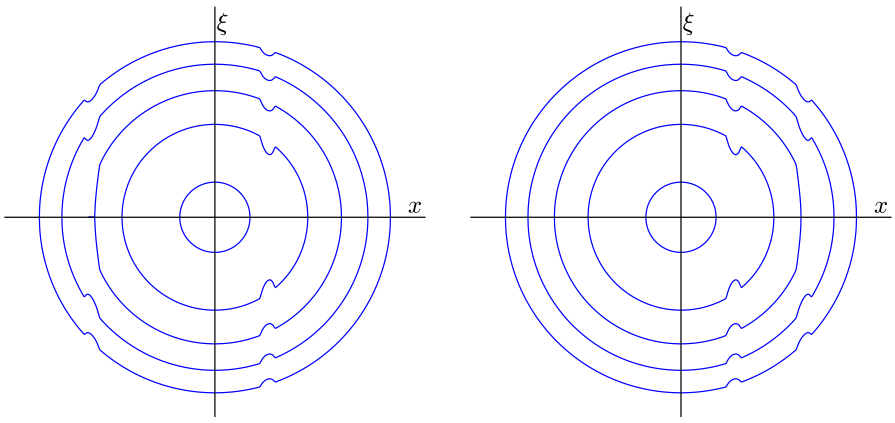


图 3：对应于 $H^\pm$ (H^- 左， H^+ 右)的哈密顿量的等值集。

命题 1。 设 $H = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ 是一个具有实值势函数的半经典 *Schr¨odinger* 算子，其形式为 $V(x) = x^2 + \gamma(x)$，其中某个 $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 的支集远离原点。令 $\psi_j(x)$ 表示 L^2 归一化的特征函数。于是，对于任意 $\delta, r, R \in (0, \infty)$ 且满足 $r < R$，存在常数 $C_j, D_j > 0$，使得对于所有充分小的 $h > 0$，以下估计在 $r < |x| < R$ 上一致成立：

$$(i) \qquad |\psi_j(x)| \le C_j e^{-\frac{1}{h}(1-\delta)^2 \left| \int_0^x \sqrt{V(x)}\, dx \right|}$$

$$(ii) \qquad |\psi_j(x)| \ge D_j e^{-\frac{1}{h}(1+\delta)^2 \left| \int_0^x \sqrt{V(x)}\, dx \right|}$$

注 1。 Simon 的研究中出现了一个类似的命题 [Sim84], ，但存在一些重要差异。Simon 研究的是双阱势的基态特征函数，而本文研究的是单阱势。此外，上述结果对每个特征函数都成立，而 Simon 的论文中，只对基态证明了类似的结果。

命题 *1* 的证明。*(i)*。 定义 $\tilde{\varphi}(x) = \left| \int_0^x \sqrt{V(t)}\, dt \right|$。注意，对于每一组选定的正常数 σ，r，R，δ，都存在一个光滑的光滑化核 f，满足以下条件：

(1) 在环域 $r < |x| < R$，$f * \tilde{\varphi} \le \tilde{\varphi} + \sigma$ 且 $f * (\tilde{\varphi}') \le \tilde{\varphi}' + \sigma$(2) 存在正常数 a，k，使得 $a < r$，对所有 $|y| \le a$ 和 $r < |x| < R$，均有 $\delta(f * \tilde{\varphi})(x) - (f * \tilde{\varphi})(y) \ge k > 0$.

令 $\epsilon > 0$，并定义 $A = \inf \left\{ (1-\epsilon) \frac{\sqrt{V(x)}}{\sqrt{V(x)+\sigma}} : \ r < |x| < R \right\}$。最后，定义 $\varphi = (Af) * \tilde{\varphi}$。我们可以选取充分小的 ϵ，σ 使得

$$(1-\delta)\tilde{\varphi} \le (1-\delta)(f * \tilde{\varphi}) \le A(f * \tilde{\varphi}),$$

and

$$A(f * \tilde{\varphi}) \le A(\tilde{\varphi} + \sigma) \le \tilde{\varphi} + \sigma \le \tilde{\varphi} + \delta\tilde{\varphi} = (1+\delta)\tilde{\varphi}.$$

因此，

$$(1-\delta)\tilde{\varphi} \le \varphi \le (1+\delta)\tilde{\varphi}. \tag{1}$$

此外，

$$|\varphi'(x)| \le A(\sqrt{V(x)} + \sigma) \le (1-\epsilon)\sqrt{V(x)}. \tag{2}$$

不失一般性，我们将重新光滑地定义 φ，使得对于 $|x| \ge 2R$，$\varphi'(x) = 0$。回忆一下，E_j 是 H 的 j^{th} 特征值，并令 ψ 为任意光滑函数。现在我们将引入关键对象，它给出了命题 1.(i) 的上界：

$$\left\langle e^{\frac{\varphi}{h}}\psi, (H - E_j)e^{-\frac{\varphi}{h}}\psi \right\rangle = \langle \psi, (V - E_j)\psi \rangle - \left\langle \psi, \left(h\frac{d}{dx} - \varphi' \right)^2 \psi \right\rangle.$$

根据微积分基本定理，并且由于 φ' 最终为 0，我们得到

$$\left\langle \psi, \left[\left(h\frac{d}{dx} \right) \varphi' + \varphi' \left(h\frac{d}{dx} \right) \right] \psi \right\rangle = 0.$$

So

$$\left\langle e^{\frac{\varphi}{h}}\psi, (H-E_j)e^{-\frac{\varphi}{h}}\psi \right\rangle = \left\langle \psi, \left[\left(-h^2\frac{d^2}{dx^2} - (\varphi')^2\right) + V - E_j\right]\psi \right\rangle.$$

根据界 (2)，又由于 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 是正定的，我们得到以下界：

$$\left\langle e^{\frac{\varphi}{h}}\psi, (H-E_j)e^{-\frac{\varphi}{h}}\psi \right\rangle \geq \langle \psi, [\epsilon V - E_j]\,\psi\rangle.$$

回想一下，特征值 $E_j = h(2j+1) + O(h^\infty)$，因此对所有足够小的 $|x| > a/2$ 和 h，存在一个满足 $\epsilon V(x) - E_j \geq \frac{1}{C} > 0$ 的 $C > 0$。取支集包含于 $|x| > a/2$ 的 ψ，得到

$$||\psi||_2^2 \leq C\left\langle e^{\frac{\varphi}{h}}\psi, (H-E_j)e^{-\frac{\varphi}{h}}\psi \right\rangle.$$

令 $\psi = e^{\frac{\varphi}{h}}\eta\psi_j$，其中当 $|x| < \frac{a}{2}$ 时，$\eta(x) = 0$；当 $|x| > a$ 时，$\eta(x) = 1$，且其光滑。利用上述界，

$$\int_{|x|>a} e^{\frac{2\varphi}{h}}\psi_j^2\,dx \leq C\left\langle e^{\frac{2\varphi}{h}}\psi_j, (H-E_j)\eta\psi_j \right\rangle.$$

利用特征值方程，在 $a/2 < |x| < a$ 上对 η 的导数进行估界，并利用 φ 在 $|x| > a/2$ 上的单调性，得到

$$\int_{|x|>a} e^{\frac{2\varphi}{h}}\psi_j^2\,dx \leq h^2 C e^{\frac{2\varphi(a)}{h}}\int_{\frac{a}{2}<|x|<a}(K\psi_j'\psi_j + D\psi_j^2).$$

应用柯西-施瓦茨不等式，利用 $E_j = h(2j+1) + O(h^\infty)$，并由特征值方程可知存在常数 K_j 使得 $||\psi_j'|| = \frac{K_j}{h} + O(h^\infty)$；再结合特征函数经过 L^2 归一化这一事实，得到

$$\int_{|x|>a} e^{\frac{2\varphi}{h}}\psi_j^2\,dx \leq Ce^{\frac{2\varphi(a)}{h}}(K_j h + h^2 D).$$

最后，当 h 足够小时，我们得到以下估计：

$$\int_{|x|>a} e^{\frac{2\varphi}{h}}\psi_j^2\,dx \leq e^{\frac{2\varphi(a)}{h}}C. \tag{3}$$

现在，我们将使用界 (3)，通过利用 $|\psi_j|$ 在禁阻区 $|x| > \sqrt{h(2j+1) + O(h^\infty)}$ 中的凸性，来获得 $r < |x| < R$ 上所需的逐点界。不妨设 $r < x < R$，那么对于所有满足 $0 < b < r - a$ 且 h 足够小的 b，我们有

$$\psi_j^2(x) \leq \frac{1}{2b}\int_{x-b}^{x+b} e^{-2\frac{\varphi}{h}}e^{2\frac{\varphi}{h}}\psi_j^2\,dt.$$

根据 φ 在 $|x| > a$ 中的单调性，并应用界 (3)，我们得到

$$\psi_j^2(x) \leq \frac{1}{2b}e^{-2\frac{\varphi(x-b)}{h}}e^{\frac{2\varphi(a)}{h}}C.$$

令 $M = \max_{a<|x|<R} \varphi'(x)$。然后利用 $-\varphi(x-b) \le -\varphi(x) + bM$，我们得到

$$\psi_j^2(x) \le \frac{C}{2b} e^{-2\frac{\varphi(x)}{h}} e^{2\frac{bM}{h}} e^{\frac{2\varphi(a)}{h}}.$$

根据我们对 a 的选择（其保证了 $\delta\varphi(x) - \varphi(a) \ge k > 0$），我们得到

$$\psi_j^2(x) \le \frac{C}{2b} e^{-2(1-\delta)\frac{\varphi(x)}{h}} e^{2\frac{bM-k}{h}}.$$

Taking $b < k/M$，并利用界 (1) 得到了命题 1 的上界：

$$|\psi_j(x)| \le C e^{-(1-\delta)^2 \frac{\tilde{\varphi}(x)}{h}}.$$

□

命题 1.(ii) 的证明更加困难。我们首先需要在允许区域 $\{-\sqrt{E_j}, \sqrt{E_j}\}$ 的边界上为 ψ_j 建立一个下界。为此，我们需要一个关于 H 的重标度特征函数的 $L^2(\mathbb{R})$ 收敛的事实。

引理 2。 设 $\tilde{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + h^{-1}\gamma(\sqrt{h}x)$ 是重标度的受扰半经典谐振子，$\tilde{\psi}_j(x)$ 是 $\tilde{H}$ 的特征函数。设 $\tilde{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ 为谐振子，并令 $\tilde{\kappa}_j$ 表示其特征函数。则 $\tilde{\psi}_j(x) \to \tilde{\kappa}_j(x)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，当 $h \to 0$ 时成立。

证明。定义 $(U\phi)(x) := h^{-\frac{1}{2}}\phi(h^{-\frac{1}{2}}x)$，并注意到 $\tilde{H} = h^{-1}U^{-1}HU$ 以及 $\tilde{H}_0 = h^{-1}U^{-1}H_0U$。令 E_j 表示 H 的特征值。缩放算子 U 给出了 H 和 H 的特征函数与特征值之间的关系：

$$E_j = h\tilde{E}_j, \quad \psi_j = U\tilde{\psi}_j.$$

由此，并利用 $\mathrm{spec}(H) = \{h, 3h, 5h, \dots\} + O(h^\infty)$ 这一事实，可得

$$\mathrm{spec}(\tilde{H}) = \{1, 3, 5, \dots\} + O(h^\infty).$$

注意，通过类似的缩放，我们可得 $\mathrm{spec}(H_0) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$。

我们将投影算子 $P_{\tilde{H}}$ 和 P_{H_0} 定义如下：

$$P_{\tilde{H}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(\tilde{E}_j,\epsilon)} (z - \tilde{H})^{-1}\, dz, \qquad P_{H_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(2j+1,\epsilon)} (z - H_0)^{-1}\, dz,$$

其中 $D(z,\ \epsilon)$ 是以 z 为圆心、半径为 ϵ 的圆盘。注意，这些投影算子是秩一的，分别投影到由 ψ_j 和 $\tilde{\kappa}_j$ 张成的子空间上，参见 [BS12]。现在，对于所有足够小的 $\epsilon > 0$ 和 $h > 0$，我们有 $|E_{j-1} - (2j-1)| < \epsilon$、$|E_j - (2j+1)| < \epsilon$，且 $|E_{j+1} - (2j+3)| < \epsilon$，因此可以在相同的被积函数下写出投影算子之差：

$$P_{\tilde{H}_0} - P_{\tilde{H}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(2j+1,\epsilon)} (z - \tilde{H}_0)^{-1}(\tilde{H}_0 - \tilde{H})(z - \tilde{H})^{-1}\, dz.$$

˜现在，将这个差作用于特征函数 ψ_j，得到：

$$\left|\left|(P_{\tilde{H}_0}-P_{\tilde{H}})\tilde{\psi_j}\right|\right|_2 \leq \frac{1}{2\pi}\left|\left|\oint_{\partial D(2j+1,\epsilon)}(z-\tilde{E}_1(h))^{-1}(z-H_0)^{-1}\,dz\right|\right|_{op}\left|\left|(h^{-1}\gamma(\sqrt{h}x))\tilde{\psi_j}\right|\right|_2.$$

沿着该轮廓按距谱的距离取界，并且 $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$，我们得到

$$\left|\left|(P_{\tilde{H}_0}-P_{\tilde{H}})\tilde{\psi_j}\right|\right|_2 \leq C\left|\left|h^{-1}\tilde{\psi_j}\right|\right|_{L^2(\mathrm{supp}(\gamma(\sqrt{h}x)))}.$$

由命题 1.(i) 可知 $\lim_{h\to 0}\left|\left|h^{-1}\tilde{\psi_j}\right|\right|_{L^2(\mathrm{supp}(\gamma(\sqrt{h}x)))}=0$，并且 $\lim_{h\to 0}\inf \mathrm{supp}(\gamma(\sqrt{h}x)) =\infty$。经过一些代数运算可得所需结果：

$$1-\langle\tilde{\psi_j},\tilde{\kappa_j}\rangle^2=\left|\left|(P_{\tilde{H}_0}-P_{\tilde{H}})\tilde{\psi_j}\right|\right|_2^2,$$

˜因此 $\lim_{h\to 0}\langle\psi_j,\tilde{\kappa_j}\rangle=1$。最后

$$\left|\left|\tilde{\psi_j}-\tilde{\kappa_j}\right|\right|_2^2=2(1-\langle\tilde{\psi_j},\tilde{\kappa_j}\rangle),$$

当 $h\to 0$ 时，其极限趋于 0。 □

上述引理告诉我们，在半经典极限下，受扰特征函数的 L^2 质量以与未受扰特征函数相同的方式分布。事实上，还可以得到更强的结果：受扰特征函数局部一致地收敛到未受扰特征函数。这一点是在证明引理 4 的过程中得到的。然而，在证明该引理之前，我们需要对 $\tilde{\kappa_j}$ 的根进行界定。

引理 3. 对于每个 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，最大值$\{|r|:\ \tilde{\kappa_j}(r)=0\}\leq\sqrt{2j-2}$。

证明。令 $A^*:=(x-\frac{d}{dx})$和 $A:=(x+\frac{d}{dx})$ 为与$\tilde{H}_0$相关联的产生与湮灭算子，满足 $AA^*-\mathrm{Id}=A^*A+\mathrm{Id}=\tilde{H}_0$。可以看出 $\tilde{\kappa_j}=\frac{1}{\sqrt{2^j j!}}A^{*j}\tilde{\kappa}_0$，其中 $\tilde{\kappa}_0=\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$。此外，

$$\tilde{\kappa_j}(x)=\frac{1}{\sqrt{2^j j!\sqrt{\pi}}}P_j(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

其中 $P_j(x)$ 是物理学家厄米多项式。根据 $\tilde{\kappa_j}$ 的产生算符定义，可以看出 P_j 满足递推关系 $P_{j+1}(x)=2xP_j(x)-\frac{d}{dx}P_j(x)$。通过归纳论证可知 $\frac{d}{dx}P_j(x)=2jP_{j-1}(x)$，因此我们得到修正后的递推关系 $P_{j+1}(x)=2xP_j(x)-2jP_{j-1}(x)$。定义三对角对称矩阵

$$C_j=\begin{pmatrix}0&\sqrt{\frac{1}{2}}&0&0&0&\cdots&0&0\\ \sqrt{\frac{1}{2}}&0&\sqrt{\frac{2}{2}}&0&0&\cdots&0&0\\ 0&\sqrt{\frac{2}{2}}&0&\sqrt{\frac{3}{2}}&0&\cdots&0&0\\ \vdots&&&\ddots&&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&\sqrt{\frac{j-1}{2}}\\ 0&0&0&0&0&\cdots&\sqrt{\frac{j-1}{2}}&0\end{pmatrix}.$$

通过归纳并利用上述递推关系，可以看出 $P_j(x) = 2^j \det(xI - C_j)$，因此 $P_j(x)$ 的根恰好是 C_j 的特征值。应用格尔施戈林圆盘定理，我们可以给出 C_j 的特征值的界，进而得到 P_j 的根的界，而这些根恰好是 $\tilde{\kappa}_j$ 的根：

$$\max\{|r| : \tilde{\kappa}_j(r) = 0\} \leq \sqrt{\frac{j-2}{2}} + \sqrt{\frac{j-1}{2}} \leq \sqrt{2j-2}.$$

□

引理 4. 对所有充分小的 h，$|\psi_j(\pm\sqrt{E_j})| \geq \sqrt[D_j]{h} \geq 1$。

证明。我们先得到重标度特征函数 ψ_j 的界，再将此界转移到 ψ_j。令 $\theta = \tilde{\psi}_j - \tilde{\kappa}_j$。引理 2 表明，$\theta \to 0$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$。现在，任取一个有界区间 $I \subseteq \mathbb{R}$。那么 $\theta'' \to 0$ 属于 $L^2(I)$，因为

$$\left|\left|\theta''\right|\right|_{L^2(I)} \leq \left|\left|h^{-1}\gamma(\sqrt{h}x)\tilde{\psi}_j(x)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})} + \left|\left|x^2(\tilde{\psi}_j(x) - \tilde{\kappa}_j(x))\right|\right|_{L^2(I)} + \left|\left|\tilde{E}_j\tilde{\psi}_j(x) - \tilde{\kappa}_j(x)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})},$$

其中，第一项因命题 1.(i) 以及 $\lim_{h\to 0} \inf \operatorname{supp}(\gamma(\sqrt{h}x)) = \infty$ 而趋于零，第二项因引理 2 而趋于零，第三项则因引理 2 且 $\lim_{h\to 0} E_j = 2j-1$ 而趋于零。

令 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，并考虑以下恒等式：$\eta(\theta')^2 + \eta\theta\theta'' - \frac{1}{2}\theta^2\eta'' = \frac{d}{dx}(\eta\theta\theta' - \frac{1}{2}\theta^2\eta')$。积分可得

$$\int \eta(\theta')^2\,dx = \frac{1}{2}\int \eta''\theta^2\,dx - \int \eta\theta\theta''\,dx,$$

其在 $h \to 0$ 趋于 0，因为 θ，$\theta'' \to 0$ 在 $L^2(I)$ 中，因此 $\theta' \to 0$ 在 $L^2(I)$ 中。现在令 $x \in [b,c] = I$。那么，对于每个 $a < b$，根据微积分基本定理

$$|\theta(x) - \theta(a)| \leq ||\theta'||_{L^2([a,c])},$$

其在 $h \to 0$趋于零。由于 $\lim_{a\to-\infty} \theta(a) = 0$，我们必有 $\lim_{h\to 0} ||\theta(x)||_{L^\infty(I)} = 0$，或者等价地，$\psi_j \to \tilde{\kappa}_j$ 在 $L^\infty(I)$ 中。

现在，我们转向未缩放的半经典算子。在允许区域 $C = \left[-\sqrt{E_j}, \sqrt{E_j}\right]$ 中：

$$\left|\left|\psi_j(x) - h^{-\frac{1}{2}}\tilde{\kappa}_j(h^{-\frac{1}{2}}x)\right|\right|_{L^\infty(C)} = h^{-\frac{1}{2}}\left|\left|\tilde{\psi}_j(x) - \tilde{\kappa}_j(x)\right|\right|_{L^\infty\left(\left[-\sqrt{\tilde{E}_j}, \sqrt{\tilde{E}_j}\right]\right)}.$$

将上述方程乘以 $\sqrt{h}$，并回忆 $\sqrt{\tilde{E}_j} = \sqrt{2j+1} + O(h^\infty)$，得到

$$\lim_{h\to 0}\left|\left|\sqrt{h}\psi_j(x) - \tilde{\kappa}_j(h^{-\frac{1}{2}}x)\right|\right|_{L^\infty(C)} = 0.$$

引理 3 证明了 $|\tilde{\kappa}_j(\pm\sqrt{2j+1})| > 0$，并且由于对所有足够小的 h，$\sqrt{E_j} = \sqrt{h(2j+1)} + O(h^\infty)$，因此存在一个常数 $D_j > 0$ 满足，

$$|\tilde{\kappa}_j(\pm h^{-\frac{1}{2}}\sqrt{E_j})| \geq D_j.$$

因此，根据上述极限，当 h, $|\psi_j$ 足够小时（$\pm\sqrt{E_j}$）$| \geq \sqrt[D_j]{h}$。

□

我们所需的最后一个引理提供了一种方法，可以将引理 4 的下界从允许区域 $[-\sqrt{E_j}, \sqrt{E_j}]$ 的边界向外延拓。

引理 5。 考虑区间 $I = [x_1, x_2(1+\epsilon)]$，其中 $\sqrt{E_j} \le x_1$。令 $v = \text{上确界}_{t\in I}\sqrt{V(t)}$。则

$$|\psi_j(x_2)| \ge e^{-\frac{v}{h}(x_2-x_1)}\left(1 - e^{-2\epsilon\frac{v}{h}x_2}\right)|\psi_j(x_1)|.$$

证明。 定义 $\phi(x) = \left(e^{-\frac{v}{h}(x-x_1)} - e^{-2\frac{v}{h}(x_2(1+\epsilon)-x_1)}e^{\frac{v}{h}(x-x_1)}\right)|\psi_j(x_1)|$。 注意到 $\phi(x_2(1+\epsilon)) = 0$，并且

$$\phi(x_1) = (1 - e^{-2\frac{v}{h}(x_2(1+\epsilon)-x_1)})|\psi_j(x_1)| \le |\psi_j(x_1)|.$$

因此，在 ∂I 上， $\phi \le |\psi_j|$。我们声称，在 I 的内部， $\phi \le |\psi_j|$。令 $\eta = |\psi_j| - \phi$ 并定义 $I_0 = \{x : \eta(x) < 0\} \subseteq I$。现在，由于在 ∂I 上 $\eta \ge 0$，在 ∂I_0 上 $\eta = 0$。令 $W(x) = V(x) - E_j$，并注意到，根据对 I 所取的下界，我们有在 I 上 $W \ge 0$。于是，在 I_0 上：

$$\frac{d^2}{dx^2}\eta = W\eta - \left(\left(\frac{v}{h}\right)^2 - W\right)\phi,$$

当 h 足够小时，该式小于零。因此， η 在 I_0 上是凹函数，故其在 ∂I_0 上取得最小值。所以 $\eta \ge 0$ 在 I_0 上成立，且 I_0 为空，即 $\phi \le |\psi_j|$ 在 I 上成立。由此，在 x_2 处计算 ϕ 得到 $|\psi_j(x_2)| \ge e^{-\frac{v}{h}(x_2-x_1)}(1 - e^{-2\epsilon\frac{v}{h}x_2})|\psi_j(x_1)|$。 □

最后，我们可以证明命题 1.(ii)，这需要使用引理 5 将引理 4 给出的界传播出去。

命题 *1.(ii)* 的证明。令 $\sqrt{E_j} < |x| < R$，不失一般性，假设 x 为正。令 $0 = x_0 < x_1 = \sqrt{E_j} < x_2 < \cdots < x_n = x$ 为 $[0, x]$ 的一个分割，使得 $\int_0^x \sqrt{V(x)}\,dx$ 的上达布和满足

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} \sqrt{V(t)}|x_i - x_{i-1}| \le \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\int_0^x \sqrt{V(t)}\,dt.$$

对于某个 $\delta > 0$。令 $\epsilon > 0$ 足够小，使得如果我们定义 $D_i = [x_{i-1}, x_i(1+\epsilon))]$，和 $v_i = \sup_{t\in D_i}\sqrt{V(t)}$，则可得

$$\sum_{i=1}^{n} v_i|x_i - x_{i-1}| \le (1+\delta)\int_0^x \sqrt{V(t)}\,dt. \tag{4}$$

接下来，在该划分上反复应用引理 5，可得

$$|\psi_j(x)| \ge e^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{v_i}{h}(x_i-x_{i-1})}\prod_{i=2}^{n}\left(1 - e^{-2\epsilon\frac{v_i}{h}x_i}\right)|\psi_j(x_1)|.$$

引理 4 保证了 (f 或 $h > 0$ 充分小）， $|\psi_j(x_1)| = |\psi_j(\sqrt{E_j})| \ge 1$， 因此我们恢复了完整的求和

$$|\psi_j(x)| \ge e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{h}(x_i-x_{i-1})}\prod_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-2\epsilon\frac{v_i}{h}x_i}\right).$$

由于对于 $i \neq 1$， $v_i = O(1)$，且 $v_1 = O(\sqrt{h})$ 对所有 h 充分小的情况都成立，我们估计 $\prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-2\epsilon \frac{v_i}{h} x_i}\right) \geq 2^{-n}$。结合这一点与界 (4)，即可得到最终所需的界：

$$|\psi_j(x)| \geq De^{-(1+\delta)^2 \frac{1}{h} \left| \int_0^x \sqrt{V}\, dt \right|}.$$

为使 $r < |x| < R$ 具有一致性，对划分进行扩展。 □

3 主要结果的证明

为证明定理 1，我们将构造所需的势函数 $V^{\pm}$。令 α， $\beta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$，其中 $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq (1,2)$，且 $\operatorname{supp}(\beta) \subseteq (3,4)$，并令 $V^{\pm}(x) = x^2 + \alpha(x) + \beta(\pm x)$。为恢复相关算子 $H^{\pm} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \alpha(x) + \beta(\pm x)$ 的特征值之间的子 $O(h^{\infty})$ 差异，我们将在 $\beta(\pm x)$ 中施加一个变分。定义如下算子族

$$H_t^{\pm} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \alpha(x) + t\beta(\pm x),$$

并注意到 $H_1^{\pm} = H^{\pm}$。记相应的特征函数和特征向量为 $\psi_j^{\pm}(t,\ x)$ $E_j^{\pm}(t)$。

定理 *1* 的证明。T 下面的方程称为 Hadamard 变分公式，将会很有用

$$\frac{d}{dt} E_j^{\pm}(t) = \int \beta(\pm x) (\psi_j^{\pm}(t,x))^2 \, dx.$$

一维情形下该公式的证明很简单，参见 [GH12]。现在，利用 Hadamard 变分公式和微积分基本定理，我们得到

$$E_j^{\pm}(t) - E_j^{\pm}(0) = \int_0^t \int \beta(\pm x) (\psi_j^{\pm}(s,x))^2 \, dx \, ds.$$

利用命题 1 和上面的等式，并注意到 $E_j^{\pm}(1) = E_j^{\pm}$，可得以下各界：

$$E_j^{\pm} - E_j^{\pm}(0) \geq \int_0^1 \int \beta(\pm x) De^{-\frac{(1+\delta)^2}{h} \left| \int_0^x \sqrt{a^2 + \alpha(a) + s\beta(\pm a)}\, da \right|} \, dx \, ds \tag{5}$$

$$E_j^{\pm} - E_j^{\pm}(0) \leq \int_0^1 \int \beta(\pm x) Ce^{-\frac{(1-\delta)^2}{h} \left| \int_0^x \sqrt{a^2 + \alpha(a) + s\beta(\pm a)}\, da \right|} \, dx \, ds \tag{6}$$

注意，下界 (5) 的减号版本避免了在指数中对 α 的支集进行积分。因此，我们可以将 (5) 的减号版本与 (6) 的加号版本之差表示为

$$E_j^{-} - E_j^{+} \geq \int_0^1 \int \beta(x) \left(De^{-\frac{(1+\delta)^2}{h} \int_0^x \sqrt{a^2 + s\beta(a)}\, da} - Ce^{-\frac{(1-\delta)^2}{h} \int_0^x \sqrt{a^2 + \alpha(a) + s\beta(a)}\, da} \right) dx ds$$

分解可得，回顾 β 的支集位于 (3，4) 中，并注意到指数中的积分关于 x 单调，于是得到

$$E_j^{-} - E_j^{+} \geq \int_0^1 e^{-\frac{(1+\delta)^2}{h} \int_0^4 \sqrt{a^2 + s\beta(a)}\, da} \int \beta(x) \left(D - Ce^{-\frac{1}{h} \int_0^x (1-\delta)^2 \sqrt{a^2 + \alpha(a) + s\beta(a)} - (1+\delta)^2 \sqrt{a^2 + s\beta(a)}\, da} \right) dx ds.$$

命题 1 的界对 δ 的任意取值都成立，因此我们可以取 δ 足够小，使其对每个 $x \in \in$(3，4) 都满足

$$\int_0^x (1-\delta)^2\sqrt{a^2+\alpha(a)+s\beta(a)} - (1+\delta)^2\sqrt{a^2+s\beta(a)}\,da > 0.$$

取此 delta，并再次利用指数中积分的单调性，我们得到

$$E_j^- - E_j^+ \geq e^{-\frac{(1+\delta)^2}{\hbar}\int_0^4\sqrt{a^2+\beta(a)}\,da}\left(D - Ce^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^3(1-\delta)^2\sqrt{a^2+\alpha(a)}-(1+\delta)^2\sqrt{a^2}\,da}\right)\int \beta(x)\,dx.$$

对于所有 h 充分小的情形，这便化为不等式 $E_j^- - E_j^+ \geq De^{\frac{-d}{\hbar}}$，其中 c，$C > 0$为某些正常数。为证明上界 $E_j^- - E_j^+ \leq Ce^{\frac{-c}{\hbar}}$，采用类似的论证，但这次我们取公式（6）的负号版本与公式（5）的正号版本之差。 □

参考文献

[BS12] Feliks Aleksandrovich Berezin 和 Mikhail Shubin。《薛定谔方程》，第 66 卷。Springer Science & Business Media，2012 年。[CdV05] Yves Colin de Verdiere。各阶玻尔–索末菲规则。《Henri Poincaré年鉴》，6(5)：925–936，2005 年。[CdV11] Yves Colin de Verdi`ere。半经典逆问题 II：势函数重构。载于《分析与力学的几何方面》，第 97–119 页。Springer，2011 年。[DHV11] Kiril Datchev、Hamid Hezari 和 Ivan Ventura。径向半经典薛定谔算子的谱唯一性。《数学研究快报》，18(3)：521–529，2011 年。[FK05] Stephen A Fulling 和 Peter Kuchment。长度谱的一致性并不意味着等谱性。《逆问题》，21(4)：1391，2005 年。[GH12] Victor Guillemin 和 Hamid Hezari。一维谐振子的 Fulling–Kuchment定理。《逆问题》，28(4)：045009，2012 年。[GU05] Victor Guillemin 和 Alejandro Uribe。半经典薛定谔算子的一些逆谱结果。《数学研究快报》，14，2005 年 10 月。¨Hez[Hamid Hezari。薛定谔算子的逆谱问题。《数学物理通讯》，288(3)：1061–1088，2009 年。¨Sim[Barry Simon。低能特征值的半经典分析 II：隧穿。《数学年刊》，第 89–118 页，1984 年。84] Sj[o¨Johannes Sj92] ostrand。非退化势阱中的半激发态。《渐近分析》，6(1)：29–43，1992 年。¨Zel[Steve Zelditch。逆谱问题。《微分几何综述》，9(1)：401–467，2004 年。