arXiv:2303.01039v1 [math.AC] 2 Mar 2023

阿贝尔群中的遗传原子性与 ACCP

FELIX GOTTI

Dedicado a mi padre, Juan Gotti,
por todo lo que me enseñó y me dejó

Abstract. 若每个 M 的非可逆元素都能分解为不可约元（也称为原子），则称消去交换幺半群 M 是原子的；若 M 的每个子幺半群都是原子的，则称 M 是遗传原子的。此外，若 M 的每个子幺半群都满足主理想升链条件（ACCP），则称 M 具有遗传 ACCP。本文的主要目的是确定哪些阿贝尔群是遗传原子的。为此，我们发现，在阿贝尔群这一类中，遗传原子性与遗传 ACCP 等价。确定遗传原子的阿贝尔群后，我们将利用这一结果确定哪些交换群代数是遗传原子的，也就是说，确定哪些交换群代数的所有子环都是原子的。原子性与 ACCP 之间的相互作用是当前研究的热点。在本文中，我们将讨论若干联系（遗传）原子性与 ACCP 的例子，其中包括：对于每个满足 $d \geq 2$的整数 d，构造一个秩为d 的 $\mathbb{Z}^d$ 的加法子幺半群，它是原子的，但不满足 ACCP。

1. Introduction

遵循 P. Cohn [8], 的定义，若消去交换幺半群中的每个非可逆元素都能分解为不可约元（也称为原子），则称该幺半群为原子的；若整环的乘法幺半群是原子的，则称该整环为原子整环。尽管包括诺特整环和克鲁尔整环在内的许多相关整环类都是原子整环，但直到九十年代，人们对原子性的研究才一直仅限于将其与其他代数性质联系起来：例如，A. Grams [26] 和 A. Zaks [30] 在整环的背景下研究了原子性，并探讨了它与主理想升链条件（ACCP）的关系。然而，在 D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 M. Zafrullah 于 1990年发表的一篇著名论文 [1] 中，作者提出了一个原子整环嵌套类的图示，作为研究整环中多重分解现象的方法。该论文以及 F. Halter-Koch 的论文 [27]（该文将 [1] 中引入的两种原子性概念推广到消去幺半群，并在这一更一般的背景下加以研究）激发了人们对原子性概念的浓厚兴趣。自那以后，原子性一直在消去交换幺半群的分解理论和理想理论中发挥核心作用；此后，这些幺半群不仅得到了系统研究，相关理论还扩展到了非消去 [13] 和非交换情形 [6, 15]。

如前所述，自关于原子整环的开创性论文问世以来，原子性这一现象常与升链条件（ACCP）联系起来研究。若一个消去交换幺半群（或整环）中的每个主理想升链最终都会稳定，则称其满足升链条件（ACCP）。虽然很容易证明，满足升链条件（ACCP）的每个消去交换幺半群（因而每个整环）都是原子的，但并非每个原子整环

Date: 2023年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：20K15、16S34、20C07；次要分类：06F20、20M25、13A05。*Key words and phrases.* 阿贝尔群、交换群代数、升链条件（ACCP）、原子幺半群、遗传原子性。

都满足升链条件（ACCP）。然而，已知的反例都不容易构造。此类构造最早可追溯至1974年，由 Grams 在 [26, 第 1]节中给出，以纠正 [8, 命题 1] 中关于整环类中原子性与升链条件（ACCP）等价的（错误）断言。此后，Zaks [30] 于二十世纪八十年代，以及 M. Roitman [29] 于二十世纪九十年代，构造了更多不满足升链条件（ACCP）的原子整环。近年来，J. Boynton 和 J. Coykendall [7] 利用交换环的某些拉回构造了一个新的例子。更近来，B. Li 与作者 [23], 给出了构造更多例子的各种方法，并引入了弱升链条件（weak ACCP）；这是一种原子性概念，严格介于原子性与满足升链条件（ACCP）之间。

尽管原子性已被系统研究三十余年，遗传原子性这一概念直到最近才由 J. Coykendall、R. Hasenauer 和作者 [12] 进行研究。若一个消去交换幺半群 M （分别地，一个整环 R）的每个子幺半群 M （分别地，子环 R）都是原子的，我们就称它为遗传原子的。类似地，我们可以定义遗传 ACCP 的概念。在 [12], 中，作者的主要成果之一是刻画了哪些域是遗传原子整环。在同一篇论文的最后一节中，作者给出了一些初步结果，探讨遗传原子性与遗传 ACCP 之间的关系（就整环而言）。在 [12], 的同一节中，作者未能确定在所有整环构成的类中，遗传原子性与遗传 ACCP 是否等价。值得注意的是，若将整环类替换为消去交换幺半群类，这个问题至今仍未解决。不过，对于约化无挠幺半群类，最近已有类似问题得到肯定回答 [25, 定理 3.1]。

受 [12] 中对遗传原子整环的域所作刻画的启发，本文将确定哪些阿贝尔群是遗传原子幺半群。此外，我们将看到，在阿贝尔群这一类中，遗传原子这一性质与遗传 ACCP 这一性质等价。这与 [12] 中关于整环情形下这两种遗传性质等价的猜想相呼应。对于满足 $d \geq 2$ 的每个整数 d ，自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^d$ 都不是遗传原子的：我们将明确构造一个 $\mathbb{Z}^d$ 的秩为 d 的原子加法子幺半群，它不是遗传原子的。由于这些幺半群按构造是约化的，由 [25, 定理 3.1] 可知，它们是已知的首批自由阿贝尔群的子幺半群：它们是原子的，却不满足 ACCP。至于阿贝尔群的情形，我们将确定哪些（交换）群代数是遗传原子整环。在此过程中，我们还将给出一些遗传原子幺半群代数、虽为原子但不满足 ACCP 的幺半群代数，以及满足遗传 ACCP 但并非有界分解整环的幺半群代数的例子和类别。

下面简要介绍本文的主要结果和结构。在第2节中，我们给出后续章节将用到的大部分符号和术语，以及一些相关结果。在第3节中，我们考察阿贝尔群类中遗传原子性和遗传升链条件（ACCP）的性质。我们在定理3.2 中证明，这两种性质在全体阿贝尔群中等价，并进一步确定满足这两种性质的阿贝尔群。接着，对于不满足这些性质的最基本的阿贝尔群，即 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}^d$（对所有 $d \geq 2$），我们展示了这些群的原子子幺半群中存在不满足升链条件（ACCP）的例子（对3.3 中的 $\mathbb{Q}$ ，见例；对3.6 中的 $\mathbb{Z}^d$，见命题）。在第4节中，我们考察交换群代数类中遗传原子性和遗传升链条件（ACCP）的性质。利用第3节确立的主要结果，我们在命题4.1 中确定了遗传原子的交换群代数。与命题4.1形成对照的是，我们在命题4.5 中展示了三类反物质群代数，补充了反物质幺半群代数的主要构造

由 Anderson 等人在 [2]中给出。为与第3节保持平行，并突出一些相关的有趣问题（问题4.13），我们在例4.12 中描述了非遗传原子的交换群代数 $F[\mathbb{R}]$（对任意指定的域 F），它的一个子环是原子的，但不满足升链条件（ACCP）（这一构造取自近期论文 [22]，因此我们仅作简要介绍，略去最复杂的技术细节）。在第4.3小节中，我们简要讨论交换群代数背景下遗传升链条件（ACCP）这一性质，以及有界分解整环这一性质。

2. Background

2.1. **一般记号**。沿用标准记号，我们用 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$ 分别表示整数、有理数、实数和复数的集合。此外，我们用 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{N}_0$和 $\mathbb{P}$分别表示正整数、非负整数和素数的集合。对于 $p \in \mathbb{P}$ 和$n \in \mathbb{N}$，我们记 $\mathbb{F}_{p^n}$ 为基数为 p^n的有限域。对于 b， $c \in \mathbb{Z}$，其中 $b \le c$，我们用 $[\![b,\ c]\!]$ 表示介于 b 和 c之间的整数集合，即 $[\![b,\ c]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid b \le n \le c\}$。此外，对于 $S \subseteq \mathbb{R}$ 和 $r \in \mathbb{R}$，我们定义 $S_{\ge r} = \{s \in S \mid s \ge r\}$ 和 $S_{>r} = \{s \in S \mid s > r\}$。

2.2. 阿贝尔群与交换幺半群。设 G 是一个（加法）阿贝尔群。存在一个自然的群同态 $\varphi\colon G \to V$，其中 V是 $\mathbb{Q}$上的向量空间 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$，且 $\varphi\colon g \mapsto 1 \otimes g$。显然， G 作为 $\mathbb{Z}$-模的秩（记作 $\mathsf{rank}\, G$）与向量空间 V的维数相同。当 G 无挠时， $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的平坦性使得 φ 成为一个嵌入，因此我们可以通过 φ将 G 视为 V的一个子群。若子集 $\{g_1, \ldots, g_k\}$ 满足： G 中 g_1，……， g_k 的整数线性组合只有在各系数全为零时才等于 G 中的 0，则称 $\{g_1, \ldots, g_k\}$ 为 G 的一个整线性无关子集。注意， G 的有限子集是整线性无关的，当且仅当它在向量空间 V中的像（通过 φ 得到）线性无关。对于 G上的全序 $\preceq$，若该全序与 G的运算相容，即对任意 g、 h、 $k \in G$，关系 $g \preceq h$ 能保证 $g + k \preceq h + k$，则称有序对 $(G, \preceq)$ 为全序群。若 $(G, \preceq)$ 是全序群，则加法子集 $\{g \in G \mid 0 \preceq g\}$（分别为 $\{g \in G \mid 0 \prec g\}$）称为 $(G, \preceq)$ 的非负锥（分别为正锥）。若对 $(G, \preceq)$ 的正锥中任意 g 和 h，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $h \preceq ng$，则称全序群 $(G, \preceq)$ 为阿基米德群。H¨lder 定理指出，每个阿基米德群都同构（作为有序群）于 $\mathbb{R}$的一个加法子群。

带有单位元的半群称为幺半群。本文中，我们将默认所讨论的每个幺半群都是可消去且交换的。在本节余下部分，设 M 是一个以加法记号表示的幺半群。我们用 $M^\bullet$ 表示 M 中所有非零元素构成的集合。由 M 中所有可逆元构成的群记为 $\mathscr{U}(M)$；若 $\mathscr{U}(M)$ 是平凡群，则称 M 为约化的。与阿贝尔群的情形类似，若在 M 上的全序 $\preceq$ 满足：对所有 b、 c、 $d \in M$，关系 $b \preceq c$ 蕴含 $b + d \preceq c + d$，则称一对 $(M, \preceq)$ 为全序幺半群。注意，任意全序阿贝尔群的非负锥都是约化的全序幺半群。 M 的差群记为 $\mathsf{gp}(M)$，它是唯一的（在同构意义下）满足以下条件的阿贝尔群：任何包含 M 的某个同态像的阿贝尔群，也包含 $\mathsf{gp}(M)$ 的某个同态像。若 $\mathsf{gp}(M)$ 是无挠阿贝尔群，则称幺半群 M 无挠。 M 的秩记为 $\mathsf{rank}\ M$，定义为 $\mathsf{gp}(M)$ 的秩。 M 的子幺半群是指一个对加法封闭且包含 M 的单位元的子集。若 S 是 M 的子集，则用 $\langle S \rangle$ 表示由 S 生成的 M 的子幺半群。若 $M = \langle S \rangle$ 对某个有限集 S 成立，则称 M 为有限生成的。 $\mathbb{N}_0$ 的加法子幺半群总是有限生成的；它们是研究充分的幺半群，通常称为数值幺半群。

若一个非可逆元素 $a \in M$ 满足：对任意 b、$c \in M$，等式 $a = b + c$ 蕴含 $b \in \mathscr{U}(M)$ 或 $c \in \mathscr{U}(M)$，则称它为原子。M 的所有原子构成的集合记为 $\mathscr{A}(M)$。沿用 Coykendall、Dobbs 和 Mullin [10], 的说法，若 $\mathscr{A}(M)$ 为空集，则称 M 为反物质。另一方面，沿用 Cohn [8], 的说法，若 M 中每个非可逆元素都能写成若干原子之和，则称 M 为原子的。注意，同时为反物质且为原子的幺半群只有阿贝尔群。遗传原子性是本文主要关注的概念之一。

定义 2.1. 若幺半群 M 的每个子幺半群都是原子的，则称其为遗传原子的。

若子集 I 满足 $I + M \subseteq I$，或等价地满足 $I + M = I$，则称其为 M 的理想。若理想 I 满足 $I = b + M$对某个 $b \in M$成立，则称其为 M 的主理想。若 $c \in b + M$，则称 b在 M中（加法地）整除 c，此时记作 $b \mid_M c$。若子幺半群 N 满足：对任意 $b \in M$ 和$c \in N$，只要整除关系 $b \mid_M c$成立，就有 $b \in N$，则称其为 M 的除子封闭子幺半群。若 M的每个主理想升链最终都会稳定，则称幺半群 M满足主理想升链条件（ACCP）。若一个幺半群满足 ACCP，则它是原子的 [16, 命题 1.1.4]。原子幺半群未必满足 ACCP，正如我们将在例 3.3 和命题 3.6 中看到的那样。由于每个阿贝尔群恰有一个主理想，即整个群，因此每个阿贝尔群都平凡地满足 ACCP，因而是原子的。此外，有限生成幺半群满足 ACCP（例如参见 [16, 命题 2.7.8]），所以它们也是原子的。沿着定义 2.1 的思路，若 M 的每个子幺半群都满足 ACCP，则称 M 具有遗传 ACCP。

2.3. 整环。设 R 是一个整环。我们分别用 R^* 和 $R^\times$ 表示 R的乘法幺半群和单位群。此外，用 $\mathsf{qf}(R)$ 表示 R的商域。R 的上整环是环扩张 $R \subseteq \mathsf{qf}(R)$中的一个中间环。若整环 R的乘法幺半群 R^* 是原子的（分别满足主理想升链条件（ACCP））， 则称整环 R是原子的（分别满足主理想升链条件（ACCP））。我们用 $\mathscr{A}(R)$表示 R的所有不可约元构成的集合：重复使用这一记号既方便，也有其合理性，因为 R 的不可约元恰好是乘法幺半群 R^*的原子。以下概念由 [12], 引入，并在第 4 节中发挥核心作用。

定义 2.2。 若整环 R 的每个子环都是原子的，则称 R 是遗传原子的 （假设 R 的子环都包含 R的单位元）。

注意，若 R^* 的乘法幺半群 R 是遗传原子的，则 R 是遗传原子的整环。不过，值得强调的是，这一观察的逆命题一般并不成立。

例 2.3. 由于 $\mathbb{Z}$ 是戴德金整环， $\mathbb{Z}$ 的每个上整环也都是戴德金整环，因此是诺特整环。结合 $\mathbb{Q}$ 的每个子环都包含 $\mathbb{Z}$这一事实，我们可以得出 $\mathbb{Q}$ 是遗传原子的整环（这是定理 4.4] 或定理]的一个特例）。不过，我们断言， $\mathbb{Q}$ 的乘法幺半群的子幺半群 $M := \mathbb{Q}_{\geq 1}$ 不是原子的：事实上， M 是一个反物质幺半群。要验证后一断言，只需注意，对于任意 $q \in \mathbb{Q}_{>1}$，我们都可以选取充分大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\binom{n}{n+1} q > 1$，进而将 q在 M中分解为 $q = \binom{n}{n+1} q \binom{n+1}{n}$。因此,—$\mathbb{Q}$的乘法幺半群不是遗传原子的。 —— ——

对于整环 R 和幺半群 M，我们令 $R[x;\ M]$ 表示由不定元 x 的所有多项式表达式构成的环，其中系数取自 R，指数取自 M （加法和乘法的定义与标准多项式相同）。沿用 Gilmer [17], 的记法，只要我们认为不会造成歧义，就写作 $R[M]$, 而不写作 $R[x;\ M]$。由于 $R[M]$ 是一个以 R 为代数的代数，

前者通常称为幺半群代数，其 M 以 R 为底，或简称幺半群代数。从现在起，我们采用这一术语。在 M 是群的特殊情形下， $R[M]$ 称为群代数(以 R为底）。本文中，幺半群代数的指数幺半群均采用加法记法。当幺半群 M 是无挠的，根据 [17, 定理 8，1] 可知 $R[M]$ 是一个整环，而且，

$$R[M]^\times = \{ux^m \mid u \in R^\times \text{ and } m \in \mathscr{U}(M)\}$$

由 [17, 定理 11.1]。若 $(M, \preceq)$ 是全序幺半群，则每个非零元素都可以唯一地写成以下典范形式: $f = \alpha_n x^{d_n} + \cdots + \alpha_1 x^{d_1}$ 其中系数为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^*$，指数为 $d_1, \ldots, d_n \in M$，并满足 $d_1 \prec \cdots \prec d_n$。在这种情况下，元素 deg $f := d_n$ 和 ord $f := d_0$ 分别称为 f 的次数 和阶 。Gilmer 在 [17] 中对截至 1984 年幺半群代数的一些重要进展作了公允的综述。

2.4. 欧几里得几何与凸性。在本小节中，我们固定 $d \in \mathbb{N}$。对于任意 $v \in \mathbb{R}^d$，我们用 $\|v\|$ 表示 v 的欧几里得范数。对于 $v \in \mathbb{R}^d$ 以及 $\mathbb{R}^d$ 的子空间 W，我们用 $d(v, W)$ 表示从 v 到 W 的欧几里得距离；也就是说， $d(v, W) := \min\{\|v - w\| \mid w \in W\}$。我们始终考虑赋予由欧几里得范数诱导的拓扑的空间 $\mathbb{R}^d$。我们用 $\langle , \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准内积；也就是说，对于 $\mathbb{R}^d$ 中所有的 $v = (v_1, \ldots, v_d)$ 和 $w = (w_1, \ldots, w_d)$，都有 $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^d v_i w_i$。如果非空子集 C 满足 C 对非负线性组合封闭，则称其为 $\mathbb{R}^d$ 的一个锥。若锥 C 满足 $C \cap -C = \{0\}$，则称其为尖锥。设 $\mathbb{R}^d$ 的一个非空子集为 S。S 的锥包记为 $\text{cone}_{\mathbb{R}}(S)$，定义如下:

$$\text{cone}_{\mathbb{R}}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i v_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \text{ and } v_i \in S \text{ and } c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ for every } i \in [\![1, n]\!] \right\},$$

这意味着 $\text{cone}_{\mathbb{R}}(S)$ 是包含 S 的 $\mathbb{R}^d$ 中最小的锥。在不会造成歧义时，我们用 $\text{cone}(S)$ 代替 $\text{cone}_{\mathbb{R}}(S)$。

现在假设 $d \geq 2$。取 c_0、……、$c_{d-1} \in \mathbb{R}$，并令 H 为 $\mathbb{R}^d$ 中由方程 $x_d = c_0 + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x_i$ 描述的一个仿射超平面。由 H 确定的 上闭仿射半空间 是集合

$$H^+ := \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x_d \geq c_0 + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x_i \right\}.$$

我们类似地定义下闭仿射半空间 H^-，但改用不等式 $x_d \leq c_0 + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x_i$。为简化记法，我们将由 H 确定的 H^+ （分别为 H^-）简称为上半空间（分别为下半空间）。

3. Abelian Groups

我们首先考察阿贝尔群类中具有遗传原子性这一性质的情况。在小节 3.1 中，我们确定遗传原子的阿贝尔群。接下来，在小节 3.2 中，我们看一些不具遗传原子性的阿贝尔群的简单例子，并在其中找出一些从原子性角度来看颇有趣的子幺半群：命题 3.6 中的子幺半群是通过一种新颖的构造得到的，而例 3.3 的 (a) 和 (c) 部分中的子幺半群已在交换环理论中发挥作用（分别参见 [26, 定理 1。3]和 [22, 例 3。6],）。

3.1. **遗传原子的阿贝尔群**。本节的主要目的是确定哪些阿贝尔群是遗传原子的，我们将在下一个定理中完成这一任务。众所周知，而且不难证明，阿贝尔群 $\mathbb{Z}$ 的每个子幺半群要么是 $\mathbb{Z}$ 的子群，要么是有限生成幺半群。因此，$\mathbb{Z}$ 是遗传原子的群。自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^2$ 则并非如此，下一例将对此加以说明。对于任意 $d \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathbb{Z}^d$ 的元素称为**格点**，并将自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^d$ 的子幺半群称为**格幺半群**。

例 3.1. 考虑秩为 2 的自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^2$ 的格幺半群 $M := (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N}_0)$。注意到 M 是约化的。此外，显然 $a := (0, 1)$ 是 M 的一个原子，而且 a 整除 M 的每个非零元素。结合 M 是约化的这一事实，可知 $\mathscr{A}(M) = \{a\}$。由于 $\langle \mathscr{A}(M) \rangle = \{0\} \times \mathbb{N}_0$，幺半群 M 不是原子的。因此，阿贝尔群$\mathbb{Z}^2$ 不是遗传原子的。由于对于每个满足 $d \geq 3$ 的整数 d，我们都可以将 $\mathbb{Z}^2$ 自然地嵌入为 $\mathbb{Z}^d$ 的一个子群，因此可推知阿贝尔群 $\mathbb{Z}^d$ 不是遗传原子的。

我们也可以先注意到 M 是全序群 $(\mathbb{Z}^2, \preceq)$ 的非负锥，从而得出相同的结论，其中 $\preceq$ 表示字典序（优先比较第一坐标）。类似地，我们可以论证：对于每个满足 $d \geq 3$ 的整数 d，全序群 $(\mathbb{Z}^d, \preceq)$ 的非负锥 M_d 只包含一个原子（即 $M_d^\bullet$ 的最小元），该原子整除 $M_d^\bullet$ 中任意正元素，其中 $\preceq$ 是字典序。因此，$M_d^\bullet$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的一个非原子子幺半群。于是，$\mathbb{Z}^d$ 不是遗传原子的。

W例 3.1 鉴于此，我们接下来确立本节的主要结果。

定理 3.2。设 G 是一个阿贝尔群，T 是 G的挠子群。那么以下条件等价。

(a) G满足遗传 *ACCP*。
(b) G是遗传原子的。(c)
G/T 是循环的。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)：显然，任何满足升链条件（ACCP）的幺半群都是原子的。

(b) $\Rightarrow$ (c)：假设 G 是遗传原子的。我们先证明商群 G/T 的秩至多为 1，然后利用这一信息证明 G/T 是循环的。

反设秩 $G/T \geq 2$。令 d为 G/T的秩，这也就是 G的秩。由于 $d \geq 2$，我们可以取 u、$v \in G$，使得 $\{u, v\}$ 是 G 的一个整线性无关子集（特别地，u 和 v 是 G的非挠元）。考虑全序群 $(\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v, \preceq)$，其中 $\preceq$ 是字典序（优先比较 u坐标）。现在令 $M := (\mathbb{N}u + \mathbb{Z}v) \bigcup \mathbb{N}_0 v$，并注意到 M 是全序群 $(\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v, \preceq)$的非负锥。因此 M是一个约化幺半群。我们断言 M不是原子的。由于 v 是 $M^\bullet$的最小元素，而 $M^\bullet$是 $(\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v, \preceq)$的正锥，因此 v整除 M的每个非零元素。由于 M是约化的，$M \setminus \{0, v\}$中没有元素能在 M中整除 v。因此，v是 M的一个原子。由于 v 整除 M中的任意非零元素，而 M 是约化的这一事实保证了$\mathscr{A}(M) = \{v\}$。因为 $M \neq \mathbb{N}_0 v$，我们得出 M不是原子的。因此，G 不是遗传原子的，这与我们的初始假设矛盾。故秩$G/T \leq 1$。

接下来我们证明 G/T是循环的。为导出矛盾，假设情况并非如此。那么 G/T 不可能是平凡群，因此其秩$G/T = 1$。众所周知，每个秩一无挠阿贝尔群都同构于 $\mathbb{Q}$ 的一个加法子群（例如参见 [14, 第 24]节）。此外，众所周知，$\mathbb{Q}$ 的每个加法子群，要么是无限循环群，要么是无限循环群的严格递增并。由于 G/T 不是循环群，我们可以写成

$$G/T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(s_n + T),$$

其中 $(s_n)_{n\geq 1}$ 是一个项取自 G 的序列，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$， $\mathbb{Z}(s_n+T)\subsetneq\mathbb{Z}(s_{n+1}+T)$。由于 G/T 不是平凡群，删去 $(s_n)_{n\geq 1}$的第一项后，我们可以假设对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有$s_n\notin T$。由于对每个 $n\in\mathbb{N}$， $\mathbb{Z}(s_n+T)=\mathbb{Z}(-s_n+T)$，在必要时用 $-s_n$ 替换 s_n 后，我们可以假设对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $s_n+T\in\mathbb{N}(s_{n+1}+T)$。取一个项取自 $\mathbb{N}_{\geq 2}$ 的序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，等式 $s_n+T=b_{n+1}s_{n+1}+T$ 成立，然后将$s_n=b_{n+1}s_{n+1}+t_n$ 写为某个 $t_n\in T$。现在考虑子幺半群

$$M:=\langle s_n,t_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$$

属于 G。我们断言，幺半群 M 不是原子的，这将与 G 是遗传原子的这一事实矛盾。首先注意，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，等式 $s_n=b_{n+1}s_{n+1}+t_n$连同$t_n\in T$这一事实，保证存在 $b'_n\in\mathbb{N}$ 使得 $b'_ns_n=b'_nb_{n+1}s_{n+1}$。因此，当且仅当 $s_1\notin\mathscr{U}(M)$ 时，集合$\{s_n\mid n\in\mathbb{N}\}$与 $\mathscr{U}(M)$不相交。为证明 $s_1\notin\mathscr{U}(M)$，取$c\in\mathbb{N}_0$ 使得 $-cs_1\in M$，然后写成

$$-cs_1=\sum_{n=1}^{N}c_ns_n+\sum_{n=1}^{N}d_nt_n \tag{3.1}$$

对于某些 $N\in\mathbb{N}$和 c_1，……，c_N,d_1，……，$d_N\in\mathbb{N}_0$。由于 t_1，……，t_N都是挠元，并且对每个 $n\in[\![1,N]\!]$，包含关系$s_n+T\subseteq\mathbb{N}(s_N+T)$成立，在将(3.1)两边乘以一个足够大的正整数后，我们得到：对某些 c'_0，c'_1，……，$c'_N\in\mathbb{N}_0$，有 $-c'_0s_N=\sum_{n=1}^{N}c'_ns_N$。因为 $s_N\notin T$，而 $\left(\sum_{n=0}^{N}c'_n\right)s_N=0$ 这一事实保证了 $c'_0=c'_1=\cdots=c'_N=0$，因此(3.1)中有 $c=0$。于是，$-s_1\notin M$，从而 $s_1\notin\mathscr{U}(M)$。因此，$\{s_n\mid n\in\mathbb{N}\}$中的元素在 M中都不可逆。故 M 不是群。此外，对每个 $n\in\mathbb{N}$， $s_n\in\mathbb{N}_{\geq 2}s_{n+1}+t_n$ 这一事实保证$s_n\notin\mathscr{A}(M)$。另一方面，对每个 $n\in\mathbb{N}$，我们看到 $t_n\notin\mathscr{A}(M)$，因为 $t_n\in T\cap M\subseteq\mathscr{U}(M)$。因此， $\mathscr{A}(M)$为空集，而 M 不是群这一事实保证 M 不是原子的，由此得到所需的矛盾。

(c) $\Rightarrow$ (a)：假设群 G/T 是循环的。首先假设 G/T 是平凡群。在这种情况下， G 是挠群；众所周知且易于验证， G 的每个子幺半群实际上都必定是 G的子群。由于每个阿贝尔群都平凡地满足升链条件（ACCP），因此 G 是遗传 ACCP。

因此，假设 G/T 不是平凡群。由于 G/T 是无挠的，它不可能是有限群。因此 $G/T\cong\mathbb{Z}$。取 $g_0\in G$ 使得 $G/T=\mathbb{Z}(g_0+T)$，于是对于任意 $g\in G$，若 $g+T=ng_0+T$ 对于某个 $n\in-\mathbb{N}$（分别为 $n\in\mathbb{N}$），则记作 $g+T\prec T$（分别为 $g+T\succ T$）。我们接下来证明 G 的每个子幺半群都满足升链条件（ACCP）。为此，我们固定 G 的一个子幺半群 M，并将证明的其余部分分为以下两种情形。

Case 1: 存在 b_1， $b_2\in M$使得 $b_1+T\prec T$且 $b_2+T\succ T$。我们将证明 M是 G的子群。为此，固定 $b\in M$。若 $b\in T$，则显然 $b\in\mathscr{U}(M)$。因此，假设 $b\notin T$。于是， $b+T\prec T$或 $b+T\succ T$。先假设 $b+T\prec T$。此时，我们可以选取 m， $n\in\mathbb{N}$使得 $b+T=-mg_0+T$且 $b_2+T=ng_0+T$，由此可得$m(b_2+T)+n(b+T)=T$。于是 $mb_2+nb\in T$，这意味着对于某个足够大的$N\in\mathbb{N}$，有 $(mN)b_2+(nN)b=0$。因此 $b\in\mathscr{U}(M)$。 $b+T\succ T$的情形类似。由此， M是 G的子群，因此 M 满足升链条件（ACCP）。

Case 2: $b+T\preceq T$对所有 $b\in M$或对所有 $b+T\succeq T$对所有 $b\in M$。如有必要，将 M替换为其同构副本 $-M$后，我们可以假设对所有 $b\in M$都有 $b+T\succeq T$。令

$$\bar{M}:=\{b+T\mid b\in M\}.$$

显然， M是商群 G/T 的子幺半群，且包含于 $\mathbb{N}_0(g_0+T)\cong\mathbb{N}_0$。因此， M同构于一个数值幺半群，故满足升链条件（ACCP）。为了证明 M 也满足

升链条件（ACCP），假设 $(b_n + M)_{n\geq 1}$ 是 M 的主理想升链。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，注意到，包含关系 $b_n + M \subseteq b_{n+1} + M$ 保证了 $(b_n + T) + M \subseteq (b_{n+1} + T) + M$。因此，$((b_n + T) + M)_{n\geq 1}$ 是 M 的主理想升链，所以它最终必定稳定。取 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个满足 $n \geq N$ 的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $(b_n + T) + M = (b_N + T) + M$。现在固定 $k \in \mathbb{N}$，使得 $k \geq N$。由于 M 在同构意义下是一个数值幺半群，因此它是约化幺半群。因此，等式 $b_k + T = b_N + T$ 成立，从而对于某个 $t_k \in T$，有 $b_N = b_k + t_k$。另一方面，包含关系 $b_N + M \subseteq b_k + M$ 保证了 $t_k = b_N - b_k \in M$。因此，$t_k \in M \cap T \subseteq \mathscr{U}(M)$，这意味着 $b_k + M = b_N + M$。于是，主理想升链 $(b_n + M)_{n\geq 1}$ 也稳定。因此，G 的子幺半群 M 满足升链条件（ACCP），证毕。□

3.2. **非遗传原子的阿贝尔群浅析**。由于 $\mathbb{Q}$ 是一个非循环的无挠阿贝尔群，定理 3.2 保证了 $\mathbb{Q}$ 存在一个不满足升链条件（ACCP）的加法子幺半群：事实上，加法幺半群 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 甚至不是原子的。更有意思的是，$\mathbb{Q}$ 存在一些原子子幺半群，但它们不满足升链条件（ACCP）。以下例子对这一观察有所阐释（Coykendall 与作者在证明 $\mathbb{Q}$ 命题 5 时构造了另一个较不自然的例子：一个不满足升链条件（ACCP）的 [11,原子加法子幺半群。1]）。

例 3.3。

(a) 设 $(p_n)_{n\geq 1}$ 是严格递增序列，其底层集合由所有奇素数组成。考虑子幺半群 $M := \langle \frac{1}{2^{n-1}p_n} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$[1] 属于 $\mathbb{Q}$。不难验证，M 是一个原子幺半群，且 $\mathscr{A}(M) = \{\frac{1}{2^{n-1}p_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$。然而，$M$ 不满足升链条件（ACCP），例如，$(\frac{1}{2^n} + M)_{n\geq 1}$ 是 M 的一个不会稳定的主理想升链。

(b) 现在令 $(p_n)_{n\geq 1}$ 为底层集合是 $\mathbb{P}$ 的严格递增序列，并考虑 $\mathbb{Q}$ 的子幺半群 $M := \langle \frac{1}{p_n p_{n+2}} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$。与前一个例子一样，不难验证 M 是原子的，且 $\mathscr{A}(M) = \{\frac{1}{p_n p_{n+2}} \mid n \in \mathbb{N}\}$。另一方面，$M$ 不满足升链条件（ACCP）。事实上，由于

$$\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}}\right) = (p_{n+2} - p_n)\frac{1}{p_n p_{n+2}} \in M$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，序列 $(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} + M)_{n\geq 1}$ 是 M 的主理想升链，且不会稳定。

(c) 令 q 为满足 $0 < q < 1$ 和 $q^{-1} \notin \mathbb{N}$ 的正有理数，并写作 $q = \frac{a}{b}$，其中 $a,\ b \in \mathbb{N}$，且 $\gcd(a,\ b) = 1$。现在考虑 $\mathbb{Q}$ 的子幺半群 $M := \langle q^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \rangle$。不难验证 M 是原子的（为此，我们需要条件 $q^{-1} \notin \mathbb{N}$），且 $\mathscr{A}(M) = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$。然而，由于对每个 $n \in \mathbb{N}$ 等式 $aq^n = (b - a)q^{n+1} + aq^{n+1}$ 都成立，我们推知 $(aq^n + M)_{n\geq 1}$ 是 M 的主理想升链，且不会稳定。因此，M 不满足升链条件（ACCP）。

与 $\mathbb{Q}$ 的情形一样，群 $\mathbb{Z}^2$ 是一个非循环的无挠阿贝尔群。因此，根据定理 3.2，存在一个 $\mathbb{Z}^2$ 的子幺半群不满足升链条件（ACCP）：事实上，我们在例 3.1 中已经看到，$\mathbb{Z}^2$ 关于字典序（第一坐标优先）的非负锥是 $\mathbb{Z}^2$ 的一个子幺半群，甚至不是原子的。一个更微妙的问题是，$\mathbb{Z}^2$ 是否存在一个原子子幺半群，但它不满足升链条件（ACCP）。本

[1] 这个幺半群是 Grams 构造的核心要素；Grams 构造得到了第一个不满足升链条件（ACCP）的原子整环。

节专门介绍一种构造，以对这个问题给出肯定答案。我们先给出以下所需引理。

引理 3.4. 设 L 是 $\mathbb{R}^2$中经过原点的一条实直线。那么对每个 $\epsilon > 0$，都存在$v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$，使得 $d(v,\ L) < \epsilon$。

证明。固定 $\epsilon > 0$。若 L 的斜率是有理数或无穷大，则显然 L 必定包含一个坐标为有理数的非零向量，因此引理的结论成立。接下来假设 L 的斜率是无理数。由于 L 的斜率不为 0，我们可以选取 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得$w := (\alpha,\ 1) \in L$。注意，α 是无理数，因为 L 的斜率是无理数。众所周知（且不难验证），集合 $\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在区间 $[0,1]$中稠密。因此存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor < \epsilon$。令 $v = (\lfloor m\alpha \rfloor,\ m)$，并考虑到 L 中的点由方程 $x - \alpha y = 0$描述，我们得到

$$d(v, L) = \frac{|x - \alpha y|_{(x,y)=v}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor}{\sqrt{1+\alpha^2}} < \epsilon.$$

因此，v 是一个非零格点，满足 $d(v,\ L) < \epsilon$。 □

引理 3.5. 存在一条与单位圆相切且不包含任何格点的直线。

证明. 令 $\mathscr{L}$ 为由 $\mathbb{R}^2$ 中所有斜率为无理数、且在切点的 y坐标为正的位置与单位圆相切的实直线组成的集合（即与上半单位圆相切的直线）。$\mathscr{L}$ 与 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 之间存在自然双射，因此 $\mathscr{L}$ 不可数。注意，直线 $\ell \in \mathscr{L}$ 不可能包含两个不同的格点，否则 ℓ 的斜率就会是有理数。反设每条直线 $\ell \in \mathscr{L}$ 都包含至少一个格点 P_ℓ，因而恰好包含一个格点。因此，对所有 $\ell \in \mathscr{L}$，对应关系 $\ell \mapsto P_\ell$ 诱导出一个函数 $f\colon \mathscr{L} \to \mathbb{Z}^2$，满足对所有 $P \in \mathbb{Z}^2$，$|f^{-1}(P)| \le 2$。于是，鉴于 $\mathbb{Z}^2$ 可数，且等式 $\mathscr{L} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}} f^{-1}(P)$ 成立，可知 $\mathscr{L}$可数，这就产生了矛盾。因此，$\mathscr{L}$ 中存在一条与 $\mathbb{Z}^2$不相交的直线。□

我们接下来将为每个 $d \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ 构造一个位于 $\mathbb{Z}^d$ 内的秩为 d 的格幺半群，它是原子的，但不满足升链条件（ACCP）。

命题 3.6. 对每个 $d \in \mathbb{N}_{\ge 2}$，都存在 $\mathbb{Z}^d$ 的一个约化秩为 d 的子幺半群，它是原子的，但不满足升链条件（*ACCP*）。

证明。我们先证明命题在 $d = 2$ 情形下的结论。一旦构造出 $\mathbb{Z}^2$ 的一个原子子幺半群且它不满足升链条件（ACCP），其余结论便可轻易推出。

根据引理 3.5，存在一条直线 L 位于 $\mathbb{R}^2$ 中，与单位圆的上半部分相切，且不与 $\mathbb{Z}^2$相交。利用对称性，我们还可以进一步假设 L 与单位圆的切点位于第二象限，且 L 的斜率为正。令 u 为由该切点确定的单位向量，并令 v 为与 u正交且位于第一象限的单位向量。现在令 $L_0 := \mathbb{R}v$。我们将构造一个格幺半群 M，它包含于由 L_0^+ 确定的上半空间 L_0中。令 p_u 和 p_v 分别表示 $\mathbb{R}^2$在一维子空间 $\mathbb{R}u$ 和 $\mathbb{R}v$上的典范投影。

首先，我们归纳地构造一个序列 $(a_n)_{n \ge 0}$，其项属于 $\mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$ 并满足某些条件；然后证明由集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ 生成的格幺半群是原子的，但不满足升链条件（ACCP）。取 $a_0 = (0,1) \in \mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$。注意到 $a_0 \in L^-$。令

$$m_0 := \min\{m \in \mathbb{N} \mid ma_0 \in L^+\}.$$

注意，$d(m_0a_0,\ L) > 0$ 因为 L 不包含任何格点。由引理 3.4，我们可以选取 $a_2 \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $d(a_2,\ L_0) < \frac{1}{2}d(m_0a_0,\ L)$。如有必要，将 a_2 替换为 $-a_2$ 后，我们可以假设 $a_2 \in \mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$。现在令

$$m_2 := \min\{m \in \mathbb{N} \mid ma_2 \in L^+\} \quad \text{and} \quad a_1 := m_0a_0 - m_2a_2.$$

图 1展示了迄今引入的向量和仿射直线。 的极小性 m_2

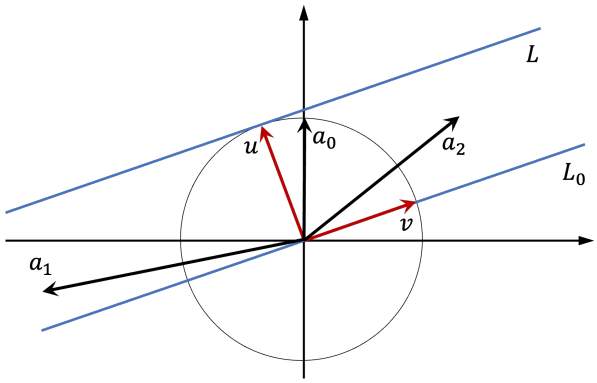


FIGURE 1. 在序列 $(a_n)_{n\ge 1}$ 的归纳构造基例中的向量 a_0，a_1，a_2 。

保证 $d(m_2a_2,\ L) < d(a_2,\ L_0)$。因此 $d(m_2a_2,\ L) < d(m_0a_0,\ L)$，由此可推得 $m_0a_0 - m_2a_2 \in L_0^+ \setminus L_0$，进而得到 $a_1 \in \mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$，且 $d(a_1,\ L_0) > 0$。此外，我们可以验证

$$d(a_1, L_0) = \|p_u(m_0a_0 - m_2a_2)\| = d(m_0a_0, L) - d(m_2a_2, L) < d(m_0a_0, L) < d(a_0, L_0), \tag{3.2}$$

其中最后一个不等式由 m_0 的极小性得出。另外，由于 $d(a_2,\ L_0) < \frac{1}{2}d(m_0a_0,\ L)$ 且 $m_0a_0 = a_1 + m_2a_2$，我们可知

$$2d(a_2, L_0) < d(m_0a_0, L) = d(m_0a_0, L_0) - 1 = \|p_u(a_1 + m_2a_2)\| - 1 \tag{3.3}$$

$$= \|p_u(a_1)\| + (\|p_u(m_2a_2)\| - 1) = d(a_1, L_0) + d(m_2a_2, L) < d(a_1, L_0) + d(a_2, L_0), \tag{3.4}$$

其中，最后一个不等式由 m_2 的极小性推出。因此，$d(a_2, L_0) < d(a_1, L_0) < d(a_0, L_0)$。现在考虑幺半群 $M_2 := \langle a_0, a_1, a_2\rangle$。由于 $d(a_2, L_0) < d(a_0, L_0)$，根据事实 $a_2 \in \mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$，我们可得 $a_2 \notin \mathbb{R}a_0$。因此，$\{a_0, a_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基；由此，等式 $a_1 = m_0a_0 - m_2a_2$保证了 $a_1 \notin \langle a_0, a_2\rangle$。故 $a_1 \in \mathscr{A}(M_2)$。同理，我们可以验证 $a_2 \in \mathscr{A}(M_2)$。现在注意到，由于 $\{a_0, a_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，等式 $m_0a_0 = a_1 + m_2a_2$ 确保 $\{a_1, a_2\}$也是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基。因此，不等式 $m_0 \ge 2$与等式 $a_0 = \frac{1}{m_0}a_1 + \frac{m_2}{m_0}a_2$共同保证了 $a_0 \notin \langle a_1, a_2\rangle$。这意味着 $a_0 \in \mathscr{A}(M_2)$。故 $\mathscr{A}(M_2) = \{a_0, a_1, a_2\}$。

现在假设，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，我们已经构造了由 $\mathbb{Z}^2 \cap L_0^+$ 中格点组成的有限序列 $(a_k)_{k\in[\![0,\ 2n]\!]}$，以及由 $\mathbb{N}_{\ge 2}$ 中正整数构成的有限序列 $(m_{2k})_{k\in[\![0,\ n]\!]}$，使得以下条件成立：

(1) $a_{2k+1} = m_{2k}a_{2k} - m_{2k+2}a_{2k+2}$ 对于每个 $k \in [\![0, n-1]\!]$，(2) $m_{2k+2} =$ 对于每个 $k \in [\![0, n-1]\!]$取最小值，(3) $d(a_{k+1}, L_0) < d(a_k, L_0)$ 对每个 $k \in [\![0, 2n-1]\!]$成立，并且 (4) $M_{2n} := \langle a_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\rangle$ 是一个原子幺半群，且 $\mathscr{A}(M_{2n}) := \{a_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\}$。

断言*1*. 存在 $\ell \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $w \in L_0^+ \cap L^-$，不等式 $\|p_v(w)\| > \ell$ 蕴含 $w + a_i \notin \mathsf{cone}(M_{2n})$，对任意 $i \in [\![0, 2n]\!]$均成立。

断言*1*的证明。 取足够大的 $\ell \in \mathbb{N}$，使得

$$4\frac{\max\{\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\}}{\min\{\|p_u(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\}} < \ell.$$

现在反设存在 $w \in L_0^+ \cap L^-$，使得 $\|p_v(w)\| > \ell$，满足$w + a_j \in \mathsf{cone}(M_{2n})$，其中某个 $j \in [\![0, 2n]\!]$。将 $w + a_j = \sum_{i=0}^{2n} r_i a_i$写成某个 $r_0, \dots, r_{2n} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$的形式，并注意到

$$\min\left\{\|p_u(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\right\} \sum_{i=0}^{2n} r_i \leq \sum_{i=0}^{2n} r_i \|p_u(a_i)\| = \left\|p_u\left(\sum_{i=0}^{2n} r_i a_i\right)\right\| = \|p_u(w + a_j)\| < 2.$$

因此 $\sum_{i=0}^{2n} r_i < \frac{2}{\min\{\|p_u(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\}}$，我们可以利用这个不等式推得

$$2\|p_v(w + a_j)\| = 2\sum_{i=0}^{2n} r_i \|p_v(a_i)\| \leq 2\max\left\{\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\right\} \sum_{i=0}^{2n} r_i < \ell. \tag{3.5}$$

此外，我们看到 $\|p_v(w)\| > \ell > 2\max\{\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0,\ 2n]\!]\} \geq 2\|p_v(a_j)\|$，利用这些不等式，我们可以验证

$$\|p_v(w)\| < \|p_v(w)\| + \left(\|p_v(w)\| - 2\|p_v(a_j)\|\right) \leq 2\|p_v(w + a_j)\|. \tag{3.6}$$

将（3.5）和（3.6）中的不等式结合起来，我们得到 $\|p_v(w)\| < \ell$，这与我们的初始假设矛盾。因此，我们证明了断言1。

设 ℓ 如断言1所述。由于 $m_{2n}a_{2n} \notin L$，引理 3.4 允许我们选取 $a_{2n+2} \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $d(a_{2n+2}, L_0) < \frac{1}{2}d(m_{2n}a_{2n}, L)$。如有必要，将 a_{2n+2}替换为 $-a_{2n+2}$后，我们可以假设 $a_{2n+2} \in \mathbb{Z}^2 \cap L_0^+ \cap L^-$。此外，我们可以假设 $\|a_{2n+2}\|$ 足够大，使得

$$\|p_v(a_{2n+2})\| > \max\left\{\ell, \|p_v(m_{2n}a_{2n})\|\right\}. \tag{3.7}$$

现在令

$$m_{2n+2} := \min\{m \in \mathbb{N} \mid ma_{2n+2} \in L^+\} \quad \text{and} \quad a_{2n+1} = m_{2n}a_{2n} - m_{2n+2}a_{2n+2}$$

以将上面的条件 (1) 和 (2) 扩展到区间 $[\![0, n]\!]$。由于 L 不含任何格点，$a_{2n+2} \in L^- \setminus L$，因此 $m_{2n+2} \geq 2$。根据不等式 $d(a_{2n+2}, L_0) < \frac{1}{2}d(m_{2n}a_{2n}, L)$ 以及 m_{2n} 和 m_{2n+2} 的极小性（此处我们对 $k = n - 1$ 使用了上面的条件 (2)），我们可以仿照 (3.2) 和 (3.3)–(3.4) 的做法验证 $d(a_{2n+2}, L_0) < d(a_{2n+1}, L_0) < d(a_{2n}, L_0)$，从而将上面的条件 (3) 扩展到区间 $[\![0, 2n + 1]\!]$。此外，

$$\begin{aligned}\|p_v(a_{2n+1})\| &= \|p_v(m_{2n}a_{2n}) - p_v(m_{2n+2}a_{2n+2})\| \\ &\geq \|p_v(m_{2n+2}a_{2n+2})\| - \|p_v(m_{2n}a_{2n})\| > \|p_v(a_{2n+2})\|,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是由以下事实得出的：$m_{2n+2} \geq 2$ 并且 $\|p_v(a_{2n+2})\| > \|p_v(m_{2n}a_{2n})\|$(根据（3.7）)。因此，以下不等式成立：

$$\|p_v(a_{2n+1})\| > \ell > 4\frac{\max\{\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\}}{\min\{\|p_u(a_i)\| \mid i \in [\![0,2n]\!]\}}. \tag{3.8}$$

为了完成序列 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(m_{2n})_{n\geq 0}$的归纳构造，我们只需将上面的条件 (4) 扩展到 $2n + 2$；也就是说，我们需要针对幺半群$M_{2n+2} := \langle a_i \mid i \in [\![0, 2n + 2]\!]\rangle$论证以下断言。

命题 *2*. $\mathscr{A}(M_{2n+2}) = \left\{a_i \mid i \in [\![0, 2n + 2]\!]\right\}$.

断言2的证明。我们将证明 $a_{2n+1} \notin \mathsf{cone}(M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\})$ 和 $a_{2n+2} \notin \mathsf{cone}(M_{2n} \cup \{a_{2n+1}\})$。反设 $a_{2n+1} \in \mathsf{cone}(M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\})$，并写作 $a_{2n+1} = b + ra_{2n+2}$，其中 $b \in \mathsf{cone}(M_{2n})$ 且 $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$。由于 $a_{2n+1} = m_{2n}a_{2n} - m_{2n+2}a_{2n+2}$，

$$\Big(1 + \frac{r}{m_{2n+2}}\Big)a_{2n+1} = b + \frac{rm_{2n}}{m_{2n+2}}a_{2n} \in \mathrm{cone}(M_{2n}),$$

这意味着 $a_{2n+1} \in \mathsf{锥}(M_{2n})$。因此，$a_{2n+1} + a_1 \in \mathsf{锥}(M_{2n})$，由此根据断言1可得 $\|p_v(a_{2n+1})\| \le \ell$。然而，这与（3.8）矛盾。因此 $a_{2n+1} \notin \mathsf{锥}(M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\})$。以完全类似的方式，我们可以验证 $a_{2n+2} \notin \mathsf{锥}(M_{2n} \cup \{a_{2n+1}\})$。因此，$a_{2n+1}$，$a_{2n+2} \in \mathscr{A}(M_{2n+2})$。

接下来我们证明，a_{2n+2}（分别地，a_{2n+1}）不整除幺半群 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\}\rangle$（分别地，$\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+1}\}\rangle$）中的任何元素 $a_0, \dots, a_{2n}$。首先，反设a_{2n+2} 整除 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\}\rangle$中的某个元素 $a \in \{a_i \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}$，并写作 $a = ca_{2n+2} + \sum_{i=1}^{m} b_i$，其中某个 $c \in \mathbb{N}$ 且 $b_1, \dots, b_m \in \{a_i \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}$。于是我们看到

$$c\,\|p_v(a_{2n+2})\| = \left\|p_v(a) - \sum_{i=1}^{m} p_v(b_i)\right\| \le (m+1)\max\big\{\,\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0, 2n]\!]\big\}. \tag{3.9}$$

因此

$$1 + d(a, L_0) = 1 + \|p_u(a)\| > 1 + \sum_{i=1}^{m} \|p_u(b_i)\| > (m+1)\,\|p_u(a_{2n})\| \tag{3.10}$$

$$\ge \frac{\|p_v(a_{2n+2})\| \cdot \|p_u(a_{2n})\|}{\max\{\|p_v(a_i)\| \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}} > \frac{4\,\|p_u(a_{2n})\|}{\min\{\|p_u(a_i)\| \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}} = 4, \tag{3.11}$$

其中，第二个不等式由上面的条件 (3) 得出（因为对于每个$i \in [\![0, 2n]\!]$，都有 $\|p_u(a_i)\| = d(a_i, L_0)$），第三个不等式由 (3.9) 得出，第四个不等式则由 (3.7) 得出。因此，我们得到 $d(a, L_0) > 1$，这就构成了矛盾。故 a_{2n+2} 不整除幺半群 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\}\rangle$ 中的任何元素 $a_0, \dots, a_{2n}$。类似地，在论证最后使用 (3.8) 代替 (3.7)，可以证明 a_{2n+1} 不整除幺半群 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+1}\}\rangle$ 中的任何元素 $a_0, \dots, a_{2n}$。

现在我们来证明，在较大的幺半群 M_{2n+2} 中，a_{2n+1} 和 a_{2n+2} 都不能整除 $a_0, \dots, a_{2n}$ 中的任何元素。反设原子 a_{2n+1} 或 a_{2n+2} 整除 M_{2n+2} 中的某个元素 $a \in \{a_i \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}$。由于 a_{2n+2} 不能整除幺半群 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\}\rangle$ 中的 $a_0, \dots, a_{2n}$ 中的任何元素，且 a_{2n+1} 不能整除幺半群 $\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+1}\}\rangle$ 中的 $a_0, \dots, a_{2n}$ 中的任何元素，因此对于某些 $c_0, \dots, c_{2n+2} \in \mathbb{N}_0$，我们可以写成 $a = \sum_{i=0}^{2n+2} c_i a_i$，使得 $c_{2n+1} > 0$ 和$c_{2n+2} > 0$。现在，在 $a = \sum_{i=0}^{2n+2} c_i a_i$ 中用 $m_{2n}a_{2n} - m_{2n+2}a_{2n+2}$ 替换 a_{2n+1}，即可得到：

$$(c_{2n+1}m_{2n+2} - c_{2n+2})a_{2n+2} + a = (c_{2n+1}m_{2n} + c_{2n})a_{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} c_i a_i. \tag{3.12}$$

因此，$(c_{2n+1}m_{2n+2} - c_{2n+2})a_{2n+2} + a \in \mathsf{锥}(M_{2n})$。由于 $a \in \mathscr{A}(M_{2n})$ 且 a_{2n+2}不整除 a 中的$\langle M_{2n} \cup \{a_{2n+2}\}\rangle$，由 (3.12) 可知系数 $c_{2n+1}m_{2n+2} - c_{2n+2}$ 为正。因此 $(c_{2n+1}m_{2n+2} - c_{2n+2})(a_{2n+2} + a) \in \mathsf{锥}(M_{2n})$，这意味着 $a_{2n+2} + a \in \mathsf{锥}(M_{2n})$。然而，这与矛盾相悖，因为根据断言1，$\|p_v(a_{2n+2})\| > \ell$ 这一事实意味着 $a_{2n+2} + a \notin \mathsf{锥}(M_{2n})$。因此，$a_{2n+1}$和 a_{2n+2}均不整除幺半群 M_{2n+2} 中的任何元素 a_0、.....、a_{2n}。

由于 $\mathscr{A}(M_{2n}) = \{a_i \mid i \in [\![0, 2n]\!]\}$，上一段中证明的陈述保证了 $\{a_i \mid i \in [\![0, 2n]\!]\} \subseteq \mathscr{A}(M_{2n+2})$。再结合 a_{2n+1}和 a_{2n+2}均属于

$\mathscr{A}(M_{2n+2})$，我们可以得出 $\mathscr{A}(M_{2n+2}) = \{a_i \mid i \in [\![0, 2n+2]\!]\}$，从而完成命题 2 的证明。

因此，存在一个格点序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，其位于 L_0^+ 中，并满足上述条件 (1)–(4)。现在考虑格幺半群 $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} M_{2n}$。注意到 $M = \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\rangle$。此外，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，由 $a_k \in \mathscr{A}(M_{2n})$ 对所有满足 $k \leq 2n$ 的 $n \in \mathbb{N}_0$ 成立这一事实，立即可知 $a_k \in \mathscr{A}(M)$。因此，$\mathscr{A}(M) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$，所以 M 是原子的。为说明 M 不满足升链条件（ACCP），考虑 M 的主理想序列 $(m_{2n}a_{2n} + M)_{n\geq 0}$。由上述条件 (1) 可知，该序列是主理想升链。另一方面，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，包含关系 $m_{2n}a_{2n} + M \subseteq m_{2n+2}a_{2n+2} + M$ 都是严格的，因为 M 是约化幺半群，且 $m_{2n+2}a_{2n+2}$ 在 M 中真整除 $m_{2n}a_{2n}$。因此，M 含有一个不稳定的主理想升链，从而 M 不满足升链条件（ACCP）。

最后，取 $d \in \mathbb{N}$，使得 $d \geq 2$，并考虑 $\mathbb{Z}^d$ 中的格子幺半群 $M_d := M \times \mathbb{N}_0^{d-2}$。显然，秩 $M_d = d$。此外，由于 M 和 $\mathbb{N}_0^{d-2}$ 都是原子的，M_d 必定也是原子的。另一方面，注意到 M 是 M_d 的除子封闭子幺半群。这一点，再加上 M 不满足升链条件（ACCP），保证了 M_d 也不满足升链条件（ACCP），由此证明完毕。□

由 [25, 定理 3.1] 可知，每个约化无挠幺半群是遗传原子的，当且仅当它满足升链条件（ACCP）。由于证明命题 M_d 中构造的格幺半群3.6是约化的，因此得到以下推论。

推论 3.7. 对每个 $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，都存在 $\mathbb{Z}^d$ 的一个秩为 d 的子幺半群，它是原子的，但不是遗传原子的。

沿着推论3.7的思路，J. Correa-Morris 与作者在 [9, 命题 4.10]中为每个 $d \in \mathbb{N}$构造了一类秩为 d 的原子幺半群，它们不满足升链条件（ACCP）。然而，推论 3.7 中的幺半群似乎是已知的首批不满足升链条件（ACCP）、且其差群为自由群的原子幺半群。

4. Group Algebras

本节讨论群代数中的遗传原子性。我们的主要目的是刻画遗传原子的群代数，这将在小节 4.1中完成。在小节4.2中，我们先考察非遗传原子的群代数内部的结构，然后比较遗传原子性与满足升链条件（ACCP）这一性质。

4.1. **遗传原子群代数**。

为证明以下定理（本节的主要结果），我们将应用定理 3.2中确立的遗传原子的阿贝尔群的刻画。

命题 4.1. 设 R 是一个整环，G 是一个非平凡阿贝尔群。则以下条件等价。

(a) $R[G]$是遗传原子的。(b) R 是 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，其中 $p \in \mathbb{P}$，且 G 是无限循环群。

证明。 (a) $\Rightarrow$ (b): 首先，假设 $R[G]$ 是遗传原子的。注意， G 必须是无挠的，因为存在非零元素 $g \in G$ 且 $ng = 0$ （其中 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ）将意味着

$$(x-1)(x^{(n-1)g} + \cdots + x + 1) = x^{ng} - 1 = 0,$$

这是不可能的，因为 $R[G]$是原子的，因而是整环。由于 G 是非平凡且无挠的，它必然包含一个同构于 $\mathbb{Z}$的子群。因此 $R[G]$ 包含一个同构于 Laurent 多项式环 $R[x^{\pm 1}]$的子环。由于 $R[G]$ 是遗传原子的， $R[x^{\pm 1}]$ 也是遗传原子的。因此，由 [12, 定理 510] 可知， R 是域 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，其中 $p \in \mathbb{P}$ （因此 R 是一个域）。

在得出 G 是无限循环群这一结论之前，我们先验证 G 是遗传原子的。为此，假设 M是 G的子幺半群，并考虑幺半群代数 $R[M]$。由于 $R[M]$是 $R[G]$的子环，前者必然是原子整环。因此，由 [28, 命题 14]可知， M 是原子的。因此， G 是遗传原子的，正如所要证明的。由于 G 是遗传原子且无挠的，根据定理3.2 可知， G 是循环的。最后， G 是非平凡且无挠这一事实保证了 G 是无限循环群。

(b) $\Rightarrow$ (a): 现在假设 R 是域 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，其中 $p \in \mathbb{P}$ ，并且 G 是无限循环群。由于 $G \cong \mathbb{Z}$，群代数 $R[G]$ 同构于 R上的 Laurent 多项式环。因此，由 [12, 定理 510] 可得 $R[G]$ 是遗传原子的，从而证明完毕。□

鉴于命题4.1，每个遗传原子群代数都满足升链条件（ACCP）。

推论 4.2。 每个遗传原子群代数都满足升链条件（*ACCP*）。

证明。 根据命题 4.1，每个遗传原子群代数都同构于某个 $F[x^{\pm 1}]$ 上的 Laurent 多项式环，其中 F 是 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张， $p \in \mathbb{P}$。由于$F[x^{\pm 1}]$ 是唯一分解整环，因此它必满足升链条件（ACCP）。□

如下例所示，推论 4.2 的逆命题并不成立。

例 4.3。 设 F 是一个域，对于任意 $p \in \mathbb{P}$，它都不是 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，并考虑群代数 $F[\mathbb{Z}]$，它可视为 Laurent 多项式环 $F[x^{\pm 1}]$。由于 $F[x^{\pm 1}]$是唯一分解整环（或诺特环），因此它必满足升链条件（ACCP）。然而，根据命题 4.1，群代数 $F[x^{\pm 1}]$并非遗传原子的：事实上，我们可以直接看到，当 F 具有特征零时，$F[x^{\pm 1}]$包含非原子子环 $\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$ ；而当 F 的特征为 $p \in \mathbb{P}$时， $F[x^{\pm 1}]$包含非原子子环$\mathbb{F}_p[t] + x\mathbb{F}_p(t)[x]$ ，其中 $t \in F$是 $\mathbb{F}_p$上的超越元。特别地，并非每个原子群代数都是遗传原子的。

在更一般的整环类别中，我们仍然不知道每个遗传原子整环是否都满足升链条件（ACCP）。下面的问题是 [12, 猜想 61]的一个版本。

问题 4.4. 每个遗传原子整环都满足升链条件（ACCP）吗?

作为例子4.3中群代数的一个特例，群代数 $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}]$ 是一个原子整环，但不是遗传原子的。此外，由唯一分解性质可从整环传递到有限个变量的 Laurent 多项式扩张这一事实，可以很容易地推知，对于每个 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，群代数 $F[\mathbb{Z}^k]$ 都是原子的，但根据命题4.1，它并非遗传原子。另一方面，也存在一些（定义在域上的）群代数甚至不是原子的。下一个命题展示了后一种情形。

回忆一下，域 F 是完美的，当且仅当 F 上的每个不可约多项式都有互异根。众所周知，域 F 是完美的，当且仅当 F 的特征为零，或者 F 的特征为素特征 p ，且 F 中的每个元素都可以写成 F 中的一个 p 次幂。此外，回忆一下

如果域 F 并非代数闭，但其域扩张 $F(\sqrt{-1})$ 是代数闭的，则称 F 为实闭域。不难验证，实闭域上的每个不可约多项式的次数至多为 2。现在我们可以证明以下命题，它给出了一类反物质群代数。

命题 4.5. 对于域 F 和无挠阿贝尔群 G，以下陈述成立。

(1) 若 F 是特征为 $p \in \mathbb{P}$ 的完美域，且 G 是 p-可除的，则 $F[G]$ 是反物质。(2) 若 F 是实闭域，且 G 是秩为 1的非循环群，则 $F[G]$ 是反物质。(3) 若 F 是代数闭域，且 G 是秩为 1的非循环群，则 $F[G]$ 是反物质。

证明。(1) 固定 $p \in \mathbb{P}$，使得 F 是特征为 p 的完美域，且 G 是 p-可除阿贝尔群。为证明 $F[G]$ 是反物质，取一个非零非单位 $f \in F[G]$，并将 f写作$f = \alpha_n x^{g_n} + \cdots + \alpha_1 x^{g_1}$，其中有一些非零系数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 以及一些互不相同的指数 $g_1, \ldots, g_n \in G$。由于 F 是特征为 p 的完美域，我们可以选取 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$，使得对每个 $i \in [\![1, n]\!]$，都有 $\alpha_i = \beta_i^p$。此外，由于 G是 p-可除的，我们可以取 $h_1, \ldots, h_n \in G$，使得对每个 $i \in [\![1, n]\!]$，都有 $ph_i = g_i$。现在我们可以将 $f = \left(\beta_n x^{h_n} + \cdots + \beta_1 x^{h_1}\right)^p$写作.....，由此可知 f不是 $F[G]$中的不可约元素。因此， $F[G]$ 是反物质整环。

（2）现在设 F 是实闭域，并且 G 是非循环的且秩为 1。由于 G 是秩一无挠阿贝尔群，根据 [14, 第 24] 节，我们可以将 G 视为 $\mathbb{Q}$ 的一个加法子群。由于 $\mathbb{Q}$ 的每个加法子群都是无限循环子群的递增并， G 不是循环的这一事实保证存在一个序列（g_n）$_{n\geq 1}$，其各项属于 $G \cap \mathbb{Q}_{>0}$，使得 $G = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Z}g_n$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathbb{Z}g_n \subsetneq \mathbb{Z}g_{n+1}$。为证明 $F[G]$ 是反物质整环，取一个非零非单位 $f \in F[G]$，并将 f 规范地写成 $f = \alpha_n x^{q_n} + \cdots + \alpha_0 x^{q_0}$，其中 α_0，.....，$\alpha_n \in F$ 和 q_0，.....，$q_n \in G$ 为某些非零元素，且 $q_n > \cdots > q_0$。由于对于每个 $u \in G$， x^u 都是 $F[G]$ 中的单位，如有必要，将 f 替换为其相伴元 $x^{-q_0} f$ 后，我们可以假设 $\operatorname{ord} f = 0$。现在固定 $g := g_N$，使 $N \in \mathbb{N}$ 足够大，从而 q_1，.....，$q_n \in \mathbb{N}g$，并且 $q_n \geq 3g$。因此，对于某个 $h \in F[x]$，我们可以将 $f = h$ 写成 x^g。由于 F 是实闭域， $F[x]$ 中的每个不可约多项式的次数至多为 2。由于 $\deg h = q_n/g \geq 3$，我们看到 h 在 $F[x]$ 中不是不可约的。因此，对于某些多项式 $b\ (x)\ c\ (x)\ \in F[x] \setminus F$，我们可以写成 $h\ (x)\ = b\ (x)\ c\ (x)$，从而 $f = h\ (x^g)\ = b\ (x^g)\ c\ (x^g)$。由于 $\operatorname{ord} h = \operatorname{ord} f = 0$， $b\ (x)$ 和 $c\ (x)$ 都不是 $F[x]$ 中的单项式，因此， $b\ (x^g)$ 和 $c\ (x^g)$ 都不是 $F[G]$中的单位。因此，等式 $f = b\ (x^g)\ c\ (x^g)$ 表明 f 不是 $F[G]$中的不可约元素。因此， $F[G]$ 是一个反物质整环。

(3) 对于这一部分，可以仿照刚才对第 (2) 部分给出的论证，利用以下事实：当 F 是代数闭域时， $F[x]$ 中的每个不可约多项式的次数都是 1。□

感兴趣的读者可以在 [2] 找到构造反物质幺半群代数的实例和类别的各种方法，其中包括与命题4.5 中给出的构造相仿的方法。

值得注意的是，命题4.1 中刻画的群代数，以及命题4.5 中给出的群代数，要么是唯一分解整环，要么是反物质整环；这两种情况都是原子性谱系中的极端情形。迄今为止，我们尚未能构造出原子的但不是唯一分解整环的域上的群代数。我们以以下问题结束本小节。

问题 4.6. 是否存在域 F 和阿贝尔群 G，使得群代数 $F[G]$ 是原子的，但不是唯一分解整环?

4.2. **深入考察非遗传原子的群代数**。 沿用命题 4.1中的记号，我们知道，如果对于任意 $p \in \mathbb{P}$， R 都不是 $\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，或者 G 不是无限循环群，那么群代数 $R[G]$ 就不是遗传原子的。特别地，群代数 $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}]$ 和 $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}^2]$ 都不是遗传原子的；由命题 4.5 的（1）、（2）和（3）部分可知，群代数 $\mathbb{F}_p[\mathbb{Q}]$、 $\mathbb{R}[\mathbb{Q}]$和 $\mathbb{C}[\mathbb{Q}]$分别甚至不是原子的。本小节将在非遗传原子的群代数的特殊情形中，找出其中的遗传原子幺半群代数。我们将以以下命题为主要工具，在例 4.8 和 4.9中完成这一工作。随后，我们将简要讨论已知的不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数，并在本小节最后提出一些潜在候选例子：它们是不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数，且位于非遗传原子的群代数 $\mathbb{F}_2[\mathbb{Q}]$ 和 $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}^2]$之中。

命题 4.7。 [26, 命题 2。1] 设 R 是满足升链条件（*ACCP*）的整环。如果 S 的子环 R 满足 $S^\times = R^\times \cap S$，那么 S 也满足升链条件（*ACCP*）。

当域 F 不是 $\mathbb{F}_p$ 对任意 $p \in \mathbb{P}$的代数扩张时，根据命题 4.1可知，群代数 $F[\mathbb{Z}]$ 不是遗传原子的。然而，即使在这种情况下，我们仍可以找出 $F[\mathbb{Z}]$ 的非平凡遗传原子子环。

例 4.8。设 F 是一个域，它不是 $\mathbb{F}_p$ 对任意 $p \in \mathbb{P}$的代数扩张。例 4.3 中给出了 $F[\mathbb{Z}]$的显式非原子子环。另一方面，对于任意在 F上超越的 $y \in F[\mathbb{Z}]$，如果 F 具有特征零，则 $\mathbb{Z}[y]$（分别为 $\mathbb{F}_p[y]$）是 $F[\mathbb{Z}]$的遗传原子子环；事实上，根据命题 4.7， $\mathbb{Z}[y]$（分别为 $\mathbb{F}_p[y]$）的每个子环都满足升链条件（ACCP），因为它是唯一分解整环，而 $\mathbb{Z}[y]$（分别为$\mathbb{F}_p[y]$）的每个子环 S 都满足 $S^\times = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}[y]^\times \cap S$（分别为 $S^\times = \mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p[y]^\times \cap S$），其中 F 具有特征 $p \in \mathbb{P}$。

当 G 是一个非循环的阿基米德有序群时，由命题 4.1 可知，对于任意 $p \in \mathbb{P}$，群代数 $\mathbb{F}_p[G]$ 都不是遗传原子的。对于每个 $p \in \mathbb{P}$，在下一个例子中，我们将为每个（非循环）阿基米德有序群 G 确定一类遗传原子的子环 $\mathbb{F}_p[G]$。

例4.9。固定 $p \in \mathbb{P}$。设 G 是一个阿基米德群，并将 G 视为 $\mathbb{R}$的一个加法子群。现在固定 $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，并考虑幺半群 $M := \{0\} \cup G_{\geq \epsilon}$。取一个序列 $(b_n)_{n\geq 1}$，其各项属于 M，且 $(b_n + M)_{n\geq 1}$ 是一个主理想升链。由于 $(b_n)_{n\geq 1}$ 是一个递减的正实数序列，它必定收敛。这意味着序列 $(b_n - b_{n+1})_{n\geq 1}$收敛于零，其各项属于 M；因此，$\min M^\bullet = \epsilon$这一事实保证存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n \geq N$都有 $b_n = b_N$。于是，主理想链 $(b_n + M)_{n\geq 1}$稳定。因此， M 满足升链条件（ACCP）。由于 M 是一个约化幺半群，由 [3, 定理 13] 可知，幺半群代数 $\mathbb{F}_p[M]$ 也满足升链条件（ACCP）。再次利用 M 是约化幺半群这一事实，可得对于 $\mathbb{F}_p[M]$的每个子环 S，都有 $\mathbb{F}_p[M]^\times \cap S = \mathbb{F}_p^\times \cap S = S^\times$。因此，根据命题 4.7，$\mathbb{F}_p[M]$是遗传原子的。

现在，我们不再讨论遗传原子的幺半群代数，而是转而寻找不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数（我们继续在非遗传原子的群代数中寻找）。正如引言中所述，并非每个原子整环都满足升链条件（ACCP）。下面简要介绍第一个已知的例子，该例由 Grams 构造于 [26]。

例 4.10 (Grams 构造)。 令 $(p_n)_{n\geq 1}$ 为底层集合是 $\mathbb{P} \setminus \{2\}$ 的严格递增序列，并考虑幺半群 $M := \left\langle {}_{2^{n-1}}\frac{1}{p_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$ 它来自例 3.3（a）部分。现在固定一个域 F，并考虑幺半群代数 $F[M]$ 在其乘法子集 $S := \{f \in F[M]^* \mid \operatorname{ord} f = 0\}$处的局部化 $F[M]_S$。由 [26, 定理 1。3] 可知 $F[M]_S$是原子的。然而，由于 M不满足升链条件（ACCP），可以很容易地推得 $F[M]_S$确实满足

不满足升链条件（ACCP）。在 [22, 定理 3。3], Li 和作者给出了 Grams 构造的一种推广 $F[M]_S$。

尽管 Grams 构造并未导出幺半群代数（而是导出幺半群代数的局部化），但也有人找到了不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数的例子。事实上，沿用例4.10中的记号，Li 和作者在 [24, 命题 3。6]中证明了，当 F具有特征零时，多项式环 $R[x]$（其中 $R := F[M]_S$）是原子的，但不满足升链条件（ACCP）（这似乎是已知的第一个具有此性质的多项式环）。Zaks 在 [30, 例 2], 中构造了域上第一个不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数；其指数幺半群具有无限秩。Li 和作者最近给出了另一种构造，见 [22, 第 4]节。同一作者更近来在 [23, 定理 5。15]中给出了后一个构造的改进版本：它是一个（域上的）幺半群代数，其指数幺半群具有有限秩（事实上为秩 2）。下面我们简要介绍 Zaks 的例子，以及不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群代数的秩 2 例子。

例4.11（Zaks 构造）。设 F 是一个域，并考虑由所有 $n \in \mathbb{N}$ 对应的、定义在 F 上的不定元 u、v、w 和 x_n 的集合。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $y_n := uv/(w^n x_n)$，并令 R 为包含集合 $\{u, v, w, x_n, y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的 $F[u, v, w^{\pm 1}, x_n^{\pm 1}]_{n\in\mathbb{N}}$ 的最小子环。Zaks 在 [30, 例 2] 中证明，R 是一个不满足升链条件（ACCP）的原子整环。此外，[23, 命题 5.18] 中首次指出，R 确实是一个无限秩幺半群代数。事实上，令 $M := \mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$ 后，我们可以将环 $F[u, v, w^{\pm 1}, x_n^{\pm 1}]$ 看作关于变量 z 的幺半群代数$F[M]$，其中对每个元素 $m = (a、b、c、(d_n)_{n\in\mathbb{N}})$，$z^m = u^a v^b w^c (\prod_{n\in\mathbb{N}} x_n^{d_n})$（这里除有限多个外，所有项 d_n 均为零），因此 R 是关于变量 z 的幺半群代数 $F[N]$，其中 N 是由元素 $(1, 0, 0, 0, \ldots)$、$(0, 1, 0, 0, \ldots)$、$(0, 0, 1, 0, \ldots)$、$e_{n+3} := (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ 和 $f_n := (-n, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)$ 生成的 M 的子幺半群，其中 e_{n+3} 中的项 1 和 f_n 中的项 -1 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都出现在第 $(n+3)$ 个位置。注意，幺半群 N 的秩是无限的，因此 R 是一个无限秩幺半群代数。

例4.12（Gotti-Li 构造）。设 $(p_n)_{n\geq 1}$ 是一个严格递增的奇素数序列，满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{3}$，并考虑 $\mathbb{Q}$ 的加法子幺半群 $P := \left\langle \frac{1}{p_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$。不难验证，每个 $q \in P$ 都可以以本质上唯一的方式写成

$$q = n_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{n_i}{p_i}, \tag{4.1}$$

其中 n_0，n_1，……，$n_\ell \in \mathbb{N}_0$，且对每个 $i \in [\![1,\ \ell]\!]$，都有 $n_i \in [\![0,\ p_i - 1]\!]$。由这种表示的唯一性可推出 $\mathscr{A}(P) = \left\{ \frac{1}{p_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$，并且 P 满足升链条件（~~ACCP~~）（参见例 2.1] 和命题 4.2]）。现在考虑 P 的以下子集：

$$A := \left\{ \frac{1}{p_{j_k}} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{p_{j_i}} \;\middle|\; k, \ell \in \mathbb{N} \text{ with } k \in [\![1, \ell]\!] \text{ and } j_1 < j_2 < \cdots < j_\ell \right\};$$

也就是说，A 中的每个元素都可表示为 P中有限多个原子的和，其中恰有一个原子重复出现，且恰好重复两次。此外，设 β 是一个无理数，使得 $\beta > 1$，并考虑 $\mathbb{N}_0\beta + \mathbb{Q}$的以下子集：

$$B := \{\beta\} \bigcup \left\{ \beta - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{p_i} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

现在令 M 表示由集合 $A \cup B$生成的正幺半群，并注意到 M 的秩为 2。由 [23, 定理 5。15] 可知，对于任意域 F，幺半群代数 $F[M]$ 是原子的，但不满足升链条件（ACCP）。

令 M 为例3.3 中描述的幺半群之一，或命题3.6中构造的幺半群之一。我们在同一例子/命题中看到，M 是一个不满足升链条件（ACCP）的原子幺半群。因此，对于任意域 F，幺半群代数 $F[M]$ 都不满足升链条件（ACCP）。结合例4.11 和4.12，我们提出以下问题。

问题 4.13。

(1) 对于例 M 3.3中描述的哪些幺半群，幺半群代数 $\mathbb{F}_2[M]$ 是原子的？(2) 令 M_2 为在命题3.6的证明中构造的秩为 2 的幺半群。幺半群代数 $\mathbb{F}_2[M_2]$是原子的吗？

我们在问题 $\mathbb{F}_2$ 4.13 的表述中选用，只是为了简化表述。关于其他任意域的相应问题仍未解决，而其他域上的答案同样具有以下意义。若问题4.13第 (2) 部分的答案为肯定，则会得到第二个不满足升链条件（ACCP）的二维原子幺半群代数（定义在某个域上）的例子（第一个例子见例4.12）。更重要的是，若问题4.13第 (1) 部分（针对三个幺半群中的任意一个）的答案为肯定，则将首次得到已知的不满足升链条件（ACCP）的一维原子幺半群代数。最后，若问题4.13 任一部分的答案为否定，则会发现一个原子幺半群，其在某个域上的幺半群代数并非原子（此前仅有的已知例子由 Coykendall 和作者构造，他们在 [11], 中部分回答了 Gilmer 提出的关于幺半群代数原子性的问题 [17, 页 189]，该问题可追溯至八十年代。

4.3. 遗传 ACCP 与有界分解性质。正如我们定义了遗传原子整环和遗传ACCP幺半群一样，我们还可以进一步定义遗传ACCP整环。按照 [12], 的说法，若整环 R 的每个子环都满足升链条件（ACCP），则称 R 为遗传ACCP。根据定义，每个遗传ACCP整环都必须满足升链条件（ACCP）。另一类满足升链条件（ACCP）的相关整环是所有有界分解整环。对于原子整环 R 及非零非单位$r \in R$，r 的一个分解长度是 r的一种分解中不可约元的个数（重复项也计入）；我们用 $\mathsf{L}(r) \subseteq \mathbb{N}$ 表示 r的所有分解长度构成的集合。按照 [1], 的说法，若原子整环 R 对每个非零非单位 $r \in R$，$\mathsf{L}(r)$ 都是有限集，则称 R 为有界分解整环（BFD）。显然，每个唯一分解整环都是有界分解整环，而且不难证明每个有界分解整环都满足升链条件（ACCP）（见 [27, 推论 1]）。因此，我们得到图2所示的原子整环嵌套类关系图。该图最早见于里程碑式论文 [1]（作为一个更大图示的一部分），此后成为研究原子整环（以及幺半群）偏离唯一分解性质程度的一种方法。

(4.2) **UFD** $\subsetneq$ **BFD** $\subsetneq$ **满足升链条件的主理想整环** $\subsetneq$ **原子整环**

FIGURE 2. 图中的蕴含关系刻画了原子整环的嵌套类。红色双箭头上的断裂标记表示，图中所示的蕴含关系均不可逆（从左到右，证明这些断裂箭头不可逆的反例见 [5, 例 4。7], 例 4.14(b) 下文，以及 [26, 定理 1。3]。

具有遗传 ACCP 性质和具有有界分解性质，都严格强于满足升链条件（ACCP）这一性质。事实上，在整环（甚至是域上的幺半群代数）的范畴中，前两种性质彼此都不能推出对方。以下示例有助于阐明这一点。

例 4.14。

（a）Laurent 多项式环 $\mathbb{Q}[x^{\pm 1}]$ 是唯一分解整环，因此也是有界分解域。然而，由于 $\mathbb{Q}[x^{\pm 1}]$ 的特征为零，根据命题 4.1 可知，它不是遗传原子的。因此，$\mathbb{Q}[x^{\pm 1}]$ 不满足遗传 ACCP。（b）考虑 M 的加法子幺半群 $= \left\langle \frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{P} \right\rangle$。众所周知，证明 M 是原子的并具有 $\mathscr{A}(M) = \left\{ \frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{P} \right\}$ 并不困难。此外，M 满足升链条件（ACCP）（更多详情见[1, 例 2。1] 或 [21, 命题 4。2] 的证明）。现在固定 $p \in \mathbb{P}$。由于 $\overline{M}$ 是满足升链条件（ACCP）的约化幺半群，根据 [3, 定理 13]，幺半群代数 $\mathbb{F}_p[M]$ 也满足升链条件（ACCP）。此外，由于 $\mathbb{F}_p[M]$ 的每个子环 S 都满足 $S^\times = \mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p[M]^\times \cap S$，根据命题 4.7 可知，$\mathbb{F}_p[M]$ 满足遗传 ACCP。然而，$\mathbb{F}_p[M]$ 不是有界分解域：事实上，对于每个素数 p，都有 $x = \left(x^{1/p}\right)^p$，因此 $\mathsf{L}(x) = \mathbb{P}$。

Acknowledgments

撰写本文期间，作者获得了美国国家科学基金会项目 DMS-1903069 和 DMS-2213323 的资助，谨此致谢。

References

[1] D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 M. Zafrullah： *Factorization in integral domains*，《纯粹与应用代数杂志》69（1990年）1–19。[2] D. D. Anderson、J. Coykendall、L. Hill 和 M. Zafrullah： *Monoid domain constructions of antimatter domains*，《交换代数》35（2007年）3236–3241。[3] D. D. Anderson 和 J. R. Juett： *Long length functions*，《代数杂志》426（2015年）327–343。[4] D. F. Anderson 和 D. N. El Abidine： *Factorization in integral domains III*，《纯粹与应用代数杂志》135（1999年）107–127。[5] D. F. Anderson 和 F. Gotti： *Bounded and finite factorization domains*。载于：《环、幺半群与模理论》（编者：A. Badawi 和 J. Coykendall），第 7–57 页，施普林格数学与统计学论文集，第 382 卷，新加坡，2022年。[6] N. R. Baeth 和 D. Smertnig： *Factorization theory: From commutative to noncommutative settings*，《代数杂志》441（2015年）475–551。[7] J. G. Boynton 和 J. Coykendall： *An example of an atomic pullback without the ACCP*，《纯粹与应用代数杂志》223（2019年）619–625。[8] P. M. Cohn： *Bezout rings and and their subrings*，《剑桥哲学学会会刊》64（1968年）251–264。[9] J. Correa-Morris 和 F. Gotti： *On the additive structure of algebraic valuations of polynomial semirings*，《纯粹与应用代数杂志》226（2022年）107104。[10] J. Coykendall、D. E. Dobbs 和 B. Mullins： *On integral domains with no atoms*，《交换代数》27（1999年）5813–5831。[11] J. Coykendall 和 F. Gotti： *On the atomicity of monoid algebras*，《代数杂志》539（2019年）138–151。[12] J. Coykendall、F. Gotti 和 R. Hasenauer： *Hereditary atomicity in integral domains*。《纯粹与应用代数杂志》227（2023年）107249。[13] Y. Fan、A. Geroldinger、F. Kainrath 和 S. Tringali： *Arithmetic of commutative semigroups with a focus on semigroups of ideals and modules* **16** 2017 1750234 ，

《代数与应用杂志》（）。[14] L. Fuchs： *Infinite Abelian Groups I*，学术出版社，1970年。[15] A. Geroldinger： *Sets of lengths*，《美国数学月刊》123（2016年）960–988。

[16] A. Geroldinger 和 F. Halter-Koch： *Non-unique Factorizations: Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory*, 《纯粹数学与应用数学》第 278 卷，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，2006年。[17] R. Gilmer，《交换半群环》，芝加哥大学出版社，1984年。[18] R. Gilmer： *Integral domains with Noetherian subrings*, 《赫尔维蒂数学评论》45（1970年）129–134。[19] R. Gilmer 和 T. Parker： *Semigroup rings as Prüfer rings*, 《杜克数学杂志》41（1974年）219–230。[20] F. Gotti： *Increasing positive monoids of ordered fields are FF-monoids*, 《代数杂志》518（2019年）40–56。[21] F. Gotti： *On semigroup algebras with rational exponents*, 《交换代数》50（2022年）3–18。[22] F. Gotti 和 B. Li： *Atomic semigroup rings and the ascending chain condition on principal ideals*, 《美国数学学会会刊》（即将发表）。预印本见 arXiv：https://arxiv.org/abs/2111 00170 。F. Gotti 和 B. Li：[23] *Divisibility and a weak ascending chain condition on principal ideals*。已投稿。预印本见 arXiv：https://arxiv.org/abs/2212 06213 。F. Gotti 和 B. Li： *Divisibility in rings of integer-valued polynomials*,[24] 《纽约数学杂志》28（2022年）117–139。[25] F. Gotti 和 J. Vulakh： *On the atomic structure of torsion-free monoids*。已投稿。预印本见 arXiv：https://arxiv.org/abs/2212 08347 。A. Grams： *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*, 《剑桥哲学学会会刊》75（1974年）321–329。[26] [27] F. Halter-Koch： *Finiteness theorems for factorizations*, 《半群论坛》44（1992年）112–117。[28] H. Kim： *Factorization in monoid domains*, 《交换代数》29（2001年）1853–1869。[29] M. Roitman： *Polynomial extensions of atomic domains*, 《纯粹与应用代数杂志》87（1993年）187–199。[30] A. Zaks： *Atomic rings without a.c.c. on principal ideals*, 《代数杂志》80（1982年）223–231。

Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA 02139*Email address*： fgotti@mit.edu