arXiv:2303.01045v1 [math.AG] 2 Mar 2023

次数为 d 的 $\mathbb{P}^n$中的曲面不变量

R.V. GURJAR 和 ALOK MAHARANA

Abstract. 我们证明，对于次数为 d 的复仿射或射影簇（允许有奇点），其在仿射空间 $\mathbb{A}^n$或 $\mathbb{P}^n$中的若干不变量，仅由 d决定的函数所界定，前提是该簇的奇点消解满足 $b_1 = 0$ 。

1. Introduction

本文只讨论复代数簇或解析簇。

本文的主旨是：对于次数为 d 的正规仿射曲面 S或射影曲面 X，分别位于 $\mathbb{A}^n$ 或 $\mathbb{P}^n$中，且其奇点消解 S' 分别满足 $b_1(S') = 0$ 或 $b_1(X') = 0$（分别对应 S或 X的 X'），其许多不变量 S、 S'、 X、 X'都可由仅依赖于 d 的函数所界定。对于仿射曲面 S 在 $\mathbb{A}^n$ 中的一个闭嵌入，我们将 S 的次数定义为其闭包 X 在 $\mathbb{P}^n$中的次数。若 X 是 $\mathbb{P}^n$中的光滑完全交，这一结果很容易证明；但对于正规 X，则并不显然。我们的一些证明给出了这些不变量的定量界（但并非最优），另一些界则只有存在性证明。即使对于次数为 d 、位于 $\mathbb{P}^3$ 中的正规曲面 X，以及 $= 0$的 $b_1(X')$，我们也未能给出 $H_1(X';\mathbb{Z})$阶的定量界，因为我们的证明用到了一些简单的分层论证。希望更好的证明能够弥补这一不足。

现在陈述本文的主结果。

主定理。设 S 是 $\mathbb{A}^n$ 中次数为 d 的不可约正规仿射闭子簇，其中 $n > 2$。假设 S 的奇点消解 S' 满足 $b_1(S') = 0$。则 $H_1(S';\mathbb{Z})$ 的阶由 d 单独决定的某个函数所界定。类似地， $H_1(S - Sing\ S;\mathbb{Z})$ 的阶由 d 单独决定的某个函数所界定。特别地， $H_1(S;\mathbb{Z})$ 的阶具有相同的界。

在全文中，我们将简单地说某个不变量由 d 界定，而不说它由仅依赖于 d 的某个函数从上面界定。

注 1.1. 设 S （或 X）是 $\mathbb{A}^n$ （或 $\mathbb{P}^n$）中的闭正规仿射（分别为射影）子簇。若 $dim\ S > 2$ （分别为 $dim\ X > 2$），则一般的

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14R05, 14J80.

Key words and phrases. 代数曲面，同调，上同调。1

S （分别为 X）的超平面截面根据 A. Seidenberg 的结果是正规的。此外，Hamm-Le Dung Trang 的 Lefschetz 定理（[8]）以及 [7] 中的一个结果表明，H_1 保持不变（引理 2.5）。因此我们归结为 $dim\ S = 2$ （分别为 $dim\ X = 2$）的情形。鉴于这些观察，本文其余部分将只讨论曲面。

设 S 如上，且 dim $S = 2$。我们还将证明以下结果。

(1) 对于 S 的任意奇点 p，奇点 S' 在 p 处的最小解消中例外曲线的交矩阵，其阶数及各项均由 d 有界。

类似地，dim $H^1(S', \mathcal{O}_{S'})$ 由 d 有界，其中 $\mathcal{O}_{S'}$ 是 S' 的结构层。

(2) 设 S、S' 如上。则对于适当的开嵌入 $S' \subset X'$ 到光滑射影曲面 X'，$D' := X' - S'$ 的不可约分支 D'_i 的交矩阵的阶数及各项均由 d 有界。

(3) 设 S、X、X' 如上，则 $H_1(X'; \mathbb{Z})$、$b_2(X')$ $K^2_{X'}$、$p_g(X')$ 的阶数均由 d 有界。类似地，无穷远处的第一同调群 $H_1^\infty(S)$（稍后定义）的秩及其挠子群的阶数均由 d 有界。

在上一节中，我们给出了一些例子，以说明主定理中的假设为何是必要的，以及 $H_1(S'; \mathbb{Z})$ 的阶如何随 d 趋于无穷。

2. Notations and preliminaries

我们将使用以下记号。

(1) S 是 $\mathbb{A}^n$ 中次数为 d的不可约闭正规仿射曲面。对于曲面 S 在 $\mathbb{A}^n$ 中的一个闭嵌入，我们将 S 的次数定义为其在 $\mathbb{P}^n$中的闭包的次数。(2) X 是 S 在 $\mathbb{P}^n$中的闭包。(3) $D := X - S$ 是 S的边界除子。(4) $D = \sum_{i=1}^{i=r} D_i$ 是 D 的不可约分解，其中 $1 \leq r \leq d$。(5) $P =$ X的奇点集。（X 可能不是正规曲面。）(6) X' 是 X 的一个奇点消解，使得 D 的全变换D' 是 X'中的简单正规交叉除子。 S' 是 S的一个奇点消解。(7) 光滑曲面上的简单正规交叉除子称为简单正规交叉曲线。(8) 我们用 b_i、e(.)分别表示拓扑空间的 i^{th} 贝蒂数和欧拉-庞加莱特征。对于拓扑空间 T 及其闭子空间 Z，我们用 $H^i_c(T, Z)$表示该对的紧支撑相对上同调群。上同调中我们只使用整数系数或有理系数。关于这类上同调、对偶性等的详细信息，请参阅 [15]。

下一个结果是众所周知的。

引理 2.1. 设 $f: Y \to Z$ 是不可约正规代数簇之间的双有理态射。那么诱导的同态 $\pi_1(Y) \to \pi_1(Z)$ 是满射。

特别地, $H_1(Y;\mathbb{Z}) \to H_1(Z;\mathbb{Z})$ 是满射。

这适用于扎里斯基开嵌入 $Y \subset Z$，或奇点消解 $Z' \to Z$。

引理 2.2. 设 Z 是光滑射影不可约曲面，且 $D_1, D_2, .., D_r$ 是 Z 上有限多个互不相同的不可约曲线。若同调类 $[D_i]$ 在 $H_2(Z;\mathbb{Z})$ 中线性无关，则 $b_1(Z) = b_1(Z - \cup D_i)$。

证明。设 $S := Z - D$，其中 $D = \cup D_i$。那么 $H^2(D;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$，由 D_i 的上同调类自由生成。我们考虑偶对 (Z, D) 的整数系数上同调长正合列。

$$...H^2(Z) \to H^2(D) \to H^3(Z, D) \to H^3(Z) \to (0)....$$

由于 D 是一条曲线，我们已使用 $H^3(D) = 0$。根据假设，$H_2(D) \to H_2(Z)$ 是单射。因此，$H^2(Z) \to H^2(D)$ 有有限余核。由对偶性，$H^3(Z, D) \cong H_1(S)$ 且 $H^3(Z) \cong H_1(Z)$。故结论成立。

□

引理 2.3. 对于不可约正规射影曲面 Y，第三 Betti 数 $b_3(Y)$ 是一个双有理不变量。[2]。

这仅仅用到了正规曲面奇点的例外除子的交形式是负定的这一事实。

证明。设 Y 是一个正规射影曲面（其光滑轨迹为 Y^0），且 (Y', D') 是其最小简单正规交叉奇点消解，使得 D' 是若干连通分支的不交并，每个连通分支都对应于 Y 的一个奇点的简单正规交叉消解。考虑具有整数系数的对 (Y', D') 的上同调长正合列：

$$H^2(Y') \xrightarrow{\phi} H^2(D') \to H^3(Y', D') \to H^3(Y') \to H^3(D') = 0$$

那么，由于 D' 的每个连通分支的交矩阵负定，$H^2(Y')$ 到 $H^2(D')$ 的映射具有有限余核。我们有$H^3(Y', D') \cong H_1(Y^0)$。将该列与 $\mathbb{Q}$ 张量积后，得到 $b_1(Y^0) = b_3(Y')$。

现在考虑配对 $(Y, \mathrm{Sing}(Y))$ 的整数系数上同调长正合列，其中 $\mathrm{Sing}(Y)$ 是 Y 的奇点有限集：

$$H^2(\mathrm{Sing}(Y)) \to H^3(Y, \mathrm{Sing}(Y)) \to H^3(Y) \to H^3(\mathrm{Sing}(Y))$$

但 $\mathrm{Sing}(Y)$ 是有限集，因此它的 H^2, H^3 为零；又由于 $H^3(Y, \mathrm{Sing}(Y)) \cong H_1(Y^0)$，我们得到 $H_1(Y^0) \cong H^3(Y)$，从而推出 $b_1(Y^0) = b_3(Y)$。由于我们已经有 $b_1(Y^0) = b_3(Y')$，结论得证。

□

引理 2.4. 设 D 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 d 的约化曲线。那么 $b_1(D) \leq (d-1)(d-2)$。

证明。如果 D 是光滑不可约曲线，则由 D 的亏格公式可得结论。一般情况下，设 D_1 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 d 的光滑不可约曲线，并且与 D 在 d^2 个不同点相交。令 Y 为 $\mathbb{P}^2$ 在这些 d^2 个点处的爆破。则存在一个态射 $f : Y \to \mathbb{P}^1$，使得 D、D_1 的严格变换 D'、D'_1 分别同构于 D、D_1，并且是 f 的完整纤维。此外，f 还有一个截面。由于 $b_1(D_1) = (d-1)(d-2)$，利用 D' 是饱和管状邻域的强形变收缩这一事实，我们推得 $b_1(D') \leq b_1(D'_1)$。结论得证。

□

我们需要使用 [7] 中的下一个结果。

引理 2.5。设 Y 是一个正规代数簇，且 $Y' \to Y$ 是其奇点消解，并且在 Y_{reg} 上是同构的。则映射 $H_1(Y_{reg}; \mathbb{Z}) \to H_1(Y'; \mathbb{Z})$ 是满射的，并且具有有限核。

为了将主定理的证明归约到曲面上，我们需要以下结果，该结果用到了上述引理。

引理 2.6. 设 S 是一个维数为 > 2 的不可约正规仿射簇。假设对于奇点消解 $S' \to S$，有 $b_1(S') = 0$。设 S_0 是通过对 S 反复取一般超平面截面而得到的不可约正规仿射曲面。那么对于奇点消解 $S'_0 \to S_0$，有 $b_1(S'_0) = 0$。

证明。为简单起见，我们给出 $\dim S = 3$ 时的证明。
对于 S 的任意子集 Z，记其在 S' 中的逆像为 Z'。由假设，$H_1(S')$ 是有限的。因此由引理 2.5，$H_1(S_{reg})$ 是有限的。由 [8]，$H_1(S_{reg} \cap H) \cong H_1((S \cap H)^{reg})$。但是 $(S \cap H)^{reg}$ 嵌入于 $(S \cap H)'$ 中，作为一个扎里斯基开集。因此 $H_1((S \cap H)')$ 是有限的，这说明 $b_1(S'_0) = 0$，其中 $S_0 = S \cap H$。

□

引理 2.7. [16] 考虑一组 q 齐次多项式

$$T_i^1(z_1^0, \ldots, z_{n+1}^0, t), \ldots T_i^{m_i}(z_1^0, \ldots, z_{n+1}^0, t);\ i = 1, \ldots, q$$

其变量为 $z_1^0, \ldots, z_{n+1}^0$，系数关于 $t \in \mathbb{C}^l$ 多项式地依赖。考虑直积 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^l$，其到第二个因子的投影为 p。在空间 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^l_j$ 中，区分 q 个子集 $E^1, \ldots, E^q$,

$$E^i = \{(z_1^0 : \cdots : z_{n+1}^0, t) : T_i^j(z_1^0, \ldots, z_{n+1}^0, t) = 0\}$$

于是存在一个真代数子集 A of $\mathbb{C}^l$，使得族（p、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^l$、$E^1$、.....、$E^l$）在 A 之外是等奇异的，即将族（p、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^l$、$E^1$、.....、$E^l$）限制在 $\mathbb{C}^l \setminus A$ 的逆像上所得的族是一个（拓扑）局部平凡族。

3. Smooth completion case

我们首先证明 X 是 $\mathbb{P}^3$中的光滑曲面时的主定理。正如引言中所述， X 是一个仿射曲面 $S \subset \mathbb{A}^3$的完备化。

定理 3.1. 若 S 的完备化 X 是光滑的，则 $\pi_1(S) = 0$, $H^3(X) = 0$且 $b_2(S) \leq (d-1)^3$。

证明。根据 Nori 关于 Zariski 猜想的论文中的一个结果（例 6.8， [14]），我们知道 $\pi_1(S) = 0$。由于 S 是一个仿射曲面， S 的第三和第四整系数同调群为零，因为 S 的同伦型是实维数至多为 2 的 CW 复形。$H^2(S) \cong Hom(H_2(S); \mathbb{Z})$中没有挠元，因为 $H_1(S) = 0$。下面给出 $b_2(S)$的一个上界以完成证明。对于任意次数为 d的光滑超曲面 X， $b_2(X) = d^3 - 4d^2 + 6d - 2$。具有有理系数的偶对$(X, D)$的上同调长正合列给出：

$$H^1(X) \to H^1(D) \to H^2(X, D) \to H^2(X) \to H^2(D) \to H^3(X, D) \to 0$$

由对偶性可得（使用 $H_1(S) = 0$）

$$0 \to H^1(D) \to H_2(S) \to H^2(X) \to \oplus_{i=1}^{r} H^2(D_i) \to 0$$

这表明 $H^2(X)$ 满射到 $H^2(D)$，且

$$\text{rank } H_2(S) = \text{rank } H^2(X) - r + \text{rank } H^1(D)$$

即 $b_2(S) \leq b_2(X) + b_1(D) - 1$。但 $b_1(D) \leq (d-1)(d-2)$（引理 2.4），最终得到 $b_2(S) \leq (d-1)^3$。

□

这就完成了对光滑 X 的论证。

注 3.2. 更一般地，众所周知，若 S 是正规的，且 X 在 S 之外光滑，则 $\pi_1(S) = (1)$。 [5]

4. Normal completion $X \subset \mathbb{P}^3$

现在假设 S 是 $\mathbb{A}^3$ 中的正规仿射曲面，且其在 $\mathbb{P}^3$ 中的闭包 X 是正规的。在这种情况下， X 只有有限多个奇点，其数量可由 d 的函数给出上界；而每个奇点的各种特征，如重数、米尔诺数、蒂朱里纳数等，也都可由次数 d 的函数给出上界。

令 P 为 X 的奇点集。我们首先证明 P 的基数可由 d 的函数给出上界。令 $e(\cdot)$ 表示拓扑欧拉示性数。

我们继续假设，对于 S 的奇点消解 S'，有 $b_1(S') = 0$。

引理 4.1. $b_3(X) = 0$ 且 $H^3(X; \mathbb{Z}) \cong$ 。挠元 $H_2(X; \mathbb{Z})$。

证明。根据我们的假设 $b_1(S') = 0$，其中 S' 是S的奇点消解。由此可知，对于 X 的奇点消解 X'，有 $b_1(X') = 0$。由对偶性， $b_3(X') = 0$。由于根据引理 2.3， b_3 是正规射影曲面的双有理不变量，故 $b_3(X) = 0$。

由泛系数定理， $H^3(X;\mathbb{Z}) \cong Hom(H_3(X;\mathbb{Z}) \mathbb{Z}) \oplus$挠元 $H_2(X;\mathbb{Z})$。由于 $b_3(X) = 0$，我们得到断言的第二部分。

□

引理 4.2。 X 的奇点数至多为 $3(d-1)^3$，且第二贝蒂数 $b_2(X)$ 至多为 $d^3 - 4d^2 + 6d - 2$。

证明。设 X_0 是一个次数为 d的光滑超曲面。那么 $e(X_0)$ 完全由 d确定，即 $e(X_0) = d^3 - 4d^2 + 6d$。现在 $e(X) = e(X_0) - \sum_{p\in P} \mu_p$，其中 $p \in P$ 遍历所有奇点，且 μ_p 是奇点 p, [4]的米尔诺数。由此可得 $e(X) \leq d^3 - 4d^2 + 6d$。

由于根据引理 4.1， $b_3(X) = 0$， $e(X) = 1 + b_2(X) + 1 \leq e(X_0)$，因此也可得 $b_2(X)$ 由 d的一个函数所界：

$$b_2(X) \leq d^3 - 4d^2 + 6d - 2$$

根据 Liu 的一个定理（[11]）， $\mu_p \leq 3\tau_p$ 其中 τ 是蒂朱里纳数。由于 X 是次数为 d 的曲面，其关于局部仿射坐标的偏导数次数为$\leq d-1$。因此根据 Bézout 定理可得， $\sum_{p\in P} \tau_p \leq (d-1)^3$。这表明奇点的数量被 d的一个三次多项式所界定，即 $3(d-1)^3$。

□

引理 4.3. $H^3(X;\mathbb{Z})$ 是有限的。

证明。这由上面的引理可得，因为 X 的整数同调是有限生成的，这是由于 X 是完备的。

□

注 4.4. 可以证明，任意代数簇的整数同调都是有限生成的。

下面证明 D' 的不可约分支在 X' 的同调中是独立的，其中 X' 是 X 的奇点消解，而 D' 是 $D = X - S$的总逆像。我们首先证明：

引理 4.5。交矩阵 $(D'_i \cdot D'_j)$ 非奇异。

证明。若此结论不成立，则存在一个整除子 $D'_0 = \Sigma a_i D'_i$，使得$D'_0 \cdot D'_i = 0$ 对所有 i都成立。由于 S 是仿射的， D' 支撑一个 nef 且大（big）的除子；由 Goodman 判据 X'， [6]。因此，根据 Hodge 指数定理，要么 $D'^2_0 < 0$，要么D'_0 在有理等价意义下等于 0。由于 $D'^2_0 = 0$，可得 D'_0 在有理等价意义下等于 0。这给出了 S'上的一个非常数正则可逆函数。但 $b_1(S') = 0$，所以这样的函数不可能存在，因为将 n^{th}次根附加到这个非常数单位上，会得到次数任意大的阿贝尔无分歧覆盖。

这一矛盾表明 $(D'_i \cdot D'_j)$ 的行列式非零。 □

下面的引理比前面的结果略具一般性。

引理 4.6. 对于 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的正规射影曲面 X，其 X 的奇点消解中的例外曲线的交矩阵由 d 控制。

证明。我们先分析次数为 d、位于 $\mathbb{A}^n$ 中的仿射正规曲面的情形，并将其用于 X。设 x、y、z、..... 是 $\mathbb{A}^n$ 中的仿射坐标。我们可以假设，由 (x, y) 和 (x, y, z) 给出的从 V 到 $\mathbb{A}^2$、$\mathbb{A}^3$ 的态射（分别）是有限的，且第二个态射到其在 $\mathbb{A}^3$ 中的像是双有理的。这只用到了诺特正规化和本原元定理。假设 V 在 $\mathbb{A}^3$ 中的像（记作 V_0）由次数为 d 的多项式 $f = z^d + a_1(x, y)$ $z^{d-1} + ... + a_d(x, y) = 0$ 定义即可（因为一般线性投影不会改变次数）。显然，$V \to \mathbb{A}^2$ 的分支轨迹 $B \subset \mathbb{A}^2$ 包含于 $V_0 \to \mathbb{A}^2$ 的分支轨迹中。后者由考虑 f 与其关于 z 的偏导数的结式 R 得到。由于对所有 i，次数 a_i 至多为 d，因此 R 的次数有 d 的上界。由此可知，B 中所有不可约曲线的次数、交数、奇点类型、亏格等，均有关于 d 的函数作为上界。

为滥用记号，现将次数为 d、$X \to \mathbb{P}^2$ 的诺特正规化的分支轨迹记为 B。因此，我们可以对 $\mathbb{C}^{2\tilde{}}$进行 m 次爆破，使 B 的全变换 B 成为简单正规交叉，其中 m 由 d的某个函数所界定。令 Y为所得的 $\mathbb{C}^2$ 的爆破。我们取纤维积 $V' = \overline{V \times_{\mathbb{C}^2} Y}$ 的正规化。这是 Y的 d 重覆盖，其分歧除子为 $R'^{\tilde{}}$，位于 V' 中（注意，B 中的每条不可约曲线不一定都属于分支轨迹）。

设BB中的两条是位于不可约曲线，它们在点 $p^{\tilde{}}$处相交。在 Y 中以坐标 z_1、z_2 表示的 p 周围的小邻域 U 内，在 $U_0 = U - B_1 \cup B_2$ 上我们得到一个至多 d 重的 ´etale 覆盖。由于 U_0 的基本群为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，$V'$ 中 U_0 的逆像的基本群是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的一个指数至多为 d 的子群 K，设其指数为 $t \le d$。于是，K 有一个形如 $t\mathbb{Z} \oplus t\mathbb{Z}$ 的子群 K'。然而，K' 对应于 Y 的覆盖 $(u, v) = (\sqrt[t]{z_1}, \sqrt[t]{z_2})$，该覆盖是光滑的，次数为 $t^2 \le d^2$。这意味着，与 K 对应的 Y 的覆盖 V' 是一个阿贝尔商奇点，即 $\mathbb{C}^2$ 被阿贝尔群 G 商掉所得的商奇点。这个光滑覆盖中 $(B_1 \cup B_2) \cap U$ 的逆像是坐标轴 $uv = 0$ 的并。

由于从该覆盖到 V' 的映射是伽罗瓦的，因此在局部解析意义下，V' 中一条不可约分支曲线的逆像，是上述 t^2 重覆盖中该分支曲线逆像的一个商。因此，$R'^{\tilde{}}$ 中的每条不可约曲线都是光滑的。换言之，对于 B 的任一不可约分支 E_i，其在 V' 中的逆像是若干条互不相交的光滑不可约曲线的并。V' 是 V 的部分消解。我们注意到，Y 中例外除子的带权对偶图的交矩阵由 d 控制。

断言：V' 至多具有循环商奇点，其局部 π_1 的阶至多为 d^2。

断言的证明：这是众所周知的。V' 的奇点位于 B 的$\tilde{}$ 奇点之上（在 B的光滑点附近作解析考察时，它在多圆盘 Δ 中由 $\mathbb{C}^2$ 的一个坐标 $z_1 = 0$ 给出；由于 $\pi_1(\Delta - \tilde{B}) \cong \mathbb{Z}$，局部的分歧覆盖是循环的，

˜因此 $B \cap \Delta$ 的逆像是光滑的；所以 V' 的奇点只能位于 B的奇点˜之上）。我们在上文看到， V' 的奇点是阿贝尔商奇点，例如是 $\mathbb{C}^2$ 被群 G 作用后的商；该群可取为 GL_2（$\mathbb{C}$）的一个“小”子群，因为对于由伪反射生成的 G的正规子群 H ，根据 Chevalley-Shepherd-Todd 定理， $\mathbb{C}^2/H$ 是光滑的（若G不含非平凡伪反射，则称其为“小”）。这个群 G是阿贝尔群，因此可假定它是GL_2（$\mathbb{C}$）的一个对角子群。

事实上， G 必定是循环的。否则，根据结构定理， G 是由 g_1、 g_2 分别生成的循环群 G_1、 G_2 的直和（只需两个循环群，因为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的商群至多由两个元素生成）。如果 $G_i = m_i$ 的阶互素，那么 G 就是循环群，因此它们的阶有一个共同的素因子 p。设 g_i 是对角矩阵，其对角元为 a_i、 b_i。考虑 $g_i^{m_i/p}$ 。它的阶为 p。因此， $g_i^{m_i/p}$ 的第一个对角元都是本原 p^{th} 次单位根。通过调整 g_2 的幂次，可以假设存在适当的幂，使得 g_1^l 和 g_2^r 的第一个元素互为逆元，从而 $g_1^l.g_2^r$ 的第一个元素为 1。乘积的第二个元素不可能为 1，因为 l 和 r 分别严格小于 m_1、 m_2 ，且 G 是G_i的直和。因此， $g_1^l.g_2^r$ 是 G中的伪反射。所以 G 不是小群。

我们推得， V' 的奇点 p' 是一个阶数至多为 d^2的循环奇点。

断言：设 E_i 是 $Y \to \mathbb{P}$的例外不可约曲线，且 E_i' 是一个 ^{2} 位于 V' 中并覆盖 E_i的不可约曲线。那么$E_i'^2 \leq d \cdot E_i^2$。

断言的证明：注意，由于 V' 是奇异的，某些 $E_i'^2$可能是有理的。 E_i 的逆像是若干条互不相交的光滑不可约曲线之并。若$h:\ V' \to Y$是该态射，则（h^*E_i）$^2 = d \cdot E_i^2$。对于某些整数e_{ij}，我们可以写成 $h^*E_i = \Sigma e_{ij} E_{ij}$。 E_i的一个小开邻域的逆像是 E_{ij}的若干个互不相交的开邻域之并。由于 $E_i^2 < 0$ ，可得$E_{ij}^2 < 0$。由于 $dE_i^2 = \Sigma e_{ij}^2 E_{ij}^2$ ，结论成立。

如果我们考虑 p' 的 V'' 最小解消，那么例外除子是由光滑有理曲线组成的线性链，该链具有简单正规交叉，且每个不可约分支的自交数至多为 d^2，例外曲线至多有 d^2 条。考虑 V'' 中从 V' 到 V 的例外曲线的严格变换，利用标准交理论可推出，V'' 到 V 的总例外除子具有有界的交矩阵。

详情如下。设 A_1 是 V' 中一条经过 V'的奇点 p' 的不可约曲线。在 V'' 中， A_1 的严格变换 A_1' 与 p' 上方的例外除子的一个端部不可约分支横截于一点，记为 E_1、 E_2、...、 E_s，且 A_1' 与 E_1 相交。设 $A_1' + m_1E_1 + ... + m_sE_s$ 是 A_1 在 V'' 中的全变换。全变换与每个 E_i 的交数均为 0。我们知道， s 和 $E_i \cdot E_j$ 都被 d 所界。用克拉默法则解出 m_i 后，我们看到 m_i 被 d 所界。由这些观察可推知，$A_1'^2$ 也被 d 所界。

□

引理 4.7. 设 $\mathbb{P}^n$ 中一个次数为 d 的正规射影曲面 X 。设 D 为曲线 $X \cap \{h_0 = 0\}$ ，其中 $h_0 = 0$ 是无穷远超平面。那么

存在 X 的一个适当的奇点消解 X'，使得 D 的严格变换与例外除子的并为简单正规交叉，且它们的交数矩阵被 d 所界。

证明。证明与上一个引理的证明类似，因此我们只给出一个概述。 .

选取 $\mathbb{P}^n$ 中的一般超平面 $\{h_1, h_2\}$，使得由 $p \to [h_0(p) : h_1(p) : h_2(p)]$ 给出的从 $X \to \mathbb{P}^2$ 出发的态射是有限的，且次数为 d。这正是诺特正规化。于是，X 上的 $h_0 = 0$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中一条直线 L_0 的拉回。设 $\mathbb{P}^2$ 中的分支曲线为 B。由于 B 由 X 在 $\mathbb{P}^n$ 中的一般投影的定义方程的判别式所定义，因此次数 B 有 d 的上界。我们可以找到一个适当的 $\mathbb{P}^2$ 爆破序列，其长度由 d 的某个函数所界定，使得 $B \cup L_0$ 的全变换是简单正规交叉的。令 Y 到 $\mathbb{P}^2$ 为这个最终曲面。那么，正如上一个引理所示，正规化纤维积 $Z := X \times_{\mathbb{P}^2} Y$ 至多有 d 个循环商奇点，而 Z 中有限个相关曲线构成简单正规交叉。现在，Z 是 X 的部分消解。对 Z 进一步作简单正规交叉消解，记为 X'，将得到交矩阵由 d 所界定的例外曲线。最后，$X' - S$ 中曲线的交矩阵由 d 所界定。

□

推论 4.8。交矩阵 (D'_i, D'_j) 的行列式有一个由 d 决定的上界，其中 D'_i 是 $X' - S'$ 中的所有曲线，且 X' 是 X 的奇点消解。

引理 4.9。 D' 的不可约分支在同调中线性无关。

证明。其证明与引理 4.5 的证明完全类似。

□

设 S、S'、X、X' 如上所述，这里我们只假设 $H_1(S'; \mathbb{Z})$ 是有限的，且 S 嵌入为 $\mathbb{A}^n$ 中的一个闭子簇。那么 $H_1(X'; \mathbb{Z})$ 也有限。

我们先证明以下结论。

定理 4.10。对于 X 的一个适当的奇点消解 X'，X' 的第二贝蒂数有上界 d。

同理，$b_2(X)$ 的上界为 d。

证明。注意到 $b_1(X) = 0$。因此，只需证明 $e(X')$ 的上界为 d。

如同先前的证明，令 $X \to \mathbb{P}^2$ 为次数为d的诺特正规化。于是存在由 $\mathbb{P}^2$ 在若干点处爆破得到的光滑曲面 Y，爆破次数至多为 d，且对于 $X \to \mathbb{P}^2$ 在 Y 中的映射 B，分支轨迹的总逆像是一条简单正规交叉曲线 B'。令 Z 为 $Y \times_{\mathbb{P}^2} X$的正规化纤维积。则 Z 至多有循环商奇点，其消解对偶图由 d界定。令 R 为 B' 在 Z中的逆像。现在，$Z - R \to Y - B'$ 是次数为 d的有限无分歧映射。因此，$e(Z - R) = d \cdot e(Y - B')$。$e(Y)$和 $e(B')$都由 d界定。因此，$e(Y - B') = e(Y) - e(B')$也由 d界定。类似地，$e(R)$由

d界定。因此， $e(Z) = d \cdot e(Y - B') + e(R)$由 d界定。由于 Z 的奇点的最小解消 Z' 的带权对偶图由 d 界定，我们可推得 $e(Z')$由 d界定。由于 Z' 是X 的奇点解消，故结论对 X'成立。

X 的证明是类似的。如前所见， $e(B)$ 被 d 所界。现在 $X - \tilde{B} \to \mathbb{P}^2 - B$ 是次数为 d 的有限无分歧映射，其中 $\tilde{B}$ 是 B 在 X中的逆像。于是，按照上述论证，我们可推出 $e(X)$ 被d所界。

□

现在设上述的 S、 X、 X'、 D' 成立。考虑对子 (X', D') 的相对上同调序列。它包含以下部分： $H^2(X';\mathbb{Z}) \to H^2(D';\mathbb{Z}) \to H^3(X', D';\mathbb{Z}) \to H^3(X';\mathbb{Z}) \to (0)$，因为 D' 的实维数为 2。根据对偶性， $H^3(X';\mathbb{Z}) \cong H_1(X';\mathbb{Z})$。 D' 的每个不可约分支 D'_i 都给出 $H^2(X';\mathbb{Z})$ 的一个元素。考察这个上同调类与所有 D'_j 的交，我们看到， $H^2(X';\mathbb{Z}) \to H^2(D';\mathbb{Z})$ 的余核的阶至多为矩阵 $(D'_i \cdot D'_j)$ 的行列式绝对值。后者被 d 所界。这意味着， $H_1(S';\mathbb{Z})$ 的阶被 d 所界，当且仅当$H_1(X';\mathbb{Z})$ 的阶被 d 所界。

现在我们来讨论一个对证明主定理至关重要的结果。

考虑由满足 $b_1(Y) = 0$ 的 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的光滑不可约曲面 Y 组成的类 $\mathcal{F}$。那么，对于所有这样的 Y， $H_1(Y;\mathbb{Z})$ 都是有限的。

定理4.11。对于 $Y \in \mathcal{F}$， $H_1(Y;\mathbb{Z})$ 的阶只有有限多个。

证明。考虑 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的曲面的乔氏簇 $C_{n,2,d}$。存在一个闭子簇 $\Gamma \subset C_{n,2,d} \times \mathbb{P}^n$，它确定了 $\mathbb{P}^n$ 中所有次数为 d 的闭曲面所构成的代数族。这给出了一个态射 $\psi : \Gamma \to C_{n,2,d}$，使得 ψ 的纤维是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的曲面。根据引理 2.7， $C_{n,2,d}$ 存在一个分层，记为 $C_1 \supset C_2 \cdots \supset C_s$，其中 C_1 是 $C_{n,2,d}$ 中的扎里斯基开集，而 C_{i+1} 是 C_i 中的扎里斯基开集；位于 $C_i - C_{i+1}$ 中各点上方的任意两个曲面同胚。一个满足 $b_1(Y) = 0$、次数为 d 的曲面 Y 未必属于分层 $C_1 - C_2$，但必属于某个分层 $C_i - C_{i+1}$。该分层的连通分支 $\{U^j_{i,i+1}\}_{j=1,\ldots,s_i}$ 有限多个，且位于固定连通分支 U^j_i ,$_{i+1}$ 中各点上方的曲面彼此同胚。因此，位于 U_i 中各点上方的所有曲面都具有同构的 H_1。证毕

□

5. Completion of the proof of Main Theorem

如上所述，我们考虑次数为 d 的 $\mathbb{P}^n$ 中曲面的乔氏簇 $C_{n,2,d}$，以及代数族 $\Gamma \subset C_{n,2,d} \times \mathbb{P}^n$ 及其态射 $\psi : \Gamma \to C_{n,2,d}$。

~ ~ ~令 $\Gamma \to \Gamma$ 为奇点消解，ψ :$\Gamma \to C_{n,2,d}$ 为诱导的态-˜射。现在，对于非空扎里斯基开子集 $U \subset C_{n,2,d}$ 中的点， ψ 的纤维都是光滑的。根据前面的论证，位于 U 的某个连通分支之上的纤维彼此微分同胚，因此具有同构的 H_1。接下来我们考虑态射 ψ : $\psi^{-1}(C_{n,2,d} - U) \to C_{n,2,d} - U$。通过考察 $C_{n,2,d} - U$ 的各个不可约分支，以及这些不可约分支的逆像的奇点消解，我们推得 $H_1(X';\mathbb{Z})$ 的阶数只有有限多个；其中 $X' \to X$ 是 S 的完备化 X 的奇点消解，如主定理的陈述所述。

最后，根据引理 2.1，映射 $H_1(S';\mathbb{Z}) \to H_1(S;\mathbb{Z})$ 是满射。因此， $H_1(S;\mathbb{Z})$ 的阶也有 d 的上界。

因此，引言中陈述的主要结果的证明至此完成。

注 5.1. 利用 Mumford 对局部基本群的表示法，[13] 上述证明同样表明，如果 X 的奇点 p 是一个商奇点，那么 p 处局部基本群的阶由 d 的某个函数所界。

6. Other bounds

设 X 是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的不可约正规射影曲面。

引理 6.1. X 在任意点处的嵌入维数至多为 $d+1$。

证明。设 $p \in X$ 为一个闭点，(R, M) 是 X 在 p处的局部环。取经过 p 的两个一般超平面截面 H_1, H_2 ，它们在 p 处的方程分别为 h_1, h_2 。由于 X 是正规曲面，它是 Cohen-Macaulay 的，并且 $R/(h_1, h_2)$ 的长度等于 X中点 p 的重数。 p 处的重数为 $\leq d$ ，因为 X 的次数为 d，因此 $R/(h_1, h_2)$ 的长度 $\leq d$。这意味着 M 由 $d+1$ 个元素生成（不一定是极小生成集）。 □

现在假设 X 是 $\mathbb{P}^3$中次数为 d 的正规曲面。我们先证明关于 X上一个奇点芽的以下结论。

引理 6.2. 设 X' 是奇点芽 (X, p) 的最小解消。那么 dim $H^1(X', \mathcal{O}_{X'})$ 有上界 d。

证明。Laufer 为 p [10] 处 X 的米尔诺数 μ证明了一个优美的公式。

设 X' 是芽 (X, p) 的奇点的最小解消。那么

$$1 + \mu = e(E) + K_{X'} \cdot K_{X'} + 12 \cdot \dim H^1(X', \mathcal{O}_{X'}).$$

这里， E 是解消的例外除子， $K_{X'}$ 是X'的典范除子，而 $\mathcal{O}_{X'}$ 是 X'的结构层。我们此前已看到， $e(E)$和行列式（$E_i \cdot E_j$）均由 d所界。由于 X' 是最小解消，且X 是Gorenstein，因此存在一个支撑在 E上的典范除子 $K_{X'} = \Sigma a_i E_i$ 。

E_i 的算术亏格 p_i 由 d所界。根据伴随公式， $E_i^2 + K_{X'} \cdot E_i = 2p_i - 2$。利用克拉默法则求解 a_i ，可推得 a_i 由d所界。这意味着 $K_{X'}^2$ 由 d所界。□

引理 6.3. 设 X 是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的正规射影曲面，使得对于一个奇点消解 $X' \to X$，有 $b_1(X') = 0$ 。假设 X' 是 X 的奇点最小解消。那么 $p_g(X')$ $K_{X'}^2$ 有界于 d。

证明。我们先在 X 光滑时证明该结论，并指出 X 为正规时所需的修改。

我们已经证明 $b_2(X)$ 有界于 d。由霍奇分解可得 $2 \cdot p_g(X) < b_2(X)$。根据诺特公式， $\chi(X, \mathcal{O}_X) = (K^2 + e(X))/12$。由假设， $b_1(X) = 0$。因此 K^2 有界于 d。

现在假设 X 是正规曲面，且 $f: X' \to X$ 是 X 的奇点最小解消。众所周知， [1] 有 $e(X) - e(X') =$维数 $R^1 f_* \mathcal{O}_{X'}$。我们已经证明 X 的奇点数有界于 d。此外，对于 X 的每个奇点 p， $R^1 f_* \mathcal{O}_{X'}$ 在 p 处的茎的维数有界于 d。已经证明 $b_2(X')$ 有界于 d。现在可以像前一部分那样证明， $p_g(X')$ $K_{X'}^2$ 有界于 d。□

为陈述以下引理，我们需要无穷远基本群和无穷远第一同调群的定义：

定义 6.4. 按照本文的记号，设 S 是一个正规仿射曲面，其完备化为 X ，边界除子为 D ，并设 X' 是 X 的奇点简单正规交叉解消。令 D' 为 D 在 X' 中的连通逆像。令 N 为 D' 的一个足够小的紧管状邻域，其边界为 ∂N。无穷远基本群 $\pi_1^\infty(S)$ 定义为 $\pi_1(\partial N)$，而 $H_1^\infty(S)$ 定义为 $H_1(\partial N)$。这两个群与所选的奇点简单正规交叉解消 X' 无关，因此定义良好。

引理 6.5. 设 S 是一个次数为 d 的正规仿射曲面，嵌入于 $\mathbb{A}^n$ ，其完备化为X ，且位于 $\mathbb{P}^n$ 中。假设对于 S 的一个奇点消解 S' ，有 $b_1(S') =$0。那么 $H_1^\infty(S)$ 的秩和挠子群的阶均由 d 所界。

证明。如前所述，令 X' 为 X 的最小简单正规交叉奇点消解，并令 D' 为 D 在 X'中的连通逆像。设 D' 的对偶图中有 p 个圈，并令 $\{g_i\}_i$ 为D'中不可约曲线的各种亏格。令 N 为 D' 的一个充分小的紧管状邻域，其边界为 ∂N。那么无穷远基本群 $\pi_1^\infty(S)$ 为 $\pi_1(\partial N)$，并且$H_1^\infty(S) := H_1(\partial N)$。Mumford 在 [13]中证明， $H_1(\partial N) = K \oplus \mathbb{Z}^{p+2\sum_i g_i}$，其中 K 是一个有限阿贝尔群，且 $|K| = |det(D_i'.D_j')|$ ，其中 D_i' 为 D'中的不可约曲线。由于根据引理 4.5，我们知道该行列式的有界性，关于挠子阶的结论得证。

现在考虑对（N， ∂N）的有理系数上同调长正合列：

$$...H^1(N) \to H^1(\partial N) \to H^2(N, \partial N)...$$

由此得到正合序列（利用对偶性，以及 N 收缩到 D，且 $N-\partial N$ 强形变收缩到 D）：

$$...H^1(D)\to H^1(\partial N)\to H_2(D)...$$

我们已经看到，$b_1(D)$ 和 $b_2(D)$ 均有 d 的上界，因此 $b_1(\partial N)$ 也有 d 的上界。因此，D 的对偶图中圈 p 的数量也有 d 的上界。由于亏格 g_i 也有 d 的上界，我们最终得到，即使 $H_1^\infty(S)$ 的秩也有 d 的上界。证明完毕。

□

引理 6.6. $H_1(S_{reg})$ 有 d 的上界，其中 S_{reg} 是次数为 d 的正规仿射曲面 $S\subset\mathbb{A}^n$ 的光滑轨迹，且满足 $b_1(S')=0$。

证明。设 E 为映射 $S'\to S$ 的总例外轨迹。那么，正如我们已经看到的，$H^2(E)$ 有 d 的上界。考虑对偶对 (S',E) 在紧支撑下的上同调长正合列（取整数系数）。

$$H_c^2(S')\to H^2(E)\to H_c^3(S',E)\to H_c^3(S')\to(0).$$

由对偶性，$H_c^3(S')\cong H_1(S')$。我们已经证明，$H^2(E)$ 和 $H_1(S')$ 均有 d 的上界。因此，$H_c^3(S',E)\cong H_1(S'-E)$ 有 d 的上界。□

7. Intrinsic Degree

定义 7.1. 对于光滑射影曲面 X，令 d_{intr} 为满足以下条件的最小正整数：X 有一个光滑不可约丰沛除子 D，其线性系 $|D|$ 无基点，并且 $D^2=d_{intr}$。于是，$|D|$ 的三个一般截面给出一个次数为 d_{intr} 的 N¨oether 正规化 $X\to\mathbb{P}^2$。我们称 X 的内在次数为 d_{intr}。

我们将证明，若 $f:X'\to X$ 是以一般点 $p\in X$ 为中心、例外曲线为 E的爆破，则 X' 的内在次数不超过 d。我们将使用 K¨uchle 和 Coppens 分别得到的以下两个结果。

引理 7.2（K¨uchle [9]）。在上述情形中，设 $H'=f^*H$ 为 X 上丰沛除子 H 的拉回。那么，除子 $L=nH'-E$ 丰沛，当且仅当 $L^2>0$，前提是 $n\geq 3$；若 $H^2\geq 2$，则该条件可放宽为 $n\geq 2$。

命题 7.3. $X'\leq 4d-1$ 的内在次数，其中 $d\geq 2$ 是 $\mathbb{P}^N$中的非退化光滑射影曲面 X 的次数。

证明。我们将 K¨uchle 的结果应用于当前情形，其中 H 是 X 的一个超平面截面，且不经过我们要进行爆破的点 p。首先，$H^2=d>1$，因此我们得到 $L=2H'-E$是一个丰沛除子。由于 $L^2=4H'^2-1=4d-1$，根据定义可得 $d_{intr}\leq 4d-1$，即 X' 的内在次数有一个由 X的次数决定的上界。□

引理 7.4（Coppens [3]）。令 $f:\ X'\to X$ 为在一般点$p\in X$处的爆破，并假设 $t\geq 7$ 满足 $\dim\Gamma(X,tH)\geq 8$。那么 $tH'-E$在 X' 上非常 ample，其中 $H'=f^*H$。

注 7.5。我们可以直接应用Coppens的结果，得到与上述命题类似的 d_{intr}界。由于 $tH'-E$ 非常 ample，我们得到 $d_{intr}(X') \leq t^2d-1$，这给出了 X'内在次数有界性的相同结论，但界更大，因为 $t \geq 7$。

8. Examples

(1) 设 $S := \{xy = 1\} \subset \mathbb{A}^3$。则 S 是一个次数为 2 的光滑仿射曲面，但 $b_1(S) = 1$。(2) 设 $S := \{x^3 + y^3 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$。则 S 是一个次数为 3 的可缩曲面，但对于奇点消解 $S' \to S$，我们有 $b_1(S') = 2$。(3) 此例出自 [12]。设 $S := \{z^d - h(x)(h(x)y + 1) = 0\}$，其中 $h(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$ 且 $m \leq d$。由 x 给出的态射 $S \to \mathbb{A}^1$，对于 $c \neq 0$，其纤维为 $\{x = c\} \cong \mathbb{A}^1$，1，2，...，$m-1$。在 0，1，2，...，$m-1$ 上方的纤维同构于 $\mathbb{A}^1$，重数为 d。由此可证明 $H_1(S;\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/(d))^m$。

前两个例子表明，主定理中的假设 $b_1(S') = 0$ 不能删除。第三个例子表明，次数为 $2m+1$ 的曲面上 $H_1(S;\mathbb{Z})$ 的阶可以从关于 d 的线性函数一直变化到关于 d 的指数函数。这说明，对于一般的此类次数为 d 的曲面，无法给出一个简洁的界。

Acknowledgements

作者谨此感谢 Sudarshan Gurjar 提议使用分层来证明定理4.11。

第一作者感谢印度国家科学学院在本研究期间提供研究奖学金。

我们感谢审稿人认真阅读稿件，并提出改进表述的建议。

References

[1] M. Artin, *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces*, 《美国数学杂志》84（1962），485-496[2] Gottfried Barthel, Ludger Kaup, *Topologie des surfaces complexes compactes singulières*, 《紧复曲面的拓扑》，S´em. Math. Sup. 80（1982），蒙特利尔大学出版社，魁北克省蒙特利尔，– Marc Coppens, *Embeddings of general blowing-ups at points*, 《纯粹与应用数学杂志》469（1995），179–198[4] Alexandru Dimca, *On the homology and cohomology with complete intersection singularities* **58** 1986 321 339 , 《Compositio Mathematica》（），–[5] Alexandru Dimca, *On the connectivity of complex affine hypersurfaces*, 《Topology》29（ 1990 511 514 ），–[6] Jacob Eli Goodman, *Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors*, 《数学年刊》**89** 1969 160 183 （），– R.V. Gurjar, R.R. Simha, [7] *Some results on the topology of varieties dominated by* $\mathbb{C}^n$, 《数学杂志》211（1992），333-340

[8] Helmut Hamm, Lê D˜ung Tr´áng, *Lefschetz theorems on quasiprojective varieties*, 《法国数学会通报》 **113** 1985 2,23 142 （），第–期 Oliver Kuchle,

[9] ¨

Ample line bundles on blown up surfaces **304** 1996 151 155 , 《数学年刊》

[10] *On μ for surface singularities*

（），– H.B. Laufer, ，载于《多复变函数》，美国数学会纯粹数学研讨会论文集，XXX，第1部分（1977），45–49[11] Yongqiang Liu,

Milnor and Tjurina numbers for a hypersurface germ with isolated singularity **356** 2018 963 , 《巴黎科学院数学

966

报告》（），–[12] *$\mathbb{Q}$-homology planes as cyclic covers of $\mathbb{A}^2$* Alok Maharana, , 《日本数学会杂志》61（2009）第2期，393-425[13] David Mumford,

The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity **9** 1961 5 22 , 《IHÉS 数学出版物》（），–。[14] Madhav V. Nori, *Zariski's conjecture and related problems*, 《高等师范学校科学纪事》16（1983），305-344。[15] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, 纽约（1994）。[16] A.N. Var˘cenko, *Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings* **36**, 1972 , 《苏联科学院消息·数学辑》（），957–1019

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bombay, Mumbai 400076, India *Email address*: gurjar@math.iitb.ac.in

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Sector 81, Mohali 140306, India *Email address*: maharana@iisermohali.ac.in