arXiv:2303.01063v2 [math.AG] 7 Mar 2023

嵌套箭图簇的导出爆破与双有理几何

赵宇

Dedicated to Professor Hiraku Nakajima on the occasion of his 60th birthday

Abstract. 给定一个箭图，Nakajima 引入了箭图簇和 Hecke 对应，后者是箭图簇笛卡尔积的一个闭子簇。本文将两个嵌套箭图簇视为沿自然投影取的 Hecke 对应的纤维积。对角线爆破后，我们证明它们同构于一个四重模空间，该空间由 Negut.在 Jordan 箭图的情形下发现。核心工具是 Jiang 的导出射影化理论和 Hekking的导出爆破理论；当两个导出概形都准光滑时，我们还得到了局部模型。

1. Introduction

1.1. 主定理。设 $Q=(I,E)$ 是一个箭图，且 $\mathbf{w}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}$ 是一个满足 $\mathbf{w}\neq 0$的向量。在一系列重要工作中，[17][18][20], Nakajima

(1) 引入了中岛箭图簇 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$，其中 $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}$；(2) 引入了 Hecke 对应 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$（定义见定义 4.1），它是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$ 的闭光滑子簇。这里 $\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}$，且存在 $k\in I$，使得 $\mathbf{v}^2-\mathbf{v}^1=(\delta_{kj})_{j\in I}$，其中 δ_{kj} 是 Kronecker 符号；(3) 证明了当 Q 没有边环时，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 上的典范线丛在箭图簇的 Grothendieck 群上生成量子环群的作用（Nakajima [18] 也得到了上同调的类似构造）。

给定 $k\in I$ 且 $\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^{1'}$，取 $\mathbf{v}^2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}$ 使得 $\mathbf{v}^1=\mathbf{v}^{1'}$ 且 $\mathbf{v}^2-\mathbf{v}^1=\mathbf{v}^{1'}-\mathbf{v}^0=(\delta_{kj})_{j\in I}$，本文研究以下三重模空间的几何

$$\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1):=\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\times_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^{1'})$$
$$\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1):=\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\times_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{v}^2).$$

Let

$$\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\to\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1),\quad \Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\to\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1).$$

分别是纤维积的对角嵌入。众所周知（见命题 5.6 或 [19]），$\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v})-\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\cong\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v})-\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$。

给定概形的一个闭嵌入 $f\colon X\to Y$，我们将 Bl_f 称为 Y 中 X 的爆破。本文证明了

Date: 2023年3月8日。

定理 1.1（定理 6.4）。存在一个光滑簇 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$，使得

$$Bl_{\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}} \cong \mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) \cong Bl_{\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}}, \tag{1.1}$$

且（1.1）在导出概形中有一个增强。此外，若 $dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)) > dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}))$（分别地，若 $dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)) > dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}))$），则 $\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1)$（分别地，$\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1)$）是一个典范奇点。

在第 1.2 节、第 1.3 节和第 1.4 节中，我们将介绍 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 的几何以及导出增强的含义。

1.2. Negut 的四重模空间 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$。光滑簇 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 可以实现为一个闭子簇

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$$

如下：给定 $k \in I$，令 g_k 为以 k 为源点的边环数。对于任意 ADHM 数据 $[B,i,j]$（ADHM 数据的定义见第 3.1 节），且 l 是 $E^{\#} := E \cup \bar{E}$ 中以 k 为源点的边环。迹 $tr(B_l)$ 在规范群作用下保持不变。因此，我们可以考虑如下函数 tr_k

$$tr_k([B,i,j]) = (tr(B_l))_{l\in E^{\#},in(l)=out(l)=k}$$

定义 1.2（定义 5.5，Neguţ [21][22] 针对 Jordan 箭图）。我们将$\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$定义为由满足以下条件的四元组构成的簇

$$(s^0,s^1,s^{1'},s^2) \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$$

使得

(1) $(s^0,s^1) \in \mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)$ 且 $(s^0,s^{1'}) \in \mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^{1'})$;
(2) $(s^1,s^2) \in \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 且 $(s^{1'},s^2) \in \mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{v}^2)$;
(3) $tr_k(s^1) - tr_k(s^0) = tr_k(s^2) - tr_k(s^{1'})$。

注 1.3。定义 1.2 最初由 Neguţ [21][22] 针对 Jordan 箭图提出。我们重新表述了他的定义，使其对所有箭图簇均有良好定义，并在定理 5.7 中证明了其光滑性。

分别遗忘 s^2 和 s^0，我们诱导出态射

$$\alpha^- : \mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) \to \mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1), \quad \alpha^+ : \mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) \to \mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1)$$

在定理 6.4 中，我们通过证明 $\alpha^{\pm}$ 是相应爆破的投影态射，强化了定理 1.1。

注 1.4。Nakajima [18] 证明了，若 Q 没有边环，则 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$ 的拉格朗日子流形。当 Q 有边环时，我们需要稍作修改：考虑函数

$$t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \to \mathbb{C}^{2g_k}, \quad (s^1,s^2) \to tr_k(s^2) - tr_k(s^1).$$

在定理 4.8 中，我们证明，在闭嵌入 $p \times q \times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2),\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 下，$\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}) \times \mathbb{C}^{2g_k}$ 是一个拉格朗日子流形。

1.3. Jiang 的导出射影化与 Hekking 的导出爆破理论。设 $f: X \to Y$ 是光滑簇的一个闭嵌入。设 C_f 是 X 在 Y 中的余法丛。于是有如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} P_X(C_f) & \longrightarrow & Bl_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{1.2}$$

使得 $P_X(C_f)$ 是 Bl_f的例外因子，且 $Bl_f - P_X(C_f) \cong Y - X$。

我们希望将图表 (1.2) 扩展为拟光滑（导出）概形之间的闭嵌入，这需要关于 $F \in QCoh(X)$ 射影化的普适理论，其中 X 是导出概形；还需要关于导出概形闭嵌入的导出爆破的普适理论。Jiang[9] 和 Hekking [6][5] 最近分别实现了这些理论。本文记

$$\mathbb{P}_X(F)$$

将 $F \in QCoh(X)$ 记作导出射影化（或 Jiang 射影化），并将

$$\mathbb{B}l_f,$$

其中 f 是导出概形的闭嵌入，我们称之为导出爆破（或 Hekking 爆破），以区别于 Grothendieck 射影化或经典爆破理论。

定理 1.5（ [6]的定理 5.3 和命题 5.5）。设 L_f 为 f的余切复形，并记余法复形为 $C_f := L_f[-1]$。那么我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_X(C_f) & \longrightarrow & \mathbb{B}l_f \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_f} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

使得 $\mathbb{P}_X(C_f)$ 是 $\mathbb{B}l_f$的（虚）Cartier除子，且 $\mathbb{B}l_f - \mathbb{P}_X(C_f) \cong Y - X$。投影态射 pr_f 是适当的。

注 1.6。在 Jiang 和 Hekking 之前，人们已经做过许多尝试，试图在经典几何中（在某些条件下）描述导出射影化或爆破，例如 Kirwan [12], Kiem-Li [11], Vakil-Zinger [28], Savvas [24], Negut[21], Jiang-Leung [10], Jiang [8], Addington-Takahashi [1] 以及作者 [31][30]。

1.4. 拟光滑导出概形的导出爆破。我们提出以下关于 Tor 振幅的猜想：

猜想 1.7. 给定一个整数 $n \geq 0$ 以及导出概形的一个闭嵌入 $f: X \to Y$。如果 L_X 和 L_Y的 Tor 振幅均为 $[0, n]$，那么 $L_{\mathbb{B}l_f}$的 Tor 振幅也为 $[0, n]$。

在 $n = 0$的情况下，证明是标准的，类似于 [27]中的定理 22.3.10。我们证明 $n = 1$的情形：

定理 1.8（推论 C.8）。如果 X 和 Y 都是拟光滑的，那么导出爆破 $\mathbb{B}l_f$ 也是拟光滑的。

从现在起，我们假设 X 和 Y 都是拟光滑的。对于拟光滑的导出概形 M，Ciocan-Fontanine 和 Kapranov [3] 在底层概形 $\pi_0(M)$上定义了 K-理论虚基本类 $[M]_K^{vir}$。由于 Y和 $\mathbb{B}l_f$都是拟光滑的，自然可以通过 pr_f的推前来比较 $[\mathbb{B}l_f]_K^{vir}$ 和 $[Y]_K^{vir}$。

令 $r := vdim(X) - vdim(Y)$ 为相对虚维数。当 $r < 0$ 时，我们证明

定理1.9（定理 C.10，消失定理）。给定 $r < l \leq 0$，我们有

$$\mathbf{R}pr_{f*}\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}(l) \cong \mathcal{O}_Y.$$

这里，Rpr_{f*} 是导出推前函子。

作为推论，我们有

$$\pi_0(pr_f)_*[\mathbb{B}l_f]_K^{vir} = [Y]_K^{vir}.$$

若 X 光滑且相对维数 $r := vdim(X) - vdim(Y) \geq 0$，我们提出以下猜想

猜想 1.10. 存在 $D_l \in D^b_{coh}(Y)$、$-r-1 \leq l \leq 0$，使得

(1) $D_{-r-1} \cong \mathcal{O}_Y$且 $D_0 \cong$ R$pr_{f*}\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}$;

(2) 存在三角:

$$D_{l-1} \to D_l \to \mathbf{R}f_*(det(C_f)^{-1} \wedge^{l-r} (C_f^\vee[1]))[1-l] \tag{1.3}$$

若猜想 1.10 成立，则有以下枚举计数公式:

$$\pi_0(pr_f)_*[\mathbb{B}l_f]_K^{vir} = [Y]_K^{vir} + f_*(\sum_{l=-r}^{0}(-1)^{l-1}det(C_f)^{-1} \wedge^{l+r} (C_f^\vee[1])). \tag{1.4}$$

在附录D中，我们证明：若 Y 是 $f \in \Gamma(Z,V)$ 的导出零点轨迹，其中 V 是光滑概形 Z 上的局部自由层，则猜想 1.10 成立。

现在我们描述 $\mathbb{B}l_f$ 的双有理几何，以及与 $Bl_{\pi_0(f)}$ 的比较。我们有

定理1.11（ [6] 的定理3.5.5及推论C.2）。概形 $Bl_{\pi_0(f)}$ 是 $\pi_0(\mathbb{B}l_f)$ 的闭子概形。若 $\pi_0(Y) - \pi_0(X)$ 非空且 $\mathbb{B}l_f$ 光滑，则 $Bl_{\pi_0(f)} \cong \mathbb{B}l_f$。

在本文中，我们给出了判定 $\mathbb{B}l_f$ 光滑性的一个准则，

定理 1.12（定理 C.12，粘合定理）。若 $\mathbb{P}_Y(C_f)$ 和 $Y - X$ 都是光滑的，则导出爆破 $\mathbb{B}l_f$ 也光滑。

由于 Y 和 $\mathbb{B}l_f$ 都是拟光滑的，根据 Sch¨urg-To¨en-Vezzosi [26] 和 Jiang [9]，L_X 和 $L_{\mathbb{B}l_f}$ 的行列式都有定义，分别记为 K_Y 和 $K_{\mathbb{B}l_f}$。若 $\mathbb{B}l_f$ 光滑，且 $\pi_0(Y) - \pi_0(X)$ 非空，则有

定理 1.13（差异公式，定理 C.9）。我们有 $K_{\mathbb{B}l_f} \cong$ L$pr_f^*K_Y \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}(vdim(X) - vdim(Y) + 1)$。

推论 1.14（Grauert-Riemenschneider 消失定理，推论 C.11）。若相对虚维数 $vdim(X) - vdim(Y) < 0$, $\mathbb{B}l_f$光滑，且 $\pi_0(Y) - \pi_0(X)$ 非空，则有 R$pr_{f*}K_{\mathbb{B}l_f} \cong K_Y$。

猜想 1.15。我们可以去掉定理 1.13 和推论 1.14 中 $\mathbb{B}l_f$ 光滑以及 $\pi_0(Y)-\pi_0(X)$ 非空的假设。

注记 1.16。为证明本小节中的定理，我们发展导出爆破的局部理论，即描述 $\mathbb{B}l_f$ 的（Zariski）局部邻域。为证明猜想 1.10 和猜想 1.15，我们需要一种下降理论（或整体理论），以证明局部计算可以下降为整体计算。

最后，我们将导出爆破理论应用于三重模空间。我们考虑 $\mathfrak{Z}_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$ 的以下导出增强

$$\mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1) := \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\times^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{v}^2), \quad \mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1) := \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\times^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{v}^2)$$

together with the diagonal embeddings

$$\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\to\mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1), \quad \mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\to\mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1).$$

以下定理给出了对角线嵌入之爆破的增强：

定理 1.17（定理 6.3）。 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}}$ 和 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}}$ 都是光滑概形，并且我们有

$$\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}}\cong Bl_{\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}}, \quad \mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}}\cong Bl_{\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}}.$$

1.5. 与量子环群的关系。继 Nakajima [20]之后，出现了几种将量子环推广到带边环的箭图上的方法，例如 Maulik-Okounkov [15]、Schiffmann-Vasserot [25] 和 Kontsevich-Soibelman [13]。给定一个带有一组极大变形参数的箭图 $Q=(I,E)$，Negut- Sala-Schiffmann [23] 定义了一个量子环群 U_Q^+，其生成元由 $I\times\mathbb{Z}$ 索引，并满足一些显式的二次关系和三次关系。此外，他们证明了 U_Q^+ 与 K-理论 Hall 代数的局部化形式同构，因此它作用于 Nakajima 箭图簇的 Grothendieck 群上。此外，他们构造了 U_Q^+ 的 Drinfeld 双，并将其记为 U。

作为定理 1.1 的推论，我们将在 [29] 中证明

定理 1.18（[29]）。箭图簇的 Grothendieck 群上由 U_Q^+ 给出的作用，可以推广为通过 Hecke 对应的 U 作用。此外，正部与负部的（范畴）交换子可以由箭图簇上的典范局部自由层复形显式表示。

1.6. 与投射维数 2 的阿贝尔范畴中的稳定对象的关系。尽管本文聚焦于箭图簇，即预投射代数稳定表示的模空间，但本文的所有工具都可以在相干层的陈特征满足温和条件时，轻易推广到投射维数 2 的阿贝尔范畴中的稳定对象。我们将在后续工作中阐述详情；关于代数曲面上的相干层阿贝尔范畴，参见 [31][30] 。

1.7. 结构安排。第 2 节介绍预射影代数表示的上同调理论。第 3 节介绍 Crawley-Boevey 的构造和中岛箭图簇。第 4 节介绍 Hecke 对应。第 5 节介绍若干嵌套箭图簇。我们还介绍 Negut 的四重模空间，并证明其光滑性。第 6 节，

我们介绍对角线的导出爆破，并证明定理 1.1。附录中，我们回顾 Jiang 的射影化理论和 Hekking 的爆破理论，重点讨论拟光滑概形。我们还阐述导出爆破与虚基本类之间的关系。

1.8. 记号。

1.8.1. 箭图。箭图 $Q=(I,E)$ 是一个有向图，其中 I 是顶点集， E 是箭集。我们将 $in,out: E\to I$ 记作源映射和目标映射。对于任意 $e\in E$，我们定义 $\bar{e}$ 为具有相反定向的箭，即 $in(e)=out(\bar{e})$ 且 $in(\bar{e})=out(e)$。我们记作 $\overline{E}=\{\bar{e}|e\in E\}$ 和 $E^{\#}=E\cup\overline{E}$。我们将 $Q^{\#}=(I,E^{\#})$记作相应的双箭图。对于 $\bar{e}\in\overline{E}$，我们记作 $\overline{\bar{e}}:=e$。

若一条边 $e\in E^{\#}$ 满足 $in(e)=out(e)$，则称其为一个环；并称e 的起点为 $in(e)$。给定 $k\in I$，我们将箭图 $Q_k:=(\{k\},E_k)$ 记作，其中

$$E_k:=\{e\in E|in(e)=out(e)=k\}.$$

我们将 g_k 记为 E_k中的环数。

1.8.2. I-分次向量空间与维数向量。设 I 为一个有限集。我们将维数向量 $\mathbf{v}$ 记为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}$ 中的一个元素。我们将一个 I-分次向量空间记为 $H=(H_k)_{k\in I}$，其中所有 H_k 都是有限维向量空间。我们定义$dim(H)=(dim(H_k))_{k\in I}$ 为 H的维数。若 $H'=(H'_k)_{k\in I}$，且对每个 $k\in I$， $H_{k'}$ 都是 H_k的子空间，则称 H' 为 H 的一个 I-分次子空间。

给定两个 I-分次向量空间 G、 H，我们将 I-分次向量空间$I(G,H)=\oplus_k Hom(G_k,H_k)$记为 $\zeta\in I(G,H)$。称 $\zeta\in I(G,H)$为一个 I-分次同态。我们将 $ker(\zeta):=\oplus_{k\in I}ker(\zeta_k)$记为 G的一个 I-分次子空间。我们将 $im(\zeta):=\oplus_{k\in I}im(\zeta_k)$记为 H 的一个 I-分次子空间。我们将$coker(\zeta):=\oplus_{k\in I}coker(\zeta_k)$记为，它也是 I-分次的。

给定一个 I 分次向量空间 G 和 $C\in I(G,G)$，我们记 $tr_I(C):=(tr(C_h))_{h\in I}\in\mathbb{C}^I$ 和 $tr(C):=\sum_{h\in I}tr(C_h)\in\mathbb{C}$。

对于 $k\in I$，我们定义维数向量 $\delta_k:=(\delta_{ki})_{i\in I}$，其中 δ_{kj} 是 Kronecker 符号。对于每个维数向量 $\mathbf{v}$，我们可以关联一个 I 分次向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbf{v}}:=(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_k})_{k\in I}$。对于 $k\in I$，我们记 $\mathbb{C}_k:=\mathbb{C}^{\delta_k}$。

为方便起见，我们将使用粗体字母（如 $\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 等）表示维数向量，并使用大写字母（如 V、W 等）表示 I 分次向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbf{v}}$、$\mathbb{C}^{\mathbf{w}}$ 等。

1.8.3. $E^{\#}$ 分次同态与乘法。设 $Q=(I,E)$ 是一个箭图。给定两个 I 分次向量空间 G、H，我们定义

$$E(G,H):=\bigoplus_{h\in E^{\#}}Hom(G_{in(h)},H_{out(h)}).$$

例 1.19. 给定 $k\in I$，对于任意 I 分次向量空间 G，有

$$I(G,\mathbb{C}_k)=G_k^{\vee},\quad E(G,\mathbb{C}_k)=\oplus_{out(h)=k}G_{in(h)}^{\vee},$$
$$I(\mathbb{C}_k,G)=G_k,\quad E(\mathbb{C}_k,G)=\oplus_{in(h)=k}G_{out(h)}.$$

给定 $B\in E(G,H)$，且 G' 是 G的一个 I-分次子空间，我们称 G' 是B-不变的，如果对于任意 $h\in E^{\#}$, $B_hG'_{in(h)}\subset G'_{out(h)}$均成立。我们按如下方式定义乘法:

(1) for $B=(B_h)\in E(G,H)$ and $C=(C_h)\in E(H,K)$, we define

$$CB:=(\sum_{in(h)=k}C_hB_{\bar{h}})_k\in I(G,K);$$

(2) for $B=(B_k)\in I(G,H)$ and $C=(C_h)\in E(H,K)$, we define

$$CB:=(C_hB_{in(h)})_{h\in E^\#}\in E(G,K);$$

(3) for $B=(B_h)\in E(G,H)$ and $C=(C_k)\in I(H,K)$, we define

$$CB:=(C_{out(h)}B_h)_{h\in E^\#}\in E(G,K);$$

(4) for $B=(B_k)\in I(G,H), C=(C_k)\in I(H,V_K)$, we define

$$CB=(C_kB_k)_{k\in I}\in I(G,K).$$

1.8.4. 导出概形。导出概形是一个二元组 $X=(|X|,\mathcal{O}_X)$，其中 $|X|$ 是一个拓扑空间，$\mathcal{O}_X$ 是 $|X|$ 上的层，其取值于单纯交换环的 ∞-范畴，并且环化空间 $X^{cl}=(|X|,\pi_0(\mathcal{O}_X))$ 是一个概形，且对每个 $n>0$，层 $\pi_n\mathcal{O}_X$ 都是一个拟相干 $\pi_0\mathcal{O}_X$-模。我们也将 X^{cl} 记作 $\pi_0(X)$，并称其为 X的底层概形。这里，所有导出概形都定义在 $\mathbb{C}$上，因此导出概形在局部可由微分分次代数而非单纯对象建模。

对于导出概形的态射 $f\colon X\to Y$，我们将 L_f 记作余切复形 f。我们将切复形 T_f 定义为 L_f 的导出对偶，并将余法复形定义为 $C_f:=L_f[-1]$。如果态射 $f\colon X\to Y$的 L_f 完美、具有 Tor 振幅 $[0,1]$ 且秩恒定，则称该态射为拟光滑。如果态射 $f\colon X\to Y$的 L_f是 X上的常秩局部自由层，则称该态射为光滑。对于拟光滑态射 $f\colon X\to Y$，我们定义虚维数$vdim(f):=rank(L_f)$，以及典范线丛 $K_f:=det(L_f)$。

例 1.20. 当 $f\colon X\to Y$是光滑概形之间的态射时，我们有

$$L_f\cong\{f^*T^*Y\to T^*X\},\quad T_f\cong\{TX\to f^*TY\}[-1]$$

因此 f 是拟光滑的。

例 1.21. 两个拟光滑态射的复合仍然是拟光滑的。

我们称导出概形 X 是经典的，如果 $\pi_0(X)\cong X$。本文中，我们始终假设 X 是 $Spec(\mathbb{C})$ 上的有限型概形。给定一个导出概形 X，若其到 $Spec(\mathbb{C})$ 的典范态射是光滑或拟光滑的，则称 X 是光滑或拟光滑的。给定一个导出概形 X 以及局部自由层 $f\colon\mathcal{O}_X\to V$的一个整体截面，我们将 $\mathbb{R}\mathcal{Z}(f)$记作 f的导出零点轨迹。闭嵌入 $\mathbb{R}\mathcal{Z}(f)\to X$ 始终是拟光滑的。

1.8.5. 导出射影化与导出爆破。设 X 是一个导出概形，且 $F\in QCoh(X)$，我们将 $\mathbb{P}_X(F)$记作 Jiang [9],的导出射影化，并将 $pr_F\colon\mathbb{P}_X(F)\to X$ 记作投影态射。在 $\mathbb{P}_X(F)$ 上存在一个泛线丛，我们将其记作 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(F)}(1)$。

设 $f\colon X\to Y$是导出概形的一个闭嵌入，我们将 $\mathbb{B}l_f$ 记为 f的导出爆破，并将 $pr_f\colon\mathbb{B}l_f\to Y$ 记为投影态射。我们将$\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}(-1)$记为 $\mathbb{B}l_f$的虚例外因子。

1.9. 致谢。作者谨向 Andrei Negut、Qingyuan Jiang 和 Yukinobu Toda 致谢，感谢他们给予的诸多有益讨论，并特别感谢 Jeroen Hekking 与作者分享他的论文。作者获得了日本文部科学省的世界顶尖国际研究中心倡议（WPI倡议）以及日本学术振兴会科学研究费补助金（项目编号：22K13889）的资助。

2. Quivers, and Representations of Preprojective Algebras

本节回顾预投射代数表示的上同调理论。本节固定一个箭图 $Q=(I,E)$。

2.1. 预投射代数与表示。我们固定一个函数 $\epsilon: E^{\#}\to\mathbb{C}^*$，使得对于任意 $h\in E$，都有 $\epsilon(h)+\epsilon(\bar{h})=0$。给定 $B\in E(G,H)$，记 $\epsilon B:=\oplus_{h\in E^{\#}}\epsilon(h)B_h$。对于任意 $B\in E(G,H)$ 和 $C\in E(H,K)$，有$\epsilon BC+B\epsilon C=0$。

例 2.1. 给定 $k\in I$，有

$$E(\mathbb{C}_k,\mathbb{C}_k)=\oplus_{l\in E_k^{\#}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}^{2g_k}$$

并将其记为 L_k。我们将 $x=(x_l)^{l\in E_k^{\#}}$ 视为 L_k 的一个元素。L_k 上存在一个辛形式：

$$\omega_k(x^1,x^2):=\epsilon(l)x_l^1x_l^2.$$

设 $kQ^{\#}$ 为 $Q^{\#}$的路径代数，并将 Q 的预投射代数记为

$$\Pi_Q:=kQ^{\#}/\sum_{h\in E^{\#}}\epsilon(h)h\bar{h}.$$

定义 2.2. 我们将一个 I-分次 Π_Q-模定义为一对 (H,B_H)，其中 H是有限维的 I-分次向量空间，且 H，$B_H\in E(H,H)$ 满足 $\epsilon B_HB_H=0$。

本文中，我们将省略 B_H，直接称 H 为一个 I-分次 Π_Q-模。我们将 H 的维数定义为其作为 I-分次向量空间的维数。给定两个I-分次 Π_Q-模 G,H，我们定义 Hom-空间

$$Hom_{\Pi_Q}(G,H)=\{\zeta\in I(G,H)|\zeta B_G=B_H\zeta\}.$$

给定 $\zeta\in Hom_{\Pi_Q}(G,H)$，注意到 $ker(\zeta)$、$im(\zeta)$ 和 $coker(\zeta)$ 也都是 I-分次 Π_Q-模。因此，所有 I-分次 Π_Q-模构成一个阿贝尔范畴。

例 2.3. 给定 $k\in I$，对于任意 $x\in\mathrm{L}_k\cong E(\mathbb{C}_k,\mathbb{C}_k)$，有 $(\epsilon x)x=0$，因此 x 可视为一个 I-分次 Π_Q-模。

2.2. $\mathcal{E}xt$-复形。给定两个 I-分次 Π_Q 模 G、H，我们定义复形

$$\mathcal{E}xt^{\bullet}_{\Pi_Q}(G,H):=\{I(G,H)\xrightarrow{\sigma(G,H)}E(G,H)\xrightarrow{\tau(G,H)}I(G,H)\},$$

其中

$$\sigma(G,H)(\zeta)=B_H\zeta-\zeta B_G,\quad \tau(G,H)(J)=\epsilon B_HJ+\epsilon JB_G.$$

我们记

$$Ext^0_{\Pi_Q}(G,H):=ker(\sigma(G,H)),\quad Ext^2_{\Pi_Q}(G,H):=coker(\tau(G,H)),$$
$$Ext^1_{\Pi_Q}(G,H):=ker(\tau(G,H))/im(\sigma(G,H)).$$

于是有 $Hom_{\Pi_Q}(G,H)\cong Ext^0_{\Pi_Q}(G,H)$。

给定 I-分次的 Π_Q-模 G、H、K， I-分次同态空间的复合自然地诱导出一个态射：

$$\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G,H)\otimes\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(H,K)\to\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G,K),$$

从而自然地诱导出态射

$$\theta: Ext^i_{\Pi_Q}(G,H)\otimes Ext^j_{\Pi_Q}(H,K)\to Ext^{i+j}_{\Pi_Q}(G,K).$$

$E(G,H)$ 与 $E(H,G)$ 之间的完美配对 tr_ϵ：

$$(J^1,J^2)\to tr(\epsilon J^1J^2).$$

诱导出一个同构 $\tau(G,H)\cong\sigma(H,G)^\vee$，因此我们有完美配对：

$$\Omega(G,H): Ext^l_{\Pi_Q}(G,H)\otimes Ext^{2-l}_{\Pi_Q}(H,G)\to\mathbb{C},\quad a\otimes b\to tr(\theta(a\otimes b)).$$

我们注意到，对于 $a\in Ext^m(G,H)$ 和 $b\in Ext^{2-m}(H,G)$，有 $\Omega(G,H)(a\otimes b)=(-1)^{m(2-m)}\Omega(H,G)(b\otimes a)$。此外，对于任意 I-分次的 Π_Q-模 G，$\Omega(G,G)$ 是 $Ext^1(G,G)$ 上的辛形式。

给定两个维数向量 $\mathbf{v}^1$,$\mathbf{v}^2$,，我们引入双线性配对

$$\mathbf{v}^1\bullet\mathbf{v}^2:=\sum_{k\in I}\mathbf{v}^1_k\mathbf{v}^2_k,$$

$$<\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2>_Q:=-\sum_{h\in E^\#}\mathbf{v}^1_{in(h)}\mathbf{v}^2_{out(h)}+2\mathbf{v}^1\bullet\mathbf{v}^2.$$

那么对于任意两个 I-分次的 Π_Q-模 G、H，我们有

$$\sum_{l=0}^{2}(-i)dim(Ext^i_{\Pi_Q}(G,H))=<dim(G),dim(H)>_Q\ . \tag{2.1}$$

2.3. 长正合列与扩张。设

$$0\to G\xrightarrow{\zeta_{GH}}H\xrightarrow{\zeta_{HK}}K\to 0$$

这是一个 I-分次的 Π_Q-模的短正合列。那么对于另一个 I-分次的Π_Q-模 L，我们有如下复形的短正合列

$$0\to\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(L,G)\xrightarrow{\zeta_{GH}\circ-}\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(L,H)\xrightarrow{\zeta_{HK}\circ-}\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(L,K)\to 0$$

$$0\to\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(K,L)\xrightarrow{-\circ\zeta_{HK}}\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(H,L)\xrightarrow{-\circ\zeta_{GH}}\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G,L)\to 0.$$

它们诱导出长正合列：

(2.2)

$$0\longrightarrow Ext^0(K,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{HK}\otimes-)}Ext^0(H,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{GH}\otimes-)}Ext^0(G,L)$$

$$\xrightarrow{\theta(\zeta_{KG}\otimes-)}Ext^1(K,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{HK}\otimes-)}Ext^1(H,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{GH}\otimes-)}Ext^1(G,L)$$

$$\xrightarrow{\theta(\zeta_{KG}\otimes-)}Ext^2(K,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{HK}\otimes-)}Ext^2(H,L)\xrightarrow{\theta(\zeta_{GH}\otimes-)}Ext^2(B^1,L)$$

$$\longrightarrow 0$$

(2.3)

$$0 \longrightarrow Ext^0_{\Pi_Q}(L,G) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{GH})} Ext^0_{\Pi_Q}(L,H) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{HK})} Ext^0_{\Pi_Q}(L,K)$$

$$\xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{KG})} Ext^1_{\Pi_Q}(L,G) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{GH})} Ext^1_{\Pi_Q}(L,H) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{HK})} Ext^1_{\Pi_Q}(L,K)$$

$$\xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{KG})} Ext^2_{\Pi_Q}(L,G) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{GH})} Ext^2_{\Pi_Q}(L,H) \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{HK})} Ext^2_{\Pi_Q}(L,K)$$

$$\longrightarrow 0.$$

这里，$\zeta_{KG} \in Ext^1_{\Pi_Q}(K,G)$ 是式 (2.2) 中 $id \in Ext^0_{\Pi_Q}(G,G)$ 的像，其中我们用 G 替换 L，并将 ζ_{KG} 记为该短正合列的扩张类。

定义 2.4. 给定两个 I分次的 Π_Q模 G, K， G 和 K 是一个短正合列：

$$C = \{0 \to G \to H \to K \to 0\}$$

若存在一个由 I分次的 Π_Q模构成的交换图表，则称两个扩张 C, C' 标量等价：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_1 id} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_3 id} & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

使得 $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$ 和 ζ 是同构。若存在上述图表且满足 $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$，则称 C 和 C' 等价。我们用 $\mathcal{M}^{ext}_{\Pi_Q}(G,K)$（分别用 $\mathcal{M}^{\mathbb{C}^*-ext}_{\Pi_Q}(G,K)$）表示 G 和 K 的扩张按等价（分别按标量等价）关系取商后的模空间。

引理 2.5. 对应关系

$$\{0 \to G \to H \to K \to 0\} \to \zeta_{KG}$$

诱导出同构：

$$\mathcal{M}^{ext}_{\Pi_Q}(G,K) \cong Ext^1_{\Pi_Q}(K,G), \quad \mathcal{M}^{\mathbb{C}^*-ext}_{\Pi_Q}(G,K) \cong [Ext^1_{\Pi_Q}(K,G)/\mathbb{C}^*]$$

其中，$\mathbb{C}^*$ 作用是标量作用。此外，当且仅当 $\zeta_{KG} = 0$ 时，短正合列分裂。

证明。对于 $C \in Ext^1_{\Pi_Q}(K,G)$，我们要构造一个以 G 和 K 为端点、扩张类为 C 的扩张。设 C_0 是 C 在 $E(K,G)$ 中的一个代表元。那么 $\tau(K,G)(C_0) = 0$。我们注意到，对于满足 $\tau(K,G)(\zeta) = 0$ 的 $\zeta \in E(K,G)$，矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_K & C_0 \\ 0 & B_G \end{pmatrix} \in E(K \oplus G)$$

诱导出一个 I-分次 Π_Q-模结构 $H = (K \oplus G, B)$，并得到一个短正合列

$$0 \to G \to H \to K \to 0.$$

我们注意到，上述短正合列（在等价意义下）与选择 C_0 无关。它诱导出 ζ_{KG} 的一个逆对应。模标量等价的对应关系由模等价的对应关系导出。□

2.4. 扩张与拉格朗日子空间。给定 $k \in I$，若一列 I-分次Π_Q-模 $(G^0, G^1, \cdots G^m)$ 满足以下条件，则称其为 k-良序列：

(1) 对任意 $y \in \mathrm{L}_k$, $Hom_{\Pi_Q}(y, G^m) \cong 0$(2) 对任意 $0 \le a \le b \le m$，存在一个单射态射 $\zeta_{G^aG^b} \in Hom_{\Pi_Q}(G^a, G^b)$，使得 $Hom_{\Pi_Q}(G^a, G^b) \cong \mathbb{C}\zeta_{G^aG^b}$，且对所有 $0 \le a \le b \le c \le m$，$\zeta_{G^bG^c} \circ \zeta_{G^aG^b} \cong \zeta_{G^aG^c}$。(3) 对于 $0 \le a < b \le m$, $Hom_{\Pi_Q}(G^b, G^a) = 0$。(4) 对任意 $0 \le a < m$, $dim(G^a) + \delta_k = dim(G^{a+1})$

我们注意到，若 $m \ge 1$，条件 (2) 可推出对于所有 $0 \le a \le m$，都有 $\zeta_{G^aG^a} = id_{G^a}$。设 (G^1, G^2) 是一个 k-良序列，其短正合列如下：

$$0 \to G^1 \xrightarrow{\zeta_{G^1G^2}} G^2 \xrightarrow{\zeta_{G^2x}} x \to 0, \tag{2.4}$$

其中 $x \in \mathrm{L}_k$。由条件 (1)，(2.4) 不分裂。我们考虑下列复形图表：

(2.5)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(x, G^1) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^2, G^1) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^1, G^1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(x, G^1) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^2, G^2) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^1, G^2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(x, x) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^2, x) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^1, x) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中所有的列和行都是复形的正合列。因此，下列双复形的谱序列：

$$\{\mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^2, G^1) \to \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^1, G^1) \oplus \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^2, G^2) \to \mathcal{E}xt^\bullet_{\Pi_Q}(G^1, G^2)\}$$

收敛到 $\oplus_{i=0}^2 Ext^i_{\Pi_Q}(x, x)[-i]$。通过计算该谱序列，我们得到以下命题：

命题 2.6。考虑复形

$$Ext^1_{\Pi_Q}(G^2, G^1) \xrightarrow{\sigma_{G^1G^2}} Ext^1_{\Pi_Q}(G^1, G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^2, G^2) \xrightarrow{\tau_{G^1G^2}} Ext^1_{\Pi_Q}(G^1, G^2),$$

其中

$$\sigma_{G^1G^2} = (\zeta_{G^1,G^2} \otimes -) - (- \otimes \zeta_{G^1G^2}), \quad \tau_{G^1G^2} = (- \otimes \zeta_{G^1G^2}) + (\zeta_{G^1G^2} \otimes -),$$

在辛形式 $\Omega(G^1,G^1)\ +\Omega(G^2,G^2)$ 下彼此对偶。我们有$\sigma_{G^1G^2}$ 是单射，且$\tau_{G^1G^2}$ 是满射。此外，令

$$T_{G^1G^2}:=ker(\tau_{G^1G^2}),\quad T^*_{G^1G^2}:=coker(\sigma_{G^1G^2}).$$

于是，上述谱序列诱导出一个同构

$$T_{G^1G^2}/T^*_{G^1G^2}\cong Ext^1_{\Pi_Q}(x,x). \tag{2.6}$$

我们注意到，在完美配对 $\Omega(G^1)\ \oplus\Omega(G^2)$ 下，$\sigma_{G^1G^2}$ 与 $\tau_{G^1G^2}$ 互为对偶。令

$$dt_{G^1G^2}:T_{G^1G^2}\to Ext^1_{\Pi_Q}(x,x),\quad dt^*_{G^1G^2}:Ext^1_{\Pi_Q}(x,x)\to T^*_{G^1G^2}$$

为由 (2.6) 诱导的态射。于是我们有短正合列

$$0\to T_{G^1G^2}\to Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1)\oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^2,G^2)\oplus Ext^1_{\Pi_Q}(x,x)\to T^*_{G^1G^2}\to 0 \tag{2.7}$$

因此，$T_{G^1G^2}$是 $Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1)\oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^2,G^2)\oplus Ext^1_{\Pi_Q}(x,x)$ 的拉格朗日子流形。

由 (2.2) 和 (2.3)，我们得到以下图表，其中所有行和列均为左正合列：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^1)/\mathbb{C} & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Hom_{\Pi_Q}(G^2,x)/\mathbb{C} & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^2,G^1) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^2,G^2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Hom_{\Pi_Q}(G^1,x) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2)
\end{array} \tag{2.8}$$

令 $\zeta_{xG^1}\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^1)$ 为由短正合列 (2.4) 生成的扩张类。对于任意 $a\in Hom_{\Pi_Q}(G^1,x)$，我们考虑 $\theta(a\otimes\zeta_{xG^1})\in Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1)$ 和 $\theta(\zeta_{xG^1}\otimes a)\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,x)$。由 (2.8) 和 (2.5)，$(\theta(a\otimes\zeta_{xG^1}),0)\in T_{G^1G^2}$ 且

$$dt_{G^1G^2}(\theta(a\otimes\zeta_{xG^1}),0)=\theta(\zeta_{xG^1}\otimes a). \tag{2.9}$$

类似地，对于 $b\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^2)$，有 $(0,\theta(\zeta_{G^2x}\otimes b))\in T_{G^1G^2}$ 且

$$dt_{G^1G^2}(0,\theta(\zeta_{G^2x}\otimes b))=\theta(b\otimes\zeta_{G^2x}). \tag{2.10}$$

2.5. 嵌套三元组。固定 $k\in I$ 并取一个 k-良序列 (G^0,G^1,G^2)。此外，我们假设存在 $x\in\mathsf{L}_k$，使得有以下短正合列：

$$0\to G^0\xrightarrow{\zeta_{G^0G^1}}G^1\xrightarrow{\zeta_{G^1x}}x\to 0, \tag{2.11}$$

$$0\to G^1\xrightarrow{\zeta_{G^1G^2}}G^2\xrightarrow{\zeta_{G^2x}}x\to 0, \tag{2.12}$$

设 $\zeta_{xG^0}\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^0)$ 和 $\zeta_{xG^1}\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^1)$ 分别为短正合列 (2.11) 和 (2.12) 的扩张类。

我们考虑 $\alpha_{G^1}:=\theta(\zeta_{G^1x}\otimes\zeta_{xG^1})\in Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1)$ 和 $\alpha_x:=\theta(\zeta_{xG^1}\otimes\zeta_{G^1x})\in Ext^1_{\Pi_Q}(x,x)$。由 (2.9) 和 (2.10)，可得

$$dt_{G^1G^2}(\alpha_{G^1},0)=\alpha_x=dt_{G^0G^1}(0,\alpha_{G^1}) \tag{2.13}$$

引理 2.7。我们有 $\alpha_{G^1} \neq 0$ 和

$$Ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^0,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2)) = \mathbb{C}\alpha_{G^1} \tag{2.14}$$

$$Ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^0G^1} \oplus T^*_{G^1G^2}) = \mathbb{C}(\alpha_{G^1} \oplus \alpha_x) \tag{2.15}$$

证明。我们有如下左正合列图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Ext^0_{\Pi_Q}(x,x) & \xrightarrow{\zeta_{xG^1}} & Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^1) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(x,G^2) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{G^1x}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta(\zeta_{G^1x}\otimes -)} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Ext^0_{\Pi_Q}(G^1,x) & \xrightarrow{\theta(-\otimes\zeta_{xG^1})} & Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2). \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Ext^0_{\Pi_Q}(G^0,x) & \longrightarrow & Ext^1_{\Pi_Q}(G^0,G^1) & &
\end{array}$$

由于 $\theta(\zeta_{G^1x}\otimes -)$ 是单射态射， $\theta(\zeta_{G^1x}\otimes\zeta_{xG^1}) = \alpha_{G^1} \neq 0$。由上面的图表， $Ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^0,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2))$ 是

$$im(\theta(\zeta_{G^1x}\otimes -) \cap im(\theta(-\otimes\zeta_{xG^1})).$$

首先我们证明存在 $im(\theta(\zeta_{G^1x}\otimes -) \cap im(\theta(-\otimes\zeta_{xG^1})) = \mathbb{C}\alpha_{G^1}$。设 $c\oplus d \in Ext^0(G^1,x)\oplus Ext^1(x,G^1)$，使得 $\theta(c\otimes\zeta_{xG^1}) = \theta(\zeta_{G^1x}\otimes d)$。那么 d 在 $Ext^1(x,G^2)$ 中的像为 0，因此对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $d = \lambda\zeta_{xG^1}$。于是 $\lambda\alpha_{G^1} = \theta(\zeta_{G^1x}\otimes d)$。由此证明了 (2.14)。现在我们证明 (2.15)。由 (2.13)，我们有

$$(\alpha_{G^1}\oplus\alpha_x) \in Ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^1G^2} \oplus T^*_{G^2G^3}).$$

此外，我们有如下短正合列：

$$0 \to Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^0G^1} \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^0,G^1) \to 0,$$
$$0 \to Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^1G^2} \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2) \to 0.$$

那么，如果

$$(a,b) \in Ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^0G^1} \oplus T^*_{G^1G^2}),$$

我们有 $a \in ker(Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^1) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^0,G^1) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(G^1,G^2))$，因此对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $a = \lambda\alpha_{G^1}$。于是 $b - \lambda\alpha_x \in ker(Ext^1_{\Pi_Q}(x,x) \to T^*_{G^0G^1} \oplus T^*_{G^1G^2})$，并且必须为 0，因为 $dt^*_{G^0G^1}$ 是单射。□

2.6. 四元组。我们固定 $k \in I$，以及 I-分次的 Π_Q-模 G^0、G^1、$G^{1'}$ 和 G^2，使得 (G^0, G^1, G^2) 和 $(G^0, G^{1'}, G^2)$ 是 k-良序列。此外，我们假设有如下 I-分次 Π_Q 模的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^0 & \xrightarrow{\zeta_{G^0G^1}} & G^1 & \xrightarrow{\zeta_{G^1x}} & x & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{G^0G^{1'}}} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{G^1G^2}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & G^{1'} & \xrightarrow{\zeta_{G^{1'}G^2}} & G^2 & \xrightarrow{\zeta_{G^2x}} & x & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{G^{1'}y}} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{G^2y}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & y & \xrightarrow{id} & y & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

其中所有行和列都是短正合列，并且对于某个$k \in I$，有 $x, y \in \mathbf{L}_k$。

引理 2.8。以下图表

$Ext^1(G^2, G^1) \oplus Ext^1(G^2, G^{1'}) \to Ext^1(G^1, G^1) \oplus Ext^1(G^{1'}, G^{1'}) \oplus Ext^1(G^2, G^2)$ 是单射。

证明。短正合列：

$$0 \to G^0 \xrightarrow{\zeta_{G^0G^2}} G^2 \xrightarrow{\zeta_{G^2x} \oplus \zeta_{G^2y}} x \oplus y \to 0.$$

诱导出以下左正合列

$$0 \to Ext^1_{\Pi_Q}(x, G^2) \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(y, G^2) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^2, G^2) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^0, G^2).$$

由 (2.8)，我们有

$$ker(Ext_{\Pi_Q}(G^2, G^1) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^1, G^1)) \cong Ext^1_{\Pi_Q}(x, G^1)/\mathbb{C}$$

$$ker(Ext_{\Pi_Q}(G^2, G^{1'}) \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^{1'}, G^{1'})) \cong Ext^1_{\Pi_Q}(y, G^{1'})/\mathbb{C}$$

并且 $Ext^1_{\Pi_Q}(x, G^1)/\mathbb{C}$（分别为 $Ext^1_{\Pi_Q}(y, G^{1'})/\mathbb{C}$）是 $Ext^1_{\Pi_Q}(x, G^2)$（分别为 $Ext^1_{\Pi_Q}(y, G^1)$）的子空间。因此，态射：

$$Ext^1_{\Pi_Q}(x, G^1)/\mathbb{C} \oplus Ext^1_{\Pi_Q}(y, G^{1'})/\mathbb{C} \to Ext^1_{\Pi_Q}(G^2, G^2)$$

也是单射。 □

2.7. I-分次 Π_Q-模的模空间与矩映射。给定一个维数向量 $\mathbf{v}$，令 $\mathcal{M}_Q(\mathbf{v})$ 为维数为 $\mathbf{v}$ 的 I-分次 Π_Q-模的模空间，并对同构关系取商。我们可以用以下方式表示 $\mathcal{M}_Q(\mathbf{v})$：代数群 $G_{\mathbf{v}} := \prod_{k \in I} G_{\mathbf{v}_k}$ 通过以下作用作用于 $E(V, V)$：

$$g \circ B \to gBg^{-1}.$$

$G_{\mathbf{v}}$ 的李代数为 $I(V, V)$，通过双线性形式与 $I(V, V)^\vee$ 相对应

$$I(V, V) \times I(V, V) \to \mathbb{C}, \quad (B, B') \to Tr(BB').$$

在 $E(V,V)$上的辛形式 ω 下

$$\omega(B,B') := tr(\epsilon BB').$$

我们有矩映射

$$\mu : E(V,V) \to I(V,V), \quad \mu(B) = \epsilon BB. \tag{2.16}$$

我们定义 $Rep_{Q^\#}(\mathbf{v}) := E(V,V)$，并定义 $\Pi_Q(\mathbf{v}) := \mu^{-1}(0)$。于是我们有

$$\mathcal{M}_Q(\mathbf{v}) := [\Pi_Q(\mathbf{v})/G_\mathbf{v}].$$

对于任意 $B \in \Pi_Q(\mathbf{v})$，(V,B) 都是一个 I-分次 Π_Q-模，我们仍沿用记号将其表示为 B。

3. Crawley-Boevey's Construction and Nakajima Quiver Varieties

设 $\mathbf{w}$ 是 Q 的一个维数向量。Crawley-Boevey [4] 构造了一个新的箭图，记为 $Q_\mathbf{w}$。$Q_\mathbf{w}$ 的顶点集为 $I_\mathbf{w} := I \cup \{\infty\}$，其箭集为

$$E_\mathbf{w} := E \cup \{a_{i,j} | in(a_{i,j}) = \infty, out(a_{i,j}) = i, i \in I, j \in \{1, \cdots, \mathbf{w}_i\}\},$$

即从 ∞ 到 i 添加 $\mathbf{w}_i$ 条箭。我们将函数 ϵ 延拓到 $E^\#_\mathbf{w}$，令 $\epsilon(a_{ij}) = 1$。$Q_\mathbf{w}$ 的一个维数向量可写为 $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_\infty)$，其中 $\mathbf{v}$ 是 Q 的一个维数向量，且 $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

例 3.1。当 $\mathbf{v}_\infty = 0$ 时，我们有

$$Rep_{Q^\#_\mathbf{w}}(\mathbf{v}, 0) = Rep_{Q^\#}(\mathbf{v}), \quad \Pi_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v}, 0) = \Pi_Q(\mathbf{v}).$$

此外，任何维数为 $\mathbf{v}$ 的 I-分次 Π_Q-模都可视为维数为 $(\mathbf{v}, 0)$ 的 $I_\mathbf{w}$-分次 $\Pi_{Q_\mathbf{w}}$-模。

本节中，我们回顾 Crawley-Boevey 的构造，并引入 Nakajima 箭图簇。

3.1. ADHM 数据与稳定性条件。

当 $\mathbf{v}_\infty = 1$ 时，我们有

$$Rep_{Q_{\mathbf{w}^\#}} = E(V,V) \oplus I(V,W) \oplus I(W,V),$$

我们也将其记作 $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$。$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 中的一个元素 $\mathcal{B} = (B, i, j)$ 称为 ADHM 数据，其中 B、i、j 分别表示上述三个分量。代数群 $G_{(\mathbf{v},1)} = G_\mathbf{v} \times \mathbb{C}^*$ 中，$\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 上平凡作用，而 $G_\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 上的作用为

$$g \circ (B, C, i, j) \to (gBg^{-1}, gCg^{-1}, gi, jg^{-1}).$$

$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 上的辛形式 $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 表示为

$$\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})((B, i, j), (B', i', j')) := tr(\epsilon BB') + tr(ij' - i'j).$$

此外，我们有矩映射

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\mu = \mu_Q \oplus \mu_\infty} I(V,V) \oplus \mathbb{C},$$

其中

$$\mu_Q(B, i, j) = \epsilon BB + ij, \quad \mu_\infty(B, i, j) = tr(\mu_Q(B, i, j)).$$

因此我们有

$$\Pi_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v}, 1) = \mu^{-1}(0) = \mu_Q^{-1}(0).$$

对于任意 $\mathcal{B} \in \Pi_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v}, 1)$，我们将 $[\mathcal{B}]$ 记作 $[\Pi_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v}, 1)/G_\mathbf{v}]$ 中 $\mathcal{B}$的几何点，它是一个 $I_\mathbf{w}$分次 $\Pi_{Q_\mathbf{w}}$-模的同构类。

对于任意两个 $I_{\mathbf{w}}$分次的 $\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}$ 模 $\mathcal{G}$、$\mathcal{H}$，我们记

$$\mathcal{E}xt^{\bullet}(\mathcal{G},\mathcal{H}) := \mathcal{E}xt^{\bullet}_{\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}}(\mathcal{G},\mathcal{H}), \quad Ext^{l}(\mathcal{G},\mathcal{H}) := Ext^{l}_{\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}}(\mathcal{G},\mathcal{H}),$$

其中 $l=0$、1、2。

3.2. 稳定性条件。我们采用 Nakajima [18] 的稳定性条件：

定义 3.2（稳定性）。给定一个 $I_{\mathbf{w}}$-分次 $\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}$ 模 $\mathcal{B}$，使得 $\mathcal{B}\in\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}(\mathbf{v},1)$，若对任意 I-分次的 Π_Q-模 H，则称 $\mathcal{B}$ 为稳定的，

$$Hom_{\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}}(H,\mathcal{B})=0,$$

即 G 没有 I-分次 Π_Q-分次子模。

引理 3.3. 对任意 $I_{\mathbf{w}}$-分次的 $\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}$ 模 $[\mathcal{B}]$，使得 $\mathcal{B}\in\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}(\mathbf{v},1)$，存在一个短正合列：

$$0\to H\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}\to 0$$

使得 H 是一个 I-分次的 Π_Q-模，且 $\mathcal{C}$ 是稳定的。

证明。令 H 为所有 I-分次 Π_Q-子模之和。则 H 是 $\mathcal{B}$ 的一个子模，且 $\mathcal{C}:=\mathcal{B}/H$ 是稳定的。□

3.3. 稳定对象的 $\mathcal{E}$xt 复形。取两个 $I_{\mathbf{w}}$-分次的 $\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}$-模$\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2$，使得 $\mathcal{B}^l=(B^l,i^l,j^l)\in\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}(\mathbf{v}^l,1)$，$l=1,2$。考虑复形$\mathcal{T}(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$:

$$I(V^1,V^2)\xrightarrow{\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)}E(V^1,V^2)\oplus I(W,V^2)\oplus I(V^1,W)\xrightarrow{\tau(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)}I(V^1,V^2)$$

其中

$$\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)(\zeta):=(B^2\zeta-\zeta B^1)\oplus(-\zeta i^1)\oplus j^2\zeta$$
$$\tau(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)(J\oplus a\oplus b):=(\epsilon B^2J+\epsilon JB^1+i^2b+aj^1).$$

在 $E(V^1,V^2)\oplus I(W,V^2)\oplus I(V^1,W)$ 与 $E(V^2,V^1)\oplus I(W,V^1)\oplus I(V^2,W)$ 之间的完美配对 $\omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 下，我们有 $\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)\cong\tau(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^1)^{\vee}$：

$$((J^1,a^1,b^1),(J^2,a^2,b^2))\to Tr(\epsilon J^1J^2)+Tr(b^2a^1-b^1a^2).$$

引理 3.4（[16], 的命题 3.5 以及当 Q 没有环时 [18] 的引理 5.2）。若 $\mathcal{B}^2$ 稳定，则 $\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$ 是单射。若 $\mathcal{B}^1$ 稳定，则 $\tau(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$ 是满射。

证明。由对偶性可知，我们只需证明若 $\mathcal{B}^2$ 稳定，则 $\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$ 是单射。只需注意，对于 $\zeta\in ker(\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))$，$(\zeta,0)\in Hom(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$，且其像是一个 I-分次的 Π_Q-模，因此只能是 0。□

现在，我们假设本小节中的 $\mathcal{B}^1$ 和 $\mathcal{B}^2$ 均稳定。记 $T(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2):=ker(\tau(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))$。完美配对 $\omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 诱导出一个完美配对：

$$\Omega(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2):T(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)\otimes T(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^1)\to\mathbb{C}$$

我们考虑复形

$$\mathbb{C}\xrightarrow{s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)}T(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)\xrightarrow{s^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)}\mathbb{C},$$

其中

$$s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)(t) := t(0\oplus(-i_2)\oplus j^1) \quad (mod \quad im(\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)))$$
$$s^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)(J\oplus a\oplus b) \quad (mod \quad im(\sigma(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))) := tr(i^1b+aj^2).$$

那么，在完美配对下， $s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$ 与 $s^2(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^1)$ 互为对偶，我们有

$$Ext^0(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)=ker(s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)),\quad Ext^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)=coker(s^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))$$
$$Ext^1(\mathcal{B}^0,\mathcal{B}^1)=ker(s^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))/im(s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2))$$

定义 3.5。我们定义 $\mathcal{B}^1\subset\mathcal{B}^2$，若 $s^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)=0$，即存在一个 I 分次态射 $\zeta\in I(V^1,V^2)$ 使得

$$\zeta B^1=B^2\zeta,\quad \zeta i^1=i^2\quad j^1=j^2\zeta, \tag{3.1}$$

引理 3.6。若 $\mathcal{B}^1$ 和 $\mathcal{B}^2$ 均稳定，则

$$Ext^0(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)\cong\begin{cases}\mathbb{C} & if\ \mathcal{B}^1\subset\mathcal{B}^2\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

此外，满足 (3.1) 的 $\zeta\in I(V^1,V^2)$ 是唯一的，并且作为向量空间之间的 $I_{\mathbf{w}}$-分次态射是单射。

根据引理 3.6， $\mathcal{B}^1\subset\mathcal{B}^2$ 当且仅当 $\mathcal{B}^1$ 是 $\mathcal{B}^2$ 的子模。此外，若 $\mathcal{B}^1\subset\mathcal{B}^2$，则有

$$Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)\cong\begin{cases}T(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2) & \text{if } \mathcal{B}^1\cong\mathcal{B}^2\\ ker(s^2(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

3.4. 万有复形。首先，我们回顾事实 $\mathrm{L}_k=\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}(\delta_k,0)$。对于 $x,y\in\mathrm{L}_k$， $\mathcal{E}$xt 复形 $\mathcal{E}xt^\bullet(x,y)$ 可表示为

$$\mathcal{E}xt^\bullet(x,y):=\{\mathbb{C}\xrightarrow{\sigma(x,y)}\mathbf{L}_k\xrightarrow{\tau(x,y)}\mathbb{C}\}$$

其中 $\sigma(x,y)(\lambda)=\lambda(x-y)$，且 $\tau(x,y)(z)=\sum_{l\in E_k^\#}\epsilon(l)z_l(x_l-y_l)$。当 $x\neq y$ 时，$\sigma(x,y)$ 是单射，而 $\tau(x,y)$ 是满射。当 $x=y$ 时，我们有 $\mathcal{E}xt^\bullet(x,y)\cong\mathbb{C}\oplus\mathrm{L}_k[-1]\oplus\mathbb{C}[-2]$。

其次，我们考虑 $x\in\mathrm{L}_k$ 和 $\mathcal{B}=(B,i,j)\in\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}(\mathbf{v},1)$ 的情形。给定 $B\in E(V,V)$，我们将 $(B-x)\in E(V,V)$ 记作满足以下条件的对象：

$$(B-x)_h=\begin{cases}B_h-x_h & in(h)=out(h)=k,\\ B_h & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$\mathcal{E}xt$ 复形 $\mathcal{E}xt^\bullet(x,\mathcal{B})$ 表示为：

$$I(\mathbb{C}_k,V)\xrightarrow{\sigma_k(x,\mathcal{B})}E(\mathbb{C}_k,V)\oplus I(\mathbb{C}_k,W)\xrightarrow{\tau_k(x,\mathcal{B})}I(\mathbb{C}_k,V)$$

其中

$$\sigma_k(x,\mathcal{B})(a):=(B-x)a\oplus j_ka,\quad \tau_k(x,\mathcal{B})(C\oplus D):=\epsilon(B-x)C+i_kD.$$

我们有如下公式：

$$\sum_{l=0}^{2}(-1)^l(dim(Ext^l(x,\mathcal{B})))=\sum_{l=0}^{2}(-1)^l(dim(Ext^l(\mathcal{B},x)))=<\delta_k,\mathbf{v}>_Q-\mathbf{w}_k. \tag{3.2}$$

复形 $\mathcal{E}xt^\bullet(x)(\mathcal{B},x)$ 表示为:

$$I(V,\mathbb{C}_k) \xrightarrow{\sigma_k(\mathcal{B},x)} E(V,\mathbb{C}_k)\oplus I(W,\mathbb{C}_k) \xrightarrow{\tau_k(\mathcal{B},x)} I(V,\mathbb{C}_k)$$

其中

$$\tau_k(\mathcal{B},x)a := a\epsilon(B-x)\oplus ai_k,\quad \sigma_k(\mathcal{B},x)(C\oplus D) := C(B-x)+Cj_k.$$

以下引理由稳定性的定义和对偶性直接得到:

引理3.7. 若 $\mathcal{B}$是稳定的，则 $Ext^0(x,\mathcal{B}) = 0$且 $Ext^2(\mathcal{B},x) = 0$。因此，$\sigma_k(x,\mathcal{B})$是单射，且 $\tau_k(\mathcal{B},x)$是满射。

定义3.8. 若 $\mathcal{B}$ 是稳定的，我们定义万有复形

$$\mathcal{I}(x,\mathcal{B}) := \{U(\mathbb{C}_k,V) \xrightarrow{u_k(x,\mathcal{B})} I(\mathbb{C}_k,V)\}$$

使得 $U(\mathbb{C}_k,V) = ker(\sigma_k(\mathcal{B},x))$，且 $u_k(x,\mathcal{B})$是由$\tau_k(\mathcal{B},x)$诱导的态射。

我们注意到

$$ker(u_k(x,\mathcal{B})) = Ext^1(x,\mathcal{B})\quad coker(u_k(x,\mathcal{B})) = Ext^2(x,\mathcal{B}). \tag{3.3}$$

3.5. Nakajima 箭图簇。现在我们介绍 Nakajima 箭图簇的定义。设

$$\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},1) := \{\mathcal{B}\in\Pi_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},1)|\mathcal{B}\text{ is stable.}\}$$

定义 3.9（Nakajima 箭图簇）。我们将 Nakajima 箭图簇定义为

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) := [\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},1)/G_\mathbf{v}]$$

对于闭点 $\mathcal{B}=(B,i,j)\in\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},\mathbf{1})$，其 G-轨道 $[\mathcal{B}]$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 中的一个几何点，我们也将其记为 $[B,i,j]$。

定理3.10（Nakajima [18]）。簇 $\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},\mathbf{1})$ 是光滑的，且 $G_\mathbf{v}$ 在 $\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v},\mathbf{1})$ 上的作用是自由的。此外，商 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是一个光滑簇。对于任意闭点 $[\mathcal{B}]\in\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$，$[\mathcal{B}]$ 处的切空间为 $T(\mathcal{B},\mathcal{B})$。其维数为 $<\mathbf{v},\mathbf{v}>_Q+2\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$。

3.6. 嵌套对。

引理 3.11. 给定一个 $I_\mathbf{w}$-分次 $\Pi_{Q_\mathbf{w}}$-模的短正合列

$$0\to\mathcal{B}^1\xrightarrow{\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}}\mathcal{B}^2\xrightarrow{\zeta_{\mathcal{B}^2x}}x\to 0 \tag{3.4}$$

其中 $\mathcal{B}^i\in\Pi^s_{Q_\mathbf{w}}(\mathbf{v}^l,\mathbf{1})$、$l=1$、2 和 $x\in\mathbf{L}_k$。若该短正合列不分裂，则 $\mathcal{B}^2$ 稳定当且仅当 $\mathcal{B}^1$ 稳定。

证明。若 $\mathcal{B}^2$ 稳定，则作为子模，$\mathcal{B}^1$ 也稳定。另一方面，若 $\mathcal{B}^1$稳定，我们考虑短正合列

$$0\to H\xrightarrow{a}\mathcal{B}^2\to\mathcal{C}\to 0$$

由引理 3.3，存在使得 $\mathcal{C}$ 稳定且 H 是一个 Π_Q-模的对象。根据 $\mathcal{B}^1$的稳定性，$\zeta_{\mathcal{B}^2x}\circ a$ 必为单射。由于短正合列 (3.4) 不分裂，因此 H 必为 0，从而 $\mathcal{B}^2$ 稳定。□

注意，若有短正合列 (3.4)，则有

$$x_l = tr(B_l^2) - tr(B_l^1), \quad \forall l \in E_k^{\#}. \tag{3.5}$$

若我们有短正合列 (3.4)，则记为 $\mathcal{B}^1 \subset_x \mathcal{B}^2$ 。注意，条件 $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^2$ 或 $\mathcal{B}^1 \subset_x \mathcal{B}^2$ 不依赖于 $\mathcal{B}^1$ 上的 $G_{\mathbf{v}^1}$ 或 $G_{\mathbf{v}^2}$ 作用，亦不依赖于 $\mathcal{B}^2$。因此，我们有如下定义：

定义 3.12. 给定两个闭点 $[\mathcal{B}^l] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^l, \mathbf{w})$ $l = 1, 2$，若 $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^2$ （分别为 $\mathcal{B}^1 \subset_x \mathcal{B}^2$），则定义 $[\mathcal{B}^1] \subset [\mathcal{B}^2]$ （分别为 $[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$ ）。

在本小节最后，我们固定两个维数向量 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \delta_k$。给定 $[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$，由引理 3.6 可得 $Hom(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2) \cong \mathbb{C}$。因此，所有形如 (3.5) 的短正合列都标量等价。故态射 $\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}$ 和 $\zeta_{\mathcal{B}^2 x}$ 在相差一个标量的意义下唯一。此外，根据引理 2.5，(3.5) 还在标量等价的意义下确定了一个元素 $\zeta_{x\mathcal{B}^1} \in Ext^1(x, \mathcal{B}^1)$。

引理 3.13. 给定一个闭点 $([\mathcal{B}^2], x) \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}) \times \mathrm{L}_k$。那么对应关系

$$[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2] \to \zeta_{\mathcal{B}^1 x}$$

是在这一对 $[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$（其中 $[\mathcal{B}^1] \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w})$）与 $Ext^0(\mathcal{B}^2, x) = ker(u_k(x, \mathcal{B})^\vee)$ 的一维子空间之间的一一对应。

证明。逆对应按如下方式构造：给定一个非零向量 $\zeta_{\mathcal{B}^2 x} \in Ext^0(\mathcal{B}^2, x)$，我们将 $\zeta_{\mathcal{B}^2 x}$ 视为 $I_{\mathbf{w}}$-分次$\Pi_{Q_{\mathbf{w}}}$-模之间的同态。于是 $\zeta_{\mathcal{B}^2,\ x}$ 是满射，并令 $[\mathcal{B}^1]$ 为其核。由引理 3.11，$[\mathcal{B}^1]$ 也是稳定的。□

引理 3.14. 给定一个闭点 $(\mathcal{B}^1, x) \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}) \times \mathrm{L}_k$，对应关系

$$[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2] \to \zeta_{x\mathcal{B}^1}$$

是对（$[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$）中满足 $[\mathcal{B}^2] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w})$ 的一对对象与一维子空间 $Ext^1(x, \mathcal{B}^1) = ker(u_k(x, \mathcal{B}))$ 之间的一一对应。

证明。由引理 2.5 和引理 3.11 可得。 □

4. Hecke Correspondence and Tautological Bundles

本节中，我们固定一个箭图 $Q = (I, E)$ 和一个维数向量 $\mathbf{w}$。Nakajima[18][20] 引入了 Hecke 对应：

定义 4.1（Hecke 对应）。给定两个维数向量 $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$，，我们定义 Hecke 对应

$$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) := \{[\mathcal{B}^1] \subset [\mathcal{B}^2] | [\mathcal{B}^l] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^l, \mathbf{w}), l = 1, 2\}.$$

到 $[\mathcal{B}^1]$ 和 $[\mathcal{B}^2]$ 的投影分别诱导出态射：

$$p(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \to \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}), \quad q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \to \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}).$$

例 4.2. 当 $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2$, 时，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \cong \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 和 $p \times q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 的对角嵌入。

例 4.3. 当 $\mathbf{v}_k^1 < \mathbf{v}_k^2$时，根据引理 3.4，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = \emptyset$。

本节将研究 Hecke 对应的几何。

4.1. 箭图簇上的典范丛。对于任意 $k \in I$，$G_{\mathbf{v}}$ 对 M(v, w) 的作用使 V_k 和 W_k 成为等变局部自由层，它们下降为局部自由层 $\mathfrak{M}$(v, w)，我们仍将其记作 V_k 和 W_k。我们也将 $I(V,W)$、$I(W,V)$、$E(V,V)$、$L(V,V)$ 视为 $\mathfrak{M}$(v, w) 上的局部自由层。

第 3.3 节中的 $\mathcal{E}$xt 复形也可以推广为箭图簇上的典范局部自由层复形：我们固定维数向量 $\mathbf{v}^1$,$\mathbf{v}^2$，并将 V_k^1（分别将 V_k^2）记为 $V_k \boxtimes \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$（分别为 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \boxtimes V_k$）上的局部自由层，其中 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$。我们考虑复形 $\mathcal{T}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$:

$$I(V^1,V^2) \xrightarrow{\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)} E(V^1,V^2)\oplus I(W,V^2)\oplus I(V^1,W) \xrightarrow{\tau(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)} I(V^1,V^2)$$

$$\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)(\zeta) := (B^2\zeta - \zeta B^1)\oplus(-\zeta i^1)\oplus j^2\zeta$$
$$\tau(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)(J\oplus a\oplus b) := (\epsilon B^2 J + \epsilon J B^1 + i^2 b + a j^1).$$

对于任意闭点 $([\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2]) \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$,

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{([\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2])} \cong \mathcal{T}(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2).$$

根据引理 3.4，$ker(\tau(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2))/im(\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2))$ 在 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$ 上仍是局部自由层，我们将其记为 $T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$。在完美配对 $\omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 下:

$$(E(V^1,V^2)\oplus I(W,V^2)\oplus I(V^1,W))\otimes(E(V^2,V^1)\oplus I(W,V^1)\oplus I(V^2,W)) \to \mathcal{O}$$
$$((J^1,a^1,b^1),(J^2,a^2,b^2)) \to Tr(\epsilon J^1 J^2) + Tr(b^2a^1 - b^1a^2).$$

我们有 $\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)^\vee \cong \tau(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^1)$。因此，$\omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 诱导出 $T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 与 $T(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^1)$ 之间的完美配对，记为 $\Omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$。

我们考虑复形

$$\mathcal{O} \xrightarrow{s^1(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)} \mathcal{T}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \xrightarrow{s^2(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)} \mathcal{O},$$

其中

$$s^1(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2):\mathcal{O}\to\mathcal{T}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \quad s^1(t) := t(0\oplus(-i^2)\oplus j^1) \bmod Im(\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2))$$
$$s^2(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \bmod Im(\sigma(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)) : \mathcal{T}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\to\mathcal{O} \quad s^2(J\oplus a\oplus b) := tr(i^1 b + a j^2).$$

那么对于任意闭点 $([\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2]) \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$,

$$s^l(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{([\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2])} \cong s^l(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2),$$

其中 $l = 1,2$。我们还有 $s^2(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^1) \cong s^1(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)^\vee$，在完美配对 $\Omega(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 下。

定理4.4。Hecke 对应 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $s^1(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的零点集。$T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的秩为 $-<\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2>_Q + (\mathbf{v}^1+\mathbf{v}^2)\bullet\mathbf{w}$。

证明。我们还需要证明的唯一一点是，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $s^1(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的零点集，这可由引理 3.6 得出。□

限制到 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$，存在唯一的 I-分次态射 $\zeta_{\mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2}: V^1 \to V^2$，使得

$$\zeta_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2} B^1 = B^2 \zeta_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2}, \quad \zeta_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2} i^1 = i^2 \quad j^1 = j^2 \zeta_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2}.$$

根据引理 3.4，$\zeta_{\mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2}$ 在每个闭点处都是单射。

4.2. $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2$ 的情形。首先考虑 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2$ 的情形。根据引理 3.4，$\mathfrak{M}(\mathbf{v}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v})$ 的对角线（记为 $\Delta_{\mathfrak{M}(\mathbf{v})}$）是 $s^1(\mathbf{v},\mathbf{v}) = s^2(\mathbf{v},\mathbf{v})^\vee$ 的零点集。此外，由于 $dim(T(\mathbf{v},\mathbf{v})) = dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}))$，我们有

定理 4.5. 我们考虑以下复形 $T(\mathbf{v}) := T(\mathbf{v},\mathbf{v})|_{\Delta_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})}}$

$$I(V,V) \xrightarrow{\sigma(\mathbf{v})} E(V,V) \oplus I(W,V) \oplus I(V,W) \xrightarrow{\tau(\mathbf{v})} I(V,V)$$

其中

$$\sigma(\mathbf{v})(\zeta) := (B\zeta - \zeta B) \oplus (-\zeta i) \oplus j\zeta \qquad \tau(\mathbf{v})(J \oplus a \oplus b) := (\epsilon BJ + \epsilon JB + ib + aj).$$

并滥用记号，将 $T(\mathbf{v})$ 记作 $ker(\tau(\mathbf{v}))/im(\sigma(\mathbf{v}))$。那么 $T(\mathbf{v})$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的切丛。此外，完美配对 $\Omega(\mathbf{v},\mathbf{v})$ 在对角线上的限制是 $T(\mathbf{v})$ 的辛形式，我们将其记作 $\Omega(\mathbf{v})$。

推论 4.6. 相干层 $\mathcal{O}_{\Delta\mathfrak{M}(\mathbf{v})}$ 由 $s^2(\mathbf{v},\mathbf{v})$ 的 Koszul 复形解析。

4.3. $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \delta_k$ 的情形。现在我们考虑 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \delta_k$ 的情形，其中 $k \in I$。由于 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^1) = \emptyset$，$s^2(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是满射，我们将 $\mathcal{N}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 记作其核。$s^1(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^2)$ 的像包含于 $\mathcal{N}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 中，因此它诱导出一个整体截面

$$n(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) : \mathcal{O} \to \mathcal{N}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2).$$

那么 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $n(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的零点集。对于任意闭点 $[\mathcal{B}^1] \subset [\mathcal{B}^2] \in \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$，我们有

$$\mathcal{N}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]} \cong Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2).$$

定理 4.7。簇 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是光滑的，并且 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$ 中 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的结构层可由 $n^\vee(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 的 Koszul 复形解析。

证明。我们只需证明限制态射

$$T(\mathbf{v}^1) \oplus T(\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]} \to \mathcal{N}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]}$$

是满射的。由定理 4.5

$$T(\mathbf{v}^1) \oplus T(\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]}|_{[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]} \cong Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1) \oplus Ext^1(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^2)$$

以及态射

$$Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1) \oplus Ext^1(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^2) \xrightarrow{(-\otimes\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2})+(\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}\otimes-)} Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^2)$$

由命题 2.6 可知是满射的。 □

我们考虑态射

$$t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \to \mathbf{L}_k :$$
$$t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)([B^1,i^1,j^1],[B^2,i^2,j^2]) := (Tr(B^1_l) - Tr(B^2_l))_{l\in E_k^\#}.$$

对于一对 $[\mathcal{B}^1] \subset [\mathcal{B}^2]$，令 $x = t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$。于是我们有 $[\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$。我们注意到以下切空间与余切空间之间的态射

$$dt(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) : T_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)(\mathbf{v})} \to T\mathbf{L}_k, \quad dt^*(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) : T\mathbf{L}_k \to T^*_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)(\mathbf{v})}$$

满足

$$dt(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset_x[\mathcal{B}^2]} = dt_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}, \quad dt^*(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)|_{[\mathcal{B}^1]\subset_x[\mathcal{B}^2]} = dt^*_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}.$$

定理 4.8。在闭嵌入 $p\times q\times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 下，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times \mathrm{L}_k$ 的拉格朗日子流形。因此

$$dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2))=\frac{1}{2}(dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))+dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))+2g_k).$$

证明。由 (2.7) 可得。 □

4.4. $\mathfrak{M}(\mathbf{v}\ k)\times\mathrm{L}_k$ 上的万有复形。给定 $k\in I$，我们滥用记号，将 $\mathbb{C}_k$ 记为 L_k 上的平凡线丛。接下来考虑 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\mathrm{L}_k$ 上的以下局部自由层复形：

$$\mathcal{E}xt^\bullet(k,\mathbf{v}):=I(\mathbb{C}_k,V)\xrightarrow{\sigma(k,\mathbf{v})}E(\mathbb{C}_k,V)\oplus I(\mathbb{C}_k,W)\xrightarrow{\tau(k,\mathbf{v})}I(\mathbb{C}_k,V),$$
$$\mathcal{E}xt^\bullet(\mathbf{v},k):=I(V,\mathbb{C}_k)\xrightarrow{\sigma(\mathbf{v},k)}E(V,\mathbb{C}_k)\oplus I(W,\mathbb{C}_k)\xrightarrow{\tau(\mathbf{v},k)}I(V_k,\mathbb{C}_k).$$

其中

$$\sigma(k,\mathbf{v})(a):=(B-x)a\oplus j_ka,\quad \tau(k,\mathbf{v})(C\oplus D):=\epsilon(B-x)C+i_kD,$$
$$\tau(\mathbf{v},k)(a):=a\epsilon(B-x)\oplus ai_k,\quad \sigma(\mathbf{v},k)(C\oplus D):=C(B-x)+Cj_k.$$

那么，对于 $([\mathcal{B}],x)\in\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\mathrm{L}_k$，有

$$\mathcal{E}xt^\bullet(\mathbf{v},k)|_{([\mathcal{B}],x)}\cong\mathcal{E}xt^\bullet(\mathcal{B},x),\quad \mathcal{E}xt^\bullet(k,\mathbf{v})|_{([\mathcal{B}],x)}\cong\mathcal{E}xt^\bullet(x,\mathcal{B}).$$

态射 $\sigma(k,\mathbf{v})$ 和 $\tau(\mathbf{v}\ k)$ 互为对偶，而 $\sigma(\mathbf{v}\ k)$ 和 $\tau(k,\mathbf{v})$ 互为对偶。由引理 3.4，$\sigma(k,\mathbf{v})$ 在每个闭点处都是单射。我们将 U_k 记为 $\sigma(k,\mathbf{v})$ 的余核，它是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\mathrm{L}_k$ 上的一个局部自由层。我们记

$$\mathcal{I}_k(\mathbf{v}):U_k\xrightarrow{u_k}V_k\quad \mathcal{I}_k^\vee(\mathbf{v}):V_k^\vee\xrightarrow{u_k^\vee}U_k^\vee,$$

其中，u_k 是由 $\tau(k,\mathbf{v})$ 诱导的典范态射。

4.5. 嵌套箭图簇上的典范线丛。在 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 上，$\zeta_{\mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2}:\ V^1\to V^2$ 的余核是一个线丛，记作 $\mathcal{L}$。在每个闭点 $[\mathcal{B}^1]\subset[\mathcal{B}^2]$ 处，$\mathcal{L}$ 的纤维为 $V^2/\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}V^1$。

在 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 上，我们将 U_k^1（分别将 U_k^2）记为 U_k 从 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathrm{L}_k$（分别从 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times\mathrm{L}_k$）拉回所得的对象。态射 $\zeta_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2}$ 诱导出如下局部自由层图表：

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
I(\mathbb{C}_k,V^1) & \xrightarrow{\sigma(k,\mathbf{v}^1)} & E(\mathbb{C}_k,V^1)\oplus I(\mathbb{C}_k,W) & \xrightarrow{\tau(k,\mathbf{v}^1)} & I(\mathbb{C}_k,V^1)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
I(\mathbb{C}_k,V^2) & \xrightarrow{\sigma(k,\mathbf{v}^2)} & E(\mathbb{C}_k,V^2)\oplus I(\mathbb{C}_k,W) & \xrightarrow{\tau(k,\mathbf{v}^2)} & I(\mathbb{C}_k,V^2)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathcal{L} & \xrightarrow{0} & \mathcal{L}^{\oplus 2g_k} & \xrightarrow{0} & \mathcal{L}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
0 & & 0 & & 0
\end{array}\tag{4.1}$$

其中所有列都是短正合列。因此，它诱导出如下复形的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\gamma^{+\vee}_{\mathbf{v}^1,k}} & U_k^1 & \xrightarrow{u_k^1} & V_k^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & U_k^2 & \xrightarrow{u_k^2} & V_k^2 \xrightarrow{\gamma^{-}_{\mathbf{v}^2,k}} \mathcal{L} \end{array} \tag{4.2}$$

使得 $\gamma^{+}{}_{1}{}_{\mathbf{v},k} := (\gamma^{+\vee}{}_{1}{}_{\mathbf{v},k})^{\vee}$ 以及 $\gamma^{-}{}_{2}{}_{\mathbf{v},k}$ 均为满射。

最后，我们通过 Grothendieck 射影化来实现嵌套箭图簇。设 X 为一个概形， F 为 X上的一个相干层。

定义 4.9. F在 X上的 Grothendieck 射影化，记作 $P_X(F)$，是一个 X-概形，满足对于任意 X-概形 $f\colon\ T \to X$， $Hom_X(T, P_X(F))$由以下满射态射参数化：

$$f^*F \to L$$

其中 L 是 X上的一个线丛。给定 X上的局部自由层的二项复形 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ，定义 $P_X(f) := P_X(coker(f))$，并令 $\mathcal{O}_{P_X(f)}(1)$ 为泛线丛。

命题 4.10。态射 $\gamma^{+}{}_{1}{}_{\mathbf{v},k}$ 诱导出一个典范同构

$$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \cong P_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^1)^{\vee})$$

其中， $p \times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是该同构下的典范投影态射。

态射 $\gamma^{-}{}_{2}{}_{\mathbf{v},k}$ 诱导出一个典范同构

$$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \cong P_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2))$$

其中， $q \times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是该同构下的典范投影态射。此外，在上述同构下，有

$$\mathcal{O}_{P_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^1)^{\vee})}(-1) \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{P_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2))}(1).$$

证明。由引理 3.13 和引理 3.14 即得。 □

5. The Triple and Quadruple moduli space

在本节中，我们介绍若干三重和四重嵌套箭图簇。我们固定 $k \in I$ 并选取维数向量 $\mathbf{v}^0 + \delta_k = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^{1'} = \mathbf{v}^2 - \delta_k$。

5.1. 三重嵌套箭图簇 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$。

定义 5.1。我们定义嵌套三元簇

$$\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1) := \mathfrak{P}(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) \times_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k} \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$$

它由三元组组成

$$[\mathcal{B}^0] \subset_x [\mathcal{B}^1] \subset_x [\mathcal{B}^2]$$

满足 $x \in \mathbf{L}_k$ 且 $[\mathcal{B}^l] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^l, \mathbf{w}),\ \ l = 1,\ 2,\ 3$。

在 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v})$ 上，存在两个典范的 I-分次局部自由层单射态射 $\zeta^1\colon\ V^0 \to V^1$、$\zeta^2\colon\ V^1 \to V^2$；我们将 $\mathcal{L}^l$ 记为 ζ^l 关于 $l = 1$、2 的余核，而 $\mathcal{L}^1$ 和 $\mathcal{L}^2$ 均为 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v})$ 上的线丛。

命题 5.2. 三重嵌套箭图簇 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 是光滑的，其维数为 $dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))+2g_k-1$。

证明。设 $[\mathcal{B}^0]\subset_x[\mathcal{B}^1]\subset_x[\mathcal{B}^2]$，由引理 2.7，我们有以下长正合列：

$$0\to\mathbb{C}\xrightarrow{\theta(\zeta_{\mathcal{B}^1x}\otimes\zeta_{x\mathcal{B}^1})\oplus\theta(\zeta_{\mathcal{B}^1x}\otimes\zeta_{x\mathcal{B}^1})}Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1)\oplus Ext^1(x,x)$$
$$\to T^*_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}\oplus T^*_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}\to T^*_{\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)}|_{[\mathcal{B}^0]\subset_x[\mathcal{B}^1]\subset_x[\mathcal{B}^2]}.$$

因此 $dim(T^*_{\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)}|_{[\mathcal{B}^0]\subset_x[\mathcal{B}^1]\subset_x[\mathcal{B}^2]})$ 是

$$dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1))+dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2))-dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))-2g_k+1$$
$$=dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))+2g_k-1.$$

□

5.2. 递减/递增三重箭图簇 $\mathfrak{Z}^{\pm}_k(\mathbf{v}^1)$ 与 Negut 的四重模空间 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$。

定义 5.3。我们考虑递减三重箭图簇

$$\mathfrak{Z}^-_k(\mathbf{v}^1):=\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\times_{\mathbf{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^{1'})$$

它由满足以下条件的递减三元组 $([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^{1'}])\in\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{w})$ 构成：$[\mathcal{B}^0]\subset_x[\mathcal{B}^1]$ 且 $[\mathcal{B}^0]\subset_y[\mathcal{B}^{1'}]$，其中 $x,y\in\mathbf{L}_k$。

定义 5.4。我们定义递增三重箭图簇

$$\mathfrak{Z}^+_k(\mathbf{v}^1):=\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\times_{\mathbf{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})}\mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{v}^2)$$

它由递减三元组 $([\mathcal{B}^2],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^{1'}])\in\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{w})$ 组成，使得 $[\mathcal{B}^2]_y\supset[\mathcal{B}^1]$ 且 $[\mathcal{B}^2]_x\supset[\mathcal{B}^{1'}]$，其中 $x,y\in\mathbf{L}_k$。

定义 5.5（Negut 的四重模空间）。我们定义 Negut 的四重模空间 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$，它由四元组组成：

$$([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^{1'}],[\mathcal{B}^2])\in\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^{1'},\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$$

使得

$$([\mathcal{B}^0]\subset_x[\mathcal{B}^1]),([\mathcal{B}^0]\subset_y[\mathcal{B}^{1'}]),([\mathcal{B}^1]\subset_y[\mathcal{B}^2]),([\mathcal{B}^{1'}]\subset_x[\mathcal{B}^2])$$

其中 $x,y\in\mathbf{L}_k$。

我们考虑对角态射

$$\Delta_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\to\mathfrak{Z}^-_k(\mathbf{v}^1),\quad([\mathcal{B}^0]\subset[\mathcal{B}^1])\to([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^1]),$$
$$\Delta_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}:\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\to\mathfrak{Z}^+_k(\mathbf{v}^1)\quad([\mathcal{B}^2]\supset[\mathcal{B}^1])\to([\mathcal{B}^2],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^1]).$$

以及闭嵌入

$$\Delta_{\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)}:\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)\to\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$$
$$([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2])\to([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2])$$

分别遗忘 $[\mathcal{B}^0]$ 和 $[\mathcal{B}^2]$，我们得到态射

$$\alpha^+:\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)\to\mathfrak{Z}^+_k(\mathbf{v}^1),\quad\alpha^-:\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)\to\mathfrak{Z}^-_k(\mathbf{v}^1).$$

命题 5.6. 态射 α^+ 和 α^- 诱导出典范同构

$$\mathfrak{Z}^+_k(\mathbf{v}^1)-\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)\cong\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)-\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)\cong\mathfrak{Z}^-_k(\mathbf{v}^1)-\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)\tag{5.1}$$

并且它们都是维数为 $dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}))+2g_k$ 的光滑簇。

证明。设 $[\mathcal{B}^2]_y \supset [\mathcal{B}^1]$ 和 $[\mathcal{B}^2]_x \supset [\mathcal{B}^{1'}]$，其中 $x, y \in \mathbf{L}_k$ 满足 $[\mathcal{B}^1] \neq [\mathcal{B}^{1'}]$。那么 $\mathcal{B}^1 \ncong \mathcal{B}^{1'}$，且 $\mathcal{B}^1 \oplus \mathcal{B}^{1'} \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}+\zeta_{\mathcal{B}^{1'}\mathcal{B}^2}} \mathcal{B}^2$ 是满射。令 $\mathcal{B}^0$ 为其核，容易证明 $[\mathcal{B}^0] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w})$。

另一方面，$[\mathcal{B}^0] \subset_x [\mathcal{B}^1]$ 和 $[\mathcal{B}^0] \subset_y [\mathcal{B}^{1'}]$ 对于某个 x，$y \in \mathbf{L}_k$ 使得$[\mathcal{B}^1] \neq [\mathcal{B}^{1'}]$。于是 $\mathcal{B}^0 \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}\oplus\zeta_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^{1'}}} \mathcal{B}^1 \oplus \mathcal{B}^1$ 是单射。设 $\mathcal{B}^2$ 为其余核，并且容易证明 $[\mathcal{B}^2] \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w})$。由此我们证明了（5.1）。

最后，根据引理 2.8，$\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1) - \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$的光滑性成立。此外，其维数为

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{2}(dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})) + dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})) + g_k) - dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})) \\ = dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})) + 2g_k. \end{aligned}$$

□

5.3. $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$的光滑性。最后，我们证明Negut的四重模空间的光滑性：

定理 5.7. 四重模空间 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 是光滑的，且 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 是 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 的正则除子。

证明。给定四元组

$$([\mathcal{B}^0] \subset_x [\mathcal{B}^1]), ([\mathcal{B}^0] \subset_y [\mathcal{B}^{1'}]), ([\mathcal{B}^1] \subset_y [\mathcal{B}^2]), ([\mathcal{B}^{1'}] \subset_x [\mathcal{B}^2]),$$

点 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 处的切空间是 $(b^0, b^1, b^{1'}, b^2) \in$的子空间

$$Ext^1(\mathcal{B}^0,\mathcal{B}^0) \oplus Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1) \oplus Ext^1(\mathcal{B}^{1'},\mathcal{B}^{1'}) \oplus Ext^1(\mathcal{B}^2,\mathcal{B}^2)$$

满足

(1) $(b^0, b^1) \in T_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}$, $(b^0, b^{1'}) \in T_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^{1'}}$, $(b^1, b^2) \in T_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}$ and $(b^{1'}, b^2) \in T_{\mathcal{B}^{1'}\mathcal{B}^2}$,
(2) $dt_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}(b^0, b^1) = dt_{\mathcal{B}^{1'}\mathcal{B}^2}(b^{1'}, b^2)$,
(3) $dt_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^{1'}}(b^0, b^{1'}) = dt_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}(b^1, b^2)$.

由命题 5.6，$\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) - \mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 是光滑的，且其维数为 $dim(\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1))+1$。考虑一个闭点 $([\mathcal{B}^0], [\mathcal{B}^1], [\mathcal{B}^2]) \in \mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$。对于切空间 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 中的四元组 $(b^0, b^1, b^{1'}, b^2)$，则 $(b^0, \frac{1}{2}(b^1 + b^{1'}), \frac{1}{2}(b^1 + b^{1'}) \ b^2)$ 和 $(0, \frac{1}{2}(b^1 - b^{1'}), \frac{1}{2}(b^{1'} - b^1), 0)$ 也属于切空间 $\mathfrak{Y}_k(\bar{\mathbf{v}}^1)$。注意，对于 $b \in Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1)$，$dt_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}(0, b) = dt_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}(b, 0)$。因此，点 $([\mathcal{B}^0], [\mathcal{B}^1], [\mathcal{B}^2])$ 处的切空间 $T_{\mathfrak{Y}_k}(\mathbf{v}^1)$ 分解为两个子空间：一个是 $T_{\mathfrak{J}_k}(\mathbf{v}^1)$，另一个是

$$N := \{b \in Ext^1(\mathcal{B}^1,\mathcal{B}^1) | (b, 0) \in T_{\mathcal{B}^1\mathcal{B}^2}, (0, b) \in T_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^1}\}$$

由引理 2.7，N 是一维的，因此 $dim(T_{\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)})|_{([\mathcal{B}^0],[\mathcal{B}^1],[\mathcal{B}^2])} = dim(\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1))$。因此，$\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$ 是光滑的，且 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 是一个正则除子。□

6. The Derived Blow-up of the Diagonal

设 $\Phi : Y \to X$ 是光滑簇之间的一个态射。设 $\mathbb{R}\Delta_\Phi : Y \to Y \times_X^{\mathbb{L}} Y$ 是对角态射，它是一个闭嵌入，并且 $N_{\mathbb{R}\Delta_\Phi} = L_\Phi$。由粘合定理定理 C.12，我们有

推论 6.1. 如果 $Y \times_X^{\mathbb{L}} Y - Y$光滑且 $\mathbb{P}_Y(L_\Phi)$ 光滑，那么 $Bl_{\Delta_\Phi} \cong \mathbb{B}l_{\Delta_\Phi}$二者均光滑。

现在我们将导出爆破理论应用于箭图簇。给定 $k \in I$，并选取维数向量 $\mathbf{v}^0 + \delta_k = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^{1'} = \mathbf{v}^2 - \delta_k$。我们考虑以下导出增强

$$\mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1) := \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \times^{\mathbb{L}}_{\mathbf{M}(\mathbf{v}^0, \mathbf{w})} \mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'}, \mathbf{v}^2), \quad \mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1) := \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \times^{\mathbb{L}}_{\mathbf{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w})} \mathfrak{P}(\mathbf{v}^{1'}, \mathbf{v}^2)$$

以及对角态射

$$\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)} : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) \to \mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1), \quad \mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)} : \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \to \mathbb{R}\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1).$$

在本节中，我们将证明

定理 6.2（引理 6.7）。我们有

$$\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}(L_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}(L_{q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}).$$

作为光滑概形。

根据定理 6.2、命题 5.6 和推论 6.1，我们有

定理 6.3。 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}}$ 和 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}}$ 都是光滑概形，并且我们有 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}} \cong Bl_{\Delta_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}}$ 和 $\mathbb{B}l_{\mathbb{R}\Delta_{q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}} \cong Bl_{\Delta_{q(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}}$。

最后，我们考虑态射 $\alpha_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$。我们注意到，在态射 $\alpha_k^-(\mathbf{v}^1)$（分别为 $\alpha_k^+(\mathbf{v}^1)$）下，对角线 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)$（分别为 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$）的原像是 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$，它是 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1)$的一个正则除子。因此，态射 $\alpha_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$可分解为态射

$$\overline{\alpha_k^-(\mathbf{v}^1)} : \mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) \to Bl_{\Delta_{p(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)}}, \quad \alpha_k^+(\mathbf{v}^1) : \overline{\alpha_k^+(\mathbf{v}^1)} : \mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) \to Bl_{\Delta_{q_k(\mathbf{v}^2)}}.$$

定理 6.4。$\alpha_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$都是同构。此外，如果 $dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)) > dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}))$（分别为 $dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)) > dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}))$），那么 $\mathfrak{Z}_k^-(\mathbf{v}^1)$（分别为 $\mathfrak{Z}_k^+(\mathbf{v}^1)$）是一个典范奇点。

证明。由定理 6.3， $\alpha_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$ 在限制到 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 和 $\mathfrak{Y}_k(\mathbf{v}^1) - \mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 时均为同构。因此，$\alpha_k^{\pm}(\mathbf{v}^1)$ 均为 étale、双有理且支配的，故为同构。奇点性质由粘合定理定理 C.12 得出。□

6.1. 射影化与嵌套箭图簇。以下引理是命题 4.10 的一个导出增强：

引理 6.5. 我们有

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k^\vee(\mathbf{v}^1)) \cong \mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2))$$

此外，在上述同构下，我们有

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k^\vee(\mathbf{v}^1))}(-1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2))}(1).$$

证明。根据命题 4.10，我们只需证明

$$vdim(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k^\vee(\mathbf{v}^1))) \cong dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) \cong vdim(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2)))$$

我们注意到

$$\begin{aligned} rank(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^1)) &=< \mathbf{v}^1, \delta_k >_Q -\mathbf{w} \bullet \delta_k \\ &= \frac{1}{2}(< \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^2 >_Q - < \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1 >_Q - < \delta_k, \delta_k > -2\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}^1) \\ &= \frac{1}{2}(-dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w})) + dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w})) + 2g_k - 2) \end{aligned}$$

and

$$rank(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2)) =< \mathbf{v}^2, \delta_k >_Q -\mathbf{w} \bullet \delta_k = rank(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^1)) - 2g_k + 2.$$

因此，我们有

$$vdim(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k^\vee(\mathbf{v}^1))) = vdim(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times \mathbf{L}_k}(\mathcal{I}_k(\mathbf{v}^2))) =$$
$$\frac{1}{2}(dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^2, \mathbf{w})) + dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1, \mathbf{w})) + 2g_k + 2) = dim(\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)).$$

由定理 4.8 得。因此，它们作为光滑概形是同构的。 □

引理 6.6. 设 X 和 Y 是两个光滑概形，且 Z 是 $X \times Y$ 的光滑拉格朗日子簇。那么我们有 $L_{Z/X} \cong T_{Z/Y}[1]$。

证明。由短正合列可知

$$0 \to TZ \to TY \oplus T^*X \to T^*Z \to 0.$$

□

最后，我们选择维数向量 $\mathbf{v}_0 + \delta_k = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 - \delta_k$。我们对 $\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 应用同调射影对偶定理（定理 B.4）：

引理 6.7。我们有

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1) &\cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}(T_{q\times t(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}[1]) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}(T_{p\times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}[1]) \\ &\cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}(L_{p(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}(L_{q(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}). \end{aligned}$$

作为光滑概形。

证明。根据定理 4.8，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)$ 是 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}) \times \mathbf{L}_k$ 的拉格朗日子流形。根据引理 6.6，我们有

$$T_{q\times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}[1] \cong L_{p(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}, \quad T_{p\times t(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}[1] \cong L_{q(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}.$$

根据定理 B.4，$\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)$ 是以下对象的底层概形

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}(T_{q\times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}[1]) \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}(T_{p\times t(\mathbf{v}^0,\mathbf{v}^1)}[1]).$$

因此，为了证明同构，我们只需证明

$$dim(\mathfrak{J}_k(\mathbf{v}^1)) = vdim(\mathbb{P}_{\mathfrak{P}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}(T_{q\times t(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2)}[1])),$$

这由命题 5.2 和定理 4.8 推出。 □

Appendix A. Smoothness, Quasi-smoothness, and Virtual Dimension

由 [2] 或 [14], 的引理 2.1.2 可知，光滑导出概形是经典的，而光滑经典概形作为导出概形也是光滑的。

由 [2], 的推论 2.1.11 可知，导出概形之间的态射 $f\colon Z_1 \to Z_2$ 拟光滑，当且仅当在源上 Zariski 局部可以由一个图表诱导。

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 & \xrightarrow{f'} & Z_2 \times \mathbb{A}^n & \xrightarrow{pr} & Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ pt & \xrightarrow{0} & \mathbb{A}^m. & & \end{array} \tag{A.1}$$

其中方形是笛卡尔的，且 f' 是闭嵌入。此外，若 f 是闭嵌入，则在源上 Zariski 局部可以由图表 (A.1) 诱导，使得 $n = 0$。由此可推得，拟光滑概形 X 是经典概形，当且仅当 $vdim(X) = dim(\pi_0(X))$。在这种情况下， X 是局部完全交概形。拟光滑概形 X 光滑，当且仅当 $vdim(X) = dim(\pi_0(X))$ 且 $\pi_0(X)$ 光滑。

下面的论证是标准的（参见 [22], 的断言 6.5、 [27]的习题 12.2.C 等）

引理 A.1. 设 R是一个 Cohen–Macaulay（分别为完全交、正则）局部环， f_1、$\cdots$、 $f_n \in R$是一组元素，且商环 $R/$（f_1， $\cdots$， f_n）在 R中的余维数为 n，则对于任意 $1 \leq i \leq n$，商环 $R/$（f_1， $\cdots$， f_i）在 R中的余维数为 i，并且也是 Cohen–Macaulay（分别为完全交、正则）。

推论 A.2. 设 $f\colon X \to Y$ 是拟光滑导出概形之间的拟光滑闭嵌入。若 $Y - X$ 是经典的（分别为光滑的）且非空，且X 是经典的（分别为光滑的），则 Y 也为经典的（分别为光滑的）。

Appendix B. Jiang's Derived Projectivization

本节回顾 Jiang 的导出射影化理论 [9]。设 $\psi :\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是导出概形 X 上局部自由层之间的一个态射。那么在 $\mathbb{P}_X(\mathcal{G})$ 上，我们将态射 $taut_\psi$ 视为以下态射的复合:

$$\pi^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{G})}(-1) \to \pi^*\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{G})}(-1) \to \mathcal{O}.$$

令 $\mathbb{R}\mathcal{Z}(taut_\psi^\vee)$ 为 $taut_\psi^\vee$ 的导出零点轨迹。给定一个导出概形 X，我们将二项复形表示为局部自由层之间的态射 $\psi\colon \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$，并且也将其视为 $Perf(X)$ 中的一个对象。

定理 B.1（[9]）。将 ψ 视为 $Perf(X)$ 中的一个对象，且进一步视为 $QCoh(X)$ 中的一个对象，我们有 $\mathbb{P}_X(\psi) \cong \mathbb{R}\mathcal{Z}(taut_\psi^\vee)$，以及 $\pi_0(\mathbb{P}_X(\psi)) \cong P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi))$。此外，我们有$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{G})}(1)|_{\mathbb{P}_X(\psi)}$。

在本节的最后一部分，我们假设 X 是拟光滑的，且 $\psi \in Perf(X)$ 的 Tor 振幅为 $[0, 1]$。

推论 B.2. 导出概形 $\mathbb{P}_X(\psi)$ 也是拟光滑的，其虚维数为 $vdim(X) + rank(\psi) - 1$。此外， $\mathbb{P}_X(\psi)$ 光滑当且仅当

(1) X 光滑；(2) $P_X(\psi)$ 光滑，其维数为 $vdim(X) + rank(\psi) - 1$。

¯在 $\mathbb{P}_X(\psi)$ 上，存在一个完美复形 $\psi := \{pr_\psi^*\psi \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(1)\}[-1]$，其 Tor 振幅也为 $[0,1]$。

定理 B.3（ [9], 欧拉纤维序列中的定理）。相对余切¯复形 $L_{\mathbb{P}_X(\psi)/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(-1) \otimes \psi$。

定理 B.4（ [9], 同调射影对偶性中的引理 7.3）。我们有一个典范同构

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi)/X}[1]) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)/X}[1])$$

使得它们的底层概形均为 $P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi))\times_{\pi_0(X)} P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi^\vee))$。此外，我们有

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi)/X})}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)/X})}(1)$$

并且它们到 $P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi))\times_{\pi_0(X)} P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi^\vee))$ 的限制均为

$$\mathcal{O}_{P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi))}(1) \otimes \mathcal{O}_{P_{\pi_0(X)}(\pi_0(\psi^\vee))}(1).$$

此外，$\mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi)/X}[1])$ 和 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)}(T_{\mathbb{P}_X(\psi^\vee)/X}[1])$ 均为拟光滑，且它们的虚维数为 $vdim(X) - 1$。

Appendix C. The Local Model of Derived Blow-ups

本节回顾 Hekking的导出爆破理论，重点讨论以下情形： $\Phi : Y \to X$ 是拟光滑概形之间的闭嵌入。首先，我们解释经典爆破与导出爆破之间的关系：

定理 C.1（ [6]中的定理3.5.5）。给定一个闭态射 $\Phi : X \to Y$,$Bl_{\pi_0(\Phi)}$ 是 $\pi_0(\mathbb{B}l_\Phi)$ 中 $\pi_0(X - Y)$的概形闭包。

推论C.2。如果 $\pi_0(Y) - \pi_0(X)$非空且 $\mathbb{B}l_\Phi$ 光滑，则$Bl_{\pi_0(\Phi)} \cong \mathbb{B}l_\Phi$ ，并且它们都是光滑概形。

现在我们考虑一个局部模型：设 Z 是一个光滑簇，并考虑局部自由层之间的态射：

$$g : V \to \mathcal{O}_X, \quad h : W \to \mathcal{O}_X, \quad \phi : W \to V$$

使得 $g \circ \phi = h$。令

$$X := \mathbb{R}\mathcal{Z}(g^\vee), \quad Y := \mathbb{R}\mathcal{Z}(h^\vee)$$

分别是 $g^\vee$ 和 $h^\vee$ 的导出零点轨迹。于是 X 是 Y的闭导出子概形。我们记

$$\Phi : X \to Y, \quad \mathfrak{g} : X \to Z, \quad \mathfrak{h} : Y \to Z$$

为相应的闭嵌入。

¯设 V为 $taut_V$: $pr_V^*V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(1)$的核。设 v为 V的秩。我们回顾塞尔定理

定理 C.3（塞尔）。我们有

$$\mathbf{R}pr_{V*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(l) \cong \begin{cases} Sym^n V & l \geq 0 \\ 0 & -v < l < 0 \\ det(V)^{-1} Sym^{-l-v}(V^\vee)[-v+1] & l \leq -v \end{cases}$$

推论 C.4。给定 $0 \leq l < v$ 和 $0 \leq k < v$，我们有

$$\mathbf{R}pr_V^*(\wedge^k \bar{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(-l)) = \delta_{kl}\mathcal{O}_Z[-k]. \tag{C.1}$$

令 $\bar{g}: V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}$ 为限制到 V上的 $pr_V^* g$的态射。

引理 C.5（ [7]的例 3.6）。导出爆破 $\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}$ 是$\bar{g}^\vee$ 的导出轨迹，并且

$$\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}}(-1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(-1)|_{\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}}.$$

引理 C.6。给定 $-v < l \leq 0$，我们有

$$\mathbf{R}pr_{\mathfrak{g}*}\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}}(l) \cong \mathcal{O}_Z.$$

证明。由结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}}$ 可由 $\bar{g}$ 的 Koszul 复形解析这一事实以及 (C.1) 可得。□

在 $\mathbb{P}_Z(V)$ 上，我们考虑态射 $h': W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}$，其中$h' = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(-1) \otimes (taut_V \circ pr^*\phi)$。令 h 为 h' 在 $\mathbb{B}l_{\mathfrak{g}}$上的限制。以下定理是 [7]的命题 3.13 的一种改述：

引理 C.7。导出概形 $\mathbb{B}l_\Phi$ 是 $\bar{h}^\vee$ 的导出零点轨迹，并且

$$\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_\Phi}(-1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{B}l_g}(-1)|_{\mathbb{B}l_\phi}.$$

推论 C.8。导出概形 $\mathbb{B}l_\Phi$ 也是拟光滑的，且（虚）例外因子为 $\mathbb{P}_X(C_\Phi)$。

设 w为 W的秩。设 pr_Φ为从 $\mathbb{B}l_\Phi$到 Y的投影。注意到 $C_\Phi = \phi|_Y$，且 $vdim(Y) - vdim(X) = rank(C_\Phi) = v - w$。设 K_Y和 $K_{\mathbb{B}l_\Phi}$分别为 L_Y和 $L_{\mathbb{B}l_\Phi}$的行列式线丛。

定理 C.9（差异公式）。我们有

$$K_{\mathbb{B}l_\Phi} \cong pr_\Phi^* K_Y \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{B}l_\Phi}(vdim(X) - vdim(Y) + 1).$$

证明。首先，注意到

$$K_Y \cong det(W)^{-1}(detK_Z)|_Y.$$

其次，我们注意到 $\mathbb{B}l_\Phi$是 $(h' \oplus \bar{g})^\vee$在 $\mathbb{P}_Z(W)$上的导出零点轨迹。因此我们有

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}l_\Phi} &\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(w) \otimes pr_V^* det(W)^{-1} \otimes det(V)^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(1) \otimes K_{\mathbb{P}_Z(V)}|_{\mathbb{B}l_\Phi} \\ &\cong pr_V^*(det(W)^{-1}(detK_Z))\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(V)}(w - v + 1)|_{\mathbb{B}l_f} \\ &\cong pr_\Phi^* K_Y \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{B}l_\Phi}(vdim(X) - vdim(Y) + 1). \end{aligned}$$

□

定理 C.10. 给定 $-rank(C_\Phi) < l \leq 0$，我们有

$$\mathbf{R}pr_{\Phi*}\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_\Phi}(l) \cong \mathcal{O}_Y.$$

证明. 由引理 C.6 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_\Phi}$ 的 Koszul 分解可得，依据是引理 C.7。

□

推论 C.11（Grauert-Riemenschneider 消失定理）。我们有 $\mathrm{R}pr_{\Phi*}K_{\mathbb{B}l_\phi} \cong K_Y$。

我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_X(C_\Phi) & \longrightarrow & \mathbb{B}l_\Phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Phi} & Y \end{array}$$

它诱导一个同构 $Y - X \cong \mathbb{B}l_\Phi - \mathbb{P}_X(C_\Phi)$。

定理 C.12（粘合定理）。我们有

(1) 若 $\mathbb{P}_X(C_\Phi)$ 和 $Y - X$ 均为非空经典对象，则 X 和导出爆破 $\mathbb{B}l_\Phi$ 也均为经典对象，且 $\mathbb{P}_X(N_\phi)$ 是 $\mathbb{B}l_\Phi$ 的 Cartier除子；(2) 若 $\mathbb{P}_Y(C_\Phi)$ 和 $Y - X$ 均为非空光滑对象，则 X 和导出爆破 $\mathbb{B}l_\Phi$ 也均光滑；(3) 假设 (2) 成立，且 $dim(X) < vdim(Y)$，则 Y 也为经典对象，而且还是一个典范奇点。

证明。(1) 和 (2) 均由推论 A.2 得出。假设 (2) 成立，若 $dim(X) < vdim(Y)$，则有 $dim(\pi_0(Y)) = dim(Y)$，因此 Y 也是经典的。由定理 C.10， Y 是有理奇点，因而是典范奇点。□

最后，我们注意到，对于拟光滑概形之间的任意闭态射 $\Phi : X \to Y$，由 (A.1) 可知，它总能在局部表示为局部模型。因此，推论 C.8、定理 C.10 和定理 C.12 总是成立；若 $\mathbb{B}l_f$ 光滑，则定理 C.9 和推论 C.11 也成立。

例 C.13. 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是经典簇之间的闭嵌入，满足

(1) X 和 Z 光滑，且 Y 是 l.c.i；(2) $dim(Z) = dim(Y) + 1 = dim(X) + 2$；(3) 闭嵌入 g 是拟光滑的；

它诱导出局部自由层的一个态射 $C_g|_X \to C_{g\circ f}$，我们将 T 记作该态射的零点集（注意到 C_g 的秩为 1）。如果 T 光滑且 $dim(T) = dim(X) - 2$，那么 $\mathbb{B}l_f$ 也光滑，并诱导出 Y的一个保典范消解。

Appendix D. Derived Blow-up and Virtual Fundamental Class

设 X 为一个拟光滑概形。我们记作

$$D^b(X) := \{\mathcal{F} \in QCoh(X) | H^i(\mathcal{F}) \in Coh(\pi_0(X)) \text{ and are bounded}\}$$

作为 $QCoh(X)$ 的一个子范畴。我们注意到， $D^b(X)$ 具有标准的 t 结构，其心为 $Coh_{\pi_0(X)}$。因此， $D^b(X)$ 的 Grothendieck 群（记作 $K_0(D^b(X))$）同构于 $G_0(\pi_0(X))$，即 $\pi_0(X)$ 上相干层的 Grothendieck 群。此外，由于 $\mathcal{O}_X \in D^b(X)$，它生成了 $G_0(\pi_0(X))$ 的一个类，我们沿用 [3] 的记号将其记作 $[X]_K^{vir}$。

设 Z 是一个光滑概形，且存在局部自由层的态射 $\mathfrak{h} : V \to \mathcal{O}_Z$。设 Y 是 $\mathfrak{h}^\vee$ 的导出零点集，且 $g : X \to Z$ 是 Z 的光滑闭子概形，使得 $\mathfrak{h}|_X = 0$。于是我们有闭嵌入 $f : X \to Y$。限制到 X 后，余法复形 C_f 是一个二项复形

$$\{V \to C_g\}.$$

设 pr_g 是从 Bl_g 到 Z 的投影态射。那么该态射的像

$$pr_g^*\mathfrak{h} : pr_g^*V \to \mathcal{O}_{Bl_g}$$

位于 $\mathcal{O}_{Bl_g}(1)$ 内。因此我们将其记为

$$\bar{h} : pr_g^*V \otimes \mathcal{O}_{Bl_g}(-1) \to \mathcal{O}_{Bl_g}$$

作为诱导态射。

与引理 C.7 类似，下面的引理是对 [7] 中命题 3.13 的另一种表述:

引理 D.1。导出爆破 $\mathbb{B}l_f$ 是 $\bar{h}^\vee$ 的零点集，并且

$$\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}(-1) \cong \mathcal{O}_{Bl_g}(-1)|_{\mathbb{B}l_f}.$$

设 $pr_f : \mathbb{B}l_f \to Y$ 为投影。设 r 为 C_f 的秩，并且 $r = dim(X) - vdim(Y)$。我们假设 $r \leq 0$。

定理 D.2. 存在 $D_a \in D^b(Y)$, $-r-1 \leq a \leq 0$ 使得

(1) $D_{-r-1} \cong \mathcal{O}_Y$ 且 $D_0 \cong \mathbf{R}pr_{f*}\mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}$;

(2) 我们有如下三角:

$$D_{a-1} \to D_a \to \mathbf{R}f_*(det(C_f)^{-1} \wedge^{l-r} (C_f^\vee[1]))[1-a] \tag{D.1}$$

证明. 令 $\bar{Y} := Y \times_Z^{\mathbb{L}} Bl_g$。那么 Bl_f 是一个 $\bar{Y}$ 的闭导出概形，并令 $\bar{g}$为从 Y到 Y的投影。给定一个整数 $a \leq 0$，我们定义相干层复形 $\mathcal{A}^a$，使得上同调次数为 m 的元素为

$$(\mathcal{A}^a)_m = \begin{cases} 0 & m \geq a, \\ \wedge^{-m}(pr_g^*V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(C_g)}(m-a) & m < a, \end{cases} \tag{D.2}$$

其中微分是 h 在 $\mathbb{P}_Y(C_g)$ 上的外幂。此外，$\mathcal{A}^a$是 Y 上的微分分次相干层。给定一个整数 $a \leq 0$，我们还定义相干层复形，使得上同调次数为 m 的元素为

$$(\mathcal{D}^a)_m = \begin{cases} 0 & m > 1, \\ \wedge^{-m}(pr_g^*V) & 0 \geq m \geq a, \\ \wedge^{-m}(pr_g^*V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{B}l_f}(m-a) & m < a, \end{cases} \tag{D.3}$$

其中当 $m < a$ 时，微分是 h 的外幂；当 $m \geq a$ 时，微分是$-pr_g^*\mathfrak{h}$ 的外幂。那么 $\mathcal{D}^a$ 也是 Y 上的微分分次相干层。我们定义

$$D^a := \mathbf{R}\bar{g}_*\mathcal{D}^a.$$

根据塞尔定理，我们有

$$D^0 \cong \mathbf{R}pr_{f*}\mathcal{O}_{\mathbf{R}Bl_f}, \quad D^{-r-1} \cong \mathcal{O}_Y.$$

我们注意到 $\mathcal{A}^a \cong \mathcal{D}^a/\mathcal{D}^{a-1}$。此外，根据塞尔定理，我们有

$$\mathbf{R}\bar{g}_*\mathcal{A}^a \cong \mathbf{R}f_*(det(C_f)^{-1} \wedge^{a+r} (C_f^\vee[1]))[1-a].$$

□

推论 D.3. 设 $[Y]_K^{vir}$ 和 $[\mathbb{B}l_f]_K^{vir}$ 分别为 $\pi_0(Y)$ 和 $\pi_0(\mathbb{B}l_f)$ 的 K 理论虚基本类。则有

$$\pi_0(pr_f)_*[\mathbb{B}l_f]_K^{vir} = [Y]_K^{vir} + \pi_0(f)_*(\sum_{a=-r}^{0} (-1)^{1-a} det(C_f)^{-1} \wedge^{a+r} (C_f^\vee[1]))$$

References

[1] Nicolas Addington 和 Ryan Takahshi。某些层模空间上的范畴 sl_2 作用。 *to appear in the Transactions of the American Mathematical Society*。[2] D. Arinkin 和 D. Gaitsgory。相干层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想。 *Selecta Mathematica*，21(1):1–199，2015 年 1 月。[3] Ionut。Ciocan-Fontanine 和 Mikhail Kapranov。通过 dg–流形构造虚基本类。*Geometry & Topology*，13(3):1779–1804，2009。[4] William Crawley-Boevey。箭图表示的矩映射几何。 *Compositio Mathematica* 126 3 257 293, 2001 ，( ): – 。

[5] Jeroen Hekking。导出代数几何中的分次代数、射影谱与爆破。 *arXiv preprint arXiv:2106.01270*，2021。[6] Jeroen Hekking。 *Blow-ups and normal bundles in derived algebraic geometry and beyond*。博士论文，瑞典皇家理工学院，2022。[7] Jeroen Hekking、David Rydh 和 Michail Savvas。导出叠的稳定子约化及其在层论不变量中的应用。 *arXiv preprint arXiv:2209.15039*，2022。[8] Qingyuan Jiang。论射影化的肖氏理论。 *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 1 44, 2021 ，第 – 页。

[9] Qingyuan Jiang。复形的导出射影化。 *arXiv preprint arXiv:2202.11636*，2022。[10] Qingyuan Jiang 和 Naichung Conan Leung。射影化的导出范畴与翻转。*arXiv preprint arXiv:1811.12525*，2018。[11] Young-Hoon Kiem 和 Jun Li。利用余截面局部化虚循环。 *Journal of the American Mathematical Society* 26 4 1025 1050, 2013 ，( ): – 。

[12] Frances Clare Kirwan。非奇异簇商的部分消奇异化及其贝蒂数。 *Annals of Mathematics*，122(1):41–85，1985。[13] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。上同调霍尔代数、指数霍奇结构与动机唐纳森-托马斯不变量。 *Communication in Number Theory andPhysics*，5(arXiv: 1006.2706):231–352，2010。[14] Jacob Lurie。*The DAG series*。可在作者主页 http://www.math.harvard.edu/lurie/ 查阅。[15] Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov。量子群与量子上同调。*Astérisque*，(408):ix+209，2019。[16] Kevin McGerty 和 Thomas Nevins。箭图簇的 Kirwan满射性。 *Inventiones mathematicae* 212 1 161 187, 2018 ，( ): – 2022 年 4 月。[17] Hiraku Nakajima。ALE空间上的瞬子、箭图簇与 Kac-Moody代数。 *Duke Mathematical Journal* 76 2 365 416, 1994 ，( ): – 。

[18] Hiraku Nakajima。箭图簇与 Kac-Moody代数。 *Duke Mathematical Journal*，91 3 515 ( ): – 560，1998。[19] Hiraku Nakajima。 *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces* 18 *University* , *Lecture Series* 1999 *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces* 18 *University* 的卷。 。 *Lecture Series* 1999
[20] Hiraku Nakajima。箭图簇与量子仿射代数的有限维表示。 *Journal of the American Mathematical Society*，14(1):145–238，2001。[21] Andrei Negut。与曲面相关的洗牌代数。 *Selecta Mathematica. New Series*，25 3( ):57，2019。[22] Andrei Negut。光滑模空间的 Hecke 对应。 *Publicationsmathématiques de l'IHÉS*，135(1):337–418，2022 年 6 月。[23] Andrei Negut、Francesco Sala 和 Olivier Schiffmann。作为量子群的箭图洗牌代数。 *arXiv preprint arXiv:2111.00249*，2021。[24] Michail Savvas。 *Generalized Donaldson-Thomas Invariants via Kirwan Blowups*。斯坦福大学，2018。[25] Olivier Schiffmann 和 Eric Vasserot。论箭图的上同调霍尔代数：生成元。 *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*，760:59–132，2020。[26] Timo Sch¨urg、Bertrand To¨en 和 Gabriele Vezzosi。导出代数几何、完美复形的行列式，以及其在映射与复形的障碍理论中的应用。*Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*，2015(702):1–40，2015。[27] Ravi Vakil。上升之海：代数几何基础。 *preprint*，2017。

[28] Ravi Vakil 和 Aleksey Zinger。《映射到 $\mathbb{P}^n$ 的亏格一稳定映射模空间主分支的消奇点化》。《 *Geometry and Topology*》，12(1):1 – 95，2008 年。[29] Yu Zhao。《箭图簇与函子的范畴化交换子》。准备中。[30] Yu Zhao。《层的模空间与函子的范畴化交换子》。《 *arXiv preprint arXiv:2112.12434* 》，2021 。

[31] Yu Zhao。《希尔伯特概形上的范畴化量子环面作用》。《 *to appear in JIMJ*》，2022 年。