arXiv:2303.01066v1 [math.GR] 2 Mar 2023

由循环 2-群构造阶为 2^n 的陀螺群

ABRAHAM A. UNGAR、MOHAMMAD ALI SALAHSHOUR 和 KUROSH MAVADDAT NEZHAAD*

谨以此文缅怀 Ali Reza Ashrafi 教授，他是一位宽厚睿智的老师。

Abstract. 陀螺群由一个非空集合及其上的二元运算构成，满足左单位元和左逆元条件，并具有一种类似结合律的运算律，即左陀螺结合律和左环性质。本文提出一种构造新陀螺群的方法，其阶为 2^n，利用一个循环 2-群，该循环 2-群为 $\mathbb{Z}_{2^n}$，其中 $n \geq 3$。

关键词：广群、陀螺群、陀螺自同构、陀螺结合的、陀螺交换。

2010 Mathematics Subject Classification: 主要分类号：20N05；次要分类号：20F99、20D99。

1. Introduction

由非空集合 G 和其上的二元运算 $\oplus$ 组成的有序对 $(G,\oplus)$ 称为广群。设 $(G,\oplus)$ 是一个广群。从 G 到其自身的双射称为 G 的自同构，若对所有 $a,b\in G$，$\phi(a\oplus b) = \phi(a)\oplus\phi(b)$。$G$ 的所有自同构构成的集合记为 $\mathrm{Aut}(G,\oplus)$。容易看出，$\mathrm{Aut}(G,\oplus)$ 在函数复合下构成一个群。若广群 $(G,\oplus)$ 满足以下条件，则称其为陀螺群：

(G1) 存在元素 $0\in G$，使得对所有 $x\in G$, $0\oplus x = x$，均有相应关系；(G2) 对每个 $a\in G$，存在 $b\in G$ 使得 $b\oplus a = 0$；(G3) 存在函数 $\mathrm{gyr}: G\times G\longrightarrow \mathrm{Aut}(G,\oplus)$，使得对每个 $a,b,c\in G$，$a\oplus(b\oplus c) = (a\oplus b)\oplus \mathrm{gyr}[a,b]c$，其中 $\mathrm{gyr}[a,b]c = \mathrm{gyr}(a,b)(c)$；(G4) 对每个 $a,b\in G$，$\mathrm{gyr}[a,b] = \mathrm{gyr}[a\oplus b,b]$。

注意，这些公理蕴含其右侧对应形式。容易看出，若将陀螺自同构定义为恒等自同构，则群也是陀螺群。对于每个 a、$b\in G$，映射 $\mathrm{gyr}[a,b]$ 称为由 a 和 b生成的陀螺自同构。陀螺群结构源自 Abraham Ungar 在研究洛伦兹群 [8, 9]时的一项开创性工作。当且仅当对于所有 a、$b\in G$，陀螺群 G 满足以下条件时，它称为陀螺交换群：

$$a\oplus b = \mathrm{gyr}[a,b](b\oplus a)$$

本文中，我们采用的记号是标准的，主要取自 [2, 10]。我们建议感兴趣的读者参阅综述 [7]，了解陀螺群的完整发展史。关于子陀螺群、陀螺群同态和商陀螺群，我们也请读者参阅 [4, 5]。我们的计算借助 GAP [6] 完成。关于阶不超过 31 的小阶陀螺群的分类（除 24、27 和 30 阶外，按同构分类）的更多信息，请参阅 [1]。本文通过循环 2-群 $\mathbb{Z}_{2^n}$，为 $n\geq 3$ 构造一个阶为 2^n 的陀螺群，记作 $G_2(n)$。

*通讯作者（邮箱：kuroshmavaddat@gmail.com）。

Ashrafi 等人在 [3] 中构造了一个阶为 2^n 的陀螺群 $G(n)$，本文将其记作 $G_1(n)$。$\mathbb{Z}_{2^n}$ 的元素如下：

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, 2, \cdots, 2^{n-1}-1, 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \cdots, 2^n-1\}.$$

记号 1.1。设 $P(n) = \{0, 1, 2, \cdots, 2^{n-1}-1\}$, $H(n) = \{2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \cdots, 2^n-1\}$ 和 $G_2(n) = P(n) \cup H(n)$。显然 $P(n) \cong \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ 和 $H(n) = P(n) + m$ 满足 $m = 2^{n-1}$。因此 $G_2(n) = P(n) \cup (P(n) + m)$。另外，设 $O_P = \{i \in P(n) \mid i \text{ 为奇数}\}$, $E_P = \{i \in P(n) \mid i \text{ 为偶数}\}$,$O_H = \{i \in H(n) \mid i \text{ 为奇数}\}$ 且 $E_H = \{i \in H(n) \mid i \text{ 为偶数}\}$。定义 $\oplus$ 在 $G_2(n)$ 上的二元运算如下：

$$i \oplus j = \begin{cases} t & : (i,j) \in (P(n) \times P(n)) \cup \Big[(H(n) \times H(n)) - (E_H \times O_H)\Big] \\ t+m & : (i,j) \in (P(n) \times H(n)) \cup \Big[(H(n) \times P(n)) - (E_H \times O_P)\Big] \\ s & : (i,j) \in E_H \times O_H \\ s+m & : (i,j) \in E_H \times O_P \end{cases}$$

其中 $t, s \in P(n)$ 和

$$\begin{cases} t \equiv i + j \pmod{m} \\ s \equiv i + j + \dfrac{m}{2} \pmod{m} \end{cases}$$

显然，运算 $\oplus$ 定义良好。

其中，正整数 r 和 s 的最大公约数记作 (r, s)。本节从以下简单引理开始：

引理 1.2 ([3])。设记号 1.1 成立。

I) $(\frac{m}{2}-1, m) = (\frac{m}{2}+1, m) = 1$.*II*) 设 $x \equiv y$(模 m)。若 $x, y \in P(n)$ 或 $x, y \in H(n)$，则 $x = y$。

引理 1.3。设记号 1.1 成立，且 $A(i)$ 是 $G_2(n)$ 上如下的映射，

$$A(i) = \begin{cases} r & : i \in O_P \\ r+m & : i \in O_H \\ i & : Otherwise \end{cases}$$

其中 $r \in P(n)$，且 $r \equiv i + \dfrac{m}{2}$（模 m）。那么 $A(i)$ 是 Aut $(G_2(n), \oplus)$ 的一个元素。

证明。显然，$A(i)$ 是 $G_2(n)$ 上定义良好的双射映射。只需证明 $A(i)$ 是 $(G_2(n), \oplus)$ 上的同态。为此，设 i、$j \in G_2(n)$ 是两个任意元素。我们分以下四种情况分别讨论：

(1) $i, j \in P(n)$。这是我们按以下四个步骤讨论的第一种情况：

(a) $i, j \in O_P$。根据定义，存在 $\oplus$, $i \oplus j = t_1 \in E_P$，使得 $t_1 \equiv i + j$（模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t_1) = t_1 \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.1}$$

此外，$A(i) = r_1$, $A(j) = r_2$ 使得

$$r_1 \equiv i + \frac{m}{2} \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad r_2 \equiv j + \frac{m}{2} \pmod{m}.$$

由于 $r_1, r_2 \in O_P$，因此根据最后几个方程和定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = r_1 \oplus r_2 \equiv r_1 + r_2 \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.2}$$

由方程 1.1、1.2 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$，可得 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$ $= A(i) \oplus A(j)$。

(b) $i, j \in E_P$。根据定义，$\oplus$, $i \oplus j = t_1 \in E_P$ 使得 $t_1 \equiv i + j$（模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t_1) = t_1 \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.3}$$

此外，$A(i) = i$, $A(j) = j$，因此根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = i \oplus j \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.4}$$

由方程 1.3、1.4 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$，可得 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$ $= A(i) \oplus A(j)$。

(c) $i \in O_P$和 $j \in E_P$。根据定义，$\oplus$, $i \oplus j = t_1 \in O_P$ 使得 $t_1 \equiv i + j$（模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t_1) = r_1 \equiv t_1 + \frac{m}{2} \equiv i + j + \frac{m}{2} \pmod{m} \tag{1.5}$$

又有 $A(j) = j$ 和 $A(i) = r_1$，使得 $r_1 \equiv i + \frac{m}{2}$（模 m）。根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = r_1 \oplus j \equiv r_1 + j \equiv i + \frac{m}{2} + j \pmod{m} \tag{1.6}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$，由方程 1.5、1.6 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$ $= A(i) \oplus A(j)$。

(d) $i \in E_P$和 $j \in O_P$。证明与 (c) 类似，故略去。

(2) $i, j \in H(n)$。这是我们按以下四个步骤考虑的第二种情形:

(a) $i, j \in O_H$。根据定义 $\oplus$, $i \oplus j = t_1 \in E_P$使得 $t_1 \equiv i + j$（模 m）。根据假 n

$$A(i \oplus j) = A(t_1) = t_1 \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.7}$$

此外，$A(i) = r_1 + m$, $A(j) = r_2 + m$ 使得:

$$r_1 \equiv i + \frac{m}{2} \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad r_2 \equiv j + \frac{m}{2} \pmod{m}.$$

由于 $r_1, r_2 \in O_P$，根据上述方程及定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = (r_1 + m) \oplus (r_2 + m) \equiv r_1 + r_2 \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.8}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$，由方程 1.7、1.8 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$ 可得 $= A(i) \oplus A(j)$。

(b) $i, j \in E_H$。证明与 (1)(b) 类似，故略去。

(c) $i \in O_H$ 和 $j \in E_H$。根据定义 $\oplus$, $i \oplus j = t_1 \in O_P$ 使得 $t_1 \equiv i + j$ (模 m)。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t_1) = r_1 \equiv t_1 + \frac{m}{2} \equiv i + j + \frac{m}{2} \pmod{m} \tag{1.9}$$

此外 $A(j) = j$ 且 $A(i) = r_1 + m \in O_H$ 使得 $r_1 \equiv i + \frac{m}{2}$（模 m）。根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = (r_1 + m) \oplus j \equiv (r_1 + m) + j \equiv i + \frac{m}{2} + j \pmod{m} \tag{1.10}$$

由于根据方程 1.9、1.10 和引理 1.2 A, $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$ $i \oplus j$ $=A(i) \oplus A(j)$。

（d） $i \in E_H$ 和 $j \in O_H$。根据定义， $\oplus$、 $i \oplus j = s \in O_P$ 使得 $s \equiv i + j + \frac{m}{2}$ （模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(s) = r \equiv s + \frac{m}{2} \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.11}$$

此外， $A(i) = i$ 和 $A(j) = r_1 + m \in O_H$ 使得$r_1 \equiv j + \frac{m}{2}$ （模 m）。根据定义， $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = i \oplus (r_1 + m) \equiv i + (r_1 + m) + \frac{m}{2} \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.12}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in P(n)$，由方程1.11、1.12及引理1.2 $A(i \oplus j)$ $=A(i) \oplus A(j)$。

（3） $i \in P(n)$ 和 $j \in H(n)$。这是我们按以下步骤考虑的四种情况中的第三种: （a） $i \in O_P$和 $j \in O_H$。根据定义， $\oplus$、 $i \oplus j = t + m \in E_H$使得 $t \in P(n)$ 和 $t \equiv i + j$（模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t + m) = t + m \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.13}$$

此外， $A(i) = r_1 \in O_P$和 $A(j) = r_2 + m \in O_H$ 使得

$$r_1 \equiv i + \frac{m}{2} \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad r_2 \equiv j + \frac{m}{2} \pmod{m}.$$

根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = r_1 \oplus (r_2 + m) \equiv r_1 + (r_2 + m) \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.14}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in H(n)$，根据方程 1.13、1.14 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$ $=A(i) \oplus A(j)$。

(b) $i \in E_P$和 $j \in E_H$。显然， $A(i) = i$和 $A(j) = j$。根据定义 $\oplus$, $i \oplus j = t + m \in E_H$使得 $t \in P(n)$ 和 $t \equiv i + j$ (模 m)。因此

$$A(i \oplus j) = A(t + m) = t + m = i \oplus j = A(i) \oplus A(j)$$

(c) $i \in O_P$和 $j \in E_H$。根据定义 $\oplus$, $i \oplus j = t + m \in O_H$使得 $t \in P(n)$ 和 $t \equiv i + j$(模 m)。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(t + m) \equiv (t + m) + \frac{m}{2} \equiv i + j + \frac{m}{2} \pmod{m} \tag{1.15}$$

此外， $A(j) = j$ 和 $A(i) = r \in O_P$，使得 $r \equiv i + \frac{m}{2}$ (模 m)。根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = r \oplus j \equiv r + j \equiv i + \frac{m}{2} + j \pmod{m} \tag{1.16}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in H(n)$，由方程 1.15、1.16 和引理 1.2 $A(i \oplus j)$ $=A(i) \oplus A(j)$。

(d) $i \in E_P$和 $j \in O_H$。证明与前面情形 (c) 类似。

(4) $i \in H(n)$ 和 $j \in P(n)$。这是我们要分四步考虑的第四种情形，如下所示 s:

(a) $i \in O_H$ 和 $j \in O_P$。证明与 (3)(a) 类似，故略去。(b) $i \in E_H$ 和 $j \in E_P$。证明与 (3)(b) 类似，故略去。(c) $i \in O_H$ 和 $j \in E_P$。证明与 (3)(c) 类似，故略去。

(d) $i \in E_H$和 $j \in O_P$。根据定义， $\oplus$、 $i \oplus j = s + m \in O_H$使得 $s \in P(n)$ 且 $s \equiv i + j + \frac{m}{2}$（模 m）。根据假设

$$A(i \oplus j) = A(s + m) \equiv (s + m) + \frac{m}{2} \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.17}$$

此外， $A(i) = i$ 和 $A(j) = r \in O_P$，使得 $r \equiv j + \frac{m}{2}$（模 m）。根据定义 $\oplus$,

$$A(i) \oplus A(j) = i \oplus r \equiv i + r + \frac{m}{2} \equiv i + j \pmod{m} \tag{1.18}$$

由于 $A(i) \oplus A(j)$ $A(i \oplus j) \in H(n)$，根据方程 1.17、1.18 和引理 1.2 $A(i \oplus j) = A(i) \oplus A(j)$。

证明至此完成。 □

记号 1.4。设记号 1.1成立。令 $M = [O_P \times (O_H \cup E_H)] \bigcup [O_H \times (O_P \cup E_H)] \bigcup [E_H \times (O_P \cup O_H)]$。定义映射 gyr： $G_2(n) \times G_2(n) \longrightarrow$自同构群 $(G_2(n), \oplus)$ 如下：

$$\mathrm{gyr}(a, b) = \mathrm{gyr}[a, b] = \begin{cases} A & : (a, b) \in M \\ I & \text{Otherwise} \end{cases}$$

其中 $I, A \in$自同构群 $(G_2(n), \oplus)$。 I是恒等自同构， A是引理 1.3 中定义的一个自同构。显然，映射 gyr 定义良好。

2. Main Result

本节旨在刻画由循环 2-群$\mathbb{Z}_{2^n}$构造的、阶为 2^n 的有限陀螺群，其中 $n \geq 3$。现在我们可以陈述主要结果了。

定理 2.1. 假设采用记号 1.1 和 1.4。那么 $(G_2(n), \oplus)$ 是一个陀螺群 .

证明. 根据引理 1.3， $\mathrm{gyr}[a, b] \in \mathrm{Aut}(G, \oplus)$。根据 $\oplus$的定义，对所有 $i \in G_2(n)$，都有 $0 \oplus i = i$，因此 0 是 $G_2(n)$的单位元。若 $\ominus x$ 是 $x \in G_2(n)$中任意元素的逆元，则可由下列公式计算：

$$\ominus x = \begin{cases} -x & x \in P(n) \\ -t + m & x = t + m \in H(n) \end{cases}$$

其中， $-x$ 和 $-t$ 分别是 $P(n)$中 x 和 t 的逆元。

现在我们来证明环性质。设 (a, b) 是 $G_2(n) \times G_2(n)$中的任意元素。我们将分为以下四种情形：

(1) $(a, b) \in P(n) \times P(n)$. 在这种情况下， $a \oplus b \in P(n)$. 显然， $(a \oplus b, b)$、$(a, b) \notin M$. 根据定义，陀螺函数，

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = I = \mathrm{gyr}[a, b].$$

(2) $(a, b) \in H(n) \times H(n)$. 在这种情况下，我们有以下两个子情形：

(a) 如果 $(a, b) \in (O_H \times O_H) \cup (E_H \times E_H)$，那么 $a \oplus b \in E_P$且 (a, b)、$(a \oplus b, b) \notin M$. 因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = I = \mathrm{gyr}[a, b].$$

(b) 如果 $(a, b) \in (O_H \times E_H) \cup (E_H \times O_H)$，那么 $a \oplus b \in O_P$且 (a, b)、$(a \oplus b, b) \in M$。因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = A = \mathrm{gyr}[a, b].$$

(3) $(a,b) \in P(n) \times H(n)$。在这种情况下，$a \oplus b \in H$ 且 $a \oplus b \equiv a+b$（模 m）。因此我们有以下两个子情形：

(a) 若 $(a,b) \in (E_P \times O_H) \cup (E_P \times E_H)$，则 $(a,b), (a \oplus b, b) \notin M$。因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = I = \mathrm{gyr}[a,b].$$

(b) 若 $(a,b) \in (O_P \times O_H) \cup (O_P \times E_H)$，则 $(a,b), (a \oplus b, b) \in M$。因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = A = \mathrm{gyr}[a,b].$$

(4) $(a,b) \in H(n) \times P(n)$。在此情形下，$a \oplus b \in H$ 且 $a \oplus b \equiv a+b$(模 m)。因此我们有以下两个子情形：

(a) 若 $(a,b) \in (O_H \times E_P) \cup (E_H \times E_P)$，则 $(a,b), (a \oplus b, b) \notin M$。因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = I = \mathrm{gyr}[a,b].$$

(b) 若 $(a,b) \in (O_H \times O_P) \cup (E_H \times O_P)$，则 $(a,b), (a \oplus b, b) \in M$。因此

$$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = A = \mathrm{gyr}[a,b].$$

因此，环性质成立。最后，我们考察左陀螺结合律。为此，我们分以下四种情形讨论：

(1) $(a,b) \in P(n) \times P(n)$。在此情形下，$a \oplus b \in P(n)$ 且 $gyra, b = I$。我们分以下两个子情形讨论：

(a) $c \in P(n)$。因此 $b \oplus c \in P(n)$，根据定义有 $\oplus$:

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b]c &= (a \oplus b) \oplus c \pmod m \\
&\equiv (a \oplus b) + c \pmod m \\
&\equiv a + b + c \pmod m \\
&\equiv a + (b \oplus c) \pmod m \\
&\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m
\end{aligned}$$

由引理 1.2，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b]c$。

(b) $c \in H(n)$。因此 $b \oplus c \in H(n)$，此情形的证明与 1a 类似。

(2) $(a,b) \in H(n) \times H(n)$。根据记号 1.4,

$$\mathrm{gyr}[a,b] = \begin{cases} A & : (a,b) \in N \\ I & \text{otherwise} \end{cases}$$

in which $N = (O_H \times E_H) \cup (E_H \times O_H) \subseteq M$。我们考虑以下两个子情形：

(a) $(a,b) \notin N$。在此子情形中，陀螺函数$[a,b] = I$以及$(a, b \in O_H$或 $a, b \in E_H)$。若 $a, b \in O_H$，则$a \oplus b \in E_P$。因此我们有以下几种情形：

(i) $c \in P(n)$。因此 $b \oplus c \in H(n)$，此情形的证明与1a类似。(ii) $c \in H(n)$。因此 $b \oplus c \in P(n)$，此情形的证明与1a类似。

若 a、$b \in E_H$，则 $a \oplus b \in E_P$。因此，我们有以下几种情况：

(iii) $c \in O_P$。因此 $b \oplus c \in O_H$，根据定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b]c &= (a \oplus b) \oplus c \\ &\equiv (a \oplus b) + c \pmod m \\ &\equiv a + b + c \pmod m \\ &\equiv a + (b + c + \frac{m}{2}) + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

根据引理 1.2, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b]c$。

(iv) 若 $c \in E_P$，则 $b \oplus c \in E_H$。此情形的证明与 1a 类似。

(v) 若 $c \in O_H$，则 $b \oplus c \in O_P$。此情形的证明与 2(a)iii 类似 .

(vi) 若 $c \in E_H$，则 $b \oplus c \in E_P$。此情形的证明与 1a 类似。

(b) $(a,b) \in N$。在这个子情形中，陀螺函数 $[a,b] = A$，且还有 ($a \in O_H$& $b \in E_H$) 或 ($a \in E_H$& $b \in O_H$)。若 ($a \in O_H$& $b \in E_H$)，则 $a \oplus b \in O_P$。因此有以下几种情形：(i) $c \in O_P$。因此 $b \oplus c \in O_H$，且 $gyra,b(c) \in O_P$。由引理 1.3 和定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &\equiv (a \oplus b) + \mathrm{gyr}[a,b](c) \pmod m \\ &\equiv a + b + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

根据引理 1.2, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。

(ii) $c \in E_P$。因此, $b \oplus c \in E_H$ 以及陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明类似于 1a。

(iii) $c \in O_H$。则 $b \oplus c \in O_P$以及陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明类似于 2(b)i。

(iv) $c \in E_H$。则 $b \oplus c \in E_P$以及陀螺函数$[a,b]c = c$。此情形的证明类似于 1a。若 ($a \in E_H$& $b \in O_H$)，则 $a \oplus b \in O_P$。因此我们有以下情形：

(v) $c \in O_P$。因此, $b \oplus c \in E_H$ 以及陀螺函数$[a,b](c) \in O_P$。根据引理 1.3 和定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &\equiv (a \oplus b) + \mathrm{gyr}[a,b](c) \pmod m \\ &\equiv a + b + \frac{m}{2} + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + b + c \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

根据引理 1.2, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。

(vi) $c \in E_P$。因此 $b \oplus c \in O_H$ 以及陀螺函数$[a,b](c) = c$。根据定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &= (a \oplus b) \oplus c \pmod m \\ &\equiv (a \oplus b) + c \pmod m \\ &\equiv a + b + \frac{m}{2} + c \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

由引理 1.2, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。

(vii) $c \in O_H$。于是 $b \oplus c \in E_P$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明与 2(b)v 类似。(viii) $c \in E_H$。于是 $b \oplus c \in O_P$且陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 2(b)vi 类似。

(3) $(a,b) \in P(n) \times H(n)$。由记号 1.4，显然

$$\mathrm{gyr}[a,b] = \begin{cases} A & : a \in O_P \\ I & : a \notin O_P \end{cases}$$

我们考虑以下两个子情形:

(a) $a \notin O_P$。在此情形下，陀螺函数$[a,b] = I$。若 $b \in O_H$，则 $a \oplus b \in O_H$。因此有以下情形:

(i) $c \in P(n)$。因此 $b \oplus c \in H(n)$，且此情形的证明与 1a 类似。

(ii) $c \in H(n)$。因此 $b \oplus c \in P(n)$，这一情形的证明与 1a 类似。

若 $b \in E_H$，则 $a \oplus b \in E_H$。因此我们有以下几种情形:

(iii) $c \in O_P$。因此 $b \oplus c \in O_H$，根据定义，$\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &= (a \oplus b) \oplus c \\ &\equiv (a \oplus b) + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + b + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

由引理 1.2, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。

(iv) $c \in E_P$。因此 $b \oplus c \in E_H$，这一情形的证明与 1a 类似。

(v) $c \in O_H$。因此 $b \oplus c \in O_P$，这一情形的证明与 3(a)iii 类似。(vi) $c \in E_H$。因此 $b \oplus c \in E_P$，这一情形的证明与 1a 类似。

(b) $a \in O_P$。在此情况下，陀螺函数$[a,b] = A$。如果 $b \in O_H$，那么 $a \oplus b \in E_H$。因此，我们有以下几种情况:

(i) $c \in O_P$。因此，$b \oplus c \in E_H$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_P$。根据引理 1.3和定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &\equiv (a \oplus b) + \mathrm{gyr}[a,b](c) + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + b + c + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + b + c \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

根据引理 1.2，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。

(ii) $c \in E_P$。因此，$b \oplus c \in O_H$和陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。

(iii) $c \in O_H$。因此，$b \oplus c \in E_P$和陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明与 3(b)i 类似。

(iv) $c \in E_H$。因此，$b \oplus c \in O_P$和陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。若 $b \in E_H$，则 $a \oplus b \in O_H$。因此我们有以下情形：(v) $c \in O_P$。因此，$b \oplus c \in O_H$和陀螺函数$[a,b](c) \in O_P$。此情形的证明与 2(b)i 类似。(vi) $c \in E_P$。因此，$b \oplus c \in E_H$和陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。(vii) $c \in O_H$。因此，$b \oplus c \in O_P$和陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明与 2(b)i 类似。(viii) $c \in E_H$。因此，$b \oplus c \in E_P$和陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。

(4) $(a,b) \in H(n) \times P(n)$。根据记号 1.4，显然

$$\mathrm{gyr}[a,b] = \begin{cases} A & : b \in O_P \\ I & : b \notin O_P \end{cases}$$

我们考虑以下两个子情形：

(a) $b \notin O_P$。在这种情况下，陀螺函数 $[a,b] = I$。若 $a \in O_H$，则 $a \oplus b \in O_H$。因此，我们有以下几种情况：

(i) $c \in P(n)$。于是 $b \oplus c \in P(n)$，这一情形的证明与 1a 类似。

(ii) $c \in H(n)$。因此 $b \oplus c \in H(n)$，这一情形的证明与 1a 类似。

若 $a \in E_H$，则 $a \oplus b \in E_H$。因此，我们有以下几种情况：

（iii） $c \in O_P$。因此 $b \oplus c \in O_P$，根据定义 $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a,b](c) &= (a \oplus b) \oplus c \\ &\equiv (a \oplus b) + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + b + c + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a + (b \oplus c) + \frac{m}{2} \pmod m \\ &\equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod m\end{aligned}$$

根据引理 1.2，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus$ 陀螺函数$[a,b](c)$。（iv） $c \in E_P$。因此 $b \oplus c \in E_P$，此情形的证明与 1a 类似。（v） $c \in O_H$。因此 $b \oplus c \in O_H$，此情形的证明与 4(a)iii 类似。（vi） $c \in E_H$。因此 $b \oplus c \in E_H$，此情形的证明与 1a 类似。

(b) $b \in O_P$。在此情形下，陀螺函数$[a,b] = A$。若 $a \in O_H$，则 $a \oplus b \in E_H$。因此我们有以下几种情形：

(i) $c \in O_P$。因此， $b \oplus c \in E_P$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_P$。此情形的证明与 3(b)i 类似。(ii) $c \in E_P$。因此， $b \oplus c \in O_P$且陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。(iii) $c \in O_H$。因此， $b \oplus c \in E_H$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明与 3(b)i 类似。(iv) $c \in E_H$。因此， $b \oplus c \in O_H$且陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 1a 类似。若 $a \in E_H$，则 $a \oplus b \in O_H$。因此我们有以下几种情形：(v) $c \in O_P$。因此， $b \oplus c \in E_P$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_P$。此情形的证明与 2(b)v 类似。(vi) $c \in E_P$。因此， $b \oplus c \in O_P$且陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 2(b)vi 类似。(vii) $c \in O_H$。因此， $b \oplus c \in E_H$且陀螺函数$[a,b](c) \in O_H$。此情形的证明与 2(b)v 类似。(viii) $c \in E_H$。因此， $b \oplus c \in O_H$且陀螺函数$[a,b](c) = c$。此情形的证明与 2(b)vi 类似。

根据上述内容，$(G_2(n), \oplus)$ 是一个陀螺群，证明完毕 . □

Ashrafi 等人在定理 2 [3] 中证明，陀螺群 $G_1(n)$ 不是陀螺交换的；但在下述定理中，我们证明陀螺群 $G_2(n)$ 是陀螺交换的。因此，陀螺群 $G_1(n)$ 和 $G_2(n)$ 不同构。

定理 2.2. 陀螺群 $(G_2(n), \oplus)$ 是陀螺交换的。

证明. 设 (a,b) 是 $G_2(n) \times G_2(n)$ 中的任意一个元素。我们分以下两种情况讨论：

(1) $(a,b) \notin M$。在此情形下，陀螺函数$[a,b]=I$。根据定义 $\oplus$,

$$\mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a) = b \oplus a \equiv a + b \equiv a \oplus b \pmod{m}$$

由引理 1.2，陀螺函数$[a,b](b \oplus a) = a \oplus b$。

(2) $(a,b) \in M$。在这种情况下，陀螺函数$[a,b] = A$。如果 $b \oplus a$ 是偶数，那么$(a,b) \in S \cup S^{-1}$，其中 $S = O_P \times O_H$。根据引理 1.3和定义 $\oplus$,

$$\mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a) = b \oplus a \equiv a + b \equiv a \oplus b \pmod{m}$$

根据引理 1.2，陀螺函数$[a,b](b \oplus a) = a \oplus b$。如果 $b \oplus a$ 是奇数，那么$(a,b) \in T \cup T^{-1}$，其中 $T = E_H \times (O_P \cup O_H)$。现在，我们考虑以下两个子情形：

(*i*) $(a,b) \in T$。因此$(b,a) \in T^{-1}$。根据引理 1.3和定义 $\oplus$,

$$\mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a) \equiv b \oplus a + \frac{m}{2} \equiv a + b + \frac{m}{2} \equiv a \oplus b \pmod{m}$$

根据引理 1.2，陀螺函数 $[a,b](b \oplus a) = a \oplus b$。

(*ii*) $(a,b) \in T^{-1}$。因此 $(b,a) \in T$。根据引理 1.3 和定义 $\oplus$,

$$\mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a) \equiv b \oplus a + \frac{m}{2} \equiv a + b + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \equiv a + b \equiv a \oplus b \pmod{m}$$

By lemma 1.2, $\mathrm{gyr}[a,b](b \oplus a) = a \oplus b$.

至此，陀螺交换性的证明完成。 □

例2.3。在本例中，我们考察由循环群 $\mathbb{Z}_8$ 构造的 8阶陀螺群 $G_2(3)$。根据定义， $G_2(3) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，且二元运算 $\oplus$ 定义如下:

$$i \oplus j = \begin{cases} t & : (i,j) \in (P(3) \times P(3)) \cup \Big[(H(3) \times H(3)) - (E_H \times O_H)\Big] \\ t+4 & : (i,j) \in (P(3) \times H(3)) \cup \Big[(H(3) \times P(3)) - (E_H \times O_P)\Big] \\ s & : (i,j) \in E_H \times O_H \\ s+4 & : (i,j) \in E_H \times O_P \end{cases}$$

其中 $P(3) = \{0,1,2,3\}$， $H(3) = \{4,5,6,7\}$，且 $t, s \in P(3)$。此外

$$\begin{cases} t \equiv i + j \pmod 4 \\ s \equiv i + j + 2 \pmod 4 \end{cases}.$$

因此， $G_2(3)$的加法表和回旋表列于表1，其中 A 是 $G_2(3)$的唯一的非恒等陀螺自同构，由 $A = (1,3)(5,7)$给出。

TABLE 1.

(A) The Cayley table

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	6	7	4	1	2	3	0
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	4	5	6	3	0	1	2

(B) 回旋表

gyr	0	1	2	3	4	5	6	7
0	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*
1	*I*	*I*	*I*	*I*	*A*	*A*	*A*	*A*
2	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*
3	*I*	*I*	*I*	*I*	*A*	*A*	*A*	*A*
4	*I*	*A*	*I*	*A*	*I*	*A*	*I*	*A*
5	*I*	*A*	*I*	*A*	*A*	*I*	*A*	*I*
6	*I*	*A*	*I*	*A*	*I*	*A*	*I*	*A*
7	*I*	*A*	*I*	*A*	*A*	*I*	*A*	*I*

例2.4. 本例中，我们研究由循环群 $\mathbb{Z}_{16}$构造的阶为16的陀螺群 $G_2(4)$。根据定义， $G_2(4) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$，二元运算 $\oplus$ 定义如下:

$$i \oplus j = \begin{cases} t & : (i,j) \in (P(4) \times P(4)) \cup \Big[(H(4) \times H(4)) - (E_H \times O_H)\Big] \\ t+8 & : (i,j) \in (P(4) \times H(4)) \cup \Big[(H(4) \times P(4)) - (E_H \times O_P)\Big] \\ s & : (i,j) \in E_H \times O_H \\ s+8 & : (i,j) \in E_H \times O_P \end{cases}$$

其中 $P(4) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $H(4) = \{8,9,10,11,12,13,14,15\}$ 和 $t, s \in P(4)$。此外

$$\begin{cases} t \equiv i+j \pmod 8 \\ s \equiv i+j+4 \pmod 8 \end{cases}.$$

因此， $G_2(4)$ 的加法表和回旋表分别列于表 2 和表 3，其中 A 是 $G_2(4)$ 的唯一非恒等陀螺自同构，由 $A = (1, 5)(3, 7)(9, 13)(11, 15)$ 给出。

TABLE 2. $G_2(4)$ 的凯莱表

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	0	9	10	11	12	13	14	15	8
2	2	3	4	5	6	7	0	1	10	11	12	13	14	15	8	9
3	3	4	5	6	7	0	1	2	11	12	13	14	15	8	9	10
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	6	7	0	1	2	3	4	13	14	15	8	9	10	11	12
6	6	7	0	1	2	3	4	5	14	15	8	9	10	11	12	13
7	7	0	1	2	3	4	5	6	15	8	9	10	11	12	13	14
8	8	13	10	15	12	9	14	11	0	5	2	7	4	1	6	3
9	9	10	11	12	13	14	15	8	1	2	3	4	5	6	7	0
10	10	15	12	9	14	11	8	13	2	7	4	1	6	3	0	5
11	11	12	13	14	15	8	9	10	3	4	5	6	7	0	1	2
12	12	9	14	11	8	13	10	15	4	1	6	3	0	5	2	7
13	13	14	15	8	9	10	11	12	5	6	7	0	1	2	3	4
14	14	11	8	13	10	15	12	9	6	3	0	5	2	7	4	1
15	15	8	9	10	11	12	13	14	7	0	1	2	3	4	5	6

例 2.5。借助 GAP，我们得到 $G_2(3)$ 和 $G_2(4)$ 的所有真子陀螺群中属于子群的那些。

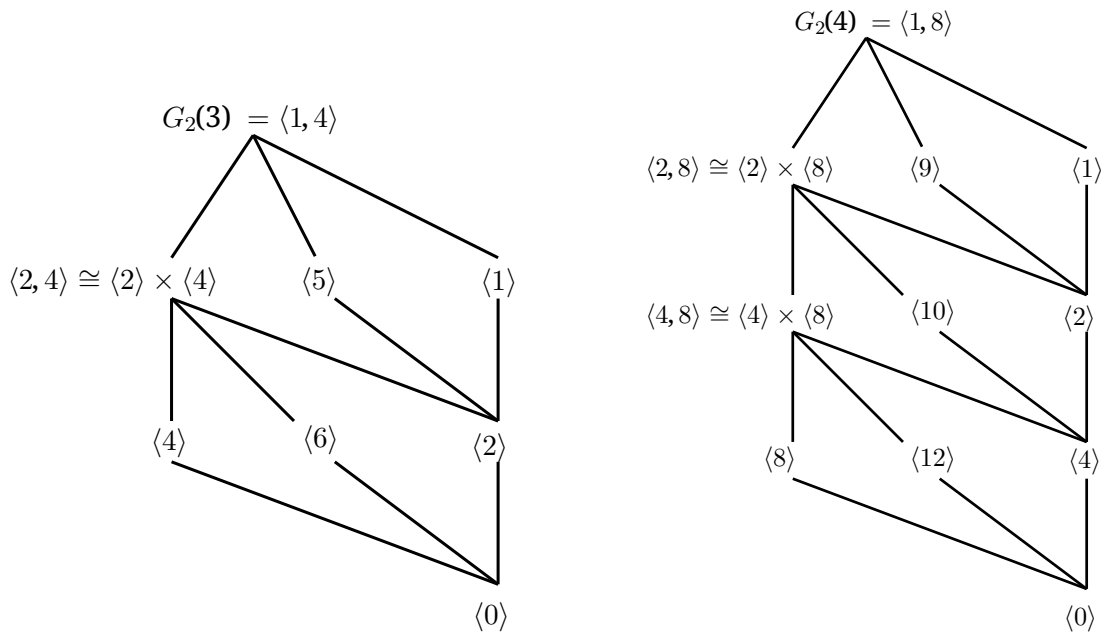
注 1。利用陀螺恒等式 $\mathrm{gyr}[a,b]c = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus c))$，可以简便地计算出 $G_2(4)$ 的全体陀螺自同构所成的群同构于 $\mathbb{Z}_2$。

证明。由于 $G_2(4)$的唯一的非恒等陀螺自同构的阶为2，它与恒等置换在置换的复合下可以构成一个群。该群将与 $\mathbb{Z}_2$同构。□

TABLE 3. $G_2(4)$的回旋表

gyr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
1	I	I	I	I	I	I	I	I	A	A	A	A	A	A	A	A
2	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
3	I	I	I	I	I	I	I	I	A	A	A	A	A	A	A	A
4	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
5	I	I	I	I	I	I	I	I	A	A	A	A	A	A	A	A
6	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
7	I	I	I	I	I	I	I	I	A	A	A	A	A	A	A	A
8	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A
9	I	A	I	A	I	A	I	A	A	I	A	I	A	I	A	I
10	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A
11	I	A	I	A	I	A	I	A	A	I	A	I	A	I	A	I
12	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A
13	I	A	I	A	I	A	I	A	A	I	A	I	A	I	A	I
14	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A
15	I	A	I	A	I	A	I	A	A	I	A	I	A	I	A	I

FIGURE 1. $G(3)$和 $G(4)$的格。



(A) $G_2(3)$的格。 (B) G_2的格(4)。

命题2.6。利用 [10] 中陀螺群的陀螺半直积构造，可以计算出 $G_2(4)$的陀螺全纯扩张，其结构如下:

$$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2).$$

定理2.7. 设 $G_2(n)$ 是阶为 2^n 的 2-陀螺群。 H 是 $G_2(n)$ 的子陀螺群，当且仅当它具有以下形式之一:

(1) $H = \langle 2^s \rangle$ 是 $P(n)$ 的子群，且满足 $0 \le s \le n-1$。(2) $H = \langle 2^s, m \rangle$，满足 $0 \le s \le n-1$ 和 $m = 2^{n-1}$。除$H = \langle 1, m \rangle = G_2(n)$ 外，所有 H 都是 $G_2(n)$ 的子群。(3) $H = \langle m + 2^s \rangle$ 是 $G_2(n)$ 的子群，且满足 $0 \le s \le n-2$ 和 $m = 2^{n-1}$。

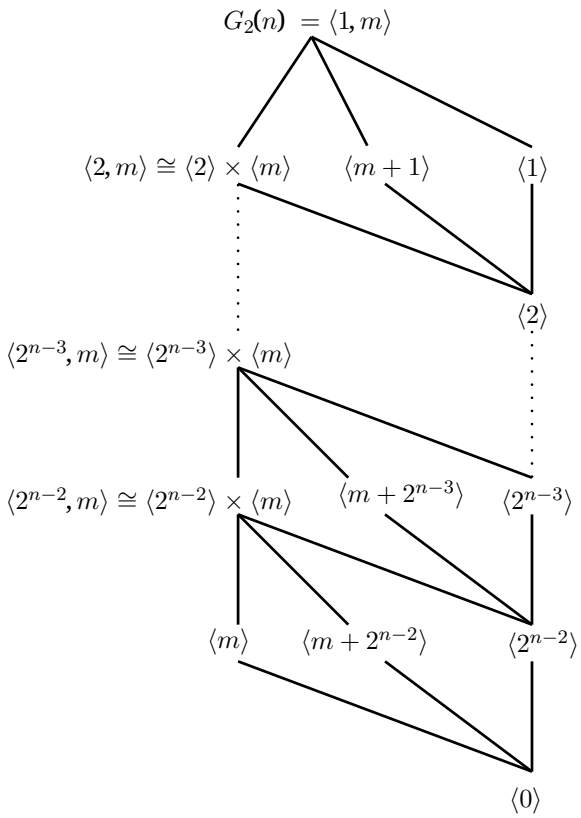
证明。我们知道 $G = P(n) \cup H(n)$，使得 $P(n) \cap H(n) = \emptyset$。由于 $\oplus$ 到 $P(n)$ 的限制是群加法，因此 $P(n) \cong \mathbb{Z}_m$ 使得 $m = 2^{n-1}$。设 H 是 $G(n)$ 的子陀螺群。若 $H \subseteq P(n)$，则 H 将是 $P(n)$ 的子群，且 $H = \langle 2^s \rangle$ 使得 $0 \le s \le n-1$，这正是所需结果。但若 $H \nsubseteq P(n)$，则 $H = H_1 \cup H_2$ 属于其中 $H_1 \subseteq P(n)$ 且 $H_2 \subseteq H(n)$ 的集合。容易看出，H_1 是 $P(n)$ 的子群。我们分以下两种情况讨论：

(1) $m \in H_2$。在此情形下，由 $L_m(x) = m \oplus x$ 定义的映射 L_m：$H_1 \to H_2$ 是双射。因此 $H_2 = m \oplus H_1$。由于 $H_1 \le P(n) \cong \mathbb{Z}_m$，$H = H_1 \cup H_2 = H_1 \cup (m \oplus H_1) = \langle 2^s,\ m \rangle$ 使得 $0 \le s \le n-1$。对于 $s = 0$ 和 $s = n-1$，分别有 $\langle 1, m \rangle = G(n)$ 以及 $\langle 0, m \rangle = \langle m \rangle$。若$s \neq 0$，则根据 $G_2(n)$ 的陀螺自同构定义，H 的所有陀螺自同构都是恒等自同构。因此，H's 是 $G_2(n)$ 的子群，且 $H \cong \langle 2^s \rangle \times \langle m \rangle$。

(2) $m \notin H_2$。存在一个整数 $i \in \mathbb{Z}_m$，使得 $i \neq 0$，并且 i 是满足 $m + i \in H_2$ 的最小数。此外，映射 L_{m+i}：$H_1 \to H_2$ 由 $L_{m+i}(x) = (m+i) \oplus x$ 定义，是双射。因此 $H_2 = (m+i) \oplus H_1$。根据 $\oplus$ 的定义，$(m+i) \oplus (m+i) = 2i \in H_1$。由于 i 是所选取的具有 $H_1 \le P(n) \cong \mathbb{Z}_m$ 的最小数，因此 $H_1 = \langle 2i \rangle$ 和 $H = H_1 \cup H_2 = H_1 \cup \Big((m+i) \oplus H_1\Big) = \langle 2i$，使得 $i = 2^s$ 且 $0 \le s \le n-2$。

显然，$\langle 2^s \rangle \le \langle 2^s, m \rangle$, $\langle m + 2^s \rangle \le \langle 2^s, m \rangle$ 以及 $\langle m \rangle \le \langle 2^{n-2}, m \rangle \le \langle 2^{n-3}, m \rangle \le \cdots \le \langle 2, m \rangle \le \langle 1, m \rangle$，因此 $G(n)$ 的子陀螺群格如图 2 □ 所示

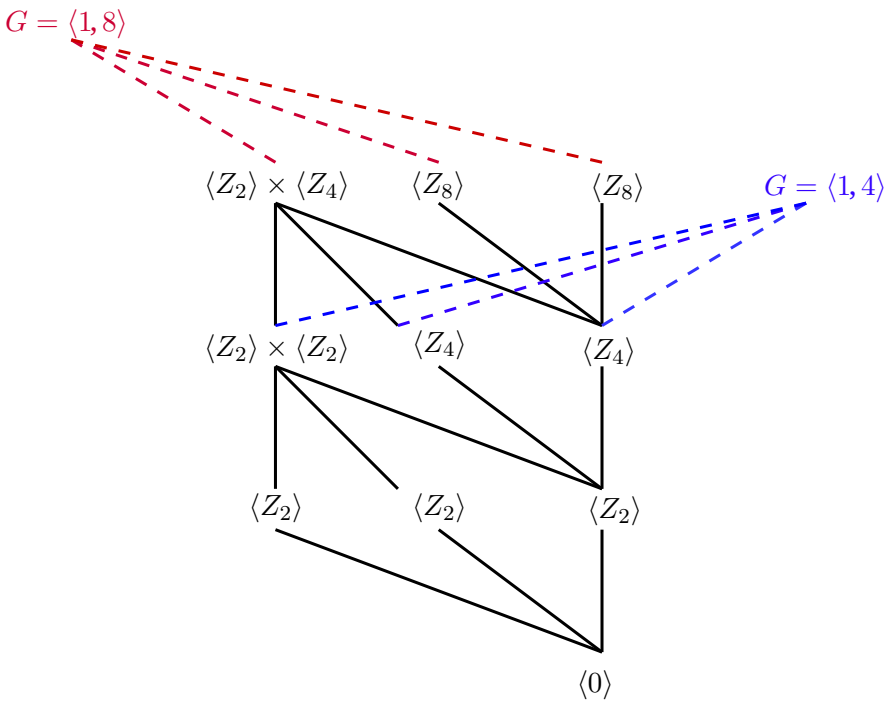
FIGURE 2. $G_2(n)$的格。



REFERENCES

[1]A. R. Ashrafi、K. Mavaddat Nezhaad 和 M. A. Salahshour，《阶不超过 31 的陀螺群分类》，Amirkabir Journal of Mathematics and Computing，(*accepted and will be appeared*), https://doi.org/10.22060/ajmc.2023.21939.1125[2] A. Kerber，《 *Applied Finite Group Actions*》，第二版，算法与组合学第 19 卷，Springer-Verlag，柏林，1999 年。[3] S. Mahdavi、A. R. Ashrafi、M. A. Salahshour 和 A. A. Ungar，《构造每个真子陀螺群均为循环群或二面体群的 2-陀螺群》， *Symmetry 2021* **13** (2) 316。[4] T. Suksumran 和 K. Wiboonton，《陀螺群与子陀螺群的拉格朗日定理及柯西性质》， *Quasigroups RelatedSystems* **22**(2) (2014) 283–294。[5] T. Suksumran 和 K. Wiboonton，《陀螺群与 L-子陀螺群的同构定理》， *J. Geom. SymmetryPhys.* **37**(2015) 67–83。[6] GAP团队，GAP——群、算法与程序设计，数学系，RWTH，亚琛，1995 年。[7] A. A. Ungar，《爱因斯坦速度加法定律的内在之美、和谐与跨学科性：陀螺群与陀螺向量空间》， *Math. Interdisc. Res.* **1**(1) (2016) 5–51。[8] A. A. Ungar，《 *Beyond Pseudo-Rotations in Pseudo-Euclidean Spaces: An introduction to the theory of bi-gyrogroups and bi-gyrovector spaces*》，数学分析及其应用，Elsevier/Academic Press，2018 年。[9] A. A. Ungar，《托马斯旋转与洛伦兹变换群的参数化》， *Found. Phys. Lett.* **1**(1988) 57–89。[10] A. A. Ungar，《 *Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession. The Theory of Gyrogroups and Gyrovector Spaces*》，物理学基础理论第 117 卷，Kluwer Academic Publishers Group，Dordrecht，2001 年。

FIGURE 3. $G_2(3)$ 与 $G_2(4)$ 的格。



DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NORTH DAKOTA STATE UNIVERSITY, FARGO, ND 58108-6050, USA
Email address: abraham.ungar@ndsu.edu

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAVADKOOH BRANCH, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY, SAVADKOOH, IRAN
Email address: salahshour@iausk.ac.ir

DEPARTMENT OF PURE MATHEMATICS, FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF KASHAN, KASHAN87317−53153, IRAN
Email address: kuroshmavaddat@gmail.com