arXiv:2303.01072v1 [math.SP] 2 Mar 2023

具有准周期亚纯势的块雅可比算子的安德森局域化

张晓健

摘要

本文研究了 $\mathbb{Z}$ 上具有准周期亚纯势的块雅可比算子。我们证明，在大耦合区间内，此类算子具有非微扰安德森局域化。

1 引言与主要结果

多年来，离散准周期薛定谔算子的谱性质一直备受关注。其中尤为重要的是安德森局域化现象，即算子具有纯点谱，且其特征函数指数衰减。

几乎Mathieu算子（AMO）在大势区间内的安德森局域化，最早由 Sinai 在其奠基性著作中证明 [1] 以及 Fr¨ohlich-Spencer-Wittwer [2]。这些结果依赖于 KAM型微扰方法。沿着这一思路，Eliasson [3] 通过 KAM约化方法，证明了一类具有特定 Gevrey正则势的准周期薛定谔算子具有纯点谱¨。后来，Jitomirskaya 取得了重大突破，首次为 AMO [4, 5], 发展出一种非微扰方法。

2000年，Bourgain-Goldstein [6] 将格林函数估计的非微扰方法扩展到一般解析准周期薛¨定谔算子

$$H_\lambda(x) = \lambda v(x + n\omega) + \Delta \tag{1.1}$$

定义在 $\updownarrow^2(\mathbb{Z})$ 上，其中

$$\Delta(n, n') = \begin{cases} 1, & |n - n'| = 1, \\ 0, & |n - n'| \neq 1, \end{cases} \quad n, n' \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

在这项重要工作中，作者引入了关于李雅普诺夫指数的大偏差估计以及半代数集理论等全新要素。基于 [7], Bourgain-Jitomirskaya [8]的方法， [6] 将这些结果推广到了带状算子的情形

$$H_{(n,s),(n',s')}(\omega, \theta) = \lambda\delta_{nn'}\delta_{ss'}v_s(\theta + n\omega) + \Delta \quad (n \in \mathbb{Z}, s = 1, ..., b), \tag{1.3}$$

其中

$$\Delta((n,s),(n',s'))=\begin{cases}1, & |n-n'|+|s-s'|=1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{1.4}$$

且 $v_s(s=1,\ ...b)$ 在 $\mathbb{T}$ 上是非恒定解析函数。

在 [9], Klein 进一步发展了 [8] 的结果，并为块雅可比算子建立了非微扰安德森局域化

$$[H_\lambda(x)\vec{\varphi}]_n:=-(W_{n+1}(x)\vec{\varphi}_{n+1}+W_n^T(x)\vec{\varphi}_{n-1}+R_n(x)\vec{\varphi}_n)+\lambda F_n(x)\vec{\varphi}_n \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

其中 $W_n(x)$ $R_n(x)$ 和 $F_n(x)$ 是由下式定义的拟周期函数

$$W_n(x):=W(x+n\omega),R_n(x):=R(x+n\omega),F_n(x):=F(x+n\omega), \tag{1.6}$$

其中 $W(x)$ $R(x)$ $F(x)$ 是 l 阶对称矩阵值函数，且所有元素都是定义在 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的解析函数。最近，Jian-Shi-Yuan [10] 将[9] 的结果推广到了长程块算子的情形

$$(H_{\epsilon,\omega}(x)\vec{\varphi})_n:=\epsilon\sum_{k\in\mathbb{Z}}W_k\vec{\varphi}_{n-k}+V(x+n\omega)\vec{\varphi}_n, \tag{1.7}$$

其中 $V(x)=diag\{v_1(x).....,\ v_l(x)\}$。 $v_i(x)(1\le i\le l)$ 是定义在$\mathbb{T}$上的非恒定实解析函数。$W_k(k\in\mathbb{Z})$ 是满足条件 $W_k^\star=W_{-k}(W_k^\star$ 是 W_k的共轭转置)、$||W_k^\star||\le e^{-\rho|k|}$ 和 $\rho>0$ 的 $l\times l$ 矩阵。我们应当指出，上述研究要求势是解析的。事实上，非微扰安德森局域化是否仍适用于具有非解析拟周期势的算子，是一个重要问题。我们的主要动机正是源于这一问题。

本文研究式 (1.5) 的安德森局域化，其中$V_n(x)$**的对角元素**、$(n\in\mathbb{Z})$是**亚纯函数**，其中 $V_n(x)=\lambda F_n(x)+R_n(x),\ (n\in\mathbb{Z})$。

我们的主要结果如下:

定理*1.* 给定正整数 l。设 $W(x)=(W_{ij}(x):\ 1\le i\le l,1\le j\le l)$ $R(x)=(R_{ij}(x):1\le i\le l,1\le j\le l)$ 和 $F(x)=(F_{ij}(x):\ 1\le i\le l,1\le j\le l)$ 是$\forall x\in\mathbb{T}$的对称矩阵。假设

(i). $W(x)$ $R(x)-diag\{R_{ii}(x)\ 1\le i\le l\}$ 和 $F(x)-diag\{F_{ii}(x)\ 1\le i\le l\}$ 的每个元素在 $x\in\mathbb{T}$ 上都是实解析的。

(ii). 对所有 $1\le i\le l$，对角元素 $F_{ii}(x)$ 和 $R_{ii}(x)$ 在 $x\in\mathbb{T}$ 中均为亚纯函数。它们可以表示为

$$F_{ii}(x)=\frac{\tilde{\phi}_{ii}^F(x)}{\phi_{ii}^F(x)},R_{ii}(x)=\frac{\tilde{\phi}_{ii}^R(x)}{\phi_{ii}^R(x)}, \tag{1.8}$$

其中 $\tilde{\phi}_{ii}^F(x)$ $\phi_{ii}^F(x)$ $\tilde{\phi}_{ii}^R(x)$和 $\phi_{ii}^R(x)$在 $\mathbb{T}$ 中是实解析的，并且对于所有 $1\le i\le l$， $\phi_{ii}^F(x)$和$\phi_{ii}^R(x)$的零点数都是有限的。

(*iii*) 。对于 $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$det[(F(x) - tI)M(x)] \not\equiv 0 \tag{1.9}$$

作为 $x \in \mathbb{T}$ 的函数，其中 I 是 $l \times l$ 单位矩阵，且

$$M(x) = diag\{\phi_{ii}^F(x), 1 \le i \le l\} diag\{\phi_{ii}^R(x), 1 \le i \le l\}. \tag{1.10}$$

Let

$$W_n(x) := W(x + n\omega), R_n(x) := R(x + n\omega), F_n(x) := F(x + n\omega), n \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

假设 $\omega \in \mathbb{T}$ 满足丢番图条件 $(DC_{A,\ C_0})$ ：

$$||k\omega|| \ge C_0 \frac{1}{|k|^A} \tag{1.12}$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，其中 $C_0 > 0$、 $A > 1$ 为常数，且 $||k\omega|| = \underset{j\in\mathbb{Z}}{min} |k\omega - j|$。

那么存在 $\lambda_0 = \lambda_0$（l、 F、 R、 W） > 0，使得当 $\lambda > \lambda_0$ 时，块雅可比算子

$$\begin{aligned} {}_n := -(W_{n+1}(x)\vec{\varphi}_{n+1} + W_n^T(x)\vec{\varphi}_{n-1} + R_n(x)\vec{\varphi}_n) + \lambda F_n(x)\vec{\varphi}_n, \\ \lambda > 0, x \in \mathbb{T}, \forall \vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \updownarrow^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^l) \end{aligned} \tag{1.13}$$

对于固定的 $x_0 \in \mathbb{T}$ 和几乎处处的 $\omega \in DC_{A,\ C_0}$，满足安德森局域化。

备注：我们指出

(i). 我们推广了 Klein 的结果[9]。在他的模型中，矩阵 $W(x)$、 $R(x)$ 和 $F(x)$ 的元素均为解析函数。我们的两个结果都是非微扰的。

(ii). [9] 研究的算子是有界自伴的。在我们的论文中，该算子包含亚纯项。因此，我们所研究的算子不是有界的。这带来了一些困难。例如，有界自伴算子的相关能量 E 可以限制在 $\mathbb{R}$ 的某个紧区间内。在我们的情形中，能量 E 无法再限制在任何紧区间内。通过一些技巧，我们解决了由亚纯函数带来的奇点问题。

2 子式的上界

对所有整数 $N > 1$，定义

$$H_N(x) = R_{[1,N]} H_\lambda(x) R_{[1,N]}, \tag{2.1}$$

其中， $R_{[1,N]} =$ 是到 $[1, N] \subset \mathbb{Z}$ 的坐标限制，相关的格林函数为 $G_N(x,\ E) = [H_N(x) - E)]^{-1}$。

Let

$$\tilde{H}_N(x, E) := [H_N(x) - E] diag\{\frac{1}{\sqrt{1 + E^2}} M_j(x), 1 \le j \le l\}, \tag{2.2}$$

其中

$$M_j(x) = diag\{\phi_{ii}^F(x + j\omega), 1 \le i \le l\} diag\{\phi_{ii}^R(x + j\omega), 1 \le i \le l\} = M(x + j\omega). \tag{2.3}$$

Then

$$G_N(x,E) = diag\{\frac{1}{\sqrt{1+E^2}}M_j(x), 1 \le j \le l\}\tilde{H}_N^{-1}(x,E). \tag{2.4}$$

注意， $H_N(x)$ 和 $G_N(x,\ E)$ 是 $Nl \times Nl$矩阵。对于 $1 \le \alpha \le Nl,\ 1 \le \alpha' \le Nl$, 通过 $\tilde{H}_N^{-1}(x,\ E)(\alpha,\ \alpha')$ 和 $G_N(x,\ E)(\alpha,\ \alpha')$ 分别表示 $\tilde{H}_N^{-1}(x,\ E)$ 和 $G_N(x,\ E)$ 的 $(\alpha,\ \alpha')$ 项。于是, 根据克莱姆法则,

$$|\tilde{H}_N^{-1}(x,E)(\alpha,\alpha')| = \frac{|\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')}|}{|det[\tilde{H}_N(x,E)]|}, \tag{2.5}$$

˜其中， $\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')}$ 是 $H_N(x,E)$ 的 (α',α)-子式。注意到 $H_\lambda(x) = ((H_\lambda(x))_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, 其中 $(H_\lambda(x))_{i,j}$ 是 $l\times l$ 矩阵。我们有整数 $p(\alpha)\ p(\alpha') \in [0, N-1]$, $q(\alpha)\ q(\alpha') \in [1,l]$ 存在, 使得

$$\alpha = p(\alpha)l + q(\alpha), \alpha' = p(\alpha')l + q(\alpha'). \tag{2.6}$$

此外, 由 (2.2),(2.3),(2.4) (2.5) 和 (2.6),

$$|G_N(x,E)(\alpha,\alpha')| = \frac{1}{\sqrt{1+E^2}}|\phi_{qq}^F(x+(p+1)\omega)\phi_{qq}^R(x+(p+1)\omega)\frac{\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')}}{det[\tilde{H}_N(x,E)]}|, \tag{2.7}$$

其中 $q = q(\alpha)\ p = p(\alpha')$。

命题 2。 存在一个常数 $C = C(W, F, R, l) > 0$, 使得

$$\frac{1}{Nl}log|\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')}| \le -\frac{|p(\alpha)-p(\alpha')|}{Nl}log(\lambda+|E|) + log(1+\frac{\lambda}{|E|}) + C \tag{2.8}$$

对于 $1 \le \alpha \le Nl$、$1 \le \alpha' \le Nl$ 和 $x \in \mathbb{T}$。

˜证明。 对于 $1 \le i \le N, 1 \le j \le N$, 用 $H_N(x,E)(i,j)$ 表示 $N \times N$分块矩阵˜$H_N(x,E)$ 的 (i,j) 块。由 (2.1) 、 (2.2) 和 (2.3),

$$\tilde{H}_N(x,E)(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+E^2}}\tilde{V}_j(x), & i=j, \\ \frac{1}{\sqrt{1+E^2}}(-\tilde{W}_i^T(x)), & i=j+1, \\ \frac{1}{\sqrt{1+E^2}}(-\tilde{W}_j(x)), & i=j-1, \\ 0, & otherwise, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中

$$\tilde{V}_j(x) = [\lambda F_j(x) + R_j(x) - EI]M_j(x), \tag{2.10}$$

$$-\tilde{W}_j(x) = (-W_j(x))M_j \tag{2.11}$$

and

$$-\tilde{W}_j^T(x) = (-W_j^T(x))M_{j-1}(x). \tag{2.12}$$

鉴于（2.10）、（2.11）和（2.12），存在一个常数 $C = C(W,\ R,\ F) > 0$ 使得当 $1 \le j \le N$时,

$$||\tilde{W}_j(x)||_\infty \le C \tag{2.13}$$

and

$$||\tilde{V}_j(x)||_\infty \le C(\lambda + |E|). \tag{2.14}$$

令 $g := \sqrt{1+E^2}\tilde{H}_N(x,E)$。用 $\mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}$ 表示所有路径的集合

$$\{\gamma = (r_1, r_2, ..., r_s) : (1 \le s \le Nl)\}, \tag{2.15}$$

其中

(i) 对于 $i = 1, ..., s$,

$$r_i \in [1, Nl] \subset \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

(ii) 对于 $\forall 1 < i < s, 1 < j < s$ 和 $i \ne j$,

$$r_i \ne r_j, r_i \ne r_1, r_i \ne r_s. \tag{2.17}$$

(iii) 对于 $i = 1, j = s$,

$$r_i = \alpha', r_j = \alpha. \tag{2.18}$$

用 $g(r_i, r_j)$ 表示 $Nl \times Nl$ 矩阵 g 的（r_i, r_j）项。用 $g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}$ 表示删除 g 的第 α 行和第 α' 列后剩余的矩阵。用 $g_{\neg\gamma,\neg\gamma'}$ 表示删除 g 的第 $r_1, r_2, ..., r_s$ 行以及第 $r_1, r_2, ..., r_s$ 列后剩余的矩阵。于是按行和列展开行列式,

$$\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')} = (\frac{1}{\sqrt{1+E^2}})^{Nl} det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}] = (\frac{1}{\sqrt{1+E^2}})^{Nl}(-1)^{\alpha+\alpha'} \sum_{\gamma \in \mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}} (-1)^{|\gamma|+1} c(\gamma) det[g_{\neg\gamma,\neg\gamma'}], \tag{2.19}$$

其中 $c(\gamma) = g(r_1,\ r_2) \dots g(r_{s-1},\ r_s)$，且 $|\gamma| = s$ 是路径 γ的长度。

利用 Hadamard 不等式，我们有

$$|det[g_{\neg\gamma,\neg\gamma'}]| \le C(\lambda + |E|)^{Nl-|\gamma|}. \tag{2.20}$$

然后由 (2.19) 和 (2.20),

$$|det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}]| \le \sum_{\gamma \in \mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}} |c(\gamma)|(C(\lambda + |E|))^{Nl-|\gamma|}. \tag{2.21}$$

现在我们可以研究 $c(\gamma)$ 了。注意，$c(\gamma)$ 取决于路径 $\gamma = (r_1, r_2, ..., r_s)$，其中 $1 \le r_i \le Nl, (i = 1, ...s)$。记 $r_i = p(r_i)l + q(r_i)$ $0 \le p(r_i) \le N-1, 1 \le q(r_i) \le l$.

对于 $1 \le j \le N, 1 \le m \le l$ 和 $1 \le n \le l$，将 $\tilde{V}_j(x)(m,n)$ $-\tilde{W}_j(x)(m,n)$ 和 $-\tilde{W}_j^T(x)(m,n)$ 分别记为 $l \times l$ 矩阵 $\tilde{V}_j(x)$ $-\tilde{W}_j(x)$ 和 $-\tilde{W}_j^T(x)$ 的 (m,n) 元素。由 (3.7)，对于 $i,j = 1,...s$,

$$g(r_i,r_j) = \begin{cases} \tilde{V}_{p(r_i)+1}(x)(q(r_i),q(r_j)), & p(r_i) = p(r_j), \\ -\tilde{W}^T_{p(r_i+1)}(x)(q(r_i),q(r_j)), & p(r_i) - p(r_j) = 1, \\ -\tilde{W}_{p(r_i)+1}(x)(q(r_i),q(r_j)), & p(r_j) - p(r_i) = 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{2.22}$$

由 (2.13)、(2.14) 和 (2.22)，可得

$$|g(r_i,r_j)| \le \begin{cases} C(\lambda + |E|), & p(r_i) = p(r_j), \\ C, & |p(r_j) - p(r_i)| = 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{2.23}$$

考虑集合

$$\mathbb{P}^{\star}_{\alpha' \to \alpha} := \{\gamma = (r_1, r_2, ..., r_s) \in \mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}, |g(r_i,r_j)| \ne 0, \forall 1 \le i \le s-1\}. \tag{2.24}$$

用 $b(\gamma)$ 表示集合中元素的个数

$$\{1 \le i \le s-1 : \gamma = (r_1, r_2, ..., r_s) \in \mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}, |p(r_i) - p(r_{i+1})| = 1\}. \tag{2.25}$$

因此，由 (2.23) 和 (2.25),

$$|c(\gamma)| = \prod_{i=1}^{s-1} |g_{r_i,r_{i+1}}| \le C^{b(\gamma)}(C(\lambda + |E|))^{s-b(\gamma)} = C^{|\gamma|}(\lambda + |E|)^{|\gamma|-b(\gamma)}. \tag{2.26}$$

由 (2.21) 和 (2.26),

$$|det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}]| \le \sum_{\gamma \in \mathbb{P}_{\alpha' \to \alpha}} C^{|\gamma|}(\lambda + |E|)^{|\gamma|-b(\gamma)}(C(\lambda + |E|))^{Nl-|\gamma|}. \tag{2.27}$$

此外，由 (2.25),

$$|p(\alpha) - p(\alpha')| \le \sum_{j=1}^{s-1} |p(r_{j+1}) - p(r_j)| = b(\gamma) \le Nl. \tag{2.28}$$

于是，由 (2.21)、(2.26) 和 (2.28),

$$|det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}]| \le \sum_{b=|p(\alpha)-p(\alpha')|}^{Nl} \sum_{\gamma \in \mathbb{P}^*_{\alpha' \to \alpha}, b(\gamma)=b} C^{|\gamma|}(\lambda + |E|)^{|\gamma|-b(\gamma)}(C(\lambda + |E|))^{Nl-|\gamma|}. \tag{2.29}$$

注意，$\gamma \in \mathbb{P}^*_{\alpha' \to \alpha}$ 的数量至多为$(3l)^{Nl}$。于是，由 (2.29),

$$|det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}]| \leq \sum_{b=|p(\alpha)-p(\alpha')|}^{Nl} (3lC)^{Nl}(\lambda+|E|)^{Nl-b} = (3lC)^{Nl}(\lambda+|E|)^{Nl} \sum_{b=|p(\alpha)-p(\alpha')|}^{Nl} (\lambda+|E|)^{-b}. \quad (2.30)$$

Thus

$$|det[g_{\neg\alpha,\neg\alpha'}]| \leq (3lC)^{Nl}(\lambda+|E|)^{Nl}(\lambda+|E|)^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|}. \quad (2.31)$$

由 (2.19)、(2.31),

$$\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')} \leq (3lC)^{Nl}(\frac{\lambda}{|E|}+1)^{Nl}(\lambda+|E|)^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|}. \quad (2.32)$$

两边取对数,

$$\frac{1}{Nl} log|\tilde{\mu}_N(x,E)_{(\alpha,\alpha')}| \leq -\frac{|p(\alpha)-p(\alpha')|}{Nl} log(\lambda+|E|) + log(1+\frac{\lambda}{|E|}) + C. \quad (2.33)$$

□

3 行列式的下界

命题 3. 假设(1.9) 和(1.10) 成立，则存在常数 $\lambda_1 = \lambda_1(W, F, R) > 0$和 $C_1 = C_1(W, F, R) > 0$，使得若 $\lambda > \lambda_1$,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{Nl} \log|det(\tilde{H}_N(x,E))|dx \geq \log\lambda - C_1 \quad (3.1)$$

对所有 $\omega \in \mathbb{T}$、 $N \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{T}$.

˜证明。 对于 $1 \leq \alpha \leq Nl, 1 \leq \alpha' \leq Nl$，由 $H(x,E)(\alpha,\alpha')$ 表示 $Nl \times Nl$ 矩阵˜$H_N(x,E)$ 的 (α, α') 项。

˜根据 (1.13)、(2.1)、(2.2) 和 (2.3)，对于给定的 $\rho > 0$，记 $H_N(z,\ E)(\alpha,\ \alpha')$，$(1 \leq \alpha \leq Nl,$ $1 \leq \alpha' \leq$˜$Nl)$ 为 $H_N(x,\ E)(\alpha,\ \alpha')$，$(1 \leq \alpha \leq Nl,\ 1 \leq \alpha' \leq Nl)$ 在该条带上的解析延拓

$$\mathcal{A}_\rho = \{z : z = x + \sqrt{-1}y, x \in [0,1], |y| \leq \rho\}. \quad (3.2)$$

˜ ˜设 $H_N(z,\ E) :=(H_N(z,\ E)(\alpha,\ \alpha'))_{(1\leq\alpha\leq Nl, 1\leq\alpha'\leq Nl)}$是一个 $Nl \times Nl$矩阵。其 $(\alpha,\ \alpha')$ 项（对于 $1 \leq$˜$\alpha \leq Nl,\ 1 \leq \alpha' \leq Nl$）为 $H_N(z,\ E)(\alpha,\ \alpha')$。

˜考虑在 $\mathcal{A}_\rho$ 上的全纯函数 $det(H_N(z,E))$。由 (2.2)、(2.3) 和 Hadamard 不等式可知，存在一个常数 $C_6 > 0$,

$$|det(\tilde{H}_N(z,E))| \leq (C_6(\lambda+|E|))^{Nl}. \quad (3.3)$$

因此， $u(z) = \frac{1}{Nl}\log\ |det(\ \tilde{H}_N(z,E))|$是次调和函数，并满足

$$0 \leq u(z) \leq log(C_6(\lambda+|E|)) \quad (3.4)$$

在 $\mathcal{A}_\rho$ 上。

Let

$$D_N(z,E) := \frac{1}{\sqrt{1+E^2}} diag\{[F_j(z) - \frac{E}{\lambda} I]M_j(z), 1 \le j \le N\}. \tag{3.5}$$

由 (3.5)，令

$$B_N(z) := \tilde{H}_N(z,E) - \lambda D_N(z,E). \tag{3.6}$$

记 $B_N(z)(i,j), (i,j = 1,...,N)$ 为 $N \times N$block matrix $B_N(z)$ 的 (i,j) 分块。由 (2.10)、、 (2.11)
(2.12) 、(3.5) 和 (3.6)，

$$B_N(z)(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+E^2}} R_j(z), & i = j, \\ \frac{1}{\sqrt{1+E^2}} (-\tilde{W}_i^T(z)), & i = j+1, \\ \frac{1}{\sqrt{1+E^2}} (-\tilde{W}_j(z)), & i = j-1, \\ 0, & otherwise, \end{cases} \tag{3.7}$$

其中， $R_j(z)$ $-\tilde{W}_i^T(z)$ 和 $-\tilde{W}_j(z)$ 的各项分别是 $R_j(x)$ $-\tilde{W}_i^T(x)$ 和 $-\tilde{W}_j(x)$ 对应项在条带 $\mathcal{A}_\rho$ 上的解析延拓。

由 (3.5)，

$$det[D_N(z,E)] = (\frac{1}{\sqrt{1+E^2}})^{Nl} \prod_{j=1}^{N} det[(F(z+j\omega)M(z+j\omega) - \frac{E}{\lambda} M(z+j\omega))]. \tag{3.8}$$

由 (3.6)，

$$det[\tilde{H}_N(z,E)] = det[\lambda D_N(z,E) + B_N(z)]. \tag{3.9}$$

由 (1.8)、(1.13) 和 (2.1) 可知， $G_N(x,E)$ 中的能量 E 不受限于 $\mathbb{R}$ 的某个紧区间。因此，对于常数 $C_2 > 0$，若

(i) $|E| \le C_2\lambda$，由 (1.9) 可知，

$$det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}} (F(z) - \frac{E}{\lambda} I)M(z)] \not\equiv 0 \tag{3.10}$$

作为定义在条带 $\mathcal{A}_\rho$ 上的 z 的函数。令 $\mu = \frac{E}{\lambda}$。由 (3.10) 以及 $det[(F(z) - \mu I)M(z)]$, 关于 $0 < \delta < \rho$ 的解析性（固定 μ），$det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}} (F(z) - \mu I)M(z)]$ 在条带 $\mathcal{B}_\delta = \{z : \ z = x + \sqrt{-1}y, x \in [0,1], \ \frac{\delta}{2} \le |y| \le 2\delta\}$ 内的零点个数有限。因此存在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta) > 0$,

$$\inf_{|\mu| \le C_2} \sup_{\frac{\delta}{2} \le |y| \le 2\delta} \inf_{x \in [0,1]} det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}} (F(z) - \mu I)M(z)] \ge \varepsilon_1, z = x + \sqrt{-1}y. \tag{3.11}$$

(ii) 根据(1.9)， $|E| > C_2\lambda$,

$$det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}} F(z) - \frac{E}{\sqrt{1+E^2}} \frac{1}{\lambda} M(z)] \not\equiv 0 \tag{3.12}$$

作为条带 $\mathcal{A}_\rho$上的 z 的函数。令 $\mu = \frac{E}{\sqrt{1+E^2}}$, ~~我们有~~

$$det[\sqrt{1-\mu^2}F(z) - \frac{\mu}{\lambda}M(z)] \not\equiv 0 \tag{3.13}$$

作为 z 在条带 $\mathcal{A}_\rho$ 上的函数。由 (3.13) 以及 $det[\sqrt{1-\mu^2}F(z) - \frac{\mu}{\lambda}M(z)$ 的解析性可知，对于所有 $0 < \delta < \rho$ 及固定的 μ， $det[\sqrt{1-\mu^2}F(z) - \frac{\mu}{\lambda}M(z)]$ 在条带 $\overline{\mathcal{B}_\delta} = \{z : z = x + \sqrt{-1}y, x \in [0,1], \frac{\delta}{2} \leq |y| \leq 2\delta\}$ 中的零点个数是有限的。因此存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta) > 0$,

$$\inf_{|\mu|\leq 1} \sup_{\frac{\delta}{2}\leq|y|\leq 2\delta} \inf_{x\in[0,1]} det[\sqrt{1-\mu^2}F(z) - \frac{\mu}{\lambda}M(z)] \geq \varepsilon_2, z = x + \sqrt{-1}y. \tag{3.14}$$

由 (i) 和 (ii) 可知，存在常数 $\frac{\delta}{2} \leq \delta_0 \leq 2\delta$， $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0) = min\{\varepsilon_1(\delta_0), \varepsilon_2(\delta_0)\} > 0$，使得对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0} := \{z : z = x + \sqrt{-1}y, x \in [0,1], y = \overline{\delta_0}\}$,

$$|det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}}(F(z)M(z) - \frac{E}{\lambda}M(z))]| \geq \varepsilon_0. \tag{3.15}$$

由 (3.8) 和 (3.15)，对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$,

$$det[D_N(z)] = \prod_{j=1}^{N} det[\frac{1}{\sqrt{1+E^2}}(F(z+j\omega)M(z+j\omega) - \frac{E}{\lambda}M(z+j\omega))] \geq \varepsilon_0^{Nl}. \tag{3.16}$$

由 (3.9),

$$det[\tilde{H}_N(z,E)] = det[\lambda D_N(z,E) + B_N(z)] \tag{3.17}$$

$$= det[\lambda D_N(z)(I + \lambda^{-1}D_N^{-1}(z,E)B_N(z))] = \lambda^{Nl}det[D_N(z,E)]det[I + \lambda^{-1}D_N^{-1}(z,E)B_N(z)]. \tag{3.18}$$

由 (3.16)，对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$，存在一个常数 $C_7 > 0$,

$$||D_N^{-1}(z,E)|| = ||\frac{adj[D_N(z,E)]}{det[D_N(z,E)]}|| \leq \frac{C_7^{Nl}}{\varepsilon_0^{Nl}} = (C_7\varepsilon_0^{-1})^{Nl}, \tag{3.19}$$

其中 $adj[D_N(z, E)]$ 是 $D_N(z, E)$ 的伴随矩阵。由 (3.19)，对于足够大的 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$ 和 λ，存在一个常数 $C_8 > 0$,

$$||\lambda^{-1}D_N^{-1}(z,E)B_N(z)|| \leq \lambda^{-1}||D_N^{-1}(z,E)||||B_N(z)|| \leq \lambda^{-1}(C_8\varepsilon_0^{-1})^{Nl} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.20}$$

由 (3.20)，对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$,

$$det[I + \lambda^{-1}D_N^{-1}(z,E)B_N(z)] \geq (\frac{1}{2})^{Nl}. \tag{3.21}$$

结合 (3.16)、(3.18) 和 (3.21)，对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$，我们有

$$det[\tilde{H}_N(z,E)] \geq \lambda^{Nl}\epsilon_0^{Nl}(\frac{1}{2})^{Nl}. \tag{3.22}$$

因此，对于 $z \in \mathcal{C}_{\delta_0}$,

$$u(z) = \frac{1}{Nl}log|det[\tilde{H}_N(z,E)]| \geq log\lambda + log\frac{\epsilon_0}{2}. \tag{3.23}$$

根据次调和性，存在一个常数 $\beta \in (0,\ 1)$，使得

$$(1-\beta)\int_{z\in\mathbb{T}} u(z)dz \geq \int_{z\in\mathcal{C}_{\delta_0}} u(z)dz - \beta\int_{z\in\mathcal{C}_\rho} u(z)dz, \tag{3.24}$$

其中 $\mathcal{C}_\rho := \{z : z = x + \sqrt{-1}\overline{y,}\ \ x \in [0,1],\ \ y = \rho\}$。由 (3.24),

$$\int_{z\in\mathbb{T}} u(z)dz \geq \frac{1}{(1-\beta)}(\int_{z\in\mathcal{C}_{\delta_0}} u(z)dz - \beta\int_{z\in\mathcal{C}_\rho} u(z)dz). \tag{3.25}$$

由 (3.4)、(3.23) 和 (3.25)，存在一个常数 $C_9 > 0$,

$$\int_{z\in\mathbb{T}} u(z)dz \geq \frac{1}{1-\beta}(log|\lambda| + log\frac{\epsilon_0}{2} - \beta(log\lambda + C_9)). \tag{3.26}$$

因此由 (3.26)，存在一个常数 $C_1 > 0$,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{Nl}\log|det(\tilde{H}_N(x,E))|dx \geq \log\lambda - C_1. \tag{3.27}$$

□

4 格林函数估计与安德森局域化的证明

引理4。 设 $u(x) :=\ \frac{1}{Nl}\underline{\log}\,|det(\tilde{H}_N(x,E))|$，对于所有整数 $Q \geq C_0^{-2}$，存在常数$\sigma > 0$、 $c_{10} > 0$ 和 $S > 0$,

$$mes\{x \in \mathbb{T} : |\frac{1}{Q}\sum_{j=0}^{Q-1} u(x+j\omega) - \int_{\mathbb{T}} u(x)dx| \geq SQ^{-\sigma}\} < e^{-c_{10}Q^\sigma}. \tag{4.1}$$

证明。 参见 [8]。 □

命题5. 假设 Q 足够大。那么对所有 $1 \leq \alpha \leq Nl$、$1 \leq \alpha' \leq Nl$，存在某个 j，使得 $1 \leq j \leq Q$，并且存在常数 c_{11}，使得

$$G_N(x+j\omega,E)(\alpha,\alpha') < e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}Nl} \tag{4.2}$$

对除去一个测度至多为 $e^{-c_{10}Q^\sigma}$. 的集合 $\Omega(E) \subset \mathbb{T}$ 之外的所有 x，均成立

证明. 由 (3.27) 和 (4.1),

$$\frac{1}{Q}\sum_{j=1}^{Q-1} u(x+j\omega) \geq \int_{\mathbb{T}} u(x)dx - SQ^{-\sigma} \geq \log\lambda - C_1 - SQ^{-\sigma} \tag{4.3}$$

除去一个测度至多为 $e^{-C_{10}Q^\sigma}$ 的集合。此外，存在某个 j，使得 $1 \leq j \leq Q$，从而

$$u(x+j\omega) \geq \int_{\mathbb{T}} u(x)dx - SQ^{-\sigma} \geq \log\lambda - C_1 - SQ^{-\sigma} \tag{4.4}$$

除去一个测度至多为 $e^{-C_{10}Q^\sigma}$ 的集合后成立。由 (2.5)、(2.8) 和 (4.4) 可知，对于 $1 \le \alpha \le Nl$，$1 \le \alpha' \le Nl$，存在某个 j，使得 $1 \le j \le Q$，

$$|\tilde{H}_N^{-1}(x+j\omega,E)(\alpha,\alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+Nl\tilde{C}} \tag{4.5}$$

成立，除去测度至多为 $e^{-C_{10}Q^\sigma}$ 的一个集合。 $\tilde{C} = C + C_1 + SQ^{-\sigma} + log(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{|E|})$。

因此，由 (2.7) 和 (4.5)，对于 $1 \le \alpha \le Nl$，$1 \le \alpha' \le Nl$，存在常数 c_{11} 以及某个 j，使得 $1 \le j \le Q$，

$$|G_N(x,E)(\alpha,\alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}Nl} \tag{4.6}$$

成立，除去一个测度至多为 $e^{-C_{10}Q^\sigma}$ 的集合。

□

假设整数 $N_0 > 0$ 足够大。由 (4.2)，对于 $1 \le \alpha \le N_0 l$，$1 \le \alpha' \le N_0 l$，

$$|G_{N_0}(x,E)(\alpha,\alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}N_0 l} \tag{4.7}$$

成立，除去测度至多为 $e^{-C_{10}Q^\sigma}$ 的 $\Omega(E)$。

对于所有 $1 \le \alpha \le N_0 l$，$1 \le \alpha' \le N_0 l$，令 $\tilde{H}_{N_0}(x, E)(\alpha, \alpha') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{v}(k)e^{ikx}$，$|\hat{v}(k)| < e^{-\rho|k|}$。将 $\tilde{H}_{N_0}(x, E)(\alpha, \alpha')$ 替换为 $\sum_{|k|<C_{11}N_0} \hat{v}(k)e^{ikx}$，其中 $C_{11} > 0$ 为常数。根据 (2.5)，将 N 替换为 N_0。然后将 (4.7) 替换为条件

$$\sum_{1\le\alpha\le N_0 l, 1\le\alpha'\le N_0 l} e^{2|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)}[\tilde{\mu}_{N_0}(x,E)_{(\alpha,\alpha')}]^2 \le e^{2N_0 l\tilde{C}}[det(\tilde{H}_{N_0}(x,E))]^2. \tag{4.8}$$

因此 (4.8) 具有如下形式

$$PO(cos\omega, sin\omega, cosx, sinx, E) \ge 0, \tag{4.9}$$

其中 PO 是次数至多为 $C(N_0 l)^2$ 的多项式。此外，将余弦和正弦的幂级数截断，并用一个多项式替换

$$PO_1(\omega, x, E) \ge 0 \tag{4.10}$$

其次数至多为 $(N_0 l)^3$。

引理 6. 对于固定的 $\omega \in DC_{A,\ C_0}$ 和 E，$\Omega(E)$ 在 (4.7) 中不仅满足测度估计 $mes(\Omega(E)) < e^{-C_{10}Q^\sigma}$，而且还可以假设为次数至多为 $(N_0 l)^3$ 的半代数集合。

证明。参见 [7]。 □

设 $[u, v] \subset \mathbb{Z}$。设

$$H_{[u,v]}(x) := R_{[u,v]}H_\lambda(x)R_{[u,v]}, \tag{4.11}$$

其中 $R_{[u,v]} =$ 对 $[u, v] \subset \mathbb{Z}$ 的坐标限制，以及相应的格林函数 $G_{[u,v]}(x, E) = [H_{[u,v]}(x) - E)]^{-1}$。

引理 7。 固定 $x_0 \in \mathbb{T}$。考虑轨道 $\{x_0 + j\omega : |j| \le N_1\}$ 其中 $N_1 = N_0^{C_{12}}$ 足够大，使得存在常数 $C_{12} > 0$。那么，除至多 $N_1^{1-\sigma_1}$ 个 $|j| < N_1$ 值外，对所有 $-N_0 l \le \alpha \le N_0 l$ 和 $-N_0 l \le \alpha' \le N_0 l$,

$$|G_{[-N_0,N_0]}(x_0 + j\omega, E)(\alpha, \alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}N_0 l}, \tag{4.12}$$

其中 σ_1 是一个常数，且满足 $0 < \sigma_1 < 1$。

证明。参见 [7]。 □

假设 $\varphi = (\vec{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$||\vec{\varphi}_n||_2 < C_{13}|n|, |n| \to \infty \tag{4.13}$$

对于一个常数 $C_{13} > 0$。对于 (4.12) 中固定的 x_0 ,

$$(H_\lambda(x_0) - E)\varphi = 0. \tag{4.14}$$

由 (4.11) 和 (4.14),

$$(R_{[u,v]}(H_\lambda(x_0) - E)R_{[u,v]})\varphi = -(R_{[u,v]}(H(x_0))R_{Z\setminus([u,v])})\varphi = \begin{cases} \vec{\varphi}_j = W_u^T(x)\vec{\varphi}_{u-1}, j = u, \\ \vec{\varphi}_j = W_{v+1}(x)\vec{\varphi}_{v+1}, j = v, \\ \vec{\varphi}_j = \vec{0}, j \in \mathbb{Z} \setminus \{u, v\}. \end{cases} \tag{4.15}$$

对于 $-ul \le p_1 \le ul$, $-ul \le p_2 \le ul$, 由 $G_N(x, E)(p_1, p_2)$ 和 $G_{[u,v]}(x, E)(p_1, p_2)$ 分别表示 $N \times N$ 分块矩阵 $G_N(x, E)$ 和 $G_{[u,v]}(x, E)$ 的 (p_1, p_2) 块。因此由 (4.15), 对于 $n \in [u, v]$,

$$||\vec{\varphi}_n||_2 < \max_{p_1\in\{u,v\}} ||G_{[u,v]}(x_0, E)(p_1, p_2)||_\infty (\max_{|k|<N_1+N_0} ||\vec{\varphi}_k||_2) \tag{4.16}$$

$$< \max_{p_1\in\{u,v\}} ||G_{[-N_0,N_0]}(x_0 + j\omega, E)(p_1 - j, p_2 - j)||_\infty N_1. \tag{4.17}$$

由（4.12），我们有

$$||\vec{\varphi}_n||_2 < N_1 e^{c_{14}N_0 l}(e^{-log(\lambda+|E|)|u-n|} + e^{-log(\lambda+|E|)|v-n|}) \tag{4.18}$$

其中 $c_{14} > 0$ 为常数。令 $[u, v] = [-N_0 + j, N_0 + j]$ 和 $n = j$。由（4.18），我们有 $|j - u| \ge N_0/2$, $|j - v| \ge N_0/2$。

由（4.12），存在一个常数 $c_{15} = c_{15}(\lambda, E, l) > 0$,

$$||\vec{\varphi}_j||_2 < e^{-c_{15}N_0} \tag{4.19}$$

对所有 $|j| < N_1$ 除 $N_1^{1-\sigma_1}$个之外均成立。

命题 8. 记

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\omega = \bigcup_{|j|\le N_1} SpecH_{[-j,j]}(x_0), \tag{4.20}$$

其中，$SpecH_{[-j,j]}(x_0)$是 $H_{[-j,j]}(x_0)$的谱。那么，如果

$$x \notin \bigcup_{E'\in\mathcal{E}_\omega} \Omega(E'), \tag{4.21}$$

对于所有 $-N_0 l \le \alpha \le N_0 l$、$-N_0 l \le \alpha' \le N_0 l$，我们有

$$|G_{[-N_0,N_0]}(x,E)(\alpha,\alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}N_0 l}. \tag{4.22}$$

证明。设 j_0 为正整数。由 (4.15),

$$(R_{[-j_0+1,j_0-1]}(H_\lambda(x_0)-E)R_{[-j_0+1,j_0-1]}\varphi = \begin{cases} \vec{\varphi}_j = W^T_{-j_0+1}(x)\vec{\varphi}_{-j_0}, j = -j_0+1, \\ \vec{\varphi}_j = W_{j_0}(x)\vec{\varphi}_{j_0}, j = j_0-1, \\ \vec{\varphi}_j = \vec{0}, j \in \mathbb{Z}\setminus\{-j_0+1, j_0-1\}. \end{cases} \tag{4.23}$$

那么我们有

$$\begin{aligned} 1 = ||\vec{\varphi}_0||_2 &\le ||G_{[-j_0+1,j_0-1]}(x_0,E)(0,j_0-1)||_\infty ||\vec{\varphi}_{j_0}||_2 \\ &+||G_{[-j_0+1,j_0-1]}(x_0,E)(0,-j_0+1)||_\infty ||\vec{\varphi}_{-j_0}||_2 \\ &\le ||G_{[-j_0+1,j_0-1]}(x_0,E)||_\infty (||\vec{\varphi}_{j_0}||_2 + ||\vec{\varphi}_{-j_0}||_2). \end{aligned} \tag{4.24}$$

若 j_0 和 $-j_0$ 均满足 (4.19)，则有

$$||G_{[-j_0,j_0]}(x_0,E)||_\infty > e^{-c_{15}N_0}, \tag{4.25}$$

或者等价地

$$dist(E, SpecH_{[-j_0,j_0]}) < e^{-\frac{c_0}{2}N_0}. \tag{4.26}$$

由 (4.18) 和 (4.26)，可得 (4.22) 成立。 □

引理 9. 设 $N_2 = N_0^{c_{16}}$，其中 $c_{16} > 0$ 为充分大的常数。那么对所有 $\omega \in DC_{A,\ C_0}$，除去一个测度至多为 $N_2^{-1/13}$ 的集合外，我们有

$$x_0 + n\omega \notin \bigcup_{E'\in\mathcal{E}_\omega} \Omega(E') \tag{4.27}$$

对所有 $N_2^{1/2} < |n| < 2N_2$。

证明。参见 [7]。 □

对于每个 $N_2^{1/2} < |n| < N_2$，以及所有 $(-N_0+n)l \le \alpha \le (N_0+n)l$，$(-N_0+n)l \le \alpha' \le (N_0+n)l$，我们有

$$|G_{[-N_0+n,N_0+n]}(x_0,E)(\alpha,\alpha')| \le e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)+c_{11}N_0 l}. \tag{4.28}$$

定义区间

$$\Lambda = \bigcup_{N_2^{\frac{1}{2}}<n<2N_2} [-N_0+n, N_0+n] \supset [N_2^{\frac{1}{2}}, 2N_2]. \tag{4.29}$$

在（4.29）中应用预解式恒等式。于是，对所有的 α， α'，满足 $p(\alpha)$ $p(\alpha') \in \Lambda$,

$$|G_\Lambda(x_0, E)(\alpha, \alpha')| \leq e^{-|p(\alpha)-p(\alpha')|log(\lambda+|E|)}, |p(\alpha)-p(\alpha')| > \frac{1}{10}N_2, \tag{4.30}$$

其中 $G_\Lambda(x_0,\ E) = (R_\Lambda H_\lambda(x_0)R_\Lambda - E)^{-1}$。因此，由（4.19）可得

$$||\vec{\varphi}_j||_2 < e^{-c_{15}j}, \frac{1}{2}N_2 < |j| < N_2. \tag{4.31}$$

对于整数 $j<0$，过程相同。由（4.27），对固定的 N_0，对所有 $\omega \in DC_{A,\ C_0}$，除去一个测度至多为 N_0^{-10} 的集合 $\mathcal{R}_{(N_0)}$，

$$||\vec{\varphi}_j||_2 < e^{-c_{15}j}, \frac{1}{2}N_2 < |j| < N_2. \tag{4.32}$$

Let

$$\mathcal{R} = \bigcap_N \bigcup_{N_0>N} \mathcal{R}_{(N_0)}. \tag{4.33}$$

Then

$$mes(\mathcal{R}) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{N_0=N+1}^{+\infty} mes(\mathcal{R}_{(N_0)}) = 0. \tag{4.34}$$

最后，对于固定的 $x_0 \in \mathbb{T}$，对几乎处处的 $\omega \in$，当 $\mathrm{DC}_{A,\ C_0}$ 时，安德森局域化成立。

参考文献

[1]Sinai Y G. 具有准周期势的一维差分薛定谔算子的安德森局域化[J].《统计物理学杂志》，1987，46(5-6)：861-909.[2] Fr¨ohlich J, Spencer T, Wittwer P. 一类一维准周期薛定谔算子的局域化[J]. 1990.[3] Eliasson L H. 具有纯点谱的离散一维准周期薛定谔算子[J]. 1997.[4] Jitomirskaya S Y. 几乎Mathieu方程的安德森局域化：一个非微扰证明[J].《数学物理学通讯》，1994，165：49-57.[5] Jitomirskaya S Y. 几乎Mathieu算子的金属-绝缘体转变[J].《数学年刊》，1999：1159-1175.[6] Bourgain J, Goldstein M. 关于准周期势下的非微扰局域化[J].《数学年刊》，2000，152(3)：835-879.[7]Bourgain J. 格点薛定谔算子的格林函数估计及其应用（AM-158）[M]. 普林斯顿大学出版社，2004.[8] Bourgain J, Jitomirskaya S. 能带模型的安德森局域化[J]. 泛函分析的几何方面，2000：67-79.[9] Klein S. 单频准周期块雅可比算子的安德森局域化[J].《泛函分析杂志》，2017，273(3)：1140-1164.[10] Jian W, Shi Y, Yuan X. 具有长程相互作用的单频准周期块算子的安德森局域化[J].《数学物理学杂志》，2019，60(6)：063504.[11] Anderson P W. 某些随机晶格中不存在扩散[J].《物理评论》，1958，109(5)：1492.[12] Lagendijk A, Van Tiggelen B, Wiersma D S. 安德森局域化五十年[J].《今日物理》，2009，62(8)：24-29.[13] Bourgain J. 任意维数 $\mathbb{Z}^d$ 上准周期格点薛定谔算子的安德森局域化[J]. GAFA《泛函分析的几何与泛函分析》，2007，17(3)：682-706.[14] Silvius Klein，具有Gevrey类函数定义的势的离散一维准周期薛定谔算子的安德森局域化，《泛函分析杂志》，第218卷，第2期，2005年，第255-292页。

[15] Jian W, Shi J, Yuan X. 奇异势下长程算子的安德森局域化[J]. 《数学物理学杂志》，2021年, 62(2): 022703.[16] Shnol’ ˋE ˋE.关于薛定谔方程特征函数的行为[J] Matematicheskii Sbornik, 1957年，84(3): 273-286.[17] Han R. Shnol定理与长程算子的谱[J]. 美国数学会会刊，2019年, 147(7): 2887-2897.[18] Aigner M, Axler S. 枚举课程[M]. 柏林：施普林格，2007年。