arXiv:2303.01077v1 [math.DS] 2 Mar 2023

随机耦合谐振子的局域化 $\mathbb{Z}^d$

HONGZI CONG、YUNFENG SHI 和 ZHIHAN ZH ANG

Abstract. 本文研究随机介质中耦合谐振子的局域化性质。每个振子都被限制在格点 $\mathbb{Z}^d$ 上。我们证明，对于大多数状态以及随机介质的任意选取，耦合系统的长时间局域化都成立，且其时间尺度大于多项式尺度。

1. Introduction and main results

自安德森的开创性工作以来，随机介质中量子粒子的局域化一直是物理学和数学中的一个基础性课题[并58]且，尽管线性无序模型已取得了长足进展，但人们对非线性模型的了解却少得多。事实上，非线性随机模型出现在许多物理系统中，例如经典光学 [SBFS07] 以及玻色-爱因斯坦凝聚体 [Sha07] 等处于无序环境中的系统。本文研究随机介质中耦合谐振子的局域化性质。更确切地说，我们研究如下形式的哈密顿量

$$H(q,\bar{q}) = H_2(q,\bar{q}) + H_4(q,\bar{q}) + R(q,\bar{q}), \tag{1.1}$$

其中

$$H_2(q,\bar{q}) = \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} v_{\boldsymbol{j}} \left|q_{\boldsymbol{j}}\right|^2, \ H_4(q,\bar{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} \left|q_{\boldsymbol{j}}\right|^4$$

and

$$R(q,\bar{q}) = O(q^6).$$

这里我们假设 $v = \{v_{\boldsymbol{j}}\}_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ 是一族取值于 $[0,1]$ 的独立同分布（i.i.d.）随机变量，且 R 仅包含短程作用项，具体定义如下。对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$，定义

$$\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha} = \left\{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d : \ \alpha_{\boldsymbol{j}}\neq 0\right\}, \ \Delta(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}'\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}} \left|\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}'\right|_1, \ |\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} \left|\alpha_{\boldsymbol{j}}\right|,$$

其中

$$|\boldsymbol{j}|_1 = \sum_{1\le i\le d} |j_i| \ \text{ for } \boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \cdots, j_d)\in\mathbb{Z}^d.$$

Date: 2023年3月3日。*Key words and phrases.* 涅克洛舍夫估计，Birkhoff正规形技巧，非线性局域化，内参数。

我们假设 R 的形式为

$$R(q,\bar{q})=\sum_{\substack{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d},|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}|=6\\ \Delta(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\leq 1}} R^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}} \tag{1.2}$$

满足 $\left|R^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}}\right|\leq 1$。我们的主要目标是证明 对于所有 v 以及“绝大多数”解$q(t)$ 而言，具有小初始状态（大小为 ϵ）的（1.1）在时间尺度

$$|t|\leq \exp\left\{\frac{c|\ln\epsilon|^2}{\ln\ln\epsilon^{-1}}\right\},\quad c>0$$

在相空间中

$$\ell^{\sigma}_{\infty}=\left\{q=(q_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}:\|q\|_{\sigma}:=\sup_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}|q_{\boldsymbol{j}}|\left(1+|\boldsymbol{j}|_1\right)^{\sigma}<\infty\right\}$$

满足 $\sigma\geq d+1$ （详见下文中的定理 1.2 ）。为阐明我们的主要动机，我们首先回顾一些关于著名的随机势离散非线性薛定谔¨方程（离散非线性薛定谔方程）的结果。因此，考虑

$$\sqrt{-1}\frac{dq_{\boldsymbol{j}}}{dt}=\epsilon(\boldsymbol{\Delta}q)_{\boldsymbol{j}}+v_{\boldsymbol{j}}q_{\boldsymbol{j}}+\delta|q_{\boldsymbol{j}}|^2q_{\boldsymbol{j}}, \tag{1.3}$$

其中离散拉普拉斯算子 $\boldsymbol{\Delta}$ 定义为 $(\boldsymbol{\Delta}q)_{\boldsymbol{j}}=\sum q_{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{e}}$. 注意，与$|\boldsymbol{e}|_1=1$（1.3）相关的哈密顿量为

$$H_{NLS}=H_2+\frac{\delta}{2}H_4+\epsilon\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}|_1=1}q_{\boldsymbol{i}}\bar{q}_{\boldsymbol{j}}, \tag{1.4}$$

其中 H_2 和 H_4 定义于（1.1）中。关于（1.4）的第一个严格局域化结果由 Fr¨ ohlich-Spencer-Wayne [FSW86] 获得，其具有一般 H_4（这意味着四次项中存在非共振项），并且在 $\epsilon=0$ 的情形下为绝大多数 v构造了全维 KAM 环面。随后，Bourgain-Wang [BW08] 证明了在 $0<\epsilon+\delta\ll 1$ 的情形下，对于绝大多数 v，（1.3）存在有限维 KAM 环面。这些 KAM 结果允许无限时间尺度，但要求对初始态施加更多限制。另一种研究视角是在有限时间尺度内开展研究。沿着这一方向，Benettin-Fr¨ohlich-Giorgilli[BFG88] 首先证明了一个关于H_2 的 Nekhoroshev 型定理：对于具有小耦合、次数至少为 3 且相互作用为短程的哈密顿量， v 服从高斯分布时，该定理对绝大多数 v 成立。在重要工作 [WZ09], 中，作者首次证明了长时间的非线性安德森局域化：在存在 $\boldsymbol{\Delta}$的情况下，具有大致初始状态（即 $q(0)\in\ell^2(\mathbb{Z})$ ）的系统在多项式长时间尺度内保持局域化。最近，Cong-Shi-Zhang [CSZ21] 将 [WZ09] 中的时间尺度扩展到了 [BFG88]所获得的时间尺度。关于非线性安德森局域化的最新进展，还可参见 [FKS09、FKS12] 。我们还应指出，上述所有工作在建立局域化时，都要求对随机势 v 施加实质性限制。事实上，在 [Bou04], Bourgain 提出了如下问题

问题 1.1 （参见 [Bou04]）。 对于$\{I_j=|q_j|^2\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 在（1.3）（其中 $d=1$），在不对 $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 作任何假设的情况下，其稳定性如何?

本研究尝试回答这样一个问题：将离散拉普拉斯算子部分替换为次数至少为 5 的短程相互作用哈密顿量时，情况会如何。虽然我们无法解决 Bourgain 的原始问题，但我们的结果

适用于所有格点维数。在此背景下，我们还拓展了 [BFG88] 的工作。要回答上述 Bourgain 问题，我们需要 足够多的 参数来克服共振难题。若对 v (即外参数)不作任何限制，就必须将初始态选作参数(即内参数)。由于初始态来自 ℓ^{σ}_{∞}，内参数必须随 $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$ 衰减，这与外参数的情形有显著区别。因此，在内参数情形下处理共振极具挑战性。本文通过引入新的非共振条件解决了这一问题。

现在我们定义内参数。令

$$\Omega = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} : \ \zeta_{\boldsymbol{j}} \left(1 + |\boldsymbol{j}|_1\right)^{2\sigma} \in [0,1] \right\}. \tag{1.5}$$

对于每个 $r > 0$，记

$$B_{\sigma}(r) = \{ q \in \ell^{\sigma}_{\infty} : \|q\|_{\sigma} \leq r \}.$$

用 mes(·) 表示 Ω 上的标准归一化乘积测度。我们的主要结果如下：

定理 1.2. 设 $\sigma \geq d+1$。考虑哈密顿量 (1.1)，其中 R 由 (1.2) 给出。对于任意 $\eta > 0$，存在 $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta, d, \sigma)$ 和 $\Omega' \subset \Omega$，使得 mes(Ω \ Ω′) $\leq \eta$，从而对于 $\zeta \in \Omega'$ 和 $\epsilon < \epsilon_0$，以下结论成立：存在一个辛映射$\Phi : B_{\sigma}(\epsilon) \to B_{\sigma}(2\epsilon)$，它接近恒等映射，使得

$$H \circ \Phi \left(\widetilde{q}, \overline{\widetilde{q}} \right) = H_2 + \mathcal{J} + Z + O\left(\exp\left\{ \frac{|\ln \epsilon|^2}{10^4 \sigma \ln \ln \epsilon^{-1}} \right\} \right),$$

其中

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \left(|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}|^2 - \zeta_{\boldsymbol{j}} \right)^2,$$

并且 $Z = O(\|\widetilde{q}\|^6_{\sigma})$ 仅取决于作用变量 $\widetilde{I} = \left(\widetilde{I}_{\boldsymbol{j}} = |\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}|^2 \right)_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d}$。此外，对于满足 $\|q(0)\|_{\sigma} \leq \epsilon$ and 的每个初始状态 $q(0)$,

$$|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(0)|^2 = \epsilon^2 \zeta_{\boldsymbol{j}},$$

有

$$\left| |q_{\boldsymbol{j}}(t)|^2 - |q_{\boldsymbol{j}}(0)|^2 \right| < \epsilon^2 (1 + |\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma} \text{ for } \forall\ \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$$

假设

$$|t| \leq \exp\left\{ \frac{|\ln \epsilon|^2}{10^4 \sigma \ln \ln \epsilon^{-1}} \right\}.$$

注 1.1。 我们的结果所对应的长时间尺度同样属于 Nekhoroshev 型，如 [BFG88] 中所述。我们的结果还允许任意随机势 $v = \{v_{\boldsymbol{j}}\}$。

如果对初始态施加额外限制，我们可以得到如 [CMS22] 中所述的指数长时间局域化结果。更准确地说，我们有

定理1.3。 设 $\sigma \geq d+1$。考虑哈密顿量 (1.1) 其中 R 由下式给出 (1.2)。对于每个

$$0 < \epsilon < 2^{-12d-9}, \tag{1.6}$$

任意满足条件的 v 和 $q(0)$

$$\|q(0)\|_\sigma \leq \epsilon \quad and \quad q_0(0) = 0, \tag{1.7}$$

有

$$\left||q_j(t)|^2 - |q_j(0)|^2\right| < \epsilon^2(1+\langle j\rangle)^{-3\sigma}, \quad \forall\ j \in \mathbb{Z}^d \tag{1.8}$$

对于任意

$$|t| \leq \epsilon^{-3}2^\sigma,$$

其中 $\langle j\rangle =$ 最大值$\{|j|_1, 1\}$. 特别地，若 $\sigma \geq \epsilon^{-1}$，则稳定时间是指数级长的，即 (1.8) 对.....成立

$$|t| < \epsilon^{-3}2^{\epsilon^{-1}}. \tag{1.9}$$

证明思路。 定理 1.2 的证明基于 Bourgain-Wang 的 Birkhoff正规形技巧[BW07]（参见 Wang-Zhang [WZ09]）。因此，我们首先将（1.1）中的哈密顿量改写为

$$\widehat{H}(q,\bar{q}) := \epsilon^{-4}H(\epsilon q, \epsilon\bar{q}). \tag{1.10}$$

接着，对于 $\zeta \in \Omega$，我们引入如下记号

$$\epsilon J_j = |q_j|^2 - \zeta_j, \tag{1.11}$$

并假设

$$|J_j| < (1+|j|_1)^{-3\sigma}. \tag{1.12}$$

因此，哈密顿量 $\widehat{H}(q,\bar{q})$ 变为

$$\widehat{H}(q,\bar{q}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \omega_j |q_j|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} J_j^2 + \epsilon^2 R(q,\bar{q}), \tag{1.13}$$

其中

$$\omega_j = \epsilon^{-2}v_j + \zeta_j. \tag{1.14}$$

注 1.2. 估计式 (1.12) 至关重要，并且在迭代过程中可以保持成立。

接下来，我们引入新的非共振条件，这些条件对于我们的迭代至关重要。

定义 1.4. 给定任意 $\eta > 0$ 以及任意大的 $M > 0$，若对于任意满足 $|k|$ 且 $\Delta(k) \leq M$ 的 $0 \neq k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^d}$，均有，则称频率 ω 是 (η, M)-非共振的

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} k_j\omega_j\right| > \frac{\eta}{(1+k^-)^{3\sigma}\,(2+10\Delta(k))^{2d|k|}}, \tag{1.15}$$

其中

$$k^- = \min_{j\in \mathrm{supp}\, k} |j|_1.$$

注 1.3。 与 [BFG88], 相比，我们在非共振条件中将 $d+1$ （参见 [BFG88] 中的 (3.14)）替换为 3σ ，以保证测度估计以及运用 Birkhoff正规形技巧进行迭代。这类非共振条件在处理内参数时发挥着至关重要的作用。显然，我们的非共振条件是合理的，因为我们对 J （参见 (1.12)）有更好的估计。我们还指出，此处的因子 $(2+10\Delta(k))^{2d|k|}$ 可视为对 [BFG88]中某些几何描述的替代。

在完成上述准备后，利用标准的 Birkhoff正规形技巧以及 (η, M)-非共振条件，可以得到一个更高阶的标准形；也就是说，存在一个辛映射 Φ，它接近恒等映射，使得

$$\widehat{H} \circ \Phi(q, \bar{q}) = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \omega_{\boldsymbol{j}} |q_{\boldsymbol{j}}|^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} J_{\boldsymbol{j}}^2 + O(|I|) + O\left(\epsilon^{0.24M}\right),$$

其中 $O(|I|)$ 是仅依赖于作用变量的项 $I = (I_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d}$，且$I_{\boldsymbol{j}} = |q_{\boldsymbol{j}}|^2$。然后通过优化 $M \sim \ln \epsilon^{-1} \operatorname{lnln} \epsilon^{-1}$（详见（5.1））， 并运用标准的bootstrap引理，我们完成了定理1.2的证明。

定理1.3 的证明可由一个温和型不等式推出，即使不使用~Birkhoff正规形技巧。更准确地说，若 $q \in \ell^{\sigma}_{\infty}$ 且 $q_{\boldsymbol{0}} = 0$，则 $q \in \ell^{\sigma}_{\infty}$ （见~（5.6））。进一步地，在相空间ℓ^{σ}_{∞}中，有如下估计成立（详见（5.10））

$$|\{I_{\boldsymbol{j}}, H\}| \leq \epsilon^5 (1 + \langle \boldsymbol{j} \rangle)^{-3\sigma} 2^{-\sigma},$$

由此完成定理1.3的证明。这里的关键在于， σ 可以选取得与 ϵ.无关

本文结构。哈密顿量的结构将在 §2 中研究。伯克霍夫标准形的结果将在 §3 中陈述并证明。关于非共振频率的测度估计将在 §4 中建立。定理1.2 和 1.3 的证明将在 §5 中给出。

2. Structure of the Hamiltonian

对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $\zeta \in \Omega$，引入如下形式的单项式

$$J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}} = \prod_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} J_{\boldsymbol{j}}^{\alpha_{\boldsymbol{j}}} q_{\boldsymbol{j}}^{\beta_{\boldsymbol{j}}} \bar{q}_{\boldsymbol{j}}^{\gamma_{\boldsymbol{j}}},$$

其中 $J_{\boldsymbol{j}}$ 由 (1.11) 定义。令 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$，并定义

$$\operatorname{supp} \boldsymbol{n} = \operatorname{supp} (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}), \quad \Delta(\boldsymbol{n}) = \Delta(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}), \quad |\boldsymbol{n}| = |2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}|.$$

那么，($\epsilon^2 R$,q, $\bar{q}$) 中的摄动项 (1.13) 被化为

$$\epsilon^2 R(q, \bar{q}) = \sum_{\substack{|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}|=6, \Delta(\boldsymbol{n})=1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|=0}} R(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}$$

定义 2.1。定义 $\boldsymbol{m} = (\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})$ $\boldsymbol{\mu} = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$。于是，对于给定的两个哈密顿量

$$H(q, \bar{q}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} H(\boldsymbol{\mu}) J^{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}} q^{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \bar{q}^{\widehat{\boldsymbol{\gamma}}},$$

$$G(q, \bar{q}) = \sum_{\boldsymbol{m}} G(\boldsymbol{m}) J^{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}} q^{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}} \bar{q}^{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}$$

H 和 G 的泊松括号定义为

$$\{H, G\} = \sqrt{-1} \sum_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{m}} H(\boldsymbol{\mu}) G(\boldsymbol{m}) \cdot (\star),$$

其中

$$(\star)=\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\left((\star\star)+(\star\star\star)\right)\prod_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{j}}J_{\boldsymbol{k}}^{\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{k}}+\widetilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}}q_{\boldsymbol{k}}^{\widehat{\beta}_{\boldsymbol{k}}+\widetilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}}\bar{q}_{\boldsymbol{k}}^{\widehat{\gamma}_{\boldsymbol{k}}+\widetilde{\gamma}_{\boldsymbol{k}}},$$

$$(\star\star)=\epsilon^{-1}\left(\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{j}}(\widetilde{\beta}_{\boldsymbol{j}}-\widetilde{\gamma}_{\boldsymbol{j}})+\widetilde{\alpha}_{\boldsymbol{j}}\left(\widehat{\gamma}_{\boldsymbol{j}}-\widehat{\beta}_{\boldsymbol{j}}\right)\right)J_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\alpha}_{\boldsymbol{j}}-1}q_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\beta}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\beta}_{\boldsymbol{j}}}\bar{q}_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\gamma}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\gamma}_{\boldsymbol{j}}},\tag{2.1}$$

and

$$(\star\star\star)=\left(\widehat{\beta}_{\boldsymbol{j}}\widetilde{\gamma}_{\boldsymbol{j}}-\widetilde{\beta}_{\boldsymbol{j}}\gamma_{\boldsymbol{j}}\right)J_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\alpha}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\alpha}_{\boldsymbol{j}}}q_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\beta}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\beta}_{\boldsymbol{j}}-1}\bar{q}_{\boldsymbol{j}}^{\widehat{\gamma}_{\boldsymbol{j}}+\widetilde{\gamma}_{\boldsymbol{j}}-1}.\tag{2.2}$$

利用(2.1)、(2.2)，并遵循 Wang-Zhang [WZ09], 中(3.16)的证明，我们可得到泊松括号的估计。

引理 2.2. 对于给定的哈密顿量 H 和 G，它们的泊松括号可估计为

$$|\{H,G\}(\boldsymbol{n})|\leq 2\epsilon^{-1}\left(2^{|\boldsymbol{n}|}\left(\Delta(\boldsymbol{\mu})+\Delta(\boldsymbol{m})\right)\right)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2|H(\boldsymbol{\mu})||G(\boldsymbol{m})|.\tag{2.3}$$

注 2.1. Wang-Zhang 中泊松括号的估计为

$$|\{H,G\}(\boldsymbol{n})|\leq\left(2^{|\boldsymbol{n}|}\left(\Delta(\boldsymbol{\mu})+\Delta(\boldsymbol{m})\right)\right)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2|H(\boldsymbol{\mu})||G(\boldsymbol{m})|.\tag{2.4}$$

(ϵ^{-1} 2.3)右端的因子来自于

$$\frac{\partial J_{\boldsymbol{j}}}{\partial\bar{q}_{\boldsymbol{j}}}=\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial q_{\boldsymbol{j}}\bar{q}_{\boldsymbol{j}}}{\partial\bar{q}_{\boldsymbol{j}}}=\epsilon^{-1}q_{\boldsymbol{j}}.$$

特别地，当 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}=\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}=\mathbf{0}$时，估计(2.3)与(2.4)相同，因为其消失。 (2.1)

注 2.2。 这里介绍一些事实。对于 $\boldsymbol{n}$， $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 引理 2.2中给出的条件，首先有

$$|\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{\mu}|+|\boldsymbol{m}|-2,\tag{2.5}$$

$$\Delta(\boldsymbol{n})\leq\Delta(\boldsymbol{\mu})+\Delta(\boldsymbol{m}),\tag{2.6}$$

and

$$|\boldsymbol{\alpha}|=|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}|+|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}|-1\quad\text{or}\quad|\boldsymbol{\alpha}|=|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}|+|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}|.$$

其次，若我们假设

$$\Delta(\boldsymbol{m})\leq\frac{|\boldsymbol{m}|-2}{4}\quad\text{and}\quad\Delta(\boldsymbol{\mu})\leq\frac{|\boldsymbol{\mu}|-2}{4},\tag{2.7}$$

则有

$$\Delta(\boldsymbol{n})\leq\frac{|\boldsymbol{n}|-2}{4},\tag{2.8}$$

这里用到了（2.5）、（2.6）和（2.7）。此外，定义为

$$\boldsymbol{n}^+=\max_{\boldsymbol{j}\in\operatorname{supp}\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{j}|_1.$$

于是有

$$\boldsymbol{m}^+,\ \boldsymbol{\mu}^+\leq\boldsymbol{n}^++d(\Delta(\boldsymbol{m})+\Delta(\boldsymbol{\mu})).\tag{2.9}$$

3. The Birkhoff Normal Form

现在，我们按照伯克霍夫标准形的思路，通过有限步归纳构造辛变换 Γ 。

3.1. 第一步。在第一步（即 $s=1$），我们令

$$\mathcal{H}_1 := \widehat{H}(q,\bar{q}),$$

其中 $\widehat{H}(q,\bar{q})$ 由（1.13）给出。于是我们将 $\mathcal{H}_1$ 改写为

$$\mathcal{H}_1 = D + \mathcal{J} + Z_1 + R_1,$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} \omega_{\boldsymbol{j}} |q_{\boldsymbol{j}}|^2, \quad \mathcal{J} = \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} J_{\boldsymbol{j}}^2, \\ Z_1 &= \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=6, \Delta(\boldsymbol{n})=1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|=0, \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}} Z_1(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}, \\ R_1 &= \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=6, \Delta(\boldsymbol{n})=1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|=0, \boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\gamma}}} R_1(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

with

$$|Z_1(\boldsymbol{n})|, |R_1(\boldsymbol{n})| \le \epsilon^2,$$

这意味着

$$|Z_1(\boldsymbol{n})|, |R_1(\boldsymbol{n})| \le \epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{n}|-2)}, \tag{3.2}$$

其中使用 $|\boldsymbol{n}|=6$。

3.1.1. 同调方程。按照标准方法,

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \circ X_{F_1}^1,$$

其中，$X_{F_1}^1$ 是由哈密顿函数得到的辛变换 n

$$F_1 = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=6,\ \Delta(\boldsymbol{n})=1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|=0}} F_1(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{3.3}$$

其中

$$F_1(\boldsymbol{n}) = \frac{R_1(\boldsymbol{n})}{\sqrt{-1} \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} (\beta_{\boldsymbol{j}} - \gamma_{\boldsymbol{j}}) \omega_{\boldsymbol{j}}}.$$

由于频率 $\boldsymbol{\omega}$ 满足（η, M）-非共振条件（1.15），根据（3.2）可得

$$|F_1(\boldsymbol{n})| \le \eta^{-1} \left(1 + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})^-\right)^{3\sigma} (2 + 10\Delta(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}))^{2d|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|} \epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{n}|-2)}.$$

然后利用以下事实

$$\Delta(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}) \le \Delta(\boldsymbol{n}), \quad |\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}| \le |\boldsymbol{n}|, \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})^- \le \boldsymbol{n}^+, \tag{3.4}$$

可得

$$|F_1(\boldsymbol{n})| \le \epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{n}|-2)} \cdot \eta^{-1} \left(1 + \boldsymbol{n}^+\right)^{3\sigma} (2 + 10\Delta(\boldsymbol{n}))^{2d|\boldsymbol{n}|}. \tag{3.5}$$

由于

$$\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_{\boldsymbol{j}}} = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=6, \Delta(\boldsymbol{n})=1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|=0}} \gamma_{\boldsymbol{j}} F_1(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}-e_{\boldsymbol{j}}},$$

于是，利用（3.5）和 $|\boldsymbol{n}|=6$ 可得

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_{\boldsymbol{j}}}\right| \leq \epsilon^{1.8}\left(1+|\boldsymbol{j}|_1\right)^{-2\sigma} \tag{3.6}$$

其中注意到

$$0 \leq \boldsymbol{n}^{+}-|\boldsymbol{j}|_1 \leq d\Delta(\boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{j} \in \operatorname{supp} \boldsymbol{n}.$$

因此，对于 $|t| \leq 1$， $X_{F_1}^t$ 接近恒等映射。此外，由 (1.12) 和 (3.6) 可得

$$\left|J_{\boldsymbol{j}} \circ \Phi_{F_1}^1\right| \leq \left(1+\epsilon^{0.5}\right)\left(1+|\boldsymbol{j}|_1\right)^{-3\sigma}. \tag{3.7}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\left|J_{\boldsymbol{j}} \circ \Phi_{F_1}^1\right| &= \left|\epsilon^{-1}\left(I_{\boldsymbol{j}} \circ \Phi_{F_1}^1-\zeta_{\boldsymbol{j}}\right)\right| \\ &\leq \epsilon^{-1}\left|I_{\boldsymbol{j}} \circ \Phi_{F_1}^1-I_{\boldsymbol{j}}\right|+\epsilon^{-1}\left|I_{\boldsymbol{j}}-\zeta_{\boldsymbol{j}}\right| \\ &\leq \left(1+\epsilon^{0.5}\right)\left(1+|\boldsymbol{j}|_1\right)^{-3\sigma},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式基于 (1.12) 和 (3.6)。

3.1.2. $\mathcal{H}_2$的估计。接下来，定义 $\{H, G\}^{(0)}=H$ 和

$$\{H, G\}^{(l)}=\left\{\{H, G\}^{(l-1)}, G\right\}, \quad l \geq 1.$$

利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 =& \mathcal{H}_1 \circ X_{F_1}^1 \\ =& D+\{D, F_1\}+\frac{1}{2!}\{D, F_1\}^{(2)}+\cdots \\ &+\mathcal{J}+\{\mathcal{J}, F_1\}+\frac{1}{2!}\{\mathcal{J}, F_1\}^{(2)}+\cdots \\ &+Z_1+\{Z_1, F_1\}+\frac{1}{2!}\{Z_1, F_1\}^{(2)}+\cdots \\ &+R_1+\{R_1, F_1\}+\frac{1}{2!}\{R_1, F_1\}^{(2)}+\cdots \\ :=& D+\mathcal{J}+Z_2+R_2+O\left(\epsilon^{0.24 M}\right),\end{aligned}$$

其中

$$Z_2-Z_1=\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=8,\ \Delta(\boldsymbol{n}) \leq 1 \\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}} Z_2(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$R_2=\sum_{\substack{8 \leq|\boldsymbol{n}| \leq M \\ \Delta(\boldsymbol{n}) \leq M / 4}} R_2(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

and

$$O\left(\epsilon^{0.24 M}\right)=\frac{1}{M^*!} \int_0^1(1-t)^{M^*}\left\{D+\mathcal{J}+Z_2+R_2, F_2\right\}^{\left(M^*+1\right)} \circ X_{F_2}^t \, dt,$$

其中 $M^*=[M/4]$。

首先，我们将估计 $|Z_2(\boldsymbol{n})|$ 和 $|R_2(\boldsymbol{n})|$。只需估计

$$\{D, F_1\}^{(l)},\ \{\mathcal{J}, F_1\}^{(l)},\ \{Z_1, F_1\}^{(l)} \text{ and } \{R_1, F_1\}^{(l)}, \quad 1 \leq l \leq M^*.$$

我们先考虑 $\{Z_1, F_1\}^{(l)}$， $l \geq 1$。当 $l = 1$时，由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}|\{Z_1, F_1\}(\boldsymbol{n})| &\leq 2\epsilon^{-1}\left(2^{|\boldsymbol{n}|}\left(\Delta(\boldsymbol{\mu})+\Delta(\boldsymbol{m})\right)\right)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2|Z_1(\boldsymbol{\mu})||F_1(\boldsymbol{m})| \\ &\leq 2\epsilon^{-1}\left(2^{|\boldsymbol{n}|}\left(\Delta(\boldsymbol{\mu})+\Delta(\boldsymbol{m})\right)\right)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2\epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{\mu}|-2)}\epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{m}|-2)} \\ &\quad\cdot\eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{m}^+\right)^{3\sigma}\left(2+10\Delta(\boldsymbol{m})\right)^{2d|\boldsymbol{m}|}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，最后一个不等式基于（3.2）和（3.5）。注意， Z_1， F_1 分别由（3.1）和（3.3）给出。因此，我们有

$$|\boldsymbol{n}| = 10, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = 0 \tag{3.9}$$

and

$$\Delta(\boldsymbol{n}) \leq \Delta(\boldsymbol{\mu}) + \Delta(\boldsymbol{m}) = 2 = (|\boldsymbol{n}|-2)/4, \tag{3.10}$$

其中，最后一个不等式基于（2.6）。此外，根据（2.5）、（2.9）和（3.10），我们可以得到

$$\begin{aligned}(3.8) &\leq \epsilon^{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{n}|-2)-1}2^{|\boldsymbol{n}|-1}(|\boldsymbol{n}|-2)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2 \\ &\quad\cdot\eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{n}^+\right)^{3\sigma}\left(1+d|\boldsymbol{n}|\right)^{3\sigma}(3|\boldsymbol{n}|)^{2d|\boldsymbol{n}|}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

此外，由（3.9）以及 $\sigma \geq d+1$这一事实，我们可以将（3.11）化简为

$$|\{Z_1, F_1\}(\boldsymbol{n})| \leq \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}. \tag{3.12}$$

对于 $l \geq 2$，利用引理2.2、注记2.2 并按照（3.12）的证明，通过归纳法可得

$$\begin{aligned}\left|\{Z_1, F_1\}^{(l)}(\boldsymbol{n})\right| &\leq \epsilon^{2+l}2^{2l-1}(2^{|\boldsymbol{n}|-2}|\boldsymbol{n}|)^l(|\boldsymbol{n}|+2l)^{2l} \\ &\quad\cdot\left[\eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{n}^+\right)^{3\sigma}\left(1+d|\boldsymbol{n}|\right)^{3\sigma}(3|\boldsymbol{n}|)^{2d|\boldsymbol{n}|}\right]^l \\ &\leq \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{2+l}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|l}(1+\boldsymbol{n}^+)^{3\sigma l} \\ &\leq \frac{1}{3}\left(\epsilon/\eta\right)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}\left(6d|\boldsymbol{n}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中，最后一个不等式基于以下事实

$$l = (|\boldsymbol{n}|-6)/4.$$

同样，对于 $l \geq 1$，有

$$\left|\{R_1, F_1\}^{(l)}(\boldsymbol{n})\right| \leq \frac{1}{3}\left(\epsilon/\eta\right)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}\left(6d|\boldsymbol{n}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)},$$

and

$$\left|\{D, F_1\}^{(l)}(\boldsymbol{n})\right| \leq \frac{1}{3}\left(\epsilon/\eta\right)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}\left(6d|\boldsymbol{n}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)},$$

其中使用 $\{D, F_1\} = -R_1$。

现在我们估计 $\{\mathcal{J}, F_1\}^{(l)}$， $l \geq 1$。当 $l = 1$时，有 $|\boldsymbol{n}| = 8$且 $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$。然后仿照（3.12）的证明，可得

$$|\{\mathcal{J}, F_1\}(\boldsymbol{n})| \leq \frac{1}{3}\left(\epsilon/\eta\right)^{1+|\boldsymbol{n}|/4}\left(6d|\boldsymbol{n}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}.$$

当 $l \geq 2$ 时，有 $l = (|\boldsymbol{n}| - 4)/4$，并且 $|\boldsymbol{n}| \geq 12$，这意味着 $3l \leq |\boldsymbol{n}| - 6$。然后仿照（3.13）的证明，可得

$$\begin{aligned}\left|\{\mathcal{J}, F_1\}^{(l)}(\boldsymbol{n})\right| &\leq \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{2+l}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|l}(1+\boldsymbol{n}^+)^{3\sigma l} \\ &\leq \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{1+|\boldsymbol{n}|/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}.\end{aligned}$$

总之，我们有

$$|Z_2(\boldsymbol{n})| + |R_2(\boldsymbol{n})| \leq (\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}. \tag{3.14}$$

最后，我们有

$$\left|\left\{I_{\boldsymbol{j}}, O\left(\epsilon^{0.24M}\right)\right\}\right| \leq \epsilon^{0.24M}(6dM)^{4\sigma M^2}(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma}.$$

证明的详细过程将在下一小节中给出（参见（3.21））。

3.2. 第二步。按照标准方法，

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2 \circ X^1_{F_2},$$

其中 $X^1_{F_2}$ 是由哈密顿量函数得到的辛变换 n

$$F_2 = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=8,\ \Delta(\boldsymbol{n})\leq 1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|\leq 1}} F_2(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

其中

$$F_2(\boldsymbol{n}) = \frac{R_2(\boldsymbol{n})}{\sqrt{-1}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}(\beta_{\boldsymbol{j}} - \gamma_{\boldsymbol{j}})\omega_{\boldsymbol{j}}}.$$

由于频率 $\boldsymbol{\omega}$ 满足 $(\eta,\ M)$-非共振条件（1.15），因此有

$$\begin{aligned}|F_2(\boldsymbol{n})| \leq{}& (\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)} \\ &\cdot \eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{n}^+\right)^{3\sigma}(2+10\Delta(\boldsymbol{n}))^{2d|\boldsymbol{n}|},\end{aligned}$$

其中使用了（3.4）。此外，有

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_{\boldsymbol{j}}} = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=8,\ \Delta(\boldsymbol{n})\leq 1 \\ |\boldsymbol{\alpha}|\leq 1}} \left(\alpha_{\boldsymbol{j}} F_2(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}-e_j} q^{\boldsymbol{\beta}+e_j}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}} + \gamma_{\boldsymbol{j}} F_2(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}-e_j}\right). \tag{3.15}$$

根据（1.12）并仿照（3.6）的证明，我们可以得出，（3.15）右端的第二项可估计为

$$\frac{1}{2}\epsilon^2(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-2\sigma},$$

而（3.15）右端的第一项可估计为

$$\frac{1}{2}\epsilon^2(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-\sigma}.$$

因此，我们有

$$\left|\frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_{\boldsymbol{j}}}\right| \leq \epsilon^2(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-\sigma} \tag{3.16}$$

and

$$|J_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_1}|\leq\left(1+\sum_{h=1}^{2}\epsilon^{0.5h}\right)(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-2\sigma},$$

其中，最后一个不等式基于（3.16），并遵循（3.7）的证明。

事实上，我们可以对$|J_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_1}|$得到更好的估计。注意到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^t_{F_2}&=\{I_{\boldsymbol{j}},F_2\}\circ\Phi^t_{F_2}\\&=\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=8,\,\Delta(\boldsymbol{n})\leq1\\|\boldsymbol{\alpha}|\leq1}}F_2(\boldsymbol{n})\left\{q_{\boldsymbol{j}}\bar{q}_{\boldsymbol{j}},J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}\right\}\circ\Phi^t_{F_2}\\&=\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=8,\,\Delta(\boldsymbol{n})\leq1\\|\boldsymbol{\alpha}|\leq1}}F_2(\boldsymbol{n})(\gamma_{\boldsymbol{j}}-\beta_{\boldsymbol{j}})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}\circ\Phi^t_{F_2}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

由（3.17），我们可以得出

$$|I_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_2}-I_{\boldsymbol{j}}|\leq\epsilon^2(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma}.\tag{3.18}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}|J_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_2}|&=|\epsilon^{-1}(I_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_2}-\zeta_{\boldsymbol{j}})|\\&\leq\epsilon^{-1}|I_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi^1_{F_2}-I_{\boldsymbol{j}}|+|J_{\boldsymbol{j}}|\\&\leq\left(1+\sum_{h=1}^{2}\epsilon^{0.5h}\right)(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma},\end{aligned}\tag{3.19}$$

其中，最后一个不等式基于（3.7）和（3.18）。

接下来，利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3=&\mathcal{H}_2\circ X^1_{F_2}\\=&D+\{D,F_2\}+\frac{1}{2!}\{D,F_2\}^{(2)}+\cdots\\&+\mathcal{J}+\{\mathcal{J},F_2\}+\frac{1}{2!}\{\mathcal{J},F_2\}^{(2)}+\cdots\\&+Z_2+\{Z_2,F_2\}+\frac{1}{2!}\{Z_2,F_2\}^{(2)}+\cdots\\&+R_2+\{R_2,F_2\}+\frac{1}{2!}\{R_2,F_2\}^{(2)}+\cdots\\:=&D+\mathcal{J}+Z_3+R_3+O\left(\epsilon^{0.24M}\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}Z_3-Z_2&=\sum_{|\boldsymbol{n}|=10,\,\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}Z_3(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},\\R_3&=\sum_{\substack{10\leq|\boldsymbol{n}|\leq M\\\Delta(\boldsymbol{n})\leq M/4}}R_3(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},\end{aligned}$$

and

$$O\left(\epsilon^{0.24M}\right)=\frac{1}{M^*!}\int_0^1(1-t)^{M^*}\left\{D+\mathcal{J}+Z_2+R_2,F_2\right\}^{(M^*+1)}\circ X^t_{F_2}\,dt,$$

与 $M^*=[M/4]$。

首先，我们估计 $|Z_3(\boldsymbol{n})|$ 和 $|R_3(\boldsymbol{n})|$。根据（3.14）的证明，只需估计 $\{Z_2, F_2\}$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
|\{Z_2,F_2\}(\boldsymbol{n})| \leq\ & 2\epsilon^{-1}\left(2^{|\boldsymbol{n}|}\left(|\boldsymbol{n}|-2\right)/4\right)\left(|\boldsymbol{n}|+2\right)^2 \\
& \cdot(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{\mu}|-2)/4}\left(6d|\boldsymbol{\mu}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{\mu}|(|\boldsymbol{\mu}|-4)}(1+\boldsymbol{\mu}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{\mu}|-6+|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}|)} \\
& \cdot(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{m}|-2)/4}\left(6d|\boldsymbol{m}|\right)^{4\sigma|\boldsymbol{m}|(|\boldsymbol{m}|-4)}(1+\boldsymbol{m}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{m}|-6+|\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}|)} \\
& \cdot\eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{m}^+\right)^{3\sigma}\left(3|\boldsymbol{m}|\right)^{2d|\boldsymbol{m}|} \\
\leq\ & \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4-2)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)} \\
\leq\ & \frac{1}{3}(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$|Z_3(\boldsymbol{n})|+|R_3(\boldsymbol{n})| \leq (\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}. \tag{3.20}$$

最后，由于（3.17），我们可以得出结论：

$$\left|\left\{I_{\boldsymbol{j}}, O\left(\epsilon^{0.24M}\right)\right\}\right| \leq \epsilon^{0.24M}(6dM)^{4\sigma M^2}(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma}. \tag{3.21}$$

3.3. 一般步骤。

引理 3.1（迭代引理）。对于 $3 \leq s \leq (M-4)/2$，考虑哈密顿量

$$\mathcal{H}_s = D + \mathcal{J} + Z_s + R_s + O\left(\epsilon^{0.24M}\right),$$

其中

$$Z_s - Z_{s-1} = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=2s+4, \\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}} Z_s(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$R_s = \sum_{\substack{2s+4\leq|\boldsymbol{n}|\leq M \\ \Delta(\boldsymbol{n})\leq M/4}} R_s(\boldsymbol{n}) J^{\boldsymbol{\alpha}} q^{\boldsymbol{\beta}} \bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

and

$$O\left(\epsilon^{0.24M}\right) = \frac{1}{M^*!}\int_0^1 (1-t)^{M^*}\left\{D+\mathcal{J}+Z_s+R_s, F_s\right\}^{(M^*+1)} \circ X_{F_s}^t \, dt,$$

与 $M^* = [M/4]$。设 $\boldsymbol{\omega}$满足 (η, M)-非共振条件 (1.15)，并假设

$$|Z_s(\boldsymbol{n})|+|R_s(\boldsymbol{n})| \leq (\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}, \tag{3.22}$$

且 $\Delta(\boldsymbol{n}) \leq (|\boldsymbol{n}|-2)/4$ 属于 $Z_s + R_s$。

那么存在由哈密顿函数F_s 生成的变量变换$X_{F_s}^1$，满足

$$\left|\frac{\partial F_s}{\partial \bar{q}_{\boldsymbol{j}}}\right| \leq \epsilon^{1+0.5s}\left(1+|\boldsymbol{j}|_1\right)^{-\sigma} \tag{3.23}$$

and

$$|I_{\boldsymbol{j}} \circ \Phi_{F_s}^1 - I_{\boldsymbol{j}}| \leq \epsilon^{1+0.5s}(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma}, \tag{3.24}$$

使得

$$\mathcal{H}_{s+1}=\mathcal{H}_s\circ X_{F_s}^1=D+\mathcal{J}+Z_{s+1}+R_{s+1}+O\left(\epsilon^{0.24M}\right),$$

其中

$$Z_{s+1}-Z_s=\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=2s+6,\\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}} Z_{s+1}(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

and

$$R_{s+1}=\sum_{\substack{2s+6\le|\boldsymbol{n}|\le M\\ \Delta(\boldsymbol{n})\le M/4}} R_{s+1}(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}.$$

此外，有

$$|Z_{s+1}(\boldsymbol{n})|+|R_{s+1}(\boldsymbol{n})|\le(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)},$$

且 $\Delta(\boldsymbol{n})\le(|\boldsymbol{n}|-2)/4$ 属于 $Z_{s+1}+R_{s+1}$。

证明。首先，作为一种标准的 Birkhoff正规形技巧，我们知道

$$F_s=\sum_{|\boldsymbol{n}|=2s+4} F_s(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

其中

$$F_s(\boldsymbol{n})=\frac{R_s(\boldsymbol{n})}{\sqrt{-1}\sum\limits_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}(\beta_{\boldsymbol{j}}-\gamma_{\boldsymbol{j}})\omega_{\boldsymbol{j}}}. \tag{3.25}$$

由于频率 $\boldsymbol{\omega}$ 满足（η, M）-非共振条件（1.15），结合（3.25）可得

$$\begin{aligned}|F_s(\boldsymbol{n})|\le&(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^+)^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)}\\&\cdot\eta^{-1}\left(1+\boldsymbol{n}^+\right)^{3\sigma}(2+10\Delta(\boldsymbol{n}))^{2d|\boldsymbol{n}|}\end{aligned} \tag{3.26}$$

这里用到了（3.4）。由（3.26）以及第二步中（3.16）的证明可得（3.23）。此外，由（3.18）的证明可得（3.24）。

接下来，利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{s+1}=&\mathcal{H}_s\circ X_{F_s}^1\\=&D+\{D,F_s\}+\frac{1}{2!}\{D,F_s\}^{(2)}+\cdots\\&+\mathcal{J}+\{\mathcal{J},F_s\}+\frac{1}{2!}\{\mathcal{J},F_s\}^{(2)}+\cdots\\&+Z_s+\{Z_s,F_s\}+\frac{1}{2!}\{Z_s,F_s\}^{(2)}+\cdots\\&+R_s+\{R_s,F_s\}+\frac{1}{2!}\{R_s,F_s\}^{(2)}+\cdots\\:=&D+\mathcal{J}+Z_{s+1}+R_{s+1}+O\left(\epsilon^{0.24M}\right),\end{aligned}$$

其中

$$Z_{s+1}-Z_s=\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=2s+6\\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}}} Z_{s+1}(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}},$$

and

$$R_{s+1}=\sum_{\substack{2s+6\le|\boldsymbol{n}|\le M\\ \Delta(\boldsymbol{n})\le M/4}} R_{s+1}(\boldsymbol{n})J^{\boldsymbol{\alpha}}q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}.$$

鉴于（3.22），并在第二步按照（3.20）和（3.21）中的估计，我们得到

$$|Z_{s+1}(\boldsymbol{n})|+|R_{s+1}(\boldsymbol{n})|\leq(\epsilon/\eta)^{1+(|\boldsymbol{n}|-2)/4}(6d|\boldsymbol{n}|)^{4\sigma|\boldsymbol{n}|(|\boldsymbol{n}|-4)}(1+\boldsymbol{n}^{+})^{\sigma(|\boldsymbol{n}|-6+|\boldsymbol{\alpha}|)},$$

并且

$$\left|\left\{I_{\boldsymbol{j}},O\left(\epsilon^{0.24M}\right)\right\}\right|\leq\epsilon^{0.24M}(6dM)^{4\sigma M^{2}}(1+|\boldsymbol{j}|_{1})^{-6\sigma}.$$

此外，鉴于备注2.2 (参见(2.8))的第二个结论，我们通过归纳法得出 $\Delta(\boldsymbol{n})\leq(|\boldsymbol{n}|-2)/4$ 在 $Z_{s+1}+R_{s+1}$。

□

备注 3.1。由式(3.24)，并沿用(3.19)的证明，我们可以得出

$$|J_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi_{F_{s}}^{1}|\leq\left(1+\sum_{h=1}^{s}\epsilon^{0.5h}\right)(1+|\boldsymbol{j}|_{1})^{-3\sigma},\tag{3.27}$$

我们在迭代过程中用到了这一点。

4. Estimate on the measure

引理 4.1。对于由(Ω 给出的1.5)，存在一个集合 $\Omega'\subset\Omega$ 满足

$$\operatorname{mes}(\Omega')<\eta,\tag{4.1}$$

使得对于任意 $\zeta\in\Omega\backslash\Omega'$，由 $\boldsymbol{\omega}$（1.14）给出的频率都是 $(\eta,\ M)$-非共振的。证明。定义集合 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{k})$ 为

$$\left\{\zeta\in\Omega:\ \left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^{d}}k_{\boldsymbol{j}}\omega_{\boldsymbol{j}}\right|<\frac{\eta}{(1+\boldsymbol{k}^{-})^{3\sigma}(2+10\Delta(\boldsymbol{k}))^{2d|\boldsymbol{k}|}}\right\},$$

其中 $\sigma\geq d+1$。令

$$\Omega'=\bigcup_{|\boldsymbol{k}|,\Delta(\boldsymbol{k})\leq M}\mathfrak{R}(\boldsymbol{k}),$$

an容易看出，对于每个 $\zeta\in\Omega\backslash\Omega'$，频率 $\boldsymbol{\omega}$是 $(\eta,\ M)$-非共振的。现在只需证明估计式（4.1）成立。首先，有

$$\operatorname{mes}(\mathfrak{R}(\boldsymbol{k}))<\frac{\eta}{(1+\boldsymbol{k}^{-})^{\sigma}\left(2+10\Delta(\boldsymbol{k})\right)^{2d|\boldsymbol{k}|}}.$$

其次，对于任意给定的 $\boldsymbol{k}$，满足 $|\boldsymbol{k}|,\Delta(\boldsymbol{k})\leq M$，存在满足$|\boldsymbol{s}|_{1}=\boldsymbol{k}^{-}$ 的 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^{d}$，使得 $\operatorname{supp}\boldsymbol{k}\subset\mathcal{B}(\boldsymbol{s})$，其中

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{s})=\left\{\boldsymbol{j}\middle||\boldsymbol{j}-\boldsymbol{s}|_{\infty}\leq M\right\}.$$

注意到满足 $\operatorname{supp}\boldsymbol{k}\subset\mathcal{B}(\boldsymbol{s})$ 的 $\boldsymbol{k}$ 的数量不超过

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=6}^{M}(2i+2)^{dj},$$

其中我们取 $\Delta(\boldsymbol{k})=i$，且 $|\boldsymbol{k}|=j$。于是有，

$$\operatorname{mes}(\Omega')\leq\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^{d}}\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=6}^{M}(2i+2)^{dj}\frac{\eta}{(1+|\boldsymbol{s}|_{1})^{\sigma}(2+10i)^{2dj}}<\eta.$$

□

5. The proof of main theorem

5.1. 定理1.2的证明。

证明。 由引理 3.1 （迭代引理），可知当 $s=(M-4)/2$，对于给定的哈密顿函数 $\mathcal{H}_1$ 存在一个变量变换 $\Phi = X^1_{F_1}\circ X^1_{F_2}\circ\cdots\circ X^1_{F_{(M-4)/2}}$ 使得

$$\widetilde{H}\left(\widetilde{q},\widetilde{\overline{q}}\right)=\mathcal{H}_1\circ\Phi=D+\mathcal{J}+O(|\widetilde{I}|)+O\left(\epsilon^{0.24M}\right),$$

其中 $O(|I|$ 表示仅依赖于作用变量的项 $I=(I_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ 且 $\widetilde{I}_{\boldsymbol{j}}=|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}|^2$ 仅此而已。由（3.23），我们可以得出 Φ 接近恒等映射。此外，由（3.27）可得

$$\left|\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}}:=J_{\boldsymbol{j}}\circ\Phi\right|\leq 2(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma}.$$

Let

$$M=\frac{\ln\epsilon^{-1}}{100\sigma\ln\ln\epsilon^{-1}}. \tag{5.1}$$

Then

$$O\left(\epsilon^{0.24M}\right)\sim O\left(\epsilon\exp\left\{\frac{-|\ln\epsilon|^2}{10^4\sigma\ln\ln\epsilon^{-1}}\right\}\right).$$

首先，我们证明新坐标系中的长时间稳定性，即稳定时间

$$T^*\geq\exp\left\{\frac{|\ln\epsilon|^2}{10^4\sigma\ln\ln\epsilon^{-1}}\right\}, \tag{5.2}$$

其中

$$T^*=\inf\left\{|t|\,\middle|\,\left|\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}}(t)\right|=4(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-3\sigma},\ \exists\,\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d\right\}. \tag{5.3}$$

Let

$$|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(0)|^2=\zeta_{\boldsymbol{j}},$$

这意味着 $\|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(0)\|^2_\sigma\leq 1$。接下来我们指出

$$\|\widetilde{q}(t)\|^2_\sigma\leq 4,\quad\text{when}\quad|t|\leq T^*. \tag{5.4}$$

否则，存在满足 $|t^*|\leq T^*$ 的 t^*，使得 $\|\widetilde{q}(t^*)\|^2_\sigma>4$（即，存在满足 $|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}_0}(t^*)|^2>4(1+|\boldsymbol{j}_0|_1)^{-2\sigma}$ 的 $\boldsymbol{j}_0\in\mathbb{Z}^d$）。注意到

$$\epsilon\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}}=|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}|^2-\zeta_{\boldsymbol{j}},$$

因此我们有

$$\left|\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}_0}(t^*)\right|\geq\epsilon^{-1}\left(|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}_0}(t^*)|^2-\zeta_{\boldsymbol{j}_0}\right)\geq 3\epsilon^{-1}(1+|\boldsymbol{j}_0|_1)^{-2\sigma},$$

这与式（5.3）相矛盾。

鉴于（5.3）和（5.4），我们得出，对于任意 $\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d$ 和 $|t|\leq T^*$，

$$\left|\frac{d}{dt}|\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(t)|^2\right|=\left|\left\{\widetilde{I}_{\boldsymbol{j}},\widetilde{H}\right\}\right|<\epsilon\exp\left\{\frac{-|\ln\epsilon|^2}{10^4\sigma\ln\ln\epsilon^{-1}}\right\}(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma}.$$

若（5.2）不成立，则利用牛顿-莱布尼茨公式可得

$$\begin{aligned}\left||\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(T^*)|^2-\zeta_{\boldsymbol{j}}\right| &\leq T^*\epsilon\exp\left\{\frac{-|\ln\epsilon|^2}{10^4\sigma\ln\ln\epsilon^{-1}}\right\}(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma}\\ &<\epsilon(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma},\end{aligned}$$

这意味着

$$\left|\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}}(T^*)\right|=\epsilon^{-1}\left||\widetilde{q}_{\boldsymbol{j}}(T^*)|^2-\zeta_{\boldsymbol{j}}\right|<(1+|\boldsymbol{j}|_1)^{-6\sigma}. \tag{5.5}$$

另一方面，根据（5.3），我们得到存在 $\boldsymbol{j}_0'$ 使得

$$\left|\widetilde{J}_{\boldsymbol{j}_0'}(T^*)\right|=4(1+|\boldsymbol{j}_0'|_1)^{-3\sigma},$$

这与（5.5）相矛盾。

最后，注意到 Φ 接近恒等映射，我们回到包含伸缩变换（1.10）的普通坐标系即可完成证明。□

5.2. 定理**1.3**的证明。

证明。首先，我们引入一个新的相空间，其定义为

$$\widetilde{\ell}^{\sigma}_{\infty}=\left\{q=(q_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}:|||q|||_{\sigma}:=\sup_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}|q_{\boldsymbol{j}}|(1+\langle\boldsymbol{j}\rangle)^{\sigma}<\infty\right\}, \tag{5.6}$$

其中 $\langle\boldsymbol{j}\rangle=$ 最大值$\{|\boldsymbol{j}|_1,1\}$。那么条件（1.7）意味着

$$|||q(0)|||_{\sigma}\leq\epsilon.$$

其次，由（1.1）和（1.2）可知，对于任意 $\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d$

$$|\{I_{\boldsymbol{j}},H\}|=|\{I_{\boldsymbol{j}},R\}|\leq\sum_{\substack{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d},|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}|=6\\ \Delta(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\leq1}}\left|R^{\beta\gamma}\right||\gamma_{\boldsymbol{j}}-\beta_{\boldsymbol{j}}|\left|q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}\right|. \tag{5.7}$$

只需考虑这一项

$$\left\{I_{\boldsymbol{j}},q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}\right\}\neq0,$$

这意味着

$$\boldsymbol{j}\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}). \tag{5.8}$$

那么，若假设 $|||q(t)|||_{\sigma}\leq2\epsilon$，利用（5.8）以及以下事实

$$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}|=6\quad\text{and}\quad\Delta(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\leq1,$$

有

$$\left|q^{\boldsymbol{\beta}}\bar{q}^{\boldsymbol{\gamma}}\right|\leq(2\epsilon)^6(1+\langle\boldsymbol{j}\rangle)^{-\sigma}(\max\{\langle\boldsymbol{j}\rangle,2\})^{-5\sigma}. \tag{5.9}$$

因此，结合（1.6）、（5.7）和（5.9），注意到 $|R^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}}|\leq1$（参见（1.2））， 我们得到

$$\begin{aligned}|\{I_{\boldsymbol{j}},H\}|&\leq4^{6d}\cdot6(2\epsilon)^6(1+\langle\boldsymbol{j}\rangle)^{-3\sigma}\left(\frac{1+\langle\boldsymbol{j}\rangle}{\max\{\langle\boldsymbol{j}\rangle,2\}}\right)^{2\sigma}2^{-3\sigma}\\ &\leq\epsilon^5(1+\langle\boldsymbol{j}\rangle)^{-3\sigma}2^{-\sigma},\end{aligned} \tag{5.10}$$

其中，最后一个不等式是基于这一事实

$$\frac{1+\langle\boldsymbol{j}\rangle}{\max\{\langle\boldsymbol{j}\rangle,2\}}\leq\frac{3}{2}.$$

最后，按照（5.2）的证明，我们可以完成（1.8）的证明。此外，注意到 σ 可以独立于 ϵ选取，我们可以通过取$\sigma \geq \epsilon^{-1}$来完成（1.9）的证明。□

Acknowledgments

H.C. 获得了中国国家自然科学基金（编号：11671066、11401041）和 NSFSP（编号：ZR2019MA062）的资助。Y.S. 获得了中国国家自然科学基金（编号：12271380）的资助。

References

[和58] P.W. Anderson。某些随机格点中的扩散缺失。 *Physical review*，109 5 1492( ): –1505，1958。[BFG88] G. Benettin、J. Fr¨ohlich 和 A. Giorgilli。具有无限多个自由度的哈密顿系统的 Nekhoroshev 型定理。 *Comm. Math. Phys.*，119 108，1988 1 95( ): – 。[Bou04] J. Bourgain。高维哈密顿系统和偏微分方程中的稳定性与扩散问题。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，24(5):1331– 1357，2004。[BW07] J. Bourgain 和 W.-M. Wang。非线性 Schr¨odinger 方程的扩散界。载于 *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*，第 163 卷， *Ann. of Math.Stud.*，第 21–42 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2007。[BW08] J. Bourgain 和 W.-M. Wang。非线性随机 Schr¨odinger 方程的拟周期解。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，10(1):1–45，2008。[CMS22] H. Cong、L. Mi 和 Y. Shi。非线性 Schr¨odinger 方程的超指数稳定性估计。 *J. Funct. Anal.*，283(12):论文编号 109682，24 页，2022。[CSZ21] H. Cong、Y. Shi 和 Z. Zhang。非线性 Schr¨odinger 方程的长时间安德森局域化再探。 *J. Stat. Phys.*，182(1):论文编号 10，22 页，2021。[FKS09] S. Fishman、Y. Krivolapov 和 A. Soffer。带随机势的非线性 Schr¨odinger 方程的微扰理论。 *Nonlinearity*，22(12):2861–2887，2009。[FKS12] S. Fishman、Y. Krivolapov 和 A. Soffer。带随机势的非线性 Schr¨odinger 方程：结果与难题。 *Nonlinearity*，25(4):R53–R72，2012。[FSW86] J. Fr¨ohlich、T. Spencer 和 C. E. Wayne。无序非线性动力系统中的局域化。 *J. Stat. Phys.*，42(3-4):247–274，1986。[SBFS07] T. Schwartz、G. Bartal、S. Fishman 和 M. Segev。无序二维光子晶格中的输运与安德森局域化。 *Nature*，446(7131):52–55，2007。[Sha07] B. Shapiro。无序存在时玻色-爱因斯坦凝聚体的膨胀。

Phys. , ( ): – 。[*Rev. Lett.* 99 6 060602,1 4, 2007

WZ09] W.-M. Wang 和 Z. Zhang。非线性随机 Schr¨odinger 方程的长时间安德森局域化。 *J. Stat. Phys.*，134(5-6):953–968，2009。

(H. Cong) School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian116024, China*Email address*: conghongzi@dlut.edu.cn

(Y. Shi) School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China *Email address*: yunfengshi@scu.edu.cn

(Z. Zhang) School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian116024, China*Email address*: dlutzzh@163.com