arXiv:2303.01087v2 [math.AP] 9 Oct 2023

关于 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程的整体适定性

RANA BADREDDINE

ABSTRACT. 我们研究聚焦型（符号为 $+$）和散焦情形（符号为 $-$）下的 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm 2\,\partial_x \Pi(|u|^2)u = 0\,, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}\,,$$

其中 Π 是 Szegő 投影算子 $\Pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\,\mathrm{e}^{inx}\right) = \sum_{n\geq 0} \widehat{u}(n)\,\mathrm{e}^{inx}$。借助 Lax 对表述，我们推导出该方程的显式解。此外，对于这个 L^2–临界方程，我们证明了在所有 Hardy Sobolev 空间 $H^s_+(\mathbb{T})$,$s \geq 0$中，当聚焦情形下的 L^2–初始数据足够小时，以及散焦情形下任意 L^2–数据时，方程均整体适定。此外，我们还证明了所有$H^s_+(\mathbb{T})$ $s \geq 0$.中的轨道相对紧性

CONTENTS

1. 引言 2
1.1. 主要结果 1.2. 其他相关 4
方程 1.3. 论文概述 7
8
致谢。 8
2 。Lax 对结构 8 2.1. 解的显式公式 10 2.2. (CS$^+$) 在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中的整体适定性 $s > \frac{3}{2}$ 14
3. 将 (CS$^+$) 的流延拓至 $L^2_+(\mathbb{T})$ 18 3.1. $L^2_+(\mathbb{T})$ 中极限的唯一性与弱收敛 19 3.1.1. $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 上 L_{u_0} 的谱性质 20 3.1.2. $u(t)$ 极限的刻画 23 3.2. $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的强收敛与 L^2-质量守恒 23 4. 推论 1.3 与定理 1.4 的证明 29 5. Calogero–Sutherland DNLS散焦方程 (CS$^-$) 33 6. 最后的评论与开放问题 35
参考文献 36

日期：2023年10月10日。2020年数学主题分类。37 K10（主要分类）。关键词。Calogero–Sutherland–Moser 系统、导数非线性薛定谔方程（DNLS）、整体适定性、显式解、Hardy 空间、可积系统、Lax 算子、 L^2–临界、相对紧轨道。

1. Introduction

本文旨在证明环面 $\big(x \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\big)$ 上 Calogero–Sutherland 导数非线性 Schr¨odinger 方程的整体适定性:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm 2D_+(|u|^2)u = 0\,, \\ u(t=0,x) \;=\; u_0\,, \qquad x \in \mathbb{T}\,, \end{cases} \tag{CS}$$

对于较小的 L^2初始数据 u_0，在聚焦情形（符号为 $+$）下，以及对于任意 L^2初始数据，在散焦情形（符号为 $-$）下。非线性项 (CS) 中的算子 $D\Pi$表示 $D = -i\partial_x$， 且 Π 是 Szeg˝o 投影算子，作用于 $L^2(\mathbb{T})$ 上，定义为

$$\Pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\,\mathrm{e}^{inx}\right) := \sum_{n\geq 0} \widehat{u}(n)\,\mathrm{e}^{inx}\,, \tag{1.1}$$

其值取于 Hardy 空间

$$L^2_+(\mathbb{T}) := \big\{u \in L^2(\mathbb{T}) \,|\, \widehat{u}(n) = 0\,,\, \forall n \in \mathbb{Z}_{\leq -1}\big\} \equiv \Pi(L^2(\mathbb{T}))\,. \tag{1.2}$$

我们在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 上赋予 $L^2(\mathbb{T})$ 的标准内积。$\langle u \,|\, v\rangle = \int_0^{2\pi} u\bar{v}\,\frac{dx}{2\pi}$. 我们关注的是研究该方程，其中未知函数 u取自环面的 Hardy 空间，并具有一定的正则性。因此，我们将 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})$ 的子空间 $H^s_+(\mathbb{T})$ 定义为

$$H^s_+(\mathbb{T}) := H^s(\mathbb{T}) \cap L^2_+(\mathbb{T})\,, \qquad s \geq 0\,, \tag{1.3}$$

并赋予其 Sobolev 范数

$$\|u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u\|_{L^2}\,, \qquad \langle D\rangle^s = (1+|D|^2)^{s/2}\,.$$

在物理学中，这个动力学（CS）方程源自经典的 Calogero–Sutherland–Moser 系统（或 Toda 系统），该系统于 20 世纪 60 年代末至 70 年代初提出 [Ca69, Ca71, Su71, Su 75]。这一物理模型对应一个 N体问题，用以描述 N 相同粒子之间的两两相互作用。Abanov–Bettelheim–Wiegmann 在 [ABW09] 中表明，对此类模型取热力学极限并进行变量替换，即可得到（CS）方程。在数学领域，[GL22]，最近研究了该方程在实数轴（$x \in \mathbb{R}$）上的情形，并将其称为 Calogero–Moser 导数非线性薛定谔方程。在周期情形（$x \in \mathbb{T}$）下，该方程的名称转变为 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程，这与物理学家 Sutherland 有关；他研究了粒子位于圆上、并通过反正弦平方势（三角型势）相互作用的 Calogero–Sutherland–Moser 系统。此外，还可以将（CS）方程形式上视为 Pelinovsky 提出的中间非线性薛定谔方程 [Pe95]，的一个极限。

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u + (i - T)\partial_x(|u|^2)\,u\,, \tag{INS}$$

其中 T 是积分算子

$$Tu(t,x) = \frac{1}{2\delta}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \coth\left(\frac{\pi(x-y)}{2\delta}\right)u(t,y)\,dy\,,$$

通过取 $\delta \to \infty$。复函数 u 在（INS）中表示流体的包络，而δ 表示其总深度。令 $\delta \to \infty$，取极限可得到与（INS）相同的方程，但希尔伯特变换

$$Hu(t,x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t,y)}{x-y}\,dy\,,$$

而不是 T [Pe95]。由于 Szeg˝ő 投影算子 $\Pi_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + iH + \langle\cdot\,|\,1\rangle)$，因此（CS）方程也可以被解释为一种描述深层分层流体中界面波包的模型。

事实证明，Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程是完全可积的。那么，“可积性”一词意味着什么？根据不同学派所发展的不同观点，人们提出了许多定义。对一些研究者而言，“可积系统”意味着存在作用量-角变量，也就是一种能够通过求积法完全求解方程的坐标系；另一些研究者则认为，它指的是存在一个与方程相关且满足等谱性质的 Lax 算子 [1]。然而，所有这些定义的一个共同之处，是存在无穷多个相互独立的运动积分，或者说守恒律。自然，这无穷多个守恒律在证明某些整体适定性结果时发挥着至关重要的作用。

在我们的情形下，G´erard–Lenzmann 在[GL22，引理 5 中1], 针对 u 充分正则的情形，推导出了一个 Lax 算子，使得聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程（CS）$^+$ 在实数轴上具有 Lax 对表述 $\mathbb{R}$.，即对于任意 $u \in H^s_+(\mathbb{R})$，当 s 充分大时，存在两个算子 $(L_u,\ B_u)$，使得 Lax 方程

$$\frac{dL_u}{dt} = [B_u\,, L_u]\,, \qquad [B_u\,, L_u] := B_uL_u - L_uB_u\,, \tag{1.4}$$

得以满足，其中

$$L_u = D - T_uT_{\bar{u}}\,, \qquad B_u = T_uT_{\partial_x\bar{u}} - T_{\partial_x u}T_{\bar{u}} + i(T_uT_{\bar{u}})^2\,. \tag{1.5}$$

算子 T_u 是符号为 u的 Toeplitz 算子，对任意 $u \in L^\infty$ 定义为

$$T_uf = \Pi(uf)\,, \qquad \forall f \in L^2_+\,, \tag{1.6}$$

其中，Π 是 Szeg˝投影，由（1.1）给出。在下文中，我们通过恢复环面 $\mathbb{T}$ 上的同一对 Lax 算子 $(L_u,\ B_u)$，检验该 Lax 方程成立。正如预期的那样，通过这一 Lax 形式体系，我们推导出无穷多个守恒律 $\langle\,(L_u+\lambda)^s 1\,|\,1\rangle$，$\lambda >> 0$，$s \geq 0$，以便控制 Sobolev 范数的增长$\|u(t)\|_{\dot{H}^s}$，且对所有 $t \in \mathbb{R}$.[2]

注意，Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程在以下缩放下保持不变

$$u(t,x) \longmapsto \lambda^{1/2}u(\lambda^2 t, \lambda x)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,\ (t,x) \in I \times \mathbb{R}\,. \tag{1.7}$$

[1] 参见备注 2.1。[2] 特别是，可以看出通常的守恒律：平均值 $\langle 1\,|\,u\rangle$和 L^2 范数 $\|u\|_{L^2}$对于 $s = 1$ 和 2 都是守恒的，因为根据 $L_u = D - T_uT_{\bar{u}}$ 的定义，我们有 $L_u 1 = -\langle 1\,|\,u\rangle\,u$。

这表明，(CS) 在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 上均具有 L^2–临界性。在 [GL22 中，定理 2.1] , 通过沿用 [deMP10] 的分析，在 $H^s_+(\mathbb{R})$ 中对 $s > \frac{1}{2}$ 实现了 (CS) 方程的局部适定性。具体而言，对于 $s > \frac{3}{2}$，G´erard–Lenzmann 在 [GL22 的命题 2.1]中采用 Kato 型迭代方案和能量估计，推导出 $H^s_+(\mathbb{R})$ 中的局部适定性 [Sa79]。在 $\mathbb{T}$ 上，同样的迭代方案证明仍然成立，因此我们可推出 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中 $s > \frac{3}{2}$ 的局部适定性。因此，我们用 $\mathcal{S}^+(t)$ 表示聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程 (CS) 的流 $^+$，并用 $\mathcal{S}^-(t)$ 表示散焦方程 (CS) 的流 $^-$：对所有 $s > \frac{3}{2}$， $t \in \mathrm{I}_{\max}$,

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S}^{\pm}(t) & : H^s_+(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^s_+(\mathbb{T}) \\ & u_0 & \longmapsto & u(t) \end{array} , \tag{1.8}$$

其中 $\mathrm{I}_{\max}$ 表示解存在的最大区间。

1.1. 主要结果。

一些记号。在下文中，对于任意非负整数 a，我们将由 $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq a\}$ 给出的 $\mathbb{Z}$ 的子集记为 $\mathbb{N}_{\geq a}$。此外，我们将以原点为中心、半径为 $r > 0$ 的 $L^2_+(\mathbb{T})$ 开球记为 $\mathcal{B}_{L^2_+}(r)$。

本文旨在证明 L^2–临界方程（CS）在所有 H^s_+（$\mathbb{T}$）中具有整体适定性， $s \geq 0$. 首先，我们陈述更具挑战性的方程——聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程——的结果

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + 2D_+(|u|^2)u = 0\,, \tag{CS$^+$}$$

然后，我们给出散焦情形的结果 [3]

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - 2D_+(|u|^2)u = 0\,. \tag{CS$^-$}$$

定理 1.1. 对于所有 $s > \frac{3}{2}$， Calogero–Sutherland DNLS 聚焦方程（CS$^+$）在 H^s_+（$\mathbb{T}$）$\cap\, \mathcal{B}_{L^2_+}$（1）适定性是全局的。此外，以下先验估计成立：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} \leq C\,,$$

其中 $C(\|u_0\|_{H^s})$ 是一个正定常数。

注记1.1。对初始数据的 L^2 范数施加的小量限制，即 $\|u_0\|_{L^2} < 1$，是在应用尖锐不等式（引理 2.7）以便通过守恒律控制 Sobolev 范数的增长 $\|u(t)\|_{\dot{H}^s}$， $s \geq 0$，之后出现的。举例来说，取如下情形时，这个尖锐不等式可取等号：

$$u_0(x) = \frac{\sqrt{1-|q|^2}}{1-q\,\mathrm{e}^{ix}}\,, \quad q \in \mathbb{D}\,,$$

[3] 关于任意色散方程中聚焦与散焦术语的数学和物理含义，请参阅 Weinstein 的引言 [我们15] 。

它们对应于一个（CS$^+$）的 L^2 范数 $\|u_0\|_{L^2} = 1$ [Ba23] 行波的剖面。关于可能规避这一条件的方法的更多细节见第 6 节，但迄今这仍是一个未解决的问题。

作为第二步，我们聚焦于本文的主要问题：对于 $\mathcal{S}^+(t)$ 上整体定义的流 $H^2_+(\mathbb{T})$，如何将其从 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$，延拓到正则性更低的空间，例如$L^2_+(\mathbb{T})$？回顾（1.7）中的说明，Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程是 L^2–临界的。基于前述定理，并采用记号 $u^\varepsilon(t) = \mathcal{S}^+(t)u_0^\varepsilon$，$\varepsilon > 0$，我们陈述如下结果。

定理 1.2. 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$。存在唯一的势 $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\ L^2_+(\mathbb{T}))$，使得对于任意序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，其中 $\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$，以下收敛成立：对所有 $T > 0$，

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^2} \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

此外，极限势 u 的 L^2 范数守恒

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

因此，定理 1.2 意味着问题（CS$^+$）在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 意义下整体适定：存在一个唯一的连续延拓，将定义在 $H^2_+(\mathbb{T})$ 上的流延拓至 $L^2_+(\mathbb{T})$，并生成一个唯一的连续映射

$$u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \longmapsto u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_+(\mathbb{T}))\,.$$

证明的关键在于获得 $H^{\frac{1}{2}}$ 界（不等式（3.21））， 它针对 Lax 算子 L_{u^ε} 的特征函数；这些特征函数同时构成 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基。因此，我们推出这些特征函数在 L^2中的强收敛。最后，利用帕塞瓦尔恒等式，我们得到（1.9）。

我们还需强调极限势唯一性这一重要方面$u(t)$，该极限势的取得与逼近u_0^ε的序列 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 的选择无关。为此，我们在命题 2.5 中推导出聚焦型（CS方程解的显式公式$^+$。因此，对于任意初始数据 u_0，聚焦型（CS$^+$）方程的解由下式给出

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1\right\rangle\,, \qquad z \in \mathbb{D} := \{|z| < 1\}\,, \tag{1.10}$$

其中 S^* 表示移位算子 S 的伴随算子： $h \mapsto zh$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$，且 L_{u_0} 是 $t = 0\,.$ 处的 Lax 算子。我们强调关于（1.10）的两个重要事实：

I. 首先，这个定义在开单位圆盘内的反演动力学公式构成了非线性偏微分方程（CS$^+$）的一个显式解。处理非线性可积偏微分方程时，显式解并非首次出现。事实上，G´erard–Grellier 在 [GG15] 中为 Szeg˝o 方程推导出了一个显式解，而最近 G´erard 也在 [Ger22] 中证明，Benjamin–Ono 方程在 $\mathbb{R}$ 以及 $\mathbb{T}\,.$ 上都有显式解。这些动力学显式公式的共同之处在于，它们都与由相应方程诱导的 Lax 算子的结构密切相关。

II. 除了得到一个显式解这一点之外，该公式还强调，（CS+）方程的动力学由 Lax 算子 L_{u_0}编码，因此表明，所谓的 作用-角变量 必定与 Lax 算子 L_u的谱元素相关。

鉴于定理 1.2，我们陈述第三个结果。

推论 1.3。 对于所有 $0 \le s \le \frac{3}{2}$，Calogero–Sutherland DNLS 聚焦方程（CS+）在 H^s_+（$\mathbb{T}$）上整体适定 $\cap \mathcal{B}_{L^2_+}$（1）。此外，以下先验界成立：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} \le C\,,$$

其中 $C = C(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ 是一个正定常数。

备注 1.2。 上一条陈述中“整体适定”一词隐藏着一个微妙之处。事实上，此处区分整体适定性的两个不同方面十分重要。首先，我们采用定理 1.1中 GWP 的经典定义：对于任意 $u_0 \in H^s_+$，存在唯一的解 u，定义在 $\mathbb{R}$ 上，取值于 H^s_+，使得 u关于初始数据 u_0 连续依赖，作为映射 $u_0 \in H^s_+ \mapsto u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_+)$。第二种定义如定理 1.2 所述：我们假设方程至少在分布意义下有定义，然后通过连续延拓，将定义在高正则性空间上的流延拓到低正则性空间。



在本推论中，整体适定性采用定理 1.2 中所使用的意义。一旦证明完成，这一点将会更加清楚（见第 4 节）。我们还预计，按照 [deMP10]，中的论证，可以将经典意义下的整体适定性进一步降至 $H^s_+(\mathbb{T})$，其中 $s > \frac{1}{2}$.

除了关于（CS+）的柯西问题的整体适定性结果之外，我们还关注该方程的流 $\mathcal{S}^+(t)$ 的一些定性性质。

定理 1.4. 给定初始数据 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \cap H^s_+(\mathbb{T})$， $s \ge 0$，解$\{\mathcal{S}^+(t)u_0$ 的轨道； $t \in \mathbb{R}\}$ 在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中相对紧。

散焦方程 (CS−)。 现在转向 Calogero– Sutherland 导数非线性薛定谔方程的散焦情形，后一个方程同样具有 Lax 对结构：对于任意$u(t) \in H^s_+$， 当 s 足够大时，存在两个算子

$$\tilde{L}_u = D + T_u T_{\overline{u}}\,, \qquad \tilde{B}_u = -T_u T_{\partial_x \overline{u}} + T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} + i(T_u T_{\overline{u}})^2\,,$$

满足 Lax 方程

$$\frac{d\tilde{L}_u}{dt} = [\tilde{B}_u, \tilde{L}_u]\,.$$

因此，采用与聚焦情形相同的方法，我们证明守恒律 $\widetilde{\langle (L_u+\lambda)^s 1 \mid 1\rangle}$, $s \geq 0$, $\lambda > 0$ 能够一致地控制 Sobolev 范数的增长，而无需对初始数据施加任何额外条件。由此，我们得到与聚焦情形类似的散焦情形结果，无论初始数据在 L^2中有多大。综上所述，我们有以下结论。

定理 1.5。 Calogero–Sutherland DNLS 散焦方程 (CS$^-$) 在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中具有整体适定性，$s \geq 0$ 其意义见备注 *1.2*。此外，对于所有 $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$,

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2it\tilde{L}_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle,$$

是 (CS$^-$)–散焦方程的解。此外，轨迹 s

$$\{\mathcal{S}^-(t)u_0\,;\, t \in \mathbb{R}\}$$

在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中是相对紧的。

1.2. 其他相关方程。 正如 [GL22], 所解释的，Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程（CS）可以看作 Benjamin–Ono 方程的质量临界版本。关于后者在圆环上的深入研究，可参见 [GK21、GKT20] 。当然，Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程（CS）也被视为非线性薛¨定谔方程族的一部分。多年来，许多作者一直关注不同类型的非线性薛定谔方程。其中一些方程已被分类并发表于 [Bo99]中。与（CS）方程最密切相关的可能是:

(i) 立方 NLS 方程。

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm |u|^2 u = 0\,, \tag{NLS-cubic}$$

它被认为是具有完全可积性质的最简单偏微分方程之一。Zakharov–Shabat 使用逆散射法研究了该方程 [ZS72] 。此外，Bourgain 在引入 $X^{s,b}$–空间后，给出了 $L^2(\mathbb{T})$ 中的整体适定性结果 [Bo93]。他的证明依赖于建立 $L^4(\mathbb{T})$–Strichartz 估计，并使用 L^2– 守恒范数。实际上，这一 L^2– 适定性结果被认为是尖锐的，以下低于正则性 $L^2(\mathbb{T})$ 的各种不适定性结果也说明了这一点。事实上，Burq–G´erard–Tzvetkov 在 [BGT02] 中证明，对于低于 Sobolev 正则性 L^2 . 的情形，(NLS-cubic) 的流映射并非一致连续。Christ–Colliander–Tao [CCT03] 和 Molinet [Mo09] 证明了当 $s < 0$. 时， $H^s(\mathbb{T})$ 中解映射的不连续性

关于利用可积工具、Birkhoff 正规形及其若干应用对（NLS-cubic）进行深入研究，请参阅 Kappeler–Lohrmann–Topalov–Zung [KL+17]、Gr´ebert–Kappeler [GK14] 以及 Kappeler–Schaad–Topalov [KST17]。关于实数轴上的研究 $\mathbb{R}$，请参阅 [HKV20]。更多参考文献也见于 [OS12]。

(ii) 导数非线性薛定谔方程。

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \pm i\partial_x\left(|u|^2 u\right) = 0\,, \tag{DNLS}$$

它也是一个具有无穷多个守恒律的可积方程 [KN78]。利用 I-方法，Win 在 [Wi10] 证明了（DNLS）方程的整体适定性

$H^s(\mathbb{T})$，$s > \frac{1}{2}$对于 $L^2(\mathbb{T})$ 中的小初值。最近，Klaus–Schippa [KS22] 给出了 $\|u\|_{H^s}$ 在 $0 < s < \frac{1}{2}$ 小 L^2范数条件下的守恒律正则性先验估计，其中$u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{T}))$ 且 $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ 表示施瓦茨空间。事实上，他们证明了如下先验估计

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{B^s_{r,2}} \lesssim \|u(0)\|_{B^s_{r,2}}$$

任意 Besov空间 $B^s_{r,\,2}$，其中 $r \in [1,\infty]$ 和 $0 < s < \frac{1}{2}$。关于实数轴上的研究 $\mathbb{R}$，我们引用 [JL+20、BP22、BLP21、KNV21、HKV21、HKNV22]。

1.3. 论文结构。本文组织如下。
在第 2 节中，我们讨论 Calogero–Sutherland DNLS 聚焦方程（CS$^+$）的 Lax 算子的一些性质。在第一个小节 CS$^+$ 中，我们推导方程的显式公式 2.1。随后，在第二个小节 2.2 中，我们证明（CS$^+$）问题在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中对任意 $s > \frac{3}{2}$ 都整体适定。

在第 3 节中，我们将（CS$^+$）的流 $\mathcal{S}^+(t)$ 从 $H^2_+(\mathbb{T})$ 连续延拓到 $L^2_+(\mathbb{T})$ $\equiv H^0_+(\mathbb{T})$。为此，我们采用逼近方法，并在第一个小节 3.1.1 中刻画所有 $t \in \mathbb{R}$ 对应的极限势 $u(t)$。随后，在第二个小节 3.2 中，我们确保从 $H^2_+(\mathbb{T})$ 取极限到 $L^2_+(\mathbb{T})$ 时，$L^2_+(\mathbb{T})$ 中不会出现紧性缺失。在同一小节中，我们推导出 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的一个标准正交基，在该基下，解 $u(t)$ 的坐标具有良好的演化性质。这种演化表明，所谓的“Birkhoff坐标”就是 $u(t)$ 在该基下的坐标。之后，我们在第 4 节处理（CS$^+$）问题在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中对 $0 < s \leq \frac{3}{2}$ 的整体适定性。此外，我们还讨论（CS$^+$）在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中轨道的相对紧性，$s \geq 0$。

接下来在第 5 节中，我们给出 Calogero–Sutherland 散焦型DNLS方程（CS$^-$）的 Lax 对，并陈述（CS$^+$）在（CS$^-$）情形下的类似结果。
最后，在第 6 节中，我们将讨论与该方程相关的一些评论和未解决的问题。

Acknowledges.

作者谨向她的博士导师 Patrick G´erard 致以诚挚谢意，感谢他对本文提出的丰富讨论和意见。此外，她也感谢匿名审稿人所做的全面审阅。

2. The Lax pair structure

如引言中所述，我们首先检查在环面 $\mathbb{T}$ 的情形下，式 1.5) 中定义的 Lax 对是否仍然成立，正如在实数轴 $\mathbb{R}$上那样，尽管在实数轴 $\mathbb{R}$上，复函数 f 可分解为

$$f = \Pi f + \overline{\Pi \bar{f}}\,, \qquad \widehat{\Pi f}(\xi) = \mathbb{1}_{\xi>0}\widehat{f}(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

而在环面 $\mathbb{T}$ 上，

$$f = \Pi f + \overline{\Pi \bar{f}} - \langle f \,|\, 1\rangle \,, \qquad \Pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{inx}\right) := \sum_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{inx} \,.$$

命题 2.1 （Lax 对）。 对于任意 $s > \frac{3}{2}$，设 $u \in \mathcal{C}([-T,T],\ H^s_+(\mathbb{T}))$ 是聚焦方程 （CS$^+$）的一个解。那么，存在两个算子

$$L_u = D - T_u T_{\overline{u}}\,, \qquad B_u = T_u T_{\partial_x \overline{u}} - T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} + i(T_u T_{\overline{u}})^2$$

满足 Lax 方程

$$\frac{dL_u}{dt} = [B_u, L_u]\,,$$

其中 T_u 是式 （1.6）中定义的 Toeplitz 算子。

证明。 设 $u \in \mathcal{C}([-T,T],\ H^s_+(\mathbb{T}))$，$s > \frac{3}{2}$，是（CS$^+$）方程的一个解。另一方面，根据 L_u 的定义，对所有 $h \in H^1_+(\mathbb{T})$，

$$\begin{aligned}\frac{dL_u(h)}{dt} &= -T_{\partial_t u} T_{\bar{u}}(h) - T_u T_{\partial_t \overline{u}}(h) \\ &= -T_{i\partial_x^2 u + 2u\partial_x \Pi(|u|^2)} T_{\bar{u}} h - T_u T_{-i\partial_x^2 \bar{u} + 2\bar{u}\,\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)}}\, h\,.\end{aligned}$$

因此，由于 u 属于 Hardy 空间，

$$\frac{dL_u(h)}{dt} = i\big[T_u T_{\partial_x^2 \bar{u}} - T_{\partial_x^2 u} T_{\bar{u}}\big](h) - 2u\Big[\partial_x \Pi(|u|^2)\cdot \Pi(\bar{u}h) + \Pi\left(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)}\cdot \bar{u}h\right)\Big]\,. \tag{2.1}$$

另一方面，展开交换子 $[B_u, L_u](h) = B_u L_u h - L_u B_u h$，得到

$$\begin{aligned}&T_u T_{\partial_x \bar{u}} D h - T_u T_{\partial_x \bar{u}} T_u T_{\bar{u}} h - T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} D h + T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} T_u T_{\bar{u}} h + i(T_u T_{\bar{u}})^2 D h \\ &\quad - D(T_u T_{\partial_x \bar{u}} h) + T_u T_{\bar{u}} T_u T_{\partial_x \bar{u}} h + D(T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} h) - T_u T_{\bar{u}} T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} h - iD\left((T_u T_{\bar{u}})^2\, h\right),\end{aligned}$$

其中，根据莱布尼茨法则， $D(T_u h) = -iT_{\partial_x u} h + T_u D h$，因此

$$\begin{aligned}D(T_u T_{\partial_x \bar{u}}\,\cdot) &= T_u T_{\partial_x \bar{u}} D - iT_{\partial_x u} T_{\partial_x \bar{u}} - iT_u T_{\partial_x^2 \bar{u}}\,, \\ D(T_{\partial_x u} T_{\bar{u}}\,\cdot) &= T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} D - iT_{\partial_x^2 u} T_{\bar{u}} - iT_{\partial_x u} T_{\partial_x \bar{u}}\,, \\ D((T_u T_{\bar{u}})^2\,\cdot) &= -i[T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} T_u T_{\bar{u}} + T_u T_{\partial_x \bar{u}} T_u T_{\bar{u}} + T_u T_{\bar{u}} T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} + T_u T_{\bar{u}} T_u T_{\partial_x \bar{u}}] + (T_u T_{\bar{u}})^2 D\,\cdot\end{aligned}$$

推论，

$$\begin{aligned}[B_u, L_u](h) &= i\,T_u T_{\partial_x^2 \bar{u}} h - iT_{\partial_x^2 u} T_{\bar{u}} h - 2\left(T_u T_{\bar{u}} T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} + T_u T_{\partial_x \bar{u}} T_u T_{\bar{u}}\right)(h) \\ &= i\big[T_u T_{\partial_x^2 \bar{u}} - T_{\partial_x^2 u} T_{\bar{u}}\big] - 2u\cdot \Pi\left(\partial_x |u|^2 \cdot \Pi(\bar{u}h)\right)\,.\end{aligned} \tag{2.2}$$

比较（2.1）与（2.2），可见剩下需要证明的只有

$$\Big[\partial_x \Pi(|u|^2)\cdot \Pi(\bar{u}h) + \Pi\big(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)}\cdot \bar{u}h\big)\Big] = \Pi\left(\partial_x |u|^2 \cdot \Pi(\bar{u}h)\right)\,, \quad h \in H^1_+(\mathbb{T})\,. \tag{2.3}$$

事实上，任意复函数 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 都可以分解为

$$f = \Pi f + \overline{\Pi \bar{f}} - \langle f \,|\, 1\rangle\,.$$

特别地，对于 $f = \bar{u}h$，我们有 $\Pi(\partial_x \Pi(\overline{|u|^2)} \cdot \bar{u}h)$ 等于

$$\Pi\left(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)} \cdot \Pi(\bar{u}h)\right) + \Pi\left(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)} \cdot \overline{\Pi(u\bar{h})}\right) - \langle \bar{u}h \,|\, 1\rangle\, \Pi(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)})\,,$$

其中最后两项为零，因为 Π 是投影到 Hardy 空间上的正交投影算子。因此，(2.3)的左端与

$$\Pi\Big(\partial_x \Pi(|u|^2) \cdot \Pi(\bar{u}h)\Big) + \Pi\Big(\partial_x \overline{\Pi(|u|^2)} \cdot \Pi(\bar{u}h)\Big)\,,$$

它等于 $\Pi(\partial_x |u|^2 \cdot \Pi(\bar{u}h))$，因为 $\langle \partial_x(|u|^2) \,|\, 1\rangle = 0\,.$ □

2.1. 解的显式公式。 利用这一 Lax 对结构，我们在本小节推导聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程 (CS^+) 解的显式公式。为此，我们还需要使用下一段中引入的移位算子。

预备知识。我们回顾 Hardy 空间上最重要的算子之一——移位算子，它在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 上定义为等距映射

$$S\colon h \in L^2_+(\mathbb{T}) \longmapsto \mathrm{e}^{ix} h \in L^2_+(\mathbb{T})\,.$$

其在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 上的伴随算子定义为

$$S^* : h \in L^2_+(\mathbb{T}) \longmapsto S^* h = T_{\mathrm{e}^{-ix}} h = \Pi(\mathrm{e}^{-ix} h) \in L^2_+(\mathbb{T})\ .$$

特别地，我们有

$$S^* S = \mathrm{Id}, \qquad S S^* = \mathrm{Id} - \langle \cdot \,|\, 1\rangle 1, \tag{2.4}$$

由此可知，移位映射 S 是单射但非满射。需要指出的是，Hardy 空间可以用不同的方法定义，例如，

$$\mathbb{H}_2(\mathbb{D}) := \left\{ u \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\,;\ \sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |u(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|^2\, \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \right\}\,,$$

它们通过等距同构等价

$$u(z) = \sum_{k\ge 0} \widehat{u}(k) z^k \longmapsto u^*(x) := \sum_{k\ge 0} \widehat{u}(k)\, \mathrm{e}^{ikx}\,,$$

到 Hardy 空间 $L^2_+(\mathbb{T})$，其定义见（1.2），那么可以将移位算子理解为乘以 z. 下文中，我们不加区分地使用 u 和边界函数 u^*，稍微滥用一下记号，将二者都记作 u。

***

回到问题本身，我们需要一些交换子恒等式来得到显式公式。这正是下一个引理的目的。

引理 2.2. 设 $u \in H^s_+(\mathbb{T})$， $s > \frac{3}{2}$，则

$$[S^*, L_u] = S^* - \langle \cdot \,|\, u\rangle\, S^* u\,, \tag{2.5}$$
$$[S^*, B_u] = i\Big(S^* L_u^2 \ -\ (L_u + \mathrm{Id})^2 S^*\Big)\,.$$

证明. 第一个恒等式可直接由证明得到

$$L_u S = SL_u + S - \langle \cdot \,|\, S^* u \rangle \, u \,, \tag{2.6}$$

并在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中取所有这些算子的伴随算子。回忆 $L_u = D - T_u T_{\bar{u}}$。一方面，由莱布尼茨法则，对于所有 $h \in H^1_+(\mathbb{T})$，有 $D(Sh) = S(\mathrm{Id} + D)h$。另一方面，注意到对于所有 $f \in L^2(\mathbb{T})$，

$$\Pi\left(Sf\right) = S\Pi(f) + \langle Sf \mid 1 \rangle \ .$$

特别地，对于 $f = h\bar{u}$，我们推得

$$T_{\bar{u}}(Sh) = ST_{\bar{u}}h + \langle Sh \mid u \rangle. \tag{2.7}$$

因此，考虑到这些算子 S 与 T_u 可交换，我们推出恒等式（2.6）。

现在，为证明（2.5）的第二点，我们使用第一点。回忆 $B_u = T_u T_{\partial_x \bar{u}} - T_{\partial_x u} T_{\bar{u}} + i\left(T_u T_{\bar{u}}\right)^2$,，并由（2.7）可得 $[T_{\bar{u}}, S] = \langle \cdot \,|\, S^* u \rangle$，换言之，$[S^*, T_u] = \langle \cdot \,|\, 1 \rangle \, S^* u$。因此，注意到 S^* 与 $T_{\bar{u}}$ 可交换后，我们推出

$$\begin{aligned}
[S^*, T_u T_{\partial_x \bar{u}}] &= \langle \cdot \,|\, \partial_x u \rangle \, S^* u \,. \\
[S^*, T_{\partial_x u} T_{\bar{u}}] &= \langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* \partial_x u \,, \\
[S^*, (T_u T_{\bar{u}})^2] &= \langle \cdot \,|\, T_u T_{\bar{u}} u \rangle \, S^* u + T_u T_{\bar{u}} (\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u) \,.
\end{aligned}$$

因此,

$$[S^*, B_u] = \langle \cdot \,|\, \partial_x u \rangle \, S^* u - \langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* \partial_x u + i \langle \cdot \,|\, T_u T_{\bar{u}} u \rangle \, S^* u + i T_u T_{\bar{u}} \left(\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u\right) .$$

Usin利用伴随算子的莱布尼茨法则 $S^* D = (D + \mathrm{Id}) S^*$，并且由于 $L_u = D - T_u T_{\bar{u}}$，我们推得 er

$$\begin{aligned}
[S^*, B_u] = & -i \langle \cdot \,|\, L_u u \rangle \, S^* u - i L_u (\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u) - i \langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u \\
= & -i \left(\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u\right) L_u \ - \ i (L_u + \mathrm{Id}) (\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u) \,.
\end{aligned}$$

由（2.5）的第一个恒等式可得 $-\langle \cdot \,|\, u \rangle \, S^* u = S^* L_u - L_u S^* - S^*$ 从而

$$[S^*, B_u] = i\Big(S^* L_u^2 \ - \ (L_u + \mathrm{Id})^2 S^*\Big) \,.$$

□

命题 2.3. 设 $u(t) \in H^s_+(\mathbb{T})$, $s > \frac{3}{2}$。Lax 算子（$L_{u(t)}$, $H^1_+(\mathbb{T})$）是一个自伴算子，其谱为下有界离散谱。此外，$B_{u(t)}$ 是作用于 $L^2_+(\mathbb{T})$ 上的斜对称有界算子。

证明。该证明是加藤–Rellich 定理的直接推论。事实上，微分算子 $(D, H^1_+(\mathbb{T}))$ 是 Hardy 空间 $L^2_+(\mathbb{T})$ 上的正自伴算子。此外，$T_u T_{\overline{u}}$ 相对于 D是相对有界的，因为对所有 $h \in H^1_+(\mathbb{T})$,

$$\|T_u T_{\bar{u}} h\|_{L^2} \leq \|u\|^2_{L^\infty} \|h\|_{L^2} \ \leq \varepsilon \|Dh\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|u\|^2_{L^\infty} \|h\|_{L^2(\mathbb{T})} \,, \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

此外，根据 Rellich–Kondrachov 定理， L_u 的谱是离散的，因为 L_u 的预解式是紧的。并且，由于算子 L_u 是半有界算子，它下有界。此外，根据定义很容易看出，$B_u = T_u T_{\partial_x \overline{u}} - T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} + i(T_u T_{\overline{u}})^2$, 是一个斜对称算子。□

鉴于前述命题，我们将按模递增顺序排列并计入重数的 L_u的特征值记为$(\lambda_n(u))_{n\geq 0}$

$$\lambda_0(u) \leq \lambda_1(u) \leq \lambda_2(u) \leq \ldots \leq \lambda_n(u) \leq \ldots$$

注 2.1（等谱性质）。 正如现代可积系统理论 [GG+67] 所发现，并由 [Lax68], 重新表述的那样，Lax 算子的特征值是相应方程的运动积分。事实上，任何 Lax 算子都满足等谱性质，即存在一个单参数酉算子族 $U(t)$，使得$U(t)^{-1} L_{u(t,\cdot)} U(t)$ 与 t 无关。也就是说，

$$U(t)^{-1} L_{u(t)} U(t) = L_{u_0} \,. \tag{2.8}$$

这意味着，$\lambda_n(u)$ 的特征值全都 L_u 沿着（CS$^+$）的流保持不变。换言之，对于所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$， $\lambda_n(u(t)) = \lambda_n(u_0)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$.

下面的引理给出了聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程（CS$^+$）关于 Lax 算子 L_u 和 B_u的改写。这在动力学显式公式的证明过程中必将十分有用。

Lemma 2.4. 设 $u \in \mathcal{C}([-T,T], H^s_+(\mathbb{T}))$， $s > \frac{3}{2}$，是 (CS$^+$) 方程的一个解，则 n

$$\partial_t u = B_u u - i L_u^2 u \,.$$

证明。根据 B_u 的定义：$= T_u T_{\partial_x \overline{u}} - T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} + i(T_u T_{\overline{u}})^2$,

$$\begin{aligned}\partial_t u - B_u u &= i\partial_x^2 u + 2iD_+(|u|^2)u - T_u T_{\partial_x \overline{u}} u + T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} u - i(T_u T_{\overline{u}})^2 u \\ &= -i\left[D^2 u - 2u \cdot D\Pi(|u|^2) + u \cdot \Pi(D\overline{u} \cdot u) - Du \cdot \Pi(|u|^2) + (T_u T_{\overline{u}})^2 u\right] .\end{aligned}$$

对 $D(u \cdot \Pi(|u|^2))$ 应用莱布尼茨法则，我们得到

$$\partial_t u - B_u u = -i\left[D^2 u - D\left[\Pi(|u|^2) \cdot u\right] + u\Pi(D\overline{u} \cdot u) - uD\Pi(|u|^2) + (T_u T_{\overline{u}})^2 u\right] .$$

再次对项 $D\Pi(|u|^2)$ 应用莱布尼茨法则，

$$\partial_t u - B_u u = -i\left[D^2 u - D(T_u T_{\overline{u}} u) - u\Pi(\overline{u} \cdot Du) + (T_u T_{\overline{u}})^2 u\right] = -iL_u^2 u \,.$$

□

根据 [Ger22] 和 [GG15], ，我们推导出聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程解的显式公式。

命题 2.5 (显式公式)。 给定 $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$， $s > \frac{3}{2}$，聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程 (CS$^+$) 的解为

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\, \mathrm{e}^{-it}\, \mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\, S^*)^{-1}\, u_0 \,|\, 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D} \,.$$

证明。由于 $u(t,\cdot) \in H^s_+(\mathbb{T})$，$s > \frac{3}{2}$，对所有 $t \in [-T,T]$ 均成立，因此对所有 $z \in \mathbb{D}$

$$u(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}(t,k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t) \mid S^k 1 \rangle z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle (S^*)^k u(t) \mid 1 \right\rangle z^k ,$$

其中，根据.....的诺伊曼级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (zS^*)^k = (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1} ,$$

我们推得

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1} u(t) \mid 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D} . \tag{2.9}$$

现在，考虑一参数解族 $U(t)$，它满足柯西问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = B_{u(t,\cdot)} U(t) \\ U(0) = \mathrm{Id} . \end{cases} \tag{2.10}$$

注意到 $U(t)$ 是一个酉算子，因为 B_u 是斜伴随的。此外，利用命题 2.1的 Lax 对结构以及（2.10），

$$\frac{d}{dt} (U(t)^* L_{u(t)} U(t)) = 0 ,$$

因此

$$U(t)^* L_{u(t)} U(t) = L_{u_0} . \tag{2.11}$$

因此，对内积 $U(t)^*$ 两边应用 2.9,

$$\begin{aligned} u(t,z) &= \left\langle U(t)^* (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1} u(t) \mid U(t)^* 1 \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathrm{Id} - zU(t)^* S^* U(t))^{-1} U(t)^* u(t) \mid U(t)^* 1 \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.12}$$

目标是以另一种方式表示 $U(t)^* S^* U(t) \quad U(t)^* u(t)$ 和 $U(t)^* 1$.利用（2.10），且由于B_u 是一个斜伴随算子（命题 2.3），我们得到

- $\frac{d}{dt}[U(t)^* 1] = -U(t)^* B_{u(t)} 1 = -iU(t)^* L^2_{u(t)} 1$
- $\frac{d}{dt}[U(t)^* u(t)] = -U(t)^* B_{u(t)} u(t) + U(t)^* \partial_t u(t) = -iU(t)^* L^2_{u(t)} u(t)$ by Lemma 2.4
- $\frac{d}{dt}[U(t)^* S^* U(t)] = -U(t)^* B_{u(t)} S^* U(t) + U(t)^* S^* B_{u(t)} U(t) = U(t)^* [S^*, B_{u(t)}] U(t)$,

其中第三个点等于

$$\frac{d}{dt}[U(t)^* S^* U(t)] = iU(t)^* \Big(S^* L^2_{u(t)} - (L_{u(t)} + \mathrm{Id})^2 S^* \Big) U(t) ,$$

根据引理 2.2。因此，应用恒等式 $U(t)^* L_{u(t)} = L_{u_0} U(t)^*$（2.11），我们推得

- $\frac{d}{dt}[U(t)^* 1] = -iL^2_{u_0}[U(t)^* 1]$
- $\frac{d}{dt}[U(t)^* u(t)] = -iL^2_{u_0}[U(t)^* u(t)]$
- $\frac{d}{dt}[U(t)^* S^* U(t)] = i\Big([U(t)^* S^* U(t)] L^2_{u_0} - (L_{u_0} + \mathrm{Id})^2 [U(t)^* S^* U(t)] \Big) .$

因此,

$$U(t)^*1 = \mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,1\,, \qquad U(t)^*u(t) = \mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,u_0\,, \tag{2.13}$$

and

$$U(t)^*S^*U(t) = \mathrm{e}^{-it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2}\,S^*\,\mathrm{e}^{itL_{u_0}^2}\,. \tag{2.14}$$

结合式（2.12）、（2.13）和（2.14），即可得到所述公式。 □

2.2. （CS$^+$）在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 上的整体适定性 $s > \frac{3}{2}$。为了证明（CS$^+$）的整体适定性，我们需要推导一些守恒律和能量估计。

引理 2.6 （守恒律）。设 $u \in \mathcal{C}\big([-T,T],\ H^r_+(\mathbb{T})\big)$，$r > \frac{3}{2}$是（CS$^+$）的解。对所有 $\lambda >> 0$，族 $\{\mathcal{H}_s(u) := \langle\,(L_u+\lambda)^s\,u\,|\,u\rangle;\ 0 \le s \le 2r\}$ 在（CS）的流作用下守恒。

注 2.2。

- 利用复插值方法[Ta81，第一章. 4.], 可以观察到，如命题2.8所示，$\mathcal{H}_s(u) \le C\|u\|^2_{H^{\frac{s}{2}}}$。
- 条件 $r > \frac{3}{2}$ 用于保证 $u(t)$ 的存在。一旦我们在第 4 节证明流 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \cap H^r_+(\mathbb{T}) \mapsto u(t) \in H^r_+(\mathbb{T})$ 对所有 $r \ge 0$均存在，该条件即可省略。

证明。给定 $u \in \mathcal{C}\big([-T,T], H^r_+(\mathbb{T})\big)$, $r > \frac{3}{2}$，即（CS$^+$）的解，我们考虑在（2.10）中定义的酉算子 $U(t)$。于是，由（2.13），我们知道 $U(t)^*u(t) = \mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,u_0$. 并且，由于根据命题 2.3，$L_u$ 是一个自伴算子，我们由（2.11）推得，

$$U(t)^*(L_{u(t)}+\lambda)^sU(t) = (L_{u_0}+\lambda)^s\,.$$

因此，对于所有 $0 \le s \le 2r$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_s(u(t)) &= \big\langle U(t)^*(L_{u(t)}+\lambda)^s u(t)\,\big|\,U(t)^*u(t)\big\rangle\\ &= \langle (L_{u_0}+\lambda)^sU(t)^*u(t)\,|\,U(t)^*u(t)\rangle\\ &= \langle (L_{u_0}+\lambda)^s\,\mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,u_0\,|\,\mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,u_0\rangle\end{aligned}$$

因此，由于 $(L_{u_0}+\lambda)^s$ 与 $\mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}$ 可交换，$\mathcal{H}_s(u(t)) = \mathcal{H}_s(u_0)$。

□

注记 2.3。利用恒等式 $U(t)^*1 = \mathrm{e}^{-itL_{u_0}^2}\,1$ （2.13）并重复引理 2.6的相同证明，我们还可以推出，对于 $\lambda >> 0$，量 $\langle (L_u+\lambda)^q 1\,|\,u\rangle$ 和$\langle (L_u+\lambda)^p 1\,|\,1\rangle$ 在流作用下守恒。另一种证明方法是注意到，根据 $L_u = D - T_uT_{\bar u}$ 的定义，我们有 $L_u 1 = -\langle 1\,|\,u\rangle\,u$，而平均值 $\langle u\,|\,1\rangle$ 在演化过程中保持守恒，因为

$$\partial_t\,\langle u\,|\,1\rangle = i\,\big\langle \partial_x^2 u\,|\,1\big\rangle + 2i\,\big\langle D\Pi(|u|^2)\,|\,\overline{u}\big\rangle = 0\,.$$

为证明为了获得能量估计并处理后续需求，我们需要以下引理 .

引理 2.7。设 $h \in H^{\frac{1}{2}}_{+}(\mathbb{T})$、 $u \in L^2_{+}(\mathbb{T})$,

$$\|T_{\bar{u}}h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq \Big(\langle Dh \,|\, h\rangle + \|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \Big) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \,. \tag{2.15}$$

证明。由帕塞瓦尔恒等式,

$$\|T_{\bar{u}}h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\geq 0} \big| \widehat{T_{\bar{u}}h}(n) \big|^2 ,$$

其中

$$\widehat{T_{\bar{u}}h}(n) = \widehat{\Pi(h\bar{u})}(n) = \sum_{p\geq 0} \widehat{h}(n+p)\overline{\widehat{u}(p)} \,. \tag{2.16}$$

应用柯西–施瓦茨不等式，我们推得

$$\|T_{\bar{u}}h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} |\widehat{h}(n+p)|^2 \,.$$

令 $k = n+p$，则

$$\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} |\widehat{h}(n+p)|^2 = \sum_{k\geq 0} (k+1)|\widehat{h}(k)|^2 = \langle Dh \,|\, h\rangle + \|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \,.$$

□

注 2.4。

(1) 回想一下，嵌入 $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ 并不成立。然而，将势 u 视为 Hardy 空间 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的元素后，估计得到了改进，从$\|T_{\bar{u}}h\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}$ 改进为 (2.15)。

(2) 由 (2.16) 可知，对所有 $h \in H^{\frac{1}{2}}_{+}(\mathbb{T})$，反线性算子 $u \in L^2_+(\mathbb{T}) \mapsto T_{\bar{u}}h$ 的希尔伯特–施密特范数为

$$\|\Pi(\bar{\cdot}\, h)\|^2_{HS} = \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} |\widehat{h}(n+p)|^2 = \sum_{k\geq 0} (k+1)|\widehat{h}(k)|^2 = \langle Dh \,|\, h\rangle + \|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \,.$$

特别地，我们有 $u \mapsto T_{\bar{u}}h$ 是 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的紧反线性算子。

(3) 引理 2.15) 的不等式见引理 2.7 ，这是一个尖锐不等式，因为其证明只需简单应用柯西–施瓦茨不等式。特别地，当 $h = u$ 时，不等式 (2.15) 取等号，当且仅当

$$u(z) = \frac{c}{1-qz} \,, \qquad |q| < 1 \,, \quad c \in \mathbb{C}$$

–这对应于（CS^+）的行波剖面，其中 $c = \sqrt{1-|q|^2}$[Ba23]。事实上，按照 [GG08 中引理 1], 所用的论证，可以看出，对（2.16）应用柯西–施瓦茨不等式取等，当且仅当对所有$n \geq 0$，都存在 $c_n \in \mathbb{C}$ 使得

$$\widehat{u}(n+p) = c_n\, \widehat{u}(p) \,, \qquad \forall p \geq 0 \,. \tag{2.17}$$

因此，如果 $\widehat{u}(1) \neq 0$ 且 $\widehat{u}(0) \neq 0$,

$$c_n = \frac{\widehat{u}(n+1)}{\widehat{u}(1)} = \frac{\widehat{u}(n)}{\widehat{u}(0)} \,,$$

从而，

$$\widehat{u}(n) = \left(\frac{\widehat{u}(1)}{\widehat{u}(0)}\right)^n \widehat{u}(0)\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

因此，数列 $(\widehat{u}(n))$ 是公比为 $q := \widehat{u}(1)\ \widehat{u}(0)$ ，的等比数列，其中 $0 < |q| < 1$，因为 $\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2 < +\infty$。因此，

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{u}(n) z^n = \frac{\widehat{u}(0)}{1 - qz}\,.$$

现在，若 $\widehat{u}(1) = 0$ 或 $\widehat{u}(0) = 0$ 则由 (2.17) 可推得，对 $p = 0$ 或 1， $u = \widehat{u}(0)$。

回顾一下， $\mathcal{B}_{L^2_+}(r)$ 表示以原点为中心、半径为 $r > 0$ 的 $L^2_+(\mathbb{T})$ 开球。对于任意 $s \in \mathbb{R}$，我们记 $\lfloor s \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}\,;\ k < s\}$。

命题 2.8. 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \cap H^r_+(\mathbb{T})$ $r > \frac{3}{2}$.。那么，对于所有 $\lambda >> 0$，存在与 t 无关的 $C = C(\|u_0\|_{H^{\frac{\lfloor 2r \rfloor}{2}}}, \lambda) > 0$，使得对每个 $f \in H^s_+(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{C}\|f\|_{H^s} \leq \|(L_{u(t)} + \lambda)^s f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{H^s}\,, \qquad \forall\, 0 \leq s \leq \frac{\lfloor 2r \rfloor + 1}{2}\,. \tag{2.18}$$

注记 2.5。条件 $r > \frac{3}{2}$ 是为了保证 $u(t)$ 的存在。一旦我们在第 4 节证明流 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \cap H^r_+(\mathbb{T}) \mapsto u(t) \in H^r_+(\mathbb{T})$ 对所有 $r \geq 0$ 都存在，就可以将其替换为 $r \geq 0$。

证明。证明通过在每个长度为 $1/2$ 的区间上作归纳法完成。

步骤 1：$s \in [0, \frac{1}{2}]$. 设 $s = \frac{1}{2}$，根据 $L_u = D - T_u T_{\bar{u}}$ 的定义，我们有：

$$\langle (L_u + \lambda) f \,|\, f \rangle = \langle Df \,|\, f \rangle - \|T_{\bar{u}} f\|^2_{L^2} + \lambda \|f\|^2_{L^2}\,. \tag{2.19}$$

应用引理 2.7 的尖锐不等式，

$$\|(L_u + \lambda)^{\frac{1}{2}} f\|^2_{L^2} \geq (1 - \|u\|^2_{L^2}) \langle Df \,|\, f \rangle + (\lambda - \|u\|^2_{L^2}) \|f\|^2_{L^2}\,. \tag{2.20}$$

因此，鉴于 $\|u\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} < 1$，我们推得：

$$\|(L_{u(t)} + \lambda)^{\frac{1}{2}} f\|^2_{L^2} \geq \frac{1}{C^2} \|f\|^2_{H^{\frac{1}{2}}}\,,$$

其中 $C = C(\|u_0\|_{L^2}, \lambda) > 0$ 是一个与 t. 无关的正定常数。另一方面，利用 L_u 的定义，容易看出

$$\|(L_{u(t)} + \lambda)^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}}\,.$$

因此，通过复插值 [Ta81，第一章。 4] , 我们推导出不等式对所有 $s \in [0, \frac{1}{2}]$. (2.18)

步骤 2： 在 $\|u(t)\|_{L^p}, p \in [2, \infty)$ 上的一致有界性。应用步骤 1，并利用引理 2.6 中的守恒律，我们推得对于 $f = u$，

$$\frac{1}{C}\|u(t)\|_{H^s} \leq \|(L_{u(t)} + \lambda)^s u(t)\|_{L^2} = \|(L_{u_0} + \lambda)^s u_0\|_{L^2} \leq C\|u_0\|_{H^s}\,,$$

对于所有 $s\in[0,\frac12]$. 因此，$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^{\frac12}}\lesssim\|u_0\|_{H^{\frac12}}$，故由 Sobole夫嵌入

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{L^p}\lesssim\|u_0\|_{H^{\frac12}},\qquad\forall p\in[2,\infty).$$

步骤 3：$s\in[\frac12,1]$. 与步骤 1 一样，我们的想法是证明它对 $s=1$ 成立，然后通过复插值推断它对所有 $s\in[\frac12,1]$. 成立。令 $s=1$，根据步骤 1 中的（2.20），

$$\begin{aligned}\big\|(L_{u(t)}+\lambda)f\big\|^2_{L^2(\mathbb{T})}&=\big\langle(L_{u(t)}+\lambda)f\,|\,L_{u(t)}f\big\rangle+\lambda\big\langle(L_{u(t)}+\lambda)f\,|\,f\big\rangle\\&\geq\|L_{u(t)}f\|^2_{L^2}+\lambda\Big((1-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}}+(\lambda-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{L^2}\Big)\\&\qquad+\lambda\Big((1-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}}-\|u\|^2_{L^2}\|f\|^2_{L^2}\Big)\\&=\|Df\|^2_{L^2}+\|uT_{\bar u}f\|^2_{L^2}-2\mathrm{Re}\,\langle Df\,|\,uT_{\bar u}f\rangle\\&\qquad+2\lambda(1-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}}+\lambda(\lambda-2\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

利用杨氏不等式，我们可得

$$\begin{aligned}\big\|(L_{u(t)}+\lambda)f\big\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\geq(1-\varepsilon)\|Df\|^2_{L^2}+(1-C_\varepsilon)\|uT_{\bar u}f\|^2_{L^2}\\+2\lambda(1-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}}+\lambda(\lambda-2\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{L^2}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

现在，对 $\|uT_{\bar u}f\|_{L^2}$ 应用柯西–施瓦茨不等式，并且由于根据步骤 2，$\|u\|_{L^8}$ 和 $\|u\|_{L^4}$ 一致有界，我们推得

$$\big\|(L_{u(t)}+\lambda)f\big\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\geq\frac{1}{C^2}\|f\|^2_{H^1},\qquad C=C(\|u_0\|_{H^{\frac12}},\lambda).$$

另一方面，根据 L_u的定义，我们有

$$\big\|(L_{u(t)}+\lambda)f\big\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq C\|f\|_{H^1}.$$

因此，不等式 (2.18) 对 $s=1$ 成立，因此由复插值 [Ta81], 可知，它对所有 $s\in[\frac12,1]$. 成立

步骤 4：关于 $\|u(t)\|_{H^1}$ 由于 (2.18) 对 $s=1$ 成立，因此重复步骤 2 中相同的证明可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^1}<\infty.$$

步骤 5：$s\in[1,\frac32]$ 再次，我们证明不等式（2.18）对 $s=\frac32$ 成立，然后通过复插值，推出它对所有 $s\in[1,\frac32]$. 令 $s=\frac32$. 应用步骤 3 中的不等式（2.21），

$$\begin{aligned}\big\langle(L_{u(t)}+\lambda)^3f\,|\,f\big\rangle&=\big\langle(L_{u(t)}+\lambda)^2f\,|\,L_{u(t)}f\big\rangle+\lambda\big\langle(L_{u(t)}+\lambda)^2f\,|\,f\big\rangle\\&\geq\big\langle(D-uT_{\bar u}+\lambda)^2f\,|\,(D-uT_{\bar u})f\big\rangle+\lambda\Big[(1-\varepsilon)\|Df\|^2_{L^2}\\&\qquad+(1-C_\varepsilon)\|uT_{\bar u}f\|^2_{L^2}+2\lambda(1-\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}}+\lambda(\lambda-2\|u\|^2_{L^2})\|f\|^2_{L^2}\Big]\end{aligned}$$

现在，展开右侧的第一个内积，并使用柯西–施瓦茨不等式、杨氏不等式和Sobole夫嵌入，我们得到

$$\begin{aligned}\left\langle (L_{u(t)}+\lambda)^3 f \mid f\right\rangle \gtrsim \left\langle D^3 f \mid f\right\rangle &+ p_1(\|u\|_{H^1}^2,\lambda)\left\langle D^2 f \mid f\right\rangle \\ &+ p_2(\|u\|_{H^1}^2,\lambda)\left\langle Df \mid f\right\rangle + p_3(\|u\|_{H^1}^2,\lambda)\|f\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

其中，对所有 $j=1$，2，3，$p_j(\|u\|_{H^1}^2,\lambda)$ 是关于 $\lambda >> 0$. 的正多项式。因此，存在 $C=C(\|u_0\|_{H^1},\lambda) > 0$ 使得

$$\left\|(L_{u(t)}+\lambda)^{\frac{3}{2}} f\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \frac{1}{C}\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}}.$$

最后，通过重复前面相同的步骤，我们推得不等式 (2.18) 对所有 $s \geq 0$ 都成立。□

定理。 *1.1*. 对所有 $r > \frac{3}{2}$，Calogero–Sutherland DNLS 聚焦方程 (CS$^+$) 在 $H^r_+(\mathbb{T})$ $\cap\, \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$ 中整体适定。此外，以下先验界成立：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^r} \leq C\,,$$

其中 $C=C(\|u_0\|_{H^r}) > 0$ 是一个正定常数。

证明。 令 $u_0 \in H^r_+(\mathbb{T})$。 由 (1.8) 可知，存在唯一的解 $u \in \mathcal{C}([-T,T],H^r_+(\mathbb{T}))$，$s > \frac{3}{2}$，满足 $u(0,\cdot) = u_0$. 此外，根据前面的命题，我们推得对于$\|u_0\|_{L^2} < 1$,

$$\frac{1}{C}\|u(t)\|_{H^r} \leq \|(L_{u(t)}+\lambda)^r u(t)\|_{L^2} = \|(L_{u_0}+\lambda)^r u_0\|_{L^2} \leq C\|u_0\|_{H^r}.$$

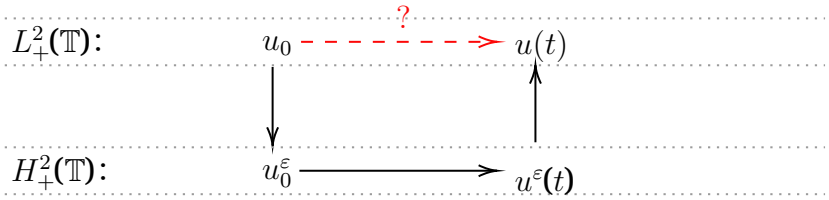
□

3. 将（$\mathbb{T}$）的流扩展到 L2+（圆环）

本节将证明我们的主要结果，该结果表明，对于 $\|u_0\|_{L^2} < 1$，（CS$^+$）的流

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{S}^+(t) & : H^2_+(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^2_+(\mathbb{T}) \\ & u_0 & \longmapsto & u(t)\end{array}, \tag{3.1}$$

根据定理 1.1 在 $H^2_+(\mathbb{T})$ 上得到的全局定义，可以将其连续延拓至临界正则性 $L^2_+(\mathbb{T})$。为此，考虑任意初始数据 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ $\|u_0\|_{L^2} < 1$.。然后，我们用序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$ 逼近 u_0。因此，根据定理 1.1，u_0^ε 的时间演化 $u^\varepsilon(t) := \mathcal{S}^+(t)u_0^\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有良好定义。我们的目标是证明序列 (u^ε) 在 $\mathcal{C}(\mathbb{R},L^2_+(\mathbb{T}))$ 中收敛于唯一极限 u。该极限势将被称为柯西问题 (CS$^+$) 的“解”。无论所选择的逼近序列 (u_0^ε) 如何逼近 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$，该解都将被唯一确定。此外，它还满足 L^2–范数的守恒（即对所有 $t \in \mathbb{R}$，$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$）。



注 3.1。注意，由于方程中存在非线性项 $D\Pi_+(|u|^2)u$，称存在具有 L^2–正则性的解似乎令人费解。然而，由于两个具有非负频率的函数之积是良好定义且连续的，该方程在分布意义下仍然是良好定义的。事实上，令 $\mathcal{D}'_+(\mathbb{T})$ 表示以下分布空间

$$\mathcal{D}'_+(\mathbb{T}) = \{u = \sum_{k\geq 0} \widehat{u}(k)\, \mathrm{e}^{ikx}\ ;\ \exists M \in \mathbb{N},\ |\widehat{u}(k)| \lesssim (1+|k|^{2M})^{\frac{1}{2}}\}\,,$$

并考虑 Hardy 空间中的两个光滑函数序列 $f_n, g_n \in \mathcal{C}^\infty_+(\mathbb{T})$，使得我们假设

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{and} \quad g_n \longrightarrow g \quad \text{in } \mathcal{D}'_+(\mathbb{T})\,.$$

那么，$f_n g_n \longrightarrow fg$ 属于 $\mathcal{D}'_+(\mathbb{T})$，且对所有 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，

$$\widehat{fg}(k) = \sum_{\ell=0}^{k} \widehat{f}(k-\ell)\widehat{g}(\ell)\,,$$

当 $\widehat{f_n\, g_n}(k) = \sum_{\ell=0}^{k} \widehat{f_n}(k-\ell)\, \widehat{g_n}(\ell)$。

3.1. 极限的唯一性与 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的弱收敛。
当 $\varepsilon \to 0$ 时，首先需要证明，对于所有 $u(t)$，极限势具有唯一且明确的刻画 $t \in \mathbb{R}$，并且不依赖于逼近 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 的序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$。关键在于使用聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程解的显式公式。因此，对于所有 $(u^\varepsilon(t)) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，由命题 2.5，

$$u^\varepsilon(t,z) = \Big\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0^\varepsilon}}\,S^*)^{-1}\, u_0^\varepsilon \,|\, 1 \Big\rangle\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,. \tag{3.2}$$

本小节的目标是将此公式取极限。因此，首先需要明确算子 L_{u_0} 在 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 时的含义。为此，我们简要回顾 G´erard–Lenzmann [GL22，附录 A] 的工作；他们通过二次型的标准理论定义了算子 L_u，使得$u \in L^2_+(\mathbb{R})$。当 $u \in H^2_+(\mathbb{R})$ 时，这个新算子将与原来的 Lax 算子 $L_u = D - T_u T_{\bar{u}}$ 一致。在环面 $\mathbb{T}$上，[GL22，附录 A], 中给出的证明同样适用，因此可以在 $u \in L^2_+(\mathbb{T})$ 时定义 L_u。下面回顾证明的要点：

$_1$(i) 对于 $u \in L^2_+(\mathbb{T})$ 和 $f, g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$，考虑二次型

$$\mathcal{Q}_u(f,g) = \big\langle D^{1/2} f \,|\, D^{1/2} g \big\rangle - \langle T_{\bar{u}} f \,|\, T_{\bar{u}} g \rangle\,.$$

(ii) 注意，通过将 u 分解为高频和低频部分

$$u(x) = u_N(x) + R_N(u,x)\,, \qquad \begin{cases} u_N(x) := \sum_{n\geq 0}^{N} \widehat{u}(n) \mathrm{e}^{inx} \\ R_N(u,x) := \sum_{n\geq N+1} \widehat{u}(n)\, \mathrm{e}^{inx} \end{cases},$$

并利用引理2.7，可以证明，对于所有 $\eta > 0$， $\exists\, N_\eta := N_\eta(u) \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$的每个紧集上一致，使得

$$\|T_{\bar{u}} f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} < 2\eta^2 \Big(\langle Df \,|\, f\rangle + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \Big) + 2N_\eta^2 \|u\|^2_{L^2} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\,. \tag{3.3}$$

因此，

$$\mathcal{Q}_u(f,f) \geq (1-2\eta^2)\|f\|^2_{\dot{H}^{1/2}} - 2(N_\eta^2\|u\|^2_{L^2} + \eta^2)\, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\,. \tag{3.4}$$

(iii) 现在，固定足够小的 η， 存在 $K := K(u) > 0$， 在$L^2_+(\mathbb{T})$的每个紧集上一致，使得下列正定二次型

$$\tilde{\mathcal{Q}}_u(f,g) := \mathcal{Q}_u(f,g) + K\,\langle f \,|\, g\rangle\,, \quad f,g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,,$$

[1]在 $H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$上定义一个新的内积。

(iv) 利用二次型理论（见[RS72]），我们对 $u \in L^2_+(\mathbb{T})$ 引入，

$$\mathrm{Dom}(L_u) = \Big\{ h \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,;\; \exists C > 0\,,\; |\tilde{\mathcal{Q}}_u(h,g)| \leq C\,\|g\|_{L^2(\mathbb{T})}\,, \forall g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}) \Big\}\,, \tag{3.5}$$

以及对于任意 $f \in$定义域(L_u)

$$\langle L_u(f) \,|\, g\rangle = \mathcal{Q}_u(f,g)\,, \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,, \tag{3.6}$$

并且可以证明，这个新算子 L_u 是一个具有稠密定义域的自伴算子[1]在 $H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$ 中。

***

3.1.1. L_{u_0} 关于 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 的谱性质。既然算子 L_{u_0} 已在 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 中引入，就可以考察它的一些谱性质。如上所述，它是一个具有紧预解式的自伴算子，因此具有离散谱。此外，其二次型 $\mathcal{Q}_{u_0}$ 下有界。因此，

$$\sigma(L_{u_0}) := \{\lambda_0(u_0) \leq \ldots \leq \lambda_n(u_0) \leq \ldots\}\,, \qquad \lambda_0 > -\infty\,. \tag{3.7}$$

为了刻画该谱，我们使用下面的命题。

命题 3.1. 对于每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，映射 $u \in L^2_+(\mathbb{T}) \mapsto \lambda_n(u)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的紧子集上是 Lipschitz 连续的。

证明。令 $u \in L^2_+(\mathbb{T})$。关键在于使用极大–极小原理，

$$\lambda_n(u) = \max_{\substack{F \subseteq L^2_+ \\ \dim F \leq n}} \min \Big\{ \mathcal{Q}_u(h,h)\,;\, h \in F^\perp \cap H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,,\; \|h\|_{L^2} = 1 \Big\}\,.$$

1对于任意 $v \in L^2_+(\mathbb{T})$ $h \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$ $\|h\|_{L^2} = 1$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{Q}_u(h,h) - \mathcal{Q}_v(h,h)| &= \left| \|T_{\overline{v}}h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|T_{\overline{u}}h\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \right| \\ &\leq \left\|T_{(\overline{u}-\overline{v})}h\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \left(\|T_{\overline{v}}h\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|T_{\overline{u}}h\|_{L^2(\mathbb{T})}\right) \\ &\leq \|u-v\|_{L^2(\mathbb{T})} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) (1 + \langle Dh \,|\, h\rangle)\end{aligned}$$

由不等式（2.15）。因此,

$$\mathcal{Q}_v(h,h) \leq \mathcal{Q}_u(h,h) + \|u-v\|_{L^2(\mathbb{T})} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) (1 + \langle Dh \,|\, h\rangle) \,. \tag{3.8}$$

特别地，考虑任意一个维数为 F的 $L^2_+($T子空间 n，并且对任意 $h \in F^\perp \cap$1$H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$, $\cap \bigoplus_{k=0}^n \ker(L_u - \lambda_k(u)\mathrm{Id})$，后一个不等式成立。此外，根据定义观察 $L_u = D - T_u T_{\bar{u}}$, 并在 3.3 中取 $\eta = \frac{1}{2}$，应用不等式

$$\begin{aligned}\langle Dh \,|\, h\rangle &\leq \langle L_u h \,|\, h\rangle + \|T_{\bar{u}}h\|^2_{L^2} \\ &\leq \langle L_u h \,|\, h\rangle + \frac{1}{2}(\langle Dh \,|\, h\rangle + 1) + 2N^2\|u\|^2_{L^2} \,,\end{aligned}$$

其中 $N \in \mathbb{N}$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的每个紧子集上是一致的。也就是说,

$$\langle Dh \,|\, h\rangle \leq 2\lambda_n(u) + 1 + 4N^2\|u\|^2_{L^2} \,, \tag{3.9}$$

因为当 $h \in \bigoplus_{k=0}^n \ker(L_u - \lambda_k(u)\,\mathrm{Id})$ 时，$\mathcal{Q}_u(h,h) = \langle L_u h \,|\, h\rangle \leq \lambda_n(u)$。此外，再次应用极大极小原理,

$$\begin{aligned}\lambda_n(u) &\leq \max_{\substack{F \subseteq L^2_+ \\ \dim F \leq n}} \min \left\{ \langle Dh \,|\, h\rangle \,;\, h \in F^\perp \cap H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}) \,,\ \|h\|_{L^2} = 1 \right\} \\ &= \min \left\{ \langle Dh \,|\, h\rangle \,;\, h \in \left\{1, \ldots, \mathrm{e}^{i(n-1)x}\right\}^\perp \cap H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}) \,,\ \|h\|_{L^2} = 1 \right\} \\ &= n\end{aligned} \tag{3.10}$$

1因此，结合（3.8）、（3.9）和（3.10），我们得到对所有 $h \in F^\perp \cap H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$, $\cap \bigoplus_{k=0}^n \ker(L_u - \lambda_k(u)\,\mathrm{Id})$，并且由于 $\mathcal{Q}_u(h,\ h) \leq \lambda_n(u)$,

$$\mathcal{Q}_v(h,h) \leq \lambda_n(u) + 2\,\|u-v\|_{L^2(\mathbb{T})} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) \left(n + 1 + 2N^2\|u\|^2_{L^2}\right) \,.$$

因此,

$$\lambda_n(v) \leq \lambda_n(u) + 2\left(n + 1 + 2N^2\|u\|^2_{L^2}\right) \|u-v\|_{L^2(\mathbb{T})} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) \,.$$

□

推论 3.2（ L_{u_0}的谱的刻画）。设 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，使得$u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$。L_{u_0} 的谱由下式给出

$$\sigma(L_{u_0}) = \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_n(u_0^\varepsilon) \;\middle|\; \lambda_n(u_0^\varepsilon) \in \sigma(L_{u_0^\varepsilon}) \,,\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \right\} \,.$$

证明。根据前述命题，结论可直接得出。 □

命题3.3。设 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 和 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，使得 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$。则当 $\varepsilon \to 0$时，$L_{u_0^\varepsilon} \to L_{u_0}$ 在强预解式意义下成立。

证明。 对于所有 $\varepsilon > 0$，记 ϕ_λ^ε 为向量 $\phi_\lambda^\varepsilon := \left(L_{u_0^\varepsilon} + \lambda\right)^{-1} h$, $h \in L^2_+(\mathbb{T})$，其中 $\lambda \gg 0$. 注意到 λ 可以相对于 ε一致地选取。事实上，由不等式（3.3），且由于 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，存在 $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，对所有 ε 一致，使得当 ε 足够小时

$$\left\langle (L_{u_0^\varepsilon} + \lambda) g \,|\, g \right\rangle \geq \frac{1}{2} \|g\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + (\lambda - \frac{1}{2} - 2N^2 \|u_0\|^2_{L^2}) \|g\|^2_{L^2} \,. \tag{3.11}$$

然后，为了应用 Lax–Miligram 定理，根据上一个不等式，我们选取 $\lambda \gg 0$，使得 $\langle (L_{u_0^\varepsilon} + \lambda) \cdot \,|\, \cdot \rangle$ 具有强制性，因此（$L_{u_0^\varepsilon} + \lambda$）对所有 ε 足够小的情形均可逆。我们的目标是证明 ϕ_λ^ε 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中收敛。对于 $g = \phi_\lambda^\varepsilon$ 在（3.11）中，

$$\left\langle L_{u_0^\varepsilon} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, \phi_\lambda^\varepsilon \right\rangle + \lambda \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{L^2} \geq \frac{1}{2} \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + \left(\lambda - \frac{1}{2} - 2N^2 \|u_0^\varepsilon\|_{L^2}\right) \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{L^2} \,,$$

这就导出，对于 $\lambda \gg 0$，有

$$\left\langle L_{u_0^\varepsilon} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, \phi_\lambda^\varepsilon \right\rangle + \lambda \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{L^2} \gtrsim \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \,.$$

因此，当 $\left\langle L_{u_0^\varepsilon} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, \phi_\lambda^\varepsilon \right\rangle + \lambda \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{L^2} = \langle h \,|\, \phi_\lambda^\varepsilon \rangle$ 时，

$$\langle h \,|\, \phi_\lambda^\varepsilon \rangle \gtrsim \|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \,. \tag{3.12}$$

利用柯西–施瓦茨不等式，我们推出 $\|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \|h\|_{L^2} \|\phi_\lambda^\varepsilon\|_{L^2}$，其中，根据推论 3.2 以及由（3.7），对于所有 $\varepsilon > 0$，

$$\|\phi_\lambda^\varepsilon\|_{L^2} \leq \sup_n \frac{1}{|\lambda_n(u_0^\varepsilon) + \lambda|} \|h\|_{L^2} \leq C(\lambda) \|h\|_{L^2} \,. \tag{3.13}$$

因此，

$$\|\phi_\lambda^\varepsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C(\lambda) \|h\|^2_{L^2} \,, \qquad \forall \varepsilon > 0 \,.$$

因此，存在 $\phi_\lambda \in L^2_+$，使得在取一个子列后，

$$\phi_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \phi_\lambda \text{ in } H^2_+(\mathbb{T}) \quad \text{and} \quad \phi_\lambda^\varepsilon \to \phi_\lambda \text{ in } L^2_+(\mathbb{T}) \,.$$

剩下需要证明的是 $\phi_\lambda = (L_{u_0} + \lambda)^{-1} h$.。事实上，对任意 $g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$，根据 ϕ_λ^ε 的定义，有 $\left\langle \left(L_{u_0^\varepsilon} + \lambda\right) \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, g \right\rangle = \langle h \,|\, g \rangle$。也就是说，

$$\langle h \,|\, g \rangle = \langle D^{\frac{1}{2}} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, D^{\frac{1}{2}} g \rangle - \left\langle T_{\bar{u}_0^\varepsilon} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, T_{\bar{u}_0^\varepsilon} g \right\rangle + \lambda \left\langle \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, g \right\rangle . \tag{3.14}$$

由于

$$\begin{cases} T_{\bar{u}_0^\varepsilon} g \longrightarrow T_{\bar{u}_0} g \\ T_{\bar{u}_0^\varepsilon} \phi_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup T_{\bar{u}_0} \phi_\lambda \\ D^{\frac{1}{2}} \phi_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup D^{\frac{1}{2}} \phi_\lambda \end{cases}$$

在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，于 (3.14) 中取极限，可得对所有 $g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$,

$$\langle h \,|\, g \rangle = \langle D^{\frac{1}{2}} \phi_\lambda \,|\, D^{\frac{1}{2}} g \rangle - \left\langle T_{\bar{u}_0^\varepsilon g} \phi_\lambda^\varepsilon \,|\, T_{\bar{u}_0^\varepsilon} \right\rangle + \lambda \langle \phi_\lambda \,|\, g \rangle =: \langle (L_{u_0} + \lambda) \phi_\lambda \,|\, g \rangle \,.$$

也就是说， $\phi_\lambda \in$ 定义域(L_{u_0}) 和 $\phi_\lambda = (L_{u_0} + \lambda)^{-1} h$. 因此， $L_{u_0^\varepsilon} \to L_{u_0}$ 在强预解式意义下，当 $\varepsilon \to 0$. □

3.1.2. 极限的刻画 $u(t)$。

命题 3.4（极限势的唯一性 $u(t)$）。设 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$。存在唯一的势 $u(t) \in L^2_+(\mathbb{T})$,

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}, \tag{3.15}$$

使得，对于任意满足 $\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ 的序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，我们有

$$u^\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t) \ \textit{in}\ L^2_+(\mathbb{T}), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

证明。根据 L^2–范数的守恒性（引理 2.6），

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{L^2}, \qquad \forall \varepsilon \ll 1.$$

于是，$\forall t \in \mathbb{R}, \exists\, u_t^* \in L^2_+(\mathbb{T})$ 使得

$$u^\varepsilon(t) \rightharpoonup u_t^* \text{ in } L^2_+(\mathbb{T}), \qquad \text{and} \qquad \|u_t^*\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{L^2}. \tag{3.16}$$

Let

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

并由命题 2.5，回忆可得

$$u^\varepsilon(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0^\varepsilon}}\,S^*)^{-1}\,u_0^\varepsilon \,|\, 1 \right\rangle, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{3.17}$$

我们的目标是证明，对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{D}$，都有 $u^\varepsilon(t,z) \longrightarrow u(t,z)$，因此，根据极限的唯一性，可以得出 u_t^* 是定义在 $L^2_+(\mathbb{T})$上的良定义函数，并由 $u(t,z)$给出其在 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数形式。事实上，根据命题3.3，当 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$中时，$L_{u_0^\varepsilon} \to L_{u_0}$ 在强预解式意义下成立。因此，对于任意有界连续函数 f，我们在强算子拓扑下有 $f(L_{u_0^\varepsilon}) \to f(L_{u_0})$，参见deO09，命题10.1.9]。特别地，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，以及对于 $f(x) = \mathrm{e}^{-2ixt}$，

$$\mathrm{e}^{-2itL_{u_0^\varepsilon}} \longrightarrow \mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}$$

强收敛于 $\varepsilon \to 0$. 因此，在（3.17）中取极限，我们得到

$$u^\varepsilon(t,z) \longrightarrow u(t,z), \qquad \varepsilon \to 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}.$$

□

3.2. 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的强收敛以及 L^2-质量守恒。本小节旨在证明定理 1.2。根据上一小节的结果，我们还需要证明

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \tag{3.18}$$

为了保证 $u^\varepsilon(t) \to u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中强收敛，与 $\varepsilon \to 0$ 时的情形相同，

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \longrightarrow \|u_0\|_{L^2}.$$

证明 (3.18) 的主要思路是在 $u(t)$ 上使用帕塞瓦尔恒等式，其中 $u(t)$ 可写成适当的演化的正交归一基 L^2_+–基 (f_n^t)，并满足

$$|\langle u(t) \,|\, f_n^t \rangle| = |\langle u_0 \,|\, f_n^0 \rangle|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}. \tag{3.19}$$

定义 3.5（ $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基）。对于所有 $\varepsilon > 0$，令 $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2_+(\mathbb{T}))$ 。我们用 $(f^{\varepsilon,t}_n)$ 表示沿曲线 $t \mapsto u^\varepsilon(t)$ 的 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的演化的正交归一基，并满足柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t f^{\varepsilon,t}_n = B_{u^\varepsilon(t)} f^{\varepsilon,t}_n \\ f^{\varepsilon,t}_{n\,|t=0} = f^{\varepsilon,0}_n \end{cases},$$

对所有 n，其中 $(f^{\varepsilon,0}_n)$ 是 $L^2_+(\mathbb{T}$ 的标准正交基，由自伴 Lax 算子 $L_{u^\varepsilon_0}$ 的特征函数构成，且 $B_{u^\varepsilon(t)}$ 是式 (1.5) 中定义的斜自伴算子。

注 3.2。

(1) 由于对所有 $\varepsilon > 0$, $B_{u^\varepsilon(t)}$, 该算子是斜自伴有界算子（参见命题 2.3），因此 $(f^{\varepsilon,t}_n)$ 的正交性随时间保持不变。事实上，对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left\langle f^{\varepsilon,t}_n \,|\, f^{\varepsilon,t}_m \right\rangle = \left\langle B_u f^{\varepsilon,t}_n \,|\, f^{\varepsilon,t}_m \right\rangle + \left\langle f^{\varepsilon,t}_n \,|\, B_u f^{\varepsilon,t}_m \right\rangle = 0\,,$$

(2) 根据 [Ku06，引理 4.1] , ，这样的标准正交基由 Lax 算子 $L_{u^\varepsilon(t)}$ 的特征函数构成。通常，对所有 $\varepsilon > 0$，对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$L_{u^\varepsilon(t)} f^{\varepsilon,t}_n = \lambda_n(u^\varepsilon_0) f^{\varepsilon,t}_n\,.$$

采用这一 $L^2_+(\mathbb{T})$基，我们可以很好地描述 $u^\varepsilon(t)$ 坐标的演化。这正是下一个引理的目的。

引理 3.6. 对所有 $\varepsilon > 0$，令 $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2_+(\mathbb{T}))$ 为 (CS^+)的解。采用定义 3.5中的相同记号，对任意 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，

$$\left\langle u^\varepsilon(t) \,|\, f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle = \left\langle u^\varepsilon_0 \,|\, f^{\varepsilon,0}_n \right\rangle \mathrm{e}^{-i\lambda_n(u^\varepsilon_0)^2\, t}\,. \tag{3.20}$$

证明。由引理 2.4，并且由于 $L_{u^\varepsilon(t)}$ 和 $B_{u^\varepsilon(t)}$ 分别为自伴和反自伴算子

$$\begin{aligned} \partial_t \left\langle u^\varepsilon(t) \,|\, f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle &= \left\langle B_{u^\varepsilon(t)} u^\varepsilon(t) - i\, L^2_{u^\varepsilon(t)} u^\varepsilon(t) \,|\, f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle + \left\langle u^\varepsilon(t) \,|\, B_{u^\varepsilon(t)} f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle \\ &= -\, i\lambda^2_n(u^\varepsilon_0) \left\langle u^\varepsilon(t) \,|\, f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle, \end{aligned}$$

由此得出结论。 □

Consequence. 由前一个引理可知，对所有 $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，

$$\left|\left\langle u^\varepsilon(t) \,|\, f^{\varepsilon,t}_n \right\rangle\right| = \left|\left\langle u^\varepsilon_0 \,|\, f^{\varepsilon,0}_n \right\rangle\right|.$$

此时，我们希望在后一个恒等式中取 $\varepsilon \to 0$ ，以推导出（3.19）。不过，首先可能会提出两个问题:

I. 由自伴 Lax 算子的特征函数构成的标准正交基（$f^{\varepsilon,0}_n$）在 $L_{u^\varepsilon_0}$ 的极限下是否仍为 L^2_+（$\mathbb{T}$）的标准正交基? II. 假设前一个问题的答案是肯定的，并将这个标准正交基极限记为（f^0_n）。根据定义 3.5，我们能否构造一个随时间演化的标准正交基，使其在 $t = 0$ 时与（f^0_n）一致，并像引理 3.6 中那样，在该基下诱导出 u 坐标的良好演化? 先验地，算子 B_u 的定义

在（1.5）中，当 $u \in \mathcal{C}_t[L^2_+(\mathbb{T})]_x$. 时并未定义良好。因此，我们应当寻找另一种方式来规避这一问题。

下面的命题旨在回答问题 I.，并通过为 L_{u_0} for $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$ 的 Sobolev 范数$\|f^{\varepsilon,}{}_n{}^0\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ 的增长找到一个一致上界，刻画其特征函数。对于第二个问题 II.，我们采用上一小节中的相同策略，避免通过定义3.5 来定义 (f_n^t) 的问题，即对所有 $t \in \mathbb{R}$.，刻画极限 f_n^t。因此，为了取极限，我们应对所有$\varepsilon > 0$ 推导出 $f^{\varepsilon,}{}_n{}^t$ 的显式公式。遗憾的是，我们无法直接得到极限 (f_n^t) 构成 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基。不过，它应当是$L^2_+(\mathbb{T})$ 中的一个标准正交族，这足以得出结论。

命题 3.7. 给定 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$，存在一个序列 $(f_n^0) \subseteq$定义域(L_{u_0})，使得对于 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的任意序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$ $u_0^\varepsilon \to u_0$，我们有（取一个子序列后）

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_n^{\varepsilon,0} - f_n^0\|_{L^2} = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}\,.$$

此外，对所有 n,

$$L_{u_0} f_n^0 = \lambda_n(u_0) f_n^0\,.$$

证明。根据 $L_{u_0^\varepsilon} = D - T_{u_0^\varepsilon} T_{\bar{u}_0^\varepsilon}$ 的定义，并且由于 $L_{u_0^\varepsilon} f^{\varepsilon,}{}_n{}^0 = \lambda_n(u_0^\varepsilon) f^{\varepsilon,}{}_n{}^0$，可得

$$\lambda_n(u_0^\varepsilon) + \|T_{\bar{u}_0^\varepsilon} f_n^{\varepsilon,0}\|^2_{L^2} = \|f_n^{\varepsilon,0}\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_+}\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

注意，由于 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，并应用不等式（3.3），可推知 $\exists N \geq 0$与 ε 无关，使得

$$\lambda_n(u_0^\varepsilon) + \frac{1}{2}\|f_n^{\varepsilon,0}\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + 2N^2\|u_0^\varepsilon\|_{L^2} + \frac{1}{2} > \|f^{\varepsilon,0}\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\,.$$

因此，由命题 3.1 并且由于 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$,

$$\|f_n^{\varepsilon,0}\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \lesssim \lambda_n(u_0) + \|u_0\|^2_{L^2}\,. \tag{3.21}$$

因此，取一个子列后， $\exists (f_n^0)$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$f_n^{\varepsilon,0} \rightharpoonup f_n^0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}) \qquad \text{and} \qquad f_n^{\varepsilon,0} \to f_n^0 \text{ in } L^2_+(\mathbb{T})\,. \tag{3.22}$$

目前，对于证明的第二部分，我们证明 (f_n^0) 是 L_{u_0}. 的特征函数。注意，根据引理 2.7，可以直接验证 $(f_n^0) \subseteq$属于定义域(L_{u_0})，其中$_1$定义域(L_{u_0})在（3.5）中定义。此外，根据 $L_{u_0^\varepsilon}$ 的定义，对所有 $g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})$，,

$$\langle D^{\frac{1}{2}} f_n^{\varepsilon,0} \mid D^{\frac{1}{2}} g\rangle - \langle T_{\bar{u}_0^\varepsilon} f_n^{\varepsilon,0} \mid T_{\bar{u}_0^\varepsilon} g\rangle = \lambda_n(u_0^\varepsilon)\,\langle f_n^{\varepsilon,0} \mid g\rangle\,, \tag{3.23}$$

其中根据引理 2.7 $T_{\bar{u}_0^\varepsilon} g \longrightarrow T_{\bar{u}_0} g$ 中的 $L^2_+(\mathbb{T})$，根据命题 3.1 $\lambda_n(u_0^\varepsilon) \to \lambda_n(u_0)$，以及根据 (3.22) $T_{\bar{u}_0^\varepsilon} f^{\varepsilon,}{}_n{}^0 \rightharpoonup T_{\bar{u}_0} f_n^0$. 因此，在 (3.23) 中取极限，可得

$$\langle L_{u_0} f_n^0 \mid g\rangle = \lambda_n(u_0)\,\langle f_n^0 \mid g\rangle\,, \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,,$$

从而得到 $L_{u_0} f_n^0 = \lambda_n(u_0) f_n^0$对所有 $n \geq 0$，其中（$\lambda_n(u_0)$ 表示 L_{u_0}的全部谱，这由推论 3.2 得出。

□

接下来，得益于推论 3.2 和命题 3.7，我们将（f_n^0）记作由 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的特征函数构成的标准正交基 L_{u_0}，这些特征函数是在前一个命题中得到的。下面的引理旨在给出定义 $f^{\varepsilon,}{}_n{}^t$）中（3.5 所定义的量的显式公式，以便在第二阶段刻画它们在 $\varepsilon \to 0$时的极限。

引理 3.8 （ f^{ε}的显式公式, $_n{}^t$）。 沿用定义 3.5中的相同记号，对于所有 $\varepsilon > 0$， $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n^{\varepsilon,t}(z) = \left\langle \left(\mathrm{Id} - z\, \mathrm{e}^{-it(L_{u_0^\varepsilon}+\mathrm{Id})^2}\, S^*\, \mathrm{e}^{itL^2_{u_0^\varepsilon}} \right)^{-1} f_n^{\varepsilon,0} \mid \mathrm{e}^{-itL^2_{u_0^\varepsilon}}\, 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,. \tag{3.24}$$

证明。 与命题 2.5的证明类似，我们有

$$f_n^{\varepsilon,t}(z) = \left\langle (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1}\, f_n^{\varepsilon,t} \mid 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,.$$

利用在（ U（t）中引入的酉算子（2.10），我们得到

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon,}{}_n{}^t(z) &= \langle U(t)^* (\text{恒等算子}\ - zS^*)^{-1}\, f^{\varepsilon,}{}_n{}^t \mid U(t)^* 1 \rangle \\ &= \left\langle (\text{恒等算子}\ - zU(t)^* S^* U(t))^{-1}\, U(t)^* f^{\varepsilon,}{}_n{}^t \mid U(t)^* 1 \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathrm{Id}\ - zU(t)^* S^* U(t))^{-1}\, f^{\varepsilon,}{}_n{}^0 \mid U(t)^* 1 \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.25}$$

根据（2.13）和（2.14）中的公式， $f^{\varepsilon,}{}_n{}^t$的显式公式随即得到。 □

命题 3.9。 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$。 沿用定义 3.5中的记号，存在一个标准正交族 (f_n^t)，其属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，使得对于任意序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$， $u_0^\varepsilon \to u_0$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，我们有（除去一个子序列后），

$$\| f_n^{\varepsilon,t} - f_n^t \|_{L^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

证明。该证明与命题 3.7中的证明类似。不过，它有两个主要区别。我们将在后面的注记中讨论这些区别。现在回到证明，回顾命题 3.4可知，存在唯一的 $u(t) \in L^2_+(\mathbb{T})$，使得对于任意 $u_0^\varepsilon \to u_0$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，都有 $u^\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ 属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，当 $\varepsilon \to 0$. 因此，根据$L_{u^\varepsilon}(t) = D - T_{u^\varepsilon}(t) T_{\bar{u}^\varepsilon}(t)$ 的定义，并且由于 $L_{u^\varepsilon}(t) f^{\varepsilon,}{}_n{}^t = \lambda_n(u_0^\varepsilon) f^{\varepsilon,}{}_n{}^t$根据注 3.2的第二点，

$$\lambda_n(u_0^\varepsilon) + \| T_{\bar{u}^\varepsilon(t)} f_n^{\varepsilon,t} \|^2_{L^2} = \| f_n^{\varepsilon,t} \|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

因此，应用引理 2.7，

$$(1 - \|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2})\, \| f_n^{\varepsilon,t} \|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2} + \lambda_n(u_0^\varepsilon)\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

取 ε充分小以保证 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} < 1$，由命题 3.1可推出，对于 ε 充分小

$$\| f_n^{\varepsilon,t} \|^2_{\dot{H}^{1/2}} \lesssim \frac{\lambda_n(u_0) + \|u_0\|^2_{L^2}}{1 - \|u_0\|^2_{L^2}}\,, \qquad \forall n \geq 0\,. \tag{3.26}$$

因此，取一个子列后，

$$f_n^\varepsilon(t) \rightharpoonup f^*_{n,t} \text{ in } H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T})\,, \qquad f_n^\varepsilon(t) \to f^*_{n,t} \text{ in } L^2_+(\mathbb{T})\,.$$

尚需证明，对于所有$f^*_{n,\ t}$，t均可被唯一确定。利用引理3.8的显式公式，

$$f_n^{\varepsilon,t}(z) = \left\langle \left(\mathrm{Id} - z\, \mathrm{e}^{-it(L_{u_0^\varepsilon}+\mathrm{Id})^2}\, S^*\, \mathrm{e}^{itL^2_{u_0^\varepsilon}} \right)^{-1} f_n^{\varepsilon,0} \,|\, \mathrm{e}^{-itL^2_{u_0^\varepsilon}}\, 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,,$$

并应用命题 3.3，可以得出存在

$$f_n^t(z) = \left\langle \left(\mathrm{Id} - z\, \mathrm{e}^{-it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2}\, S^*\, \mathrm{e}^{itL^2_{u_0}} \right)^{-1} f_n^0 \,|\, \mathrm{e}^{-itL^2_{u_0}}\, 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,, \tag{3.27}$$

其中，(f_n^0) 表示在命题 3.7 中得到的 L_{u_0} 的特征函数。因此，对所有 t，在 $\mathbb{D}$ 上有极限 $f^*_{n,\ t} = f_n^t$。最后注意到，由于 $(f^{\varepsilon,\ t}_{\ n})$ 是 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基，且 $f^{\varepsilon,\ t}_{\ n} \to f_n^t$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，因此 (f_n^t) 构成 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的一个标准正交族。□

注 3.3。 命题 3.7 的证明与命题 3.9之间有两个主要区别：

(i) 首先，注意到在上一个证明中，由于不等式 (3.3) 中的整数 N_η 并非对所有 $t \in \mathbb{R}$. 都统一，因此我们无法利用不等式 (3.3) 对所有 t 一致地控制 Sobolev 范数$\|f^{\varepsilon,\ t}_{\ n}\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ 的增长。作为替代，我们依赖引理 2.7。因此，要得出结论，$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} < 1$ 对于足够小的 ε 这一条件至关重要。(ii) 其次，在前一个证明中，我们必须通过刻画极限 $f^*_{n,\ t}$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$.给出其含义

这两个证明的一个共同特点是，对特征函数 $f^{\varepsilon,\ 0}_{\ n}$和 $f^{\varepsilon,\ t}_{\ n}$的 Sobolev 范数 $H^{\frac{2}{+}}(\mathbb{T})$ 的增长获得一致有界性1，从而得以得出结论。

根据命题 3.1、引理 3.6、命题 3.7 和命题 3.9，我们推出以下引理。

引理 3.10. 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$。存在一个 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交族 (f_n^t)，使得对所有 $n \geq 0$,

$$\langle u(t) \,|\, f_n^t \rangle = \langle u_0 \,|\, f_n^0 \rangle\, \mathrm{e}^{-it\lambda_n^2(u_0)}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.28}$$

此时，我们可以证明定理 1.2。

定理。 1.2。 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$。存在唯一的势 $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ L^2_+(\mathbb{T}))$ 使得，对于任意序列 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$ $\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$，以下收敛成立：对所有 $T > 0$,

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^2} \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

此外,

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\, \mathrm{e}^{-it}\, \mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\, S^*)^{-1}\, u_0 \,|\, 1 \right\rangle , \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,. \tag{3.29}$$

此外，极限势的 L^2–范数 u 守恒

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

证明。设 $(t^\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ 满足当 $\varepsilon \to 0$ 时 $t^\varepsilon \to t$。由于 $\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \to 0$，那么对于足够小的 ε

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{L^2}\,.$$

因此，对于任意 $t^\varepsilon \to t$，存在 $u_t^* \in L^2_+(\mathbb{T})$，使得取一个子序列后，$u^\varepsilon(t^\varepsilon) \rightharpoonup u_t^*$在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，并且

$$\|u_t^*\|_{L^2} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{L^2} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}\,. \tag{3.30}$$

我们的目标是证明 $u^\varepsilon(t^\varepsilon)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中强收敛。首先，我们强调，对于所有 t，弱极限势 u_t^* 都有唯一确定的特征，并且等于唯一的极限势$u(t)$。为此，我们重复命题 3.4 的证明，将 t 换成带有$t^\varepsilon \to t$的 t^ε，从而得到 $u^\varepsilon(t^\varepsilon) \rightharpoonup u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，其中 $u(t)$ 定义于公式 (3.15)。此外，

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}\,, \tag{3.31}$$

由 (3.30)。作为第二步，我们证明这种在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的弱收敛实际上是强收敛。这可以通过验证

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{T})} \to \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

事实上，只需证明 $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 即可，因为

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \longrightarrow \|u_0\|_{L^2}\,, \quad \text{as } \varepsilon \to 0\,. \tag{3.32}$$

由 (3.31)，我们已经得到 $\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$. 现在，为了证明 $\|u(t)\|_{L^2} \geq \|u_0\|_{L^2}$，我们使用引理 3.10 来推得存在一个正交归一 族 (f_n^t)，其属于 $L^2_+(\mathbb{T})$，并满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle u(t) \,|\, f_n^t\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_0 \,|\, f_n^0\rangle|^2 = \|u_0\|_{L^2}^2\,.$$

因此，由贝塞尔不等式

$$\|u(t)\|_{L^2} \geq \|u_0\|_{L^2}\,.$$

综上，我们已证明，对于任意 $t^\varepsilon \to t$, $u^\varepsilon(t^\varepsilon) \to u(t)$，均属于 $L^2_+(\mathbb{T})$。这意味着，$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_+(\mathbb{T}))$，且对所有 $T > 0$,

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L^2} \to 0\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

□

鉴于上一个定理，我们将 $u(t)$ 记作 (CS$^+$) 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中从初始数据 u_0 出发的解，该初始数据位于 $\mathcal{B}_{L^2_+}(1)$ 的开球 $L^2_+(\mathbb{T})$ 内。

推论 3.11. 谱 $\sigma(L_{u(t)})$ 在 (CS$^+$) 的流下保持不变 .

证明。令 $(u_0^\varepsilon) \subseteq H^2_+(\mathbb{T})$，使得 $\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$. 时。由于对所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$,

$$\lambda_n(u_0^\varepsilon) = \lambda_n(u^\varepsilon(t))\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

然后通过取极限，根据命题 3.1 和定理 1.2可知， $L_{u(t)}$ 的谱随时间守恒。

□

推论 3.12. 设 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1)$。存在一个由 $L_{u(t)}$ 的特征函数构成的 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基 (f_n^t)，使得对所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，

$$\langle u(t) \,|\, f_n^t \rangle = \langle u_0 \,|\, f_n^0 \rangle \, \mathrm{e}^{-it\lambda_n^2(u_0)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

证明。考虑到引理 3.10，我们只需证明命题 f_n^t3.9 中找到的标准正交族 (满足

$$f_n^{\varepsilon,t} \rightharpoonup f_n^t \text{ in } H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}), \qquad \text{and} \qquad f_n^{\varepsilon,t} \to f_n^t \text{ in } L^2_+(\mathbb{T}), \tag{3.34}$$

实际上是 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基。一方面，利用 (3.34)，并且由于 $u^\varepsilon(t) \to u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，可以直接证明 $L_{u^\varepsilon(t)} f^{\varepsilon,t}_n \rightharpoonup L_{u(t)} f_n^t$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中。另一方面，利用命题 3.1，我们推得取 $\varepsilon \to 0$ 于

$$\langle L_{u^\varepsilon(t)} f_n^{\varepsilon,t} \,|\, g \rangle = \lambda_n(u^\varepsilon(t)) \langle f_n^{\varepsilon,t} \,|\, g \rangle, \qquad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}),$$

可得

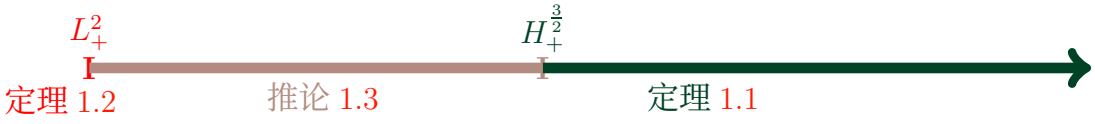
$$\langle L_{u(t)} f_n^t \,|\, g \rangle = \lambda_n(u(t)) \langle f_n^t \,|\, g \rangle, \qquad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{T}).$$

因此，(f_n^t) 描述了自伴算子 $L_{u(t)}$ 的所有特征函数，这归功于推论 3.11 和推论 3.2。因此，它们构成 $L^2_+(\mathbb{T})$. □

注3.4。(3.33) 中这些坐标的良好演化表明，(CS$^+$) 的所谓“Birkhoff 坐标”应当是 $(\langle u(t) \,|\, f_n^t \rangle)$。为确认这一点，我们需要构造一个逐点的 Birkhoff 映射 $u \longleftrightarrow (\langle u(t) \,|\, f_n^t \rangle)$，类似于 [GK21] 中对 Benjamin–Ono 方程所取得的非凡成果。这一构造能够为揭示该方程动力学的若干重要性质打开大门。尤其是，当 $\|u_0\|_{L^2} \geq 1$.

4. Proof of Corollary 1.3 and Theorem 1.4

总而言之，我们已经证明了 (CS$^+$) 方程在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 上的整体适定性，$s > \frac{3}{2}$，以及对于 $s = 0$ （对应于 $H^0_+(\mathbb{T}) \equiv L^2_+(\mathbb{T})$）。下面的推论旨在证明 $0 < s \leq \frac{3}{2}$.



推论。*1.3*。对于所有 $0 \leq s \leq \frac{3}{2}$，Calogero–Sutherland DNLS 聚焦方程 （CS$^+$）在 H^s_+（$\mathbb{T}$）$\cap \mathcal{B}_{L^2_+}$（1）中全局适定。此外，以下先验界成立：

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} \leq C,$$

其中 $C = C(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ 是一个正定常数。

证明。对于 $s=0$，由定理 1.2 可知，该问题在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中整体适定，其意义是流从 $H^2_+(\mathbb{T})$ 到 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的连续延拓。对于 $0<s\leq\frac{3}{2}$，令 $u_0\in H^s_+(\mathbb{T})\cap\mathcal{B}_{L^2_+}(1)$，并考虑满足 $u_0^\varepsilon\to u_0$ 属于 $H^s_+(\mathbb{T})$ 的 $(u_0^\varepsilon)\subseteq H^2_+(\mathbb{T})$。然后应用命题 2.8，并且由于 $u_0^\varepsilon\to u_0$ 属于 $H^s_+(\mathbb{T})$，存在 $C>0$，它对所有足够小的 ε 一致，使得

$$\frac{1}{C}\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^s}\leq\|(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{L^2}=\|(L_{u_0^\varepsilon}+\lambda)^s u_0^\varepsilon\|_{L^2}\leq C\|u_0^\varepsilon\|_{H^s}\,,$$

得益于引理 2.6。注意到 λ 对于所有 ε 均一致地成立，理由与命题 3.3的证明中所述相同。因此，对于所有 $\varepsilon>0$ 足够小的情形，

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^s}\leq C\|u_0\|_{H^s}\,. \tag{4.1}$$

因此，当 $t^\varepsilon\to t$时，我们有 $u^\varepsilon(t^\varepsilon)\rightharpoonup u(t)$ 在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中，其中 u 是由所有 t 按照命题 3.4所得到的一个特征函数。在 $u^\varepsilon(t^\varepsilon)\to u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，我们特别推得

$$\|u(t)\|_{H^s}\lesssim\|u_0\|_{H^s}\,, \tag{4.2}$$

由（4.1）。目前，为了推导 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中的强收敛，我们使用命题 2.8。因此，对于所有 $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)-u(t)\|^2_{H^s}&\lesssim\|(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s(u^\varepsilon(t^\varepsilon)-u(t))\|^2_{L^2}\\&=\|(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|^2_{L^2}+\|(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s u(t)\|^2_{L^2}\\&\quad-2\mathrm{Re}\left\langle(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s u^\varepsilon(t^\varepsilon)\,|\,(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s u(t)\right\rangle\end{aligned} \tag{4.3}$$

回顾 $u^\varepsilon(t^\varepsilon)\to u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，由命题 3.3 可得 $L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}\to L_{u(t)}$ 在强预解式意义下成立。因此，根据函数演算（见下述引理——引理 4.1），我们推得

$$\begin{cases}(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s\,u(t)\to(L_{u(t)}+\lambda)^s\,u(t)\text{ in }L^2_+(\mathbb{T})\,,\\(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s\,u^\varepsilon(t^\varepsilon)\rightharpoonup(L_{u(t)}+\lambda)^s\,u(t)\text{ in }L^2_+(\mathbb{T})\,,\end{cases}$$

如 $\varepsilon\to0$.此外，对于 $\varepsilon>0$，由引理 2.6可知,

$$\|(L_{u^\varepsilon(t^\varepsilon)}+\lambda)^s\,u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|^2_{L^2}=\|(L_{u_0^\varepsilon}+\lambda)^s\,u_0^\varepsilon\|^2_{L^2}\,. \tag{4.4}$$

因此，在（4.3）中取极限，并且由于 $u_0^\varepsilon\to u_0$ 在 H^s_+（$\mathbb{T}$）结合引理 4.1 和命题 2.8，我们推得对所有 ε 充分小,

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)-u(t)\|^2_{H^s}\lesssim\|(L_{u_0}+\lambda)^s u_0\|^2_{L^2}-\|(L_{u(t)}+\lambda)^s u(t)\|^2_{L^2}\,.$$

此时，还需证明前一个不等式右端趋于零。事实上，根据推论 3.11,

$$\begin{aligned}\left\langle(L_{u(t)}+\lambda)^{2s}u(t)\,|\,u(t)\right\rangle&=\sum_{n\geq0}(\lambda_n(u(t))+\lambda)^{2s}|\left\langle u(t)\,|\,f_n^t\right\rangle|^2\\&=\sum_{n\geq0}(\lambda_n(u_0)+\lambda)^{2s}|\left\langle u_0\,|\,f_n^0\right\rangle|^2=\left\langle(L_{u_0}+\lambda)^{2s}u_0\,|\,u_0\right\rangle\,,\end{aligned}$$

其中 (f_n^t) 是推论 3.12 中得到的标准正交基，因为 $u^\varepsilon(t^\varepsilon) \to u(t)$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中。因此，$\|(L_{u_0}+\lambda)^s u_0\|_{L^2}^2 = \|(L_{u(t)}+\lambda)^s u(t)\|_{L^2}^2$，并且由于 $\varepsilon \to 0$,

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon) - u(t)\|_{H^s}^2 \longrightarrow 0\,.$$

因此，$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$ 使得（4.2）成立，并且对于所有 $T>0$,

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s} \to 0\,.$$

□

为了完成推论 1.3 的证明，我们需要证明以下泛函分析结果。

引理 4.1. 设 (A_ε) 是 L^2 中的一个正自伴算子序列。假设当 $\varepsilon \to 0$ 时，$A_\varepsilon \to A$ 在强预解式意义下成立，并且对于所有 $s \geq 0$,

$$\mathrm{Dom}(A_\varepsilon^s) = \mathrm{Dom}(A^s) = H^s\,, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

此外，假设对于所有 $u \in H^s$，$(A_\varepsilon^s u)$ 关于 $\varepsilon > 0$ 按照以下意义一致有界：$\|A_\varepsilon^s u\| \leq C\|u\|_{H^s}$. 那么，对于所有 $s \geq 0$,

$$A_\varepsilon^s u \longrightarrow A^s u \ \text{in}\ L^2\,, \qquad \varepsilon \to 0\,. \tag{4.5}$$

证明. 对于所有 $R>0$，取 $\chi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$，使得 $\chi_R \equiv 1$ 在 $[0,R]$ 上成立，且 $\mathrm{supp}(\chi_R) \subseteq [0,2R]$。注意，对于所有 $s \geq 0$，子集 $\{\chi_R(A)\,u\,;\ u \in H^s,\ R>0\}$ 在 H^s. 中稠密；因此，由于 $(A_\varepsilon^s u)$ 关于 ε 一致有界，只需证明对于所有 $R>0$,

$$A_\varepsilon^s\,\chi_R(A)u \longrightarrow A^s \chi_R(A)u\,, \qquad \varepsilon \to 0\,,$$

以获得 (4.5)。为此，令 $R>0$，并对任意 $s \geq 0$，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon^s\,\chi_R(A)u = A_\varepsilon^s\,\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon)\chi_R(A)u + A_\varepsilon^s\,(1-\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon))\chi_R(A)u\,, \tag{4.6}$$

其中 $\chi_{\tilde{R}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足 $\chi_{\tilde{R}} \equiv 1$ 在 $[0,R]$ 上，且 $\mathrm{supp}(\chi_{\tilde{R}}) \subseteq [0,2R]$, $R \geq 2R$。注意，

$$\begin{aligned}\|A_\varepsilon^s\,(1-\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon))\chi_R(A)u\| &= \|A_\varepsilon^{-s}\,(1-\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon))A_\varepsilon^{2s}\chi_R(A)u\| \\ &\leq \frac{C^2}{(2\tilde{R})^s}\,\|u\|_{H^s}\,.\end{aligned}$$

因此，对所有 $\eta > 0$，存在 $R \gg 0$，使得对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\|A_\varepsilon^s\,(1-\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon))\chi_R(A)u\| < \eta\,,$$

因此，由 (4.6),

$$\|A_\varepsilon^s\,\chi_R(A)u - A_\varepsilon^s\,\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon)\chi_R(A)u\| < \eta\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,. \tag{4.7}$$

此外，回顾 $A_\varepsilon \to A$ 在强预解式意义下，当 $\varepsilon \to 0$. 因此，由[deO09，命题 10.1。9]，$f(A_\varepsilon) \to f(A)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，对所有有界连续的 f，在算子范数意义下成立。特别地，对于 $f(x) = x^s\,\chi_{\tilde{R}}(x)$，我们有

$$A_\varepsilon^s\,\chi_{\tilde{R}}(A_\varepsilon)\,\chi_R(A)u \longrightarrow A^s\,\chi_R(A)u\,, \qquad \varepsilon \to 0\,. \tag{4.8}$$

因此，结合（4.7）和（4.8），我们推得对所有 $\tilde{\eta} > 0$，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得$\forall \varepsilon > \varepsilon_0$,

$$\|A_\varepsilon^s \chi_R(A)u - A^s \chi_R(A)u\| < \tilde{\eta}\,.$$

□

除了（CS$^+$）柯西问题的整体适定性结果之外，我们还关注该方程的流 $\mathcal{S}^+(t)$ 的一些定性性质。因此，我们证明轨道的所有弱极限点实际上都是强极限点。

定理。 *1.4*。 给定初始数据 $u_0 \in \mathcal{B}_{L^2_+}(1) \cap H^s_+(\mathbb{T})$， $s \geq 0$， 解的轨道$\{\mathcal{S}^+(t)u_0\,;\ \ t \in \mathbb{R}\}$ 在 $H^s_+(\mathbb{T})$中相对紧。

证明。令 $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $t_n \to \infty$.

步骤 1： $s = 0$。由定理 1.2,

$$\|u(t_n)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}\,. \tag{4.9}$$

于是， $\exists\, \tilde{u} \in L^2_+(\mathbb{T})$ 使得（取子列后），

$$u(t_n) \rightharpoonup \tilde{u} \text{ in } L^2_+(\mathbb{T}) \qquad \text{and} \qquad \|\tilde{u}\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}\,.$$

为了获得强收敛 $u(t_n) \to \tilde{u}$ 于 $L^2_+(\mathbb{T})$，剩下只需证明$\|u(t_n)\|_{L^2} \to \|\tilde{u}\|_{L^2}$，或者根据（4.9）可得,

$$\|u_0\|_{L^2} = \|\tilde{u}\|_{L^2}\,.$$

注意，我们已经有 $\|u_0\|_{L^2} \geq \|\tilde{u}\|_{L^2}$。现在，为了证明 $\|u_0\|_{L^2} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2}$，根据推论 3.12，回忆得

$$\left\langle u(t_n) \,|\, f_m^{t_n} \right\rangle = \left\langle u_0 \,|\, f_m^0 \right\rangle \mathrm{e}^{-it_n \lambda_m^2(u_0)}\,, \tag{4.10}$$

其中，$(f_m^{t_n})$ 是由 $L_{u(t^n)}\cdot$ 的特征函数构成的 $L^2_+(\mathbb{T})$ 的标准正交基。其思路是令 $t_n \to \infty$ 趋于极限，并在上述恒等式中使用贝塞尔恒等式来得出结论。首先，我们有 $u(t_n) \rightharpoonup \tilde{u}$ 于 $L^2_+(\mathbb{T})$。其次，注意到，当 $t_n \to \infty$ 趋于 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中的一个标准正交族（记为 (g_m)）时，$(f_m^{t_n})$ 强收敛于该族。事实上，根据 $L_{u(t_n)}$ 的定义,

$$\lambda_m(u_0) + \|T_{\overline{u(t_n)}} f_m^{t_n}\|_{L^2}^2 = \|f_m^{t_n}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2\,,$$

从而得到 $\|f_m^{t_n}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{\lambda_m}{(u_0 + \|u_0\|_{L^2}^2)}$对所有 m，根据引理2.7。因此，由 Rellich–Kondrachov 定理， $f_m(t_n) \to g_m$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，当 $t_n \to \infty$. 第三，利用 Cantor 对角化过程，可以抽取一个子列 $t_n \to \theta_m$ 模 $(\frac{2\pi}{\lambda_m^2})$ ，因为圆是紧的。因此，在（4.10）中取极限，得到

$$\langle \tilde{u} \,|\, g_m \rangle = \left\langle u_0 \,|\, f_m^0 \right\rangle \mathrm{e}^{-i\lambda_m^2(u_0)\theta_m}\,.$$

因此，利用贝塞尔不等式，我们得出

$$\|\tilde{u}\|_{L^2}^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \tilde{u} \,|\, g_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\left\langle u_0 \,|\, f_m^0 \right\rangle|^2 = \|u_0\|_{L^2}^2\,.$$

因此， $\|u(t_n)\|_{L^2} \to \|\tilde{u}\|_{L^2}$，从而在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中有 $u(t_n) \to \tilde{u}$。

步骤 2： $s>0$。根据推论 1.3 的证明中的不等式（4.2），我们有 $\|u(t_n)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}$ 从而得到

$$u(t_n) \rightharpoonup \tilde{u} \text{ in } H^s_+(\mathbb{T}) \qquad \text{and} \qquad \|\tilde{u}\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}\,.$$

特别是，$u(t_n) \to \tilde{u}$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中。然后，鉴于注2.5，

$$\begin{aligned}\|u(t_n)-\tilde{u}\|^2_{H^s} &\lesssim \|(L_{u(t_n)}+\lambda\,\mathrm{Id})^s(u(t_n)-\tilde{u})\|^2_{L^2} \\ &= \|(L_{u(t_n)}+\lambda\,\mathrm{Id})^s\,u(t_n)\|^2_{L^2} + \|(L_{u(t_n)}+\lambda\,\mathrm{Id})^s\,\tilde{u}\|^2_{L^2} \\ &\quad - 2\mathrm{Re}\left\langle (L_{u(t_n)}+\lambda)^s\,u(t_n)\,|\,(L_{u(t_n)}+\lambda)^s\,\tilde{u}\right\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.11}$$

根据注2.2的第二点，

$$\|(L_{u(t_n)}+\lambda\,\mathrm{Id})^s\,u(t_n)\|^2_{L^2} = \|(L_{u_0}+\lambda)^s\,u_0\|^2_{L^2}\,.$$

此外，由于 $u(t_n) \to \tilde{u}$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中，因此$L_{u(t_n)} \to L_{\tilde{u}}$ 在强预解式意义下，这归功于命题3.3。因此，根据函数演算（见引理4.1），我们推得

$$\begin{cases}(L_{u(t_n)}+\lambda)^s\,\tilde{u} \to (L_{\tilde{u}}+\lambda)^s\,\tilde{u} \text{ in } L^2_+(\mathbb{T})\,,\\ (L_{u(t_n)}+\lambda)^s\,u(t_n) \rightharpoonup (L_{\tilde{u}}+\lambda)^s\,\tilde{u} \text{ in } L^2_+(\mathbb{T})\,,\end{cases}$$

由于 $n\to\infty$. 因此，将4.11式代入并取极限，可得

$$\lim_{n\to+\infty}\|u(t_n)-\tilde{u}\|^2_{H^s} \lesssim \|(L_{u_0}+\lambda)^s u_0\|^2_{L^2} - \|(L_{\tilde{u}}+\lambda)^s\tilde{u}\|^2_{L^2}\,,$$

其中右端趋于零。事实上，根据推论3.11 和命题3.1，$\lambda_n(\tilde{u}) = \lambda_n(u_0)$。因此，

$$\begin{aligned}\left\langle (L_{\tilde{u}}+\lambda)^{2s}\tilde{u}\,|\,\tilde{u}\right\rangle &= \sum_{n\geq 0}(\lambda_n(u_0)+\lambda)^{2s}|\langle\tilde{u}\,|\,g_n\rangle|^2 = \sum_{n\geq 0}(\lambda_n(u_0)+\lambda)^{2s}|\left\langle u_0\,|\,f^0_n\right\rangle|^2 \\ &= \left\langle (L_{u_0}+\lambda)^{2s}u_0\,|\,u_0\right\rangle\,,\end{aligned}$$

其中（g_n）是步骤 1 中找到的 L^2_+（$\mathbb{T}$）的标准正交族。不过，由于 $u(t_n) \to \tilde{u}$属于 L^2_+（$\mathbb{T}$），可以像推论3.12 中那样，通过证明（ L^2_+（$\mathbb{T}$）构成自伴算子g_n的全部特征函数，来说明这个标准正交族确实是 $L_{\tilde{u}}$. 的标准正交基。因此，

$$\|(L_{u_0}+\lambda)^s\,u_0\|^2_{L^2} = \|(L_{\tilde{u}}+\lambda)^s\,\tilde{u}\|^2_{L^2}\,,$$

因此 $\|u(t_n)-\tilde{u}\|^2_{H^s} \to 0$，因为 $n\to\infty$. □

5. The Calogero–Sutherland DNLS defocusing equation (CS^-)

本节中，我们考虑（CS）的散焦方程

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - 2D_+(|u|^2)u = 0\,. \tag{CS^-}$$

注意到，将 [GL22的命题 21] 中的论证调整为适用于散焦方程，便可推得CS^-问题在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中关于$s>\frac{3}{2}$ 的局部适定性。我们

预计通过遵循$s > \frac{1}{2}$ deMP10]，可以将其降至[。

下面给出一系列引理、命题和定理，它们可以仿照聚焦情形中的对应结果加以证明。同样，可积方法是得出结论的主要工具。首先给出一个命题，说明 (CS⁻) 的散焦方程同样具有 Lax 对形式。

命题 5.1 (（CS⁻）的 Lax 对）。设 $u \in \mathcal{C}([-T,T], H^s_+(\mathbb{T}))$ $s > \frac{3}{2}$，是 (CS⁻) 的一个解。存在两个算子

$$\tilde{L}_u = D + T_u T_{\overline{u}}, \qquad \tilde{B}_u = -T_u T_{\partial_x \overline{u}} + T_{\partial_x u} T_{\overline{u}} + i(T_u T_{\overline{u}})^2$$

满足 Lax 方程

$$\frac{d\tilde{L}_u}{dt} = [\tilde{B}_u, \tilde{L}_u].$$

引理 5.2。给定 $u \in \mathcal{C}([-T,T], H^r_+(\mathbb{T}))$ $r > \frac{3}{2}$，若其为 (CS⁻) 方程的一个解，则

$$\partial_t u = \tilde{B}_u u - i\tilde{L}_u^2 u.$$

˜ ˜因此，量 $\mathcal{H}_s(u) := \langle (L_u + \lambda)^s u \mid u \rangle$, $\lambda > 0$, 在 $\mathcal{S}^-(t)$ 的流下守恒，其中 (CS⁻) 对所有 $0 \le s \le 2r$.

˜注 5.1. 对所有 $k \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ 展开守恒律 $\mathcal{H}_k(u)$，可得

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(u) = \langle u(t) \mid u(t) \rangle = \|u(t)\|^2_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$
$$\tilde{\mathcal{H}}_1(u) = \langle \tilde{L}_{u(t)} u(t) \mid u(t) \rangle = \|u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \|T_{\overline{u}(t)} u(t)\|^2_{L^2} \ge \|u(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$$
$$\tilde{\mathcal{H}}_2(u) = \|\tilde{L}_{u(t)} u(t)\|^2_{L^2} \ge (1-\varepsilon)\|Du(t)\|^2_{L^2} + (1 - C_\varepsilon)\|T_{u(t)} T_{\overline{u}(t)} u(t)\|^2_{L^2} \ge \|u(t)\|^2_{\dot{H}^1} - C(\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}}),$$
$$\vdots$$

借助 Young 不等式和 Sobolev 不等式。与聚焦情形不同，这里我们通过守恒律得到对解 u Sobolev 范数增长的统一控制，而无需对初始数据 u_0. 额外施加任何小量条件。因此，命题 2.8 对所有 $u_0 \in H^r_+(\mathbb{T})$ $r > \frac{3}{2}$ 在散焦情形下均成立。

因此，我们陈述以下定理，它是定理 1.1 针对方程（CS⁻）的对应版本。

定理 5.3. 对所有 $s > \frac{3}{2}$，令 $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$。存在唯一的整体解 $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$ 满足散焦方程 (CS⁻)，且在 $t = 0$, $u(0,\cdot) = u_0$. 此外，对所有 $s > \frac{3}{2}$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} \le C,$$

其中 $C = C(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ 是一个正定常数。

至于聚焦情形，散焦 Calogero–Sutherland 离散非线性薛定谔方程具有显式解。

引理 5.4。 设 $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$ $s > \frac{3}{2}$则散焦 Calogero– Sutherland 离散非线性薛定谔方程 (CS$^-$) 的解为

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2it\tilde{L}_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle .$$

特别地，利用这个显式公式，我们将流 $\mathcal{S}^-(t)$ 从$H^2_+(\mathbb{T})$ 连续延拓到 $H^s_+(\mathbb{T})$，其中 $0 \le s \le \frac{3}{2}$。因此，我们有：

定理。*1.5* 。Calogero–Sutherland DNLS 散焦方程(CS$^-$) 在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中整体适定 $s \ge 0$，其意义如注 *1.2*所述。此外，对所有$u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$，

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2it\tilde{L}_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle ,$$

是以下方程的解：(CS$^-$)散焦方程。此外，这些轨道

$$\{\mathcal{S}^-(t)u_0\,;\, t \in \mathbb{R}\}$$

在 $H^s_+(\mathbb{T})$ 中相对紧。

6. Final remarks and open problems

这里简要讨论一些与前几节相关的评述。

1. 与散焦方程相比，聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程的一个有趣特点是其动力学丰富。例如，正如我们将会看到的 [Ba23] , 聚焦方程拥有更多种类的行波解。

2. 对任意初始数据，聚焦型 Calogero–Sutherland 导数非线性薛定谔方程（CS$^+$）的整体适定性问题仍悬而未决。不过，我们预计显式解（方程（3.29））

$$u(t,z) = \left\langle (\mathrm{Id} - z\,\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{e}^{-2itL_{u_0}}\,S^*)^{-1}\,u_0 \,|\, 1 \right\rangle , \tag{6.1}$$

是回答这一问题的关键要素。事实上，对所有 $t \in \mathbb{R}$， Σ_t 记算子$S\,\mathrm{e}^{2itL_{u_0}}\,\mathrm{e}^{it}$，由（6.1）可得

$$u(t,z) = \sum_{n\ge 0} \langle u_0 \,|\, \Sigma_t^n 1\rangle\, z^n . \tag{6.2}$$

注意，若 u_0 属于由标准正交族 $\mathcal{J}$生成的空间 $\{\Sigma_t^n 1\,,\, n \ge 0\}$，则对（6.2）应用帕塞瓦尔恒等式，可得

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|u_0\|_{L^2}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{6.3}$$

从而可以说集合 $\{u(t) \quad t \in \mathbb{R}\}$ 在 $L^2_+(\mathbb{T})$ 中相对紧。因此，N_η 不等式 (3.3) 中给出的整数集合现在与 t无关，因此将不等式 (3.3) 应用于 (2.19)，对所有 $\eta > 0$，

$$\|(L_{u(t)} + \lambda)^{\frac{1}{2}} f\|^2_{L^2} \ge (1 - 2\eta^2)\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + (\lambda - 2\eta^2 - 2N_\eta^2\|u_0\|_{L^2})\|f\|^2_{L^2}\,,$$

而不是采用不等式 (2.20)：

$$\|(L_{u(t)}+\lambda)^{\frac{1}{2}}f\|_{L^2}^2 \geq (1-\|u\|_{L^2}^2)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2+(\lambda-\|u\|_{L^2}^2)\|f\|_{L^2}^2\,.$$

因此，利用（3.3），我们可以控制所有 $\|u(t)\|_{H^s}$ Sobolev 范数在所有 $s\geq 0$ 上的增长，并由此推得，对于任意初始数据，聚焦型（CS$^+$）在所有 $H^s_+(\mathbb{T})$、 $s>\frac{3}{2}$ 上整体适定。此外，同理可推出特征函数（$f^{\varepsilon}{}_n{}^t$）满足 $H^{\frac{1}{2}}$ 界——不等式（3.26）——这意味着对于任意初始数据，流 $\mathcal{S}^+(t)$ 可以延拓至 $L^2_+(\mathbb{T})$。此外，若 u_0 不属于 $\mathcal{J}$，则我们预期会在有限时间 T . 内出现爆破解。

References

[ABW09] AG. Abanov、E. Bettelheim 和 P. Wiegmann。Calogero–Sutherland 模型的可积流体力学：双向 Benjamin–Ono 方程。J. Phys. A 42 (2009)，第 13 期，页码 135201。[Ba23] R. Badreddine。Calogero-Sutherland 导数非线性薛定谔方程的行波与有限带隙势。arXiv 预印本 arXiv:2307.01592 (2023)。[BLP21]H. Bahouri、M.L. Trevor 和 G. Perelman。导数非线性薛定谔方程的界。arXiv 预印本 arXiv:2107.12297 (2021)。[BP22]H. Bahouri 和 G. Perelman。导数非线性薛定谔方程的整体适定性。Invent. Math. 229 (2022)，第 2 期，639–688。[Bo93] J. Bourgain。某些格点子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用，I：薛定谔方程。Geom. Funct. Anal. 3 (1993)，107-156。[Bo99] J. Bourgain。非线性薛定谔方程的整体解。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。viii*+182* 页。[BGT02] N. Burq、P. Gérard 和 N. Tzvetkov。非线性薛定谔方程的不稳定性。Math. Res. Lett. 9 (2002)，第 2-3 期，323–335。[Ca69] F. Calogero。一维 N 体系统的基态。Jour. of Math. Phys. 10，第 12 期，页码 2197-2200 (1969)。[Ca71] F. Calogero。具有二次和／或反平方对势的一维 N 体问题的解。Jour. of Math. Phys. 12，第 3 期 (1971)：419–436。[CCT03] M. Christ、J. Colliander 和 Terence Tao。周期非线性薛定谔方程的不稳定性。arXiv 预印本 math/0311227 (2003)。[deMP10] R.P. de Moura 和 D. Pilod。能量空间以下非局部非线性薛定谔方程的局部适定性。Adv. Differential Equations, 15 (2010)，925–952。[deO09] C.R. de Oliveira。中间谱理论与量子动力学。《数学物理进展》，54。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，(2009)。xvi*+410*页。[GG+67] C. Gardner、J. Greene、M. Kruskal 和 R. Miura。求解科尔特韦格–德弗里斯方程的方法。Phys. Rev. Lett. 19, (1967), 1095–1097。[Ger22]P. Gérard。Benjamin–Ono 方程的显式公式。预印本 arXiv:2212.03139, (2022)。[GG08] P. Gérard 和 S. Grellier。三次 Szegő 方程。Sém inaire X-EDP，2008年10月20日，巴黎综合理工学院，帕莱索。[GG15] P. Gérard 和 S. Grellier。三次 Szegő 方程的显式公式。Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015)，第 4 期，2979–2995。[GK21] P. Gérard 和 T. Kappeler。环面上 Benjamin-Ono 方程的可积性。Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021)，第 8 期，1685–1747。

[GKT20] P. Gérard、T. Kappeler 和 P. Topalov。Benjamin-Ono 方程在 $H^s(\mathbb{T},\mathbb{R})$ 中的尖锐适定性结果及其解的定性性质。《数学学报》，第 231 卷：31–88，(2023)。[GL22]P. Gérard 和 E. Lenzmann。Calogero–Moser 导数非线性薛定谔方程。预印本 arXiv:2208.04105，(2022)。[GK14] B. Grébert 和 T. Kappeler。散焦非线性薛定谔方程及其正规形。EMS数学讲座系列，EMS，(2014)，x$+166$页。[HKV20] B. Harrop-Griffiths、R. Killip 和 M. Visan。三次非线性薛定谔方程和修正 Korteweg–de Vries 方程在 $H^s(\mathbb{R})$ 中的尖锐适定性。arXiv 预印本 arXiv:2003.05011。[HKV21] B. Harrop-Griffiths、R. Killip 和 M. Visan。导数非线性薛定谔方程的大数据等度连续性。arXiv 预印本 arXiv:2106.13333。[HKNV22] B. Harrop-Griffiths、R. Killip、M. Ntekoume 和 M. Visan。导数非线性薛定谔方程在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的整体适定性。arXiv 预印本 arXiv:2204.12548。[JL+20]R. Jenkins、J. Liu、P. Perry 和 C. Sulem。导数非线性薛定谔方程：整体适定性与孤子分解。Quart. Appl. Math., 78(1):33–73, 2020。[KL+17] T. Kappeler、P. Lohrmann、P. Topalov 和 N.T. Zung。聚焦非线性薛定谔方程的Birkhoff坐标。Comm. Math. Phys. 285 (2009)，第 3 期，1087–1107。[KST17] T. Kappeler、B. Schaad 和 P. Topalov。周期散焦非线性薛定谔方程的类散射现象。Math. Res. Lett. 24 (2017)，第 3 期，803–826。[KNV21] R. Killip、M. Ntekoume 和 M. Visan。导数非线性薛定谔方程的适定性问题。arXiv 预印本 arXiv:2101.12274。[KS22] F. Klaus 和 R. Schippa。导数非线性薛定谔方程的先验估计。Funkcialaj Ekvacioj 65.3 (2022): 329-346。[KN78] D.J. Kaup 和 A.C. Newell。导数非线性薛定谔方程的一个精确解。J. Mathematical Phys. 19 (1978)，第 4 期，798–801。[Ku06] S.B. Kuksin。哈密顿偏微分方程。《动力系统手册》。第 1B 卷，1087–1133，爱思唯尔 B. V.，阿姆斯特丹，(2006)。[Lax68] P.D. Lax。非线性演化方程的积分与孤立波。Comm. Pure Appl. Math. 21 (1968), 467–490。[Mo09] L. Molinet。关于一维周期三次薛定谔方程的病态适定性。Math. Res. Lett. 16 (2009)，第 1 期，111–120。[OS12] T. Oh 和 C. Sulem。关于低于 L^2 的一维三次非线性薛定谔方程。Kyoto Journal of Mathematics, 52(2012) no.1, 99–115。[Pe95] D.E. Pelinovsky。有限深流体中内波的中间非线性薛定谔方程。Phys. Lett. A, 197 no.5–6, (1995) 401–406。[RS72] M. Reed 和 B. Simon。《现代数学物理方法》。I. 泛函分析。Academic Press，纽约-伦敦，(1972)。xvii$+325$ 页。[Sa79] J.-C. Saut。关于科尔特韦格–德弗里斯方程的若干推广。J. Math. Pures Appl. (9) 58 (1979)，第 1 期，21–61。[Su71] B. Sutherland。一维量子多体问题的精确结果。《物理评论A辑》4，第 5 期，页码 2019 (1971)。[Su75] B. Sutherland。一维等离子体的精确基态波函数。《物理评论快报》34，第 17 期，页码 1083 (1975)。[Ta81] M.E. Taylor。伪微分算子。普林斯顿数学丛书，第 34 号。普林斯顿，新泽西州，(1981)。xi$+452$页。[We15] M.I. Weinstein。非线性薛定谔／Gross–Pitaevskii 方程中的局域态与动力学。《偏微分方程动力学》(2015)：41-79。

[Wi10] Y.Y.S. Win. 导数非线性薛定谔方程在 $\mathbb{T}$上的整体适定性。Funkcialaj Ekvacioj, 53 (2010) 51–88.[ZS72] V. Zakharov 和 A. Shabat。非线性介质中波的二维自聚焦和一维自调制的精确理论。Sov. Phys. JETP 34 (1972), no.1, 62—69.

Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 du CNRS, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France电子邮箱: rana.badreddine@universite-paris-saclay.fr