arXiv:2303.01088v1 [math.PR] 2 Mar 2023

高斯次序统计量序列的首次穿越点与末次离开时刻之间的渐近关系 *

Zijun Ning；ZhongquanTan†*College of Data Science, Jiaxing University, Jiaxing 314001, PR China*

2023年3月3日

摘要：本文研究由平稳弱相依和强相依高斯序列生成的高斯次序统计量的首次穿越点与末次离开时刻之间的渐近关系。结果表明，对于弱相依和强相依情形，首次穿越点与末次离开时刻分别渐近独立和渐近相关。此外，本文还得到了平稳弱相依和强相依高斯序列的首次退出时刻与末次离开时刻之间的渐近关系。

关键词：首次穿越点；末次离开时刻；平稳高斯序列；高斯次序统计量序列。

AMS分类：主要分类 60F05；次要分类 60G70

1 引言

首次穿越点（也称为首次退出时刻）和末次离开时刻在应用概率中得到了广泛研究。在风险理论中，它们发挥着非常重要的作用，因为首次退出时刻对应于风险过程的破产时刻，而末次离开时刻可视为最终恢复时刻；此后将不再发生破产，参见 Gerber（1990）。在实践中，当我们研究随机噪声问题时，通常会将正弦波的首次零交叉点加入随机噪声中。我们可以不考虑零交叉，而将其转换为平稳随机序列，并进而研究该序列的首次穿越，参见 H¨usler（1977年）。

设 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 是一个平稳随机变量序列，满足 $EX_1^+ < \infty$，其中 X^+ 表示 $\max\{X, 0\}$。定义

$$\Upsilon(X) = \min\{i \in \mathbb{Z} : X_i > -\beta i\}$$

and

$$\tau(X) = \max\{i \geq 0 : X_i > \beta i\}$$

该序列的首次穿越点和末次离开时刻。由于 EX_1^+ 的存在， $\Upsilon(X)$ 和 $\tau(X)$ 都定义良好，且几乎必然有限，参见例如 H¨usler（1979年）。

*本研究得到浙江省自然科学基金（项目编号：LY18A010020）资助。
†通讯作者。电子邮箱：tzq728@163.com

H¨usler（1977年）首先研究了平稳高斯序列首次穿越点的极限分布，并指出，经过适当归一化后，首次穿越点与最大值具有相同的极限分布。H¨usler（1979年）讨论了平稳高斯序列首次穿越点的几乎必然极限行为，包括几乎必然稳定性和几乎必然相对稳定性，并推导了该序列首次穿越点的重对数律。从首次穿越点和末次离开时刻的定义可知，两者的极限性质相同。H¨usler（1979年、1980年）推导了独立同分布随机序列和平稳随机序列末次离开时刻的极限性质。H¨usler（1981年）研究了独立随机序列末次离开时刻的迭代对数律。最近，Karagodin 和 Lifshits（2021年）针对连续时间高斯过程研究了一个类似问题，并推导了平稳高斯过程在缓慢增长的线性边界上的缩放后的末次离开时刻的极限分布。上述结果都只考虑了线性边界上的末次离开时刻或首次穿越点。Karagodin（2022年）研究了高斯过程在移动非线性边界上的末次离开时刻。相关结果可参见 Burnashev 和 Golubev（2015年）以及 Malinovskii（2018年）。

一个自然的问题是，首次穿越点和末次离开时刻的联合极限分布是什么。对于某些高斯过程，H¨usler 和 Zhang（2008年）证明，在发生破产的条件下，首次穿越点和末次离开时刻的条件联合极限分布是两个标准正态分布之差。Shao 和 Tan（2023年）讨论了某些相依卡方序列的首次穿越点和末次离开时刻的联合极限性质。

本文关注高斯次序统计量序列中首次穿越点与末次离开时刻之间的渐近关系。设 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 是一列平稳标准（均值为 0，方差为 1）的高斯随机变量，其协方差函数为 $r_i = E(X_1 X_{i+1})$，且 $\{X_{ij}, i \in \mathbb{Z}\}$、$j = 1$、2、.....、$d$ 中的 $d \geq 1$ 是 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 的独立副本。定义由 X 生成的高斯 r 阶次序统计量序列 $\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 如下:

$$O_{id}^{(d)}(X) := \min_{j=1}^{d} X_{ij} \leq \cdots \leq O_{id}^{(r)}(X) \leq \cdots \leq O_{id}^{(1)}(X) := \max_{j=1}^{d} X_{ij}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

其中 $r \in \{1, 2, \ldots, d\}$。高斯 r 阶次序统计量随机变量在应用领域中发挥着非常重要的作用，例如，在涉及分析整个机械加工过程中表面粗糙度的模型中，参见 Alodat (2011) 以及 Worsley 和 Friston (2000)。D˛ebicki 等人 (2014, 2015, 2017)、D˛ebicki 和 Kosinski (2018)、Zhao (2018) 以及 Song 等人 (2022) 研究了高斯 r 阶次序统计量序列和过程的极值极限性质。

值得一提的是以下结果，因为它与本文的主要结果密切相关。基于 D˛ebicki 等人 (2017) 的结果，Tan (2018) 推导出了高斯 r 阶次序统计量变量最大值的弱极限定理。

定理 1.1。设 $\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 如上所定义。若协方差函数 r_n满足

$$r_n \ln n \to 0 \quad as \quad n \to \infty,$$

那么对于任意的 $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a_n \left(\max_{i=1}^{n} O_{id}^{(r)}(X) - b_n\right) \leq x\right) = \exp(-e^{-x}), \tag{1}$$

其中

$$a_n = (2r\ln n)^{1/2}, \quad b_n = \frac{1}{r}a_n + a_n^{-1}\ln\Big(a_n^{-r}C_d^r(2\pi)^{-r/2}\Big) \tag{2}$$

与 $C_d^r = {}_r \underline{{}^{d}_{!\,!(d-r)!}}$。

定理 1.1 得到了弱相关情形下高斯次序统计量变量最大值的极限分布。在文献中，假设 $r_n \ln n \to 0$ 被称为弱相关条件或 Berman 条件（例如参见 Leadbetter 等人（1983年）和 Piterbarg（1996年）），因此，平稳高斯序列 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 被称为弱相依平稳高斯序列。我们也将 $\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 称为弱相关高斯 r 阶次序统计量序列。类似地，$\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 的相关函数满足假设 $r_n \ln n \to \gamma > 0$ 时，被称为强相关高斯 r 阶次序统计量序列。

本文将研究高斯次序统计量序列的首次穿越点与末次离开时刻之间的渐近关系。我们证明，当高斯次序统计量序列弱相关时，首次穿越点与末次离开时刻渐近独立；当高斯次序统计量序列强相关时，它们渐近相关。我们还证明，首次穿越点和末次离开时刻的极限性质与最大值的极限性质非常相似。第2节给出主要结果，证明见第3节。

2 主要结果

我们将高斯次序统计量序列$\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 的首次穿越点和末次离开时刻定义如下，其中函数为 $i\beta$：

$$\Upsilon(O_X^{(r)}) = \min\{i \in \mathbb{Z} : O_{id}^{(r)}(X) > -\beta i\}$$

and

$$\tau(O_X^{(r)}) = \max\{i \geq 0 : O_{id}^{(r)}(X) > \beta i\}$$

序列 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\beta > 0$下的末次离开时刻。我们考察 $\Upsilon_{O(X)}$ 和 $\tau(O_X^{(r)})$ 在 $\beta \to 0$时的联合极限分布。

现在陈述我们的主要结果。

定理 2.1. 设 $\{O_{id}^{(r)}(X)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 如上定义，并定义 $C_d^r = {}_r {}^{d}_{!\,!(d-r!)}$。若协方差函数 r_n 满足

$$r_n \ln n \to 0 \quad as \quad n \to \infty,$$

则对任意 $x, y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(\Upsilon(O_X^{(r)}) \geq -u_\beta(x), \tau(O_X^{(r)}) \leq u_\beta(y)\right) = \exp(-(e^{-x} + e^{-y})) \tag{3}$$

and

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(\Upsilon(O_X^{(r)}) \geq -u_\beta(x)\right) = \lim_{\beta\to 0} P\left(\tau(O_X^{(r)}) \leq u_\beta(x)\right) = \exp(-e^{-x}), \tag{4}$$

其中

$$u_\beta(x) = \left(a(\beta, r) + \frac{x}{ra(\beta, r)}\right)\beta^{-1} \tag{5}$$

with

$$a(\beta,r)=\sqrt{\frac{2}{r}\left(\ln\beta^{-1}-\frac{r+1}{2}\ln\left(\frac{2}{r}\ln\beta^{-1}\right)+\ln(C_d^r r^{-1}(2\pi)^{-r/2})\right)}. \tag{6}$$

对于强依赖情形，我们只能处理 $r=1$ 和 $r=d$ 这两种情况。

定理 2.2. 令 $\{O_{id}^{(r)}(X)\ i\in\mathbb{Z}\}$ 如上定义。假设协方差函数 r_n 满足

$$r_n\ln n\to\gamma>0\quad as\quad n\to\infty.$$

定义 $\rho_\beta=\gamma/|\ln\beta|$ 以及 $b(\beta,\rho_\beta,r)=\sqrt{1-\rho_\beta}a(\beta/\sqrt{1-\rho_\beta},r)$，其中 $a(\cdot,\cdot)$的定义同式 (6)。

1.) 对于情形 $r=1$，任意 $x,y\in\mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta\to0}P\left(\Upsilon(O_X^{(1)})\geq-u_\beta(x),\tau(O_X^{(1)})\leq u_\beta(y)\right)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\big(-\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}(e^{-\sqrt{2\gamma}(x-z_j)}+e^{-\sqrt{2\gamma}(y-z_j)})\big)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\end{aligned} \tag{7}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to0}P\left(\Upsilon(O_X^{(1)})\geq-u_\beta(x)\right)&=\lim_{\beta\to0}P\left(\tau(O_X^{(1)})\leq u_\beta(x)\right)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\big(-\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}e^{-\sqrt{2\gamma}(x-z_j)}\big)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d),\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$u_\beta(x)=\left(b(\beta,\rho_\beta,1)+\sqrt{\rho_\beta}x\right)\beta^{-1} \tag{9}$$

且 $\Phi(\cdot)$表示标准正态变量的累积分布函数。2.) 对于情形 $r=d$，任意 $x,y\in\mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta\to0}P\left(\Upsilon(O_X^{(d)})\geq-u_\beta(x),\tau(O_X^{(d)})\leq u_\beta(y)\right)\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\big(-(e^{-\sqrt{2d^{-1}\gamma}(x-\sum_{j=1}^{d}z_j)}+e^{-\sqrt{2d^{-1}\gamma}(y-\sum_{j=1}^{d}z_j)})\big)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\end{aligned} \tag{10}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to0}P\left(\Upsilon(O_X^{(d)})\geq-u_\beta(x)\right)&=\lim_{\beta\to0}P\left(\tau(O_X^{(d)})\leq u_\beta(x)\right)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\big(-e^{-\sqrt{2d^{-1}\gamma}(x-\sum_{j=1}^{d}z_j)}\big)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d),\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$u_\beta(x)=\left(b(\beta,\rho_\beta,d)+\sqrt{\rho_\beta}d^{-1}x\right)\beta^{-1}. \tag{12}$$

接下来，考虑特殊情形 $d=1$，即平稳高斯情形。

推论 2.1. 设 $\{X_i,i\in\mathbb{Z}\}$ 是一列协方差函数为 $r_i=E(X_1X_{i+1})$ 的平稳标准高斯随机变量。

1.) 在定理 2.1 的条件下，我们有

$$\lim_{\beta\to0}P\left(\Upsilon(X)\geq-u_\beta(x),\tau(X)\leq u_\beta(y)\right)=\exp(-(e^{-x}+e^{-y})),$$

其中 $u_\beta(x)$ 在 (6) 中定义，且 $r = d = 1$。

2.) 在定理 2.2 的条件下，我们有

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(\Upsilon(X) \geq -u_\beta(x), \tau(X) \leq u_\beta(y)\right) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(e^{-\sqrt{2\gamma}(x-z)} + e^{-\sqrt{2\gamma}(y-z)}))d\Phi(z),$$

其中 $u_\beta(x)$ 按照 (12) 定义，其中 $d = 1$。

推论 2.1 推广了 H¨usler（1977年）的定理 2.1 和定理 2.2；这两个定理仅给出了 $\Upsilon(X)$ 的极限分布。但仍有一种情形无法由定理 2.1 和定理 2.2 推出，下面的定理将讨论这一情形。

定理 2.3. 设 $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 是一列平稳标准高斯随机变量，其协方差函数为 $r_i = E(X_1X_{i+1})$。假设对所有 $n \geq 0$， r_n 都是凸函数，$r_n = o(1)$，且 $(r_n \ln n)^{-1}$ 对充分大的 n 单调， $o(1)$。那么对任意 $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(\Upsilon(X) \geq -u_\beta(x), \tau(X) \leq u_\beta(y)\right) = \Phi(\min x, y), \tag{13}$$

其中 $u_\beta(x)$ 按照 (12) 定义，其中 $d = 1$ 和 $\rho_\beta = r_{[\beta^{-1}]}$。这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分。

注 2.1. i). 可以看出，在适当选取归一化后，弱相关情形下 $\max_{i=1}^n O_{id}^{(r)}(X)$ $(n \to \infty)$、 $\tau(O_X^{(r)})$ 和 $\Upsilon(O_X^{(r)})$ $(\beta \to 0)$ 的极限分布相同。

ii). 如 H¨usler (1977年) 所示，上述结果可推广到首次穿越点 $\Upsilon(O_X^{(r)}) = \min\{i \in \mathbb{Z}\colon O_{id}^{(r)}(X) > -\beta f(i)\}$ 以及末次离开时刻 $\tau(O_X^{(r)}) = \max\{i \geq 0\colon O_{id}^{(r)}(X) > \beta f(i)\}$，其中 $f(t) = t^\vartheta L(t)$ 对于 $t \to \infty$ 成立，而 $\vartheta > 0$ 和 $L(t)$ 缓慢变化。

3 证明

本节给出证明。照例， $a_n \ll b_n$ 表示 $\limsup_{n\to\infty} |a_n/b_n| < +\infty$。 K 表示一个其值会随行而改变的常数。

下面的引理在我们的证明中起着至关重要的作用。

引理 3.1. 设 $\mathcal{Y} = (Y_{il})_{n\times d}$ 和 $\mathcal{Z} = (Z_{il})_{n\times d}$ 为两个分量服从 $N(0, 1)$ 的随机数组，并设 $(\sigma_{il}^{(1)}{}_{,jk})_{dn\times dn}$ 和 $(\sigma_{il}^{(0)}{}_{,jk})_{dn\times dn}$ 分别为 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 的协方差矩阵，其中 $\sigma_{il}^{(1)}{}_{,jk} := EY_{il}Y_{jk}$ 和 $\sigma_{il}^{(0)}{}_{,jk} := EZ_{il}Z_{jk}, 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq l, k \leq d$. 假设 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 的列分别相互独立，即

$$\sigma_{il,jk}^{(\kappa)} = \sigma_{ik,jk}^{(\kappa)}\mathbf{1}(k = l), 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq d, \kappa = 0, 1.$$

此外，假设 $\sigma_{i,j} = \max_{1\leq k,l\leq d}\{|\sigma_{ik,jk}^{(0)}|, |\sigma_{ik,jk}^{(1)}|\} < 1$，其中 $\mathbf{1}(\cdot)$表示示性函数。定义 $(O_{1d}^{(r)}(Y) \cdots, O_{nd}^{(r)}(Y))$ 为由 $\mathcal{X}$生成的第 r 个次序统计量向量，如下所示

$$\min_{1\leq k\leq d} Y_{ik} = O_{id}^{(d)}(Y) \leq \cdots \leq O_{id}^{(r)}(Y) \leq \cdots \leq O_{id}^{(1)}(Y) = \max_{1\leq k\leq d} Y_{ik}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

类似地，我们记作由 $\mathcal{Z}$ 生成的 $(O_{1d}^{(r)}(Z) \cdots, O_{nd}^{(r)}(Z))$。那么，对于任意实数$u_1, \ldots, u_n$，以及任意 $1 \leq r \leq d$

$$\left|P\left(O_{id}^{(r)}(Y) \leq u_i, i = 1, \ldots, n\right) - P\left(O_{id}^{(r)}(Z) \leq u_i, i = 1, \ldots, n\right)\right|$$

$$\leq K\sum_{k=1}^{d}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{|\sigma_{ik,jk}^{(1)}-\sigma_{ik,jk}^{(0)}|}{(u_iu_j)^{r-1}}\exp\left(-\frac{r(u_i^2+u_j^2)}{2(1+\sigma_{i,j})}\right).$$

证明。设 (Z_i, Z_j) 为相关系数为 $|\delta_{ij}|$ 的二元标准正态随机向量。仿照 Leadbetter 等（1983）第 225 页证明中的论证，我们可以证明对于 $u_j \geq u_i$

$$P\{Z_i > u_i, Z_j > u_j\} \leq \frac{2(1-\delta_{ij}^2)}{u_i(u_j-|\delta_{ij}|u_i)}\phi(u_i,u_j;|\delta_{ij}|).$$

其中，$\phi(u,v;\delta)$ 是二维正态随机变量的概率密度函数。若 $u_i = O(u_j)$，则有

$$\frac{2(1-\delta_{ij}^2)}{u_i(u_j-|\delta_{ij}|u_i)} \leq \frac{2(1-\delta_{ij}^2)}{u_iu_j|1-O(1)|\delta_{ij}||} \leq \frac{K}{u_iu_j}.$$

若 $u_i = o(u_j)$，显然，

$$\frac{2(1-\delta_{ij}^2)}{u_i(u_j-|\delta_{ij}|u_i)} = O(1)\frac{2(1-\delta_{ij}^2)}{u_iu_j} \leq \frac{K}{u_iu_j}.$$

根据相同的论证，我们可以得到情形 $u_j \leq u_i$ 下的相同界。因此，有

$$P\{Z_i > u_i, Z_j > u_j\} \leq \frac{K}{u_iu_j}\phi(u_i,u_j;|\delta_{ij}|).$$

用上述不等式替换 D$\dot{\text{e}}$bicki 等人（2017）证明定理 2.4 时的式（4.28），即可证明该引理。

3.1 定理 2.1 的证明

为证明定理 2.1，我们需要以下引理。

引理 3.2. 设 $\{\xi_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 为一列独立标准高斯随机变量，$\{O_{id}^{(r)}(\xi)\ i \in \mathbb{Z}\}$ 为由 ξ 生成的高斯 r 阶次序统计量序列。对于任意 x、$y \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(\Upsilon(O_\xi^{(r)}) \geq -u_\beta(x), \tau(O_\xi^{(r)}) \leq u_\beta(y)\right) = \exp(-(e^{-x}+e^{-y})), \tag{14}$$

其中，$u_\beta(x)$ 定义见式（5）。

证明。首先注意到，当 $\beta \to 0$ 时，$\beta u_\beta(x) \to \infty$。根据 D$\dot{\text{e}}$bicki 等人（2015年）的引理 2，有

$$P(O_{1d}^{(r)}(\xi) \geq i\beta) = C_d^r(1-\Phi(i\beta))^r(1+o(1)) \tag{15}$$

当 $i\beta \to \infty$ 时成立。由于 $O_{id}^{(r)}(\xi)$ 相互独立，利用以下众所周知的事实

$$1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+o(1)) \tag{16}$$

当 $x \to \infty$ 时，我们有 as $\beta \to 0$

$$\begin{aligned}-\ln P\left(\Upsilon(O_\xi^{(r)}) \geq -u_\beta(x)\right) &= -\ln\prod_{i=u_\beta(x)}^{\infty} P(O_{1d}^{(r)}(\xi) \leq i\beta)\\ &= -\sum_{i=u_\beta(x)}^{\infty}\ln(1-C_d^r(1-\Phi(i\beta)^r)(1+o(1)))\end{aligned}$$

$$= \quad C_d^r(2\pi)^{-r/2}r^{-1}\beta^{-1}(\beta u_\beta(x))^{-(r+1)}e^{-\frac{1}{2}r(\beta u_\beta(x))^2}(1+o(1)).$$

由于 $(\beta u_\beta(x))^2=(a(\beta,r))^2+2x/r+o(1)$，根据 (6)，我们有

$$-\ln P\left(\Upsilon(O_\xi^{(r)})\geq -u_\beta(x)\right)=e^{-x}(1+o(1))$$

如 $\beta\to 0$。类似地，我们有

$$-\ln P\left(\tau(O_\xi^{(r)})\leq u_\beta(y)\right)=e^{-y}(1+o(1))$$

如 $\beta\to 0$。由 $\{O_{id}^{(r)}(\xi)\ i\in\mathbb{Z}\}$ 的独立性可知

$$\begin{aligned}
&P\left(\Upsilon(O_\xi^{(r)})\geq -u_\beta(x),\tau(O_\xi^{(r)})\leq u_\beta(y)\right)\\
&=P\left(O_{jd}^{(r)}(\xi)\leq -j\beta,j\leq -u_\beta(x),O_{id}^{(r)}(\xi)\leq i\beta,i\geq u_\beta(y)\right)\\
&=P\left(O_{jd}^{(r)}(\xi)\leq -j\beta,j\leq -u_\beta(x)\right)P\left(O_{id}^{(r)}(\xi)\leq i\beta,i\geq u_\beta(y)\right)
\end{aligned}$$

因此引理得证。

定理 2.1 的证明。由引理 3.2 可知，要证明定理 2.1，我们只需证明

$$|P\left(\Upsilon(O_X^{(r)})\geq -u_\beta(x),\tau(O_X^{(r)})\leq u_\beta(y)\right)-P\left(\Upsilon(O_\xi^{(r)})\geq -u_\beta(x),\tau(O_\xi^{(r)})\leq u_\beta(y)\right)|\to 0$$

如 $\beta\to 0$。利用引理 3.1，我们可以将此差值上界为

$$\begin{aligned}
&K\sum_{i=1}^{\infty}|r_i|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+|r_i|)}\right)\\
&+K\sum_{i=1}^{\infty}|r_i|\sum_{j=u_\beta(y)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+|r_i|)}\right)\\
&+K\sum_{i=u_\beta(x)}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{-u_\beta(y)}|r_{|i-j|}|(i\beta)^{-(r-1)}(-j\beta)^{-(r-1)}\exp\left(-\frac{r((i\beta)^2+(j\beta)^2)}{2(1+|r_{|i-j|}|)}\right)\\
&=:K(I_\beta+J_\beta+K_\beta).
\end{aligned}$$

定义 $\delta=\sup_{i\geq 1}|r_i|<1$ 和 $\delta_n=\sup_{i\geq n}|r_i|<1$。选取 ε，使得 $\varepsilon<(1-\delta)/(1+\delta)$。将上述求和 I_β 分成两部分：

$$\begin{aligned}
I_\beta \quad &= \quad \sum_{i=1}^{[\beta^{-\varepsilon}]}|r_i|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+|r_i|)}\right)\\
&+ \quad \sum_{i=[\beta^{-\varepsilon}]+1}^{\infty}|r_i|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+|r_i|)}\right)\\
&=: \quad I_{\beta,1}+I_{\beta,2}.
\end{aligned}$$

对于第一项 $I_{\beta,\,1}$，利用（5）和（6），可得

$$\begin{aligned}
I_{\beta,1} \quad &\leq \quad \beta^{-\varepsilon}\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{1+\delta}\right)\\
&\ll \quad \beta^{-(\varepsilon+1)}(u_\beta(x)\beta)^{-(2r-1)}\exp\left(-\frac{r(u_\beta(x)\beta)^2}{1+\delta}\right)\\
&\ll \quad \beta^{-\varepsilon+\frac{1-\delta}{1+\delta}}|\ln\beta|^{\frac{1}{2}+\frac{1-r\delta}{1+\delta}},
\end{aligned}$$

根据 ε 的选取，当 $\beta \to 0$ 时，该项趋于 0。对于项 $I_{\beta,\,2}$，回想 $\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} = \sup_{i \geq [\beta^{-\varepsilon}]} |r_i|$，并注意到，当 $n \to \infty$ 时， $r_n \ln\, n \to 0$，这意味着当 $\beta \to 0$ 时， $\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} |\ln \beta| \to 0$。再次根据（5）和（6），可得

$$\begin{aligned} I_{\beta,2} &\leq \delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} \sum_{i=[\beta^{-\varepsilon}]}^{\infty} \exp\left(-\frac{r((i+u_\beta(x))\beta)^2}{2(1+\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]})}\right) \sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty} (j\beta)^{-2(r-1)} \exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{2(1+\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]})}\right) \\ &\ll \delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} \beta^{-2} (\beta u_\beta(x))^{-2r} \exp\left(-\frac{r(u_\beta(x)\beta)^2}{1+\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]}}\right) \\ &\ll \delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} \beta^{-2\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]}} |\ln \beta|^{1-(1+r)\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]}}, \end{aligned}$$

由于 $\delta_{[\beta^{-\varepsilon}]} |\ln \beta| \to 0$ as $\beta \to 0$，因此当 $\beta \to 0$ 时趋于 0。于是，当 $\beta \to 0$ 时， $I_\beta \to \infty$。类似地，我们可以证明，当 $\beta \to 0$ 时， $J_\beta \to \infty$。

对于项 K_β，注意到 $u_\beta(x) \sim u_\beta(y) \sim u_\beta := \beta^{-1}(\frac{2}{r} \ln\, \beta^{-1})^{1/2}$ as $\beta \to 0$。因此，按照证明 $I_{\beta,2}$ 时所用的相同论证，我们有

$$\begin{aligned} K_\beta &\leq \delta_{[u_\beta]} \sum_{i=[u_\beta(x)]}^{\infty} (i\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(i\beta)^2}{2(1+\delta_{[u_\beta]})}\right) \sum_{j=[u_\beta(y)]}^{\infty} (j\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{2(1+\delta_{[u_\beta]})}\right) \\ &\ll \delta_{[u_\beta]} \beta^{-2} (\beta u_\beta)^{-2r} \exp\left(-\frac{r(u_\beta(x)\beta)^2}{2(1+\delta_{[u_\beta]})}\right) \exp\left(-\frac{r(u_\beta(y)\beta)^2}{2(1+\delta_{[u_\beta]})}\right) \\ &\ll \delta_{[u_\beta]} \beta^{-2\delta_{[u_\beta]}} |\ln \beta|^{1-(1+r)\delta_{[u_\beta]}}, \end{aligned}$$

由于 $\delta_{[u_\beta]} |\ln \beta| \to 0$ as $\beta \to 0$，当 $\beta \to 0$ 时趋于 0。因此，当 $\beta \to 0$ 时，我们有 $K_\beta \to 0$。定理 2.1 的证明至此完成。

3.2 定理 2.2 的证明

为了证明定理 2.2，我们需要以下两个引理。

引理 3.3. 设 ρ_β 是一个关于 β 的函数，其中 $0 < \rho_\beta < c < 1$ 和 $Y_{ij} = \sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij} + \sqrt{\rho_\beta} U_j$、$i \in \mathbb{N}$、$j = 1$、2 . . .、$d$，且 ξ_{ij} 是相互独立的高斯随机向量， U_j、$j = 1$、2 . . .、d 是与 ξ_{ij} 独立的标准正态随机变量。记由 Y_{ij} 生成的高斯次序统计量序列为 $O_{id}^{(r)}(Y)$。假设当 $\beta \to 0$ 时， $\rho_\beta |\ln\, \beta| \to \gamma > 0$。

1). 若 $r = 1$，则对任意 x、$y \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta \to 0} P\left(O_{id}^{(1)}(Y) \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), O_{kd}^{(1)}(Y) \leq k\beta, u_\beta(y) \leq k < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\big(-\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}(e^{-\sqrt{2\gamma}(x-z_j)} + e^{-\sqrt{2\gamma}(y-z_j)})\big) d\Phi(z_1) \cdots d\Phi(z_d), \end{aligned}$$

其中 $u_\beta(x)$ 按照式 (9) 定义，且 ρ_β 满足上述假设。

2). 若 $r = d$，则对任意 x、$y \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta \to 0} P\left(O_{id}^{(d)}(Y) \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), O_{kd}^{(d)}(Y) \leq k\beta, u_\beta(y) \leq k < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-(e^{\sqrt{2d^{-1}\gamma}(x - \sum_{j=1}^{d} z_j)} + e^{\sqrt{2d^{-1}\gamma}(y - \sum_{j=1}^{d} z_j)})\} d\Phi(z_1) \cdots d\Phi(z_d), \end{aligned}$$

其中 $u_\beta(x)$ 按照式 (12) 定义，且 ρ_β 满足上述假设。

证明。我们首先证明 $r = 1$ 的情形。根据 Y_{ij} 的定义以及 ξ_{ij} 的独立性，可得

$$P\left(O_{id}^{(1)}(Y) \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), O_{kd}^{(1)}(Y) \leq k\beta, u_\beta(y) \leq k < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\max_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}U_j\}\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}<i\le -u_\beta(x)\right.\\
&\qquad \left.\max_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}U_j\}\le k\beta, u_\beta(y)\le k< u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} P\left(\max_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}<i\le -u_\beta(x),\right.\\
&\qquad \left.\max_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le k\beta, u_\beta(y)\le k< u_\beta(y)+\beta^{-1}\right) d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\prod_{j=1}^{d} P\left(\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\le -i\beta\right)\\
&\qquad \times \prod_{k=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]+1}\prod_{j=1}^{d} P\left(\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\le k\beta\right) d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\\
&=: \int_{\mathbb{R}^d} H(\beta,x,z_1,\dots,z_d)H(\beta,y,z_1,\dots,z_d)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

通过与引理 3.2 的证明相同的论证，可得

$$
\begin{aligned}
&-\ln H(\beta,x,z_1,\dots,z_d)\\
&= -\ln \prod_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\prod_{j=1}^{d}\left[1-P\left(\xi_{ij}\ge \frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right]\\
&= -\sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\sum_{j=1}^{d}\ln\left[1-P\left(\xi_{ij}\ge \frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right]\\
&= \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\sum_{j=1}^{d}\left(1-\Phi\left(\frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right)(1+o(1))\\
&= \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\sum_{j=1}^{d}(2\pi)^{-1/2}(1-\rho_\beta)^{1/2}|i\beta|^{-1}\exp\left(-\frac{(i\beta)^2+2i\beta\sqrt{\rho_\beta}z_j}{2(1-\rho_\beta)}\right)(1+o(1))\\
&= (2\pi)^{-1/2}(1-\rho_\beta)^{1/2}\beta^{-1}(\beta u_\beta(x))^{-2}\exp\left(-\frac{(\beta u_\beta(x))^2}{2(1-\rho_\beta)}\right)\sum_{j=1}^{d}\exp\left(\frac{\beta u_\beta(x)\sqrt{\rho_\beta}z_j}{1-\rho_\beta}\right)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

现在，利用 (9) 以及当 $\beta\to 0$ 时 $\rho_\beta|\ln\beta|\to\gamma>0$ 这一事实，我们得到

$$
-\ln H(\beta,x,z_1,\dots,z_d)\to d^{-1}\sum_{j=1}^{d}\exp\big(-\sqrt{2\gamma}(x-z_j)\big), \qquad (18)
$$

当 $\beta\to 0$ 时。类似地，我们有

$$
-\ln H(\beta,y,z_1,\dots,z_d)\to d^{-1}\sum_{j=1}^{d}\exp\big(-\sqrt{2\gamma}(y-z_j)\big), \qquad (19)
$$

当 $\beta\to 0$ 时。现在，结合控制收敛定理，(17-19) 完成了 $r=1$ 情形的证明。

接下来，我们证明 $r=d$ 的情形。根据 Y_{ij} 的定义以及 ξ_{ij} 的独立性，同样可得

$$
P\left(O_{id}^{(d)}(Y)\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}<i\le -u_\beta(x), O_{kd}^{(d)}(Y)\le k\beta, u_\beta(y)\le k<u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}U_j\}\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}< i\le -u_\beta(x)\right.\\
&\qquad \left.\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}U_j\}\le k\beta, u_\beta(y)\le k< u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} P\left(\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}< i\le -u_\beta(x),\right.\\
&\qquad \left.\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le k\beta, u_\beta(y)\le k< u_\beta(y)+\beta^{-1}\right) d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)} P\left(\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le -i\beta\right)\\
&\qquad \times \prod_{k=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]+1} P\left(\min_{j=1}^{d}\{\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{kj}+\sqrt{\rho_\beta}z_j\}\le k\beta\right) d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d)\\
&=: \int_{\mathbb{R}^d} G(\beta,x,z_1,\dots,z_d)G(\beta,y,z_1,\dots,z_d)d\Phi(z_1)\cdots d\Phi(z_d). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

由与引理 3.2 的证明相同的论证可得

$$
\begin{aligned}
&-\ln G(\beta,x,z_1,\dots,z_d)\\
&= -\ln \prod_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\left[1-\prod_{j=1}^{d}P\left(\xi_{ij}\ge \frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right]\\
&= -\sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\ln\left[1-\prod_{j=1}^{d}P\left(\xi_{ij}\ge \frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right]\\
&= \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}\prod_{j=1}^{d}\left(1-\Phi\left(\frac{-(i\beta+\sqrt{\rho_\beta}z_j)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}\right)\right)(1+o(1))\\
&= \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]+1}^{-u_\beta(x)}(2\pi)^{-d/2}(1-\rho_\beta)^{d/2}|i\beta|^{-d}\exp\left(-\frac{d(i\beta)^2+2i\beta\sqrt{\rho_\beta}\sum_{j=1}^{d}z_j}{2(1-\rho_\beta)}\right)(1+o(1))\\
&= (2\pi)^{-d/2}d^{-1}(1-\rho_\beta)^{d/2}\beta^{-1}(\beta u_\beta(x))^{-(d+1)}\exp\left(-\frac{d(\beta u_\beta(x))^2}{2(1-\rho_\beta)}\right)\exp\left(\frac{\beta u_\beta(x)\sqrt{\rho_\beta}\sum_{j=1}^{d}z_j}{1-\rho_\beta}\right)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

现在，利用 (12) 以及当 $\beta\to 0$ 时 $\rho_\beta|\ln\beta|\to\gamma>0$ 这一事实，我们得到

$$
-\ln G(\beta,x,z_1,\dots,z_d)\to\exp\{-\sqrt{2d^{-1}\gamma}(x-\sum_{j=1}^{d}z_j)\}, \qquad (21)
$$

当 $\beta\to 0$ 时。同样，我们有

$$
-\ln G(\beta,y,z_1,\dots,z_d)\to\exp\{-\sqrt{2d^{-1}\gamma}(y-\sum_{j=1}^{d}z_j)\}, \qquad (22)
$$

当 $\beta\to 0$ 时。现在，结合 (20-22) 与控制收敛定理，即完成了 $r=d$ 情形的证明。

引理 3.4. 在定理 2.2 的条件下，对于 $r=1,d$

$$
\begin{aligned}
&\left|P\left(\Upsilon(O_X^{(r)})\ge -u_\beta(x),\tau(O_X^{(r)})\le u_\beta(y)\right)\right.\\
&\left.-P\left(O_{id}^{(r)}(X)\le -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1}< i\le -u_\beta(x), O_{kd}^{(r)}(X)\le k\beta, u_\beta(y)\le k< u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)\right|\to 0
\end{aligned}
$$

当 $\beta \to 0$ 时。

证明。显然，引理 3.4 中的绝对值可由以下量上界：

$$
\begin{aligned}
& P\left(\bigcup_{i=-\infty}^{-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]}(O_{id}^{(r)}(X) > -i\beta)\bigcup\bigcup_{k=u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}^{\infty}(O_{kd}^{(r)}(X) > k\beta)\right) \\
\leq & \sum_{i=-\infty}^{-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]} P\left(O_{id}^{(r)}(X) > -i\beta\right) + \sum_{k=u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}^{\infty} P(O_{kd}^{(r)}(X) > k\beta) \\
= & \sum_{i=u_\beta(x)+[\beta^{-1}]}^{\infty} P\left(O_{id}^{(r)}(X) > i\beta\right) + \sum_{k=u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}^{\infty} P(O_{kd}^{(r)}(X) > k\beta) \\
= & \sum_{i=u_\beta(x)+[\beta^{-1}]}^{\infty} C_d^r(1-\Phi(i\beta))^r(1+o(1)) + \sum_{k=u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}^{\infty} C_d^r(1-\Phi(k\beta))^r(1+o(1)),
\end{aligned}
$$

其中在最后一步中，我们用到了事实 (15)。利用事实 (16)，最后一个求和可由以下量上界：

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=u_\beta(x)+[\beta^{-1}]}^{\infty} \frac{C_d^r}{(2\pi)^{r/2}(i\beta)^r}\exp\left(-\frac{r(i\beta)^2}{2}\right) + \sum_{k=u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}^{\infty} \frac{C_d^r}{(2\pi)^{r/2}(k\beta)^r}\exp\left(-\frac{r(k\beta)^2}{2}\right) \\
& \ll \beta^{-1}(\beta u_\beta(x))^{-(r+1)}\exp\left(-\frac{r(\beta u_\beta(x)+1)^2}{2}\right) + \beta^{-1}(\beta u_\beta(y))^{-(r+1)}\exp\left(-\frac{r(\beta u_\beta(y)+1)^2}{2}\right) \\
& \ll \beta^{-\rho_\beta}|\ln\beta|^{-\frac{(1+r)\rho_\beta}{2}} e^{-K|\ln\beta|^{1/2}},
\end{aligned}
$$

在定理 2.2 的条件下，由于 $\rho_\beta \ln\beta^{-1} = \gamma$，该式趋于 0。

定理 2.2 的证明。按照引理 3.3 中的定义，令 $Y_{ij} = \sqrt{1-\rho_\beta}\xi_{ij} + \sqrt{\rho_\beta}U_j$ 和 $O_{id}^{(r)}(Y)$。由引理 3.3 和引理 3.4 可知，要证明定理 2.2，只需证明对于 $r=1$ 和 $r=d$，有：

$$
\begin{aligned}
& \Big|P\left(O_{id}^{(r)}(X) \leq -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), O_{kd}^{(r)}(X) \leq k\beta, u_\beta(y) \leq k < u_\beta(y)+\beta^{-1}\right) \\
& -P\left(O_{id}^{(r)}(Y) \leq -i\beta, -u_\beta(x)-\beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), O_{kd}^{(r)}(Y) \leq k\beta, u_\beta(y) \leq k < u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)\Big| \to 0
\end{aligned}
$$

当 $\beta \to 0$ 时。再次利用引理 3.1，可将差值估计为：

$$
\begin{aligned}
& K\sum_{i=1}^{[\beta^{-1}]+1}|r_i-\rho_\beta|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right) \\
& +K\sum_{i=1}^{[\beta^{-1}]+1}|r_i-\rho_\beta|\sum_{j=u_\beta(y)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right) \\
& +K\sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]}^{-u_\beta(x)}\sum_{j=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]}|r_{|i-j|}-\rho_\beta|(-i\beta)^{-(r-1)}(j\beta)^{-(r-1)}\exp\left(-\frac{r((i\beta)^2+(j\beta)^2)}{2(1+\varpi_{|i-j|,\beta})}\right) \\
& =: KR_\beta + KS_\beta + KT_\beta,
\end{aligned}
$$

其中 $\varpi_{i,\ \beta} = \max\{|r_i|, \rho_\beta\}$。回顾一下，$\delta = \sup_{i\geq 1}|r_i| < 1$ 以及 $\delta_n = \sup_{i\geq n}|r_i| < 1$。选取 ε 使得 $\varepsilon < (1-\delta)/(1+\delta)$ 且 $\varepsilon < 1 - |\ln\beta|^{-1/2} =: \theta$。将上述和式 J_β 分成三部分，即

$$
R_\beta = \sum_{i=1}^{[\beta^{-\varepsilon}]}|r_i-\rho_\beta|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i=[\beta^{-\varepsilon}]+1}^{[\beta^{-\theta}]} |r_i-\rho_\beta| \sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty} (j\beta)^{-2(r-1)} \exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)\\
&+ \sum_{i=[\beta^{-\theta}]+1}^{[\beta^{-1}]+1} |r_i-\rho_\beta| \sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty} (j\beta)^{-2(r-1)} \exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)\\
&=: R_{\beta,1}+R_{\beta,2}+R_{\beta,3}.
\end{aligned}
$$

按照与 $I_{\beta,\ 1}$ 相同的论证，我们可以证明，当 $\beta\to 0$ 时，$R_{\beta,\ 1}=o(1)$。对于项 $R_{\beta,\ 2}$，令 $\pi_\beta=\sup_{i\geq[\beta^{-\theta}]}\varpi_{i,\ \beta}$。于是容易看出，当 $\beta\to 0$ 时，$\pi_\beta|\ln\beta|\to\gamma$。我们有

$$
\begin{aligned}
R_{\beta,2} &\leq (\beta^{-\theta}-\beta^{-\varepsilon})\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{1+\pi_\beta}\right)\\
&\ll (\beta^{-\theta}-\beta^{-\varepsilon})\beta^{-1}(\beta u_\beta(x))^{-2r+1}\exp\left(-\frac{r(u_\beta(x)\beta)^2}{1+\pi_\beta}\right)\\
&\ll \beta^{\frac{2(1-\rho_\beta)}{1+\pi_\beta}-(1+\theta)}|\ln\beta|^{\frac{(1-\rho_\beta)(1+r)}{1+\pi_\beta}-\frac{2r-1}{2}}\\
&\ll \beta^{1-\theta}|\ln\beta|^{3/2}\\
&\ll \exp\{-|\ln\beta|^{1/2}+3/2\ln|\ln\beta|\},
\end{aligned}
$$

当 $\beta\to 0$ 时趋于 0。为了估计项 $R_{\beta,\ 3}$，利用以下不等式

$$
|r_i-\rho_\beta|\leqslant\left|r_i-\frac{\gamma}{\ln i}\right|+\gamma\left|\frac{1}{\ln i}-\frac{1}{|\ln\beta|}\right| \tag{23}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
R_{\beta,3} &\leq \sum_{i=[\beta^{-\theta}]+1}^{[\beta^{-1}]+1}\left|r_i-\frac{\gamma}{\ln i}\right|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)\\
&+ \gamma\sum_{i=[\beta^{-\theta}]+1}^{[\beta^{-1}]+1}\left|\frac{1}{\ln i}-\frac{1}{|\ln\beta|}\right|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(r-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)\\
&=: R_{\beta,31}+R_{\beta,32}.
\end{aligned}
$$

按照定理 2.1 中证明 $I_{\beta,\ 2}$ 的相同论证，我们有

$$
\begin{aligned}
R_{\beta,31} &\ll |\ln\beta|^{-1}\sum_{i=[\beta^{-\theta}]+1}^{[\beta^{-1}]+1}|r_i\ln i-\gamma|\sum_{j=u_\beta(x)}^{\infty}(j\beta)^{-2(d-1)}\exp\left(-\frac{r((j\beta)^2+((j+i)\beta)^2)}{2(1+\varpi_{i,\beta})}\right)\\
&\leq \sup_{i\geq\beta^{-\theta}}\{|r_i\ln i-\gamma|\}\beta^{-2(\pi_\beta+\rho_\beta)}|\ln\beta|^{-(1+r)(\rho_\beta+\pi_\beta)},
\end{aligned}
$$

由于 $r_i\ln i\to\gamma$，它趋于 0。利用 $[\beta^{-\theta}]+1\leq i\leq[\beta^{-1}]+1$ 的不等式

$$
\left|\frac{1}{\ln i}-\frac{1}{|\ln\beta|}\right|\ll|\ln\beta|^{-3/2}
$$

按照证明 $R_{\beta,\ 31}$的相同论证，我们有

$$
R_{\beta,32}\leq\beta^{-2(\pi_\beta+\rho_\beta)}|\ln\beta|^{-(1+r)(\pi_\beta+\rho_\beta)-1/2},
$$

它也趋于 0。按照相同的论证，我们得到 $S_\beta\to 0$ 当 $\beta\to 0$ 时。
对于项 T_β，注意到 $u_\beta(x)\sim u_\beta(y)\sim u_\beta:=\beta^{-1}(\frac{2}{r}\ln\beta^{-1})^{1/2}$ 当 $\beta\to 0$ 时。定义 $\kappa_\beta=$

上确界$_{i\geq 2[u_\beta]}\varpi_{i,\ \beta}$。再次利用 (23)，可得

$$\begin{aligned}
K_\beta \quad &\leq \quad \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]}^{-u_\beta(x)} \sum_{j=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]} \left| r_{|i-j|} - \frac{\gamma}{\ln|i-j|} \right| (-i\beta)^{-(r-1)} (j\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(i\beta)^2 + r(j\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&+ \quad \gamma \sum_{i=-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]}^{-u_\beta(x)} \sum_{j=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]} \left| \frac{1}{\ln|i-j|} - \frac{1}{|\ln\beta|} \right| (-i\beta)^{-(r-1)} (j\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(i\beta)^2 + r(j\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&=: \quad K_{\beta,1} + K_{\beta,2}
\end{aligned}$$

按照证明 $R_{\beta,\ 31}$ 的相同论证，我们得到

$$\begin{aligned}
K_{\beta,1} \quad &\leq \quad \sup_{i\geq 2[u_\beta]} \{|r_i \ln i - \gamma|\} |\ln\beta|^{-1} \sum_{i=u_\beta(x)}^{u_\beta(x)+[\beta^{-1}]} (i\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(i\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&\times \quad \sum_{j=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]} (j\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&\ll \quad \sup_{i\geq 2[u_\beta]} \{|r_i \ln i - \gamma|\} \beta^{-2(\kappa_\beta+\rho_\beta)} |\ln\beta|^{-(1+r)(\rho_\beta+\kappa_\beta)},
\end{aligned}$$

由于当 $n\to\infty$ 时 $r_n \ln n \to \gamma$，该式趋于 0。利用不等式 $u_\beta(x)+u_\beta(y) < |i-j| < u_\beta(x) + u_\beta(y) + 2[\beta^{-1}]$

$$\left| \frac{1}{\ln|i-j|} - \frac{1}{|\ln\beta|} \right| \ll |\ln\beta|^{-3/2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
K_{\beta,2} \quad &\leq \quad |\ln\beta|^{-3/2} \sum_{i=u_\beta(x)}^{u_\beta(x)+[\beta^{-1}]} (i\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(i\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&\times \quad \sum_{j=u_\beta(y)}^{u_\beta(y)+[\beta^{-1}]} (j\beta)^{-(r-1)} \exp\left(-\frac{r(j\beta)^2}{2(1+\kappa_\beta)} \right) \\
&\ll \quad \beta^{-2(\kappa_\beta+\rho_\beta)} |\ln\beta|^{-(1+r)(\rho_\beta+\kappa_\beta)-1/2},
\end{aligned}$$

当 $\beta\to 0$ 时，该式趋于 0。因此，当 $\beta\to 0$ 时，我们有 $K_\beta \to 0$。定理 2.2 的证明完毕。

3.3 定理 2.3 的证明

证明定理 2.3 需要以下两个引理。

引理 3.5. 设 ρ_β 是一个关于 β 的函数，满足 $0\leq\rho_\beta<c<1$ 和 $Y_{\beta,\ i} = \sqrt{1-\rho_\beta}\xi_i + \sqrt{\rho_\beta}U$，其中 ξ_i 是一列相互独立的标准高斯变量，U 是一个与 ξ_i 独立的标准高斯随机变量。若 $\rho_\beta|\ln\beta|\to\infty$ 当 $\beta\to 0$ 时，则对任意 x、$y\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\beta\to 0} P\left(Y_{\beta,i} \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), Y_{\beta,j} \leq j\beta, u_\beta(y) \leq j < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right) = \Phi(\min(x,y)),$$

其中 $u_\beta(x)$ 按照 (12) 定义，且 ρ_β 满足上述假设。

证明。由于

$$\begin{aligned}
&P\left(Y_{\beta,i} \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), Y_{\beta,j} \leq j\beta, u_\beta(y) \leq j < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right) \\
&= P\left(\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_i + \sqrt{\rho_\beta}U \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x),\right.
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_j+\sqrt{\rho_\beta}U\le j\beta, u_\beta(y)\le j<u_\beta(y)+\beta^{-1}\Big)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(\xi_i\le-\frac{\beta(i+\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, -u_\beta(x)-\beta^{-1}<i\le-u_\beta(x),\right.$$
$$\left.\xi_j\le-\frac{\beta(j+\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, u_\beta(y)\le j<u_\beta(y)+\beta^{-1}\right)d\Phi(z),$$

根据 ξ_i 的定义，我们得到上述积分等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(\xi_i\le-\frac{i\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, -(u_\beta(x)-\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)-\beta^{-1}<i\le-(u_\beta(x)-\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)\right)$$
$$\times P\left(\xi_j\le\frac{j\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, (u_\beta(y)-\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)\le j<(u_\beta(y)-\sqrt{\rho_\beta}z/\beta)+\beta^{-1}\right)d\Phi(z)$$
$$=:\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta,x,z)F(\beta,y,z)d\Phi(z). \tag{24}$$

根据引理 3.3 中相同的论证（另见 H¨usler（1977年）引理 2.2 的证明），我们有

$$-\ln F(\beta,x,z)\to\begin{cases}0, \text{ if } x>z;\\ \infty, \text{ if } x<z,\end{cases}$$

and

$$-\ln F(\beta,y,z)\to\begin{cases}0, \text{ if } y>z;\\ \infty, \text{ if } y<z,\end{cases}$$

结合 (24)，即可完成引理的证明。

引理 3.6. 在定理 2.3 的条件下，我们有

$$\left|P\left(\Upsilon(X)\ge-u_\beta(x),\tau(X)\le u_\beta(x)\right)\right.$$
$$\left.-P\left(X_i\le-i\beta,-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]<i\le-u_\beta(x),X_j\le j\beta,u_\beta(y)\le i<u_\beta(y)+[\beta^{-1}]\right)\right|\to0$$

当 $\beta\to0$ 时。

证明。令 $A_X=(\Upsilon(X)\ge-u_\beta(x))$，$A'_X=\left(X_i\le-i\beta,-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]<i\le-u_\beta(x)\right)$，$B_X=(\tau(X)\le u_\beta(x))$ 以及 $B'_X=\left(X_j\le j\beta,u_\beta(y)\le i<u_\beta(y)+[\beta^{-1}]\right)$。显然，

$$\begin{aligned}\left|P(A_X\bigcap B_X)-P(A'_X\bigcap B'_X)\right| &\le \left|P(A_X\bigcap B_X)-P(A'_X\bigcap B_X)\right|\\ &+ \left|P(A'_X\bigcap B_X)-P(A'_X\bigcap B'_X)\right|\\ &\le |P(A_X)-P(A'_X)|+|P(B_X)-P(B'_X)|\\ &\le P(E_X^c)+P(F_X^c),\end{aligned}$$

其中 $E_X=\left(\Upsilon(X)\ge-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]\right)$，且 $F_X=\left(\tau(X)\le u_\beta(x)+[\beta^{-1}]\right)$。根据 H¨usler（1977年）引理 2.3 的证明，我们得到 $P(E_X)\to1$，当 $\beta\to0$ 时。类似地，当$\beta\to0$ 时，我们有 $P(F_X)\to1$。引理得证。

定理 2.3 的证明。由引理 3.6，只需证明

$$P\left(X_i\le-i\beta,-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]<i\le-u_\beta(x)\ X_j\le j\beta,u_\beta(y)\le i<u_\beta(y)+[\beta^{-1}]\right)\to\Phi(\min(x,y))$$

如 $\beta\to0$。定义 $Y_{\beta,\,i}=\sqrt{1-\rho_\beta}\xi_i+\sqrt{\rho_\beta}U$，与引理 3.5 中相同。由于对所有 $i\le\beta^{-1}$，$r_i\ge\rho_\beta$，根据 Slepian 引理（例如参见 Leadbetter 等（1983）），我们有

$$\lim_{\beta\to0}P\left(X_i\le-i\beta,-u_\beta(x)-[\beta^{-1}]<i\le-u_\beta(x),X_j\le j\beta,u_\beta(y)\le i<u_\beta(y)+[\beta^{-1}]\right)$$

$$\geq \lim_{\beta\to 0} P\left(Y_{\beta,i} \leq -i\beta, -u_\beta(x) - \beta^{-1} < i \leq -u_\beta(x), Y_{\beta,j} \leq j\beta, u_\beta(y) \leq j < u_\beta(y) + \beta^{-1}\right),$$

根据引理 3.5，这等于 $\Phi(\min(x,y))$。因此，我们只需证明

$$\begin{aligned} &P\left(X_i \leq -i\beta, -u_\beta(x) - [\beta^{-1}] < i \leq -u_\beta(x), X_j \leq j\beta, u_\beta(y) \leq i < u_\beta(y) + [\beta^{-1}]\right) \\ &\quad \leq \Phi(\min(x,y) + \varepsilon) \end{aligned}$$

对所有 $\varepsilon > 0$。由于 r_n 是凸的，因此存在高斯序列 $\{Z_i = Z_i(\beta)\ i \in \mathbb{Z}\}$，其相关系数如下（例如，参见 Mittal and Ylvisaker（1975年））

$$\varrho_k = (r_k - \rho_\beta)/(1 - \rho_\beta) \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, [\beta^{-1}].$$

令 V 与 $\{Z_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 相互独立，使得

$$X_i = \sqrt{1-\rho_\beta} Z_i + \sqrt{\rho_\beta} V.$$

Now

$$\begin{aligned} &P\left(X_i \leq -i\beta, -u_\beta(x) - [\beta^{-1}] < i \leq -u_\beta(x), X_j \leq j\beta, u_\beta(y) \leq i < u_\beta(y) + [\beta^{-1}]\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(Z_i \leq -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, -u_\beta(x-z) - [\beta^{-1}] < i \leq -u_\beta(x-z),\right. \\ &\qquad \left. Z_j \leq \frac{j\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, u_\beta(y-z) \leq j < u_\beta(y-z) + [\beta^{-1}]\right) d\Phi(z) \\ &\leq \Phi\left(\min(x,y) + \varepsilon\right) + \int_{\min(x,y)+\varepsilon}^{\infty} P\left(Z_i \leq -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, -u_\beta(x-z) - [\beta^{-1}] < i \leq -u_\beta(x-z),\right. \\ &\qquad \left. Z_j \leq \frac{j\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, u_\beta(y-z) \leq j < u_\beta(y-z) + [\beta^{-1}]\right) d\Phi(z) \\ &\leq \Phi\left(\min(x,y) + \varepsilon\right) + P\left(Z_i \leq -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\rho_\beta}}, -u_\beta(-\varepsilon) - [\beta^{-1}] < i \leq -u_\beta(-\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

因此，为完成定理的证明，只需证明第二项趋于 0；这已在 H¨usler（1977年）的定理 2.3 的证明中完成。

致谢：作者感谢两位审稿人提出的宝贵建议。

参考文献

[1] Alodat, M. T. 两个高斯随机场簇大小分布的近似及其在功能性磁共振成像数据中的应用。《统计规划与推断杂志》，2011，141(7)，2331-2347。[2] Burnashev, M. V., Golubev, G. K. 关于首次越过高水平时刻的极限分布。《信息传输问题》，2015，51(2)，148-164。[3] D.ebicki, K., Hashorva, E., Ji, L. and Ling, C. 平稳过程次序统计量的极值。《Test》，2015，24，229-248。[4] D.ebicki, K., Hashorva, E., Ji, L. and Li ng, C. 高斯数组次序统计量的比较不等式。《拉丁美洲概率与数理统计杂志》，2017，14，93-116。[5] D. ebicki, K., Hashorva, E., Ji, L. and Tabi´s, K. 关于平稳高斯过程交集的概率。《统计与概率快报》，2014，88，141-148。

[6] D.ebicki, K., Hashorva, E., Ji, L. and Tabi´s, K. 向量值高斯过程的极值：精确渐近。《随机过程及其应用》，2015，125(11)，4039-4065。[7] D.ebicki, K., Kosinski, K.M. 平稳高斯过程次序统计量的 Erd¨os-R´ev´esz 型迭代对数律。《理论概率杂志》，2018，31(1)，579-597。[8] Gerber, H.U. 盈余何时达到给定目标？保险：数学与经济学，1990，9，115-119。[9] H¨usler, J. 高斯序列首次穿越点的极限分布。《随机过程及其应用》，1977年，6(1)，65-75。[10] H¨usler, J. 高斯序列首次穿越点的几乎必然极限行为。《随机过程及其应用》，1979年，8(3)，315-321。[11] H¨usler, J. 独立同分布随机变量序列末次离开时刻的极限行为。《概率论及相关领域》，1979年，50(2)，159-164。[12] H¨usler, J. 平稳随机序列末次离开时刻的极限分布。《概率论及相关领域》，1980年，52(3)，301-308。[13] H¨usler, J. 独立随机序列末次离开时刻的迭代对数律。《概率论及相关领域》，1981年，57(3)，397-405。[14] H¨usler, J., Zhang, Y. 关于高斯过程的首次与末次破产时刻。《统计与概率快报》，2008年，78(10)，1230-1235。[15] Karagodin, N. 高斯过程越过移动非线性边界的末次离开时刻的极限定理，《概率论与数理统计》，2022年，42(2)，195-217。[16] Karagodin, N., Lifshits, M. 关于高斯过程越过缓慢增长的线性边界的末次离开时刻分布，《理论概率及其应用》，2021年，66(3)，419-432。[17] Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H.（1983）。《随机序列与过程的极值及相关性质》。纽约：Springer-Verlag。[18] Malinovskii, V. K. 复合更新过程水平穿越问题中的近似。《数学科学报告》，2018年，98(3)：622-625。[19] Mittal, Y., Ylvisaker, D. 平稳高斯过程最大值的极限分布。《随机过程及其应用》，1975年，3，1-18。[20] Piterbarg, V.I.《高斯过程与场论中的渐近方法》，美国数学学会，普罗维登斯，1996年。[21] Song, W. Shao, J. Tan, Z. 高斯函数最大值的几乎必然中心极限定理。《统计通讯：理论与方法》，2022年，51(20)，7136-7147。[22] Shao, J. Tan, Z. 关于平稳相依卡方序列末次离开时刻与首次穿越点的极限性质，《统计通讯：理论与方法》，2023年，52(4)：1237-1250。[23] Tan, Z. 连续与离散时间高斯次序统计量过程的最大值（中文）。《中国科学：数学》，2018年，48(5)，623-642[24] Worsley, K. J., Friston, K. J. 一种检验交集的方法。《统计与概率快报》，2000年，47(2)，135-140。[25] Zhao, C. 平稳高斯过程次序统计量的极值。《概率论与数理统计》，2018年，38(1)，61-75。