arXiv:2303.01090v1 [physics.flu-dyn] 2 Mar 2023

非平衡湍流中交叉螺度对 α 型发电机的影响

Krzysztof A. Mizerski†[1]、Nobumitsu Yokoi[2], 和 Axel Brandenburg[3,4,5,6]

[1]波兰科学院地球物理研究所磁学系，Ksiecia Janusza 64, 01-452 华沙，波兰[2]东京大学工业科学研究所，驹场，目黑，东京 153-8505，日本[3]Nordita、瑞典皇家理工学院和斯德哥尔摩大学，Hannes Alfvéns väg 12, 10691 斯德哥尔摩，瑞典[4]奥斯卡·克莱因中心，斯德哥尔摩大学天文学系，AlbaNova, 10691 斯德哥尔摩，瑞典[5]伊利亚州立大学自然科学与医学学院，0194 第比利斯，格鲁吉亚[6]卡内基梅隆大学麦克威廉斯宇宙学中心及物理系，匹兹堡，宾夕法尼亚州 15213，美国

(2023年3月3日)

湍流通常处于非平衡状态，即平均能量和螺度等平均量通常随时间变化。本文采用双尺度直接相互作用近似（TSDIA）研究非定常性对湍流流体磁力发电机过程的影响。该近似能够明确地将平均湍流雷诺应力和麦克斯韦应力、平均电动势（EMF）与湍流的谱特征联系起来，例如平均能量以及动能螺度和交叉螺度。研究表明，当磁流体动力学（MHD）湍流同时具有螺度和交叉螺度时，非平衡效应能够增强发电机过程。这种效应基于湍流的无穷小脉冲交叉响应函数，而这些函数不会影响平衡状态下的湍流。本文还讨论了磁流体动力学湍流中交叉螺度的演化及其来源。

1. 引言

流体磁力发电机作用广泛存在于天体物理等离子体中，例如恒星和行星内部、吸积盘或星际介质中（参见 Roberts and Soward 1972、Brandenburg and Subramanian 2005、Dormy and Soward 2007、Roberts and King 2013、Balbus and Hawley 1991a,b）。鉴于托卡马克装置近期取得进展，等离子体温度已达到极高水平，从而为产生热核聚变能带来了希望，这一点尤为重要（参见 Li 等 2019、Gibney 2022）。对磁流体动力学（MHD）湍流中大尺度发电机机制的研究，即对那些能够产生大尺度磁场的机制的研究，主要局限于平衡状态，也就是统计定常湍流。

一种广为人知且常被引用的机制是所谓的 α效应。该效应需要湍流具有手征性（缺乏反射对称性），而这又需要某种机制打破系统的“上下”对称性，参见 Krause

† 通信邮箱：kamiz@igf.edu.pl

和 Rädler（1980）、Dormy and Soward（2007）、Moffatt 和 Dormy（2019）。随后会产生大尺度电动势（EMF），从而增强磁能。镜面对称性的缺失通常由分层和背景旋转引入，而衡量流动手性的一种有效指标是动能螺度 $\langle \mathrm{U}\cdot\nabla\times\mathrm{U}\rangle$，其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示系综平均。发电机理论中另一个重要的赝标量是交叉螺度 $\langle \mathrm{U}\cdot\mathrm{B}\rangle$，参见 Hamba 和 Tsuchiya（2010）、Yokoi（2013）；综述请见 Yokoi（2023）。

本文旨在简要阐明非平衡效应对磁流体力学湍流中 α-效应的影响，进而说明其对大尺度发电机的作用。Mizerski（2018a、b，2020、2021、2022）已在一系列论文中研究了这一问题，但这些研究假设湍流由高斯螺旋强迫驱动，因此强迫的物理性质体现在 α 系数的表达式中。与之相反，本文采用双尺度直接相互作用近似（TSDIA），该方法可以消除搅动强迫，但需要对背景湍流的某些统计性质作出假设。尽管如此，通过考察格林响应函数——它们描述湍流流动和磁场对无穷小扰动的响应，参见 Yoshizawa（1985、1990、1998）和 Yokoi（2013、2018）等——这一方法可以将平均电动势与动能螺度及交叉螺度明确联系起来。我们表明，无穷小脉冲交叉响应会通过磁流体力学湍流中的非平衡效应影响平均电动势；只要动能螺度和交叉螺度均不为零，α-效应就可能增强。我们还讨论了交叉螺度的演化方程及其在磁流体力学湍流中的源项与汇项，并由此探讨动能螺度与交叉螺度共存的可能性；我们也通过数值方法研究了这一问题。

2. 数学表述

为研究不可压导电流体中的磁流体动力学湍流，我们考虑以下描述流体流动速度场 $\mathrm{U}(\mathrm{x}\ t)$ 和磁场 $\mathrm{B}(\mathrm{x}.t)$ 演化的动力学方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}=-\nabla \Pi-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{U}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}+\nu\nabla^2\mathbf{U}, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}+\eta\nabla^2\mathbf{B}, \tag{2.1b}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{2.1c}$$

其中

$$\Pi=\frac{p}{\rho}+\frac{B^2}{2}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})^2, \tag{2.2}$$

为总压强，ρ 为密度，$\boldsymbol{\Omega}$ 为角速度，ν 为黏度，η 为磁扩散率。为简便起见，我们按照以下方式重新标度磁场：$\mathrm{B}/\sqrt{\mu_0\rho}\to\mathrm{B}$，其中 μ_0 为真空磁导率（因此纳维–斯托克斯方程中洛伦兹力项的前置因子 $1/\mu_0\rho$ 消失）；下文中我们也对电流重新标度，$\sqrt{\mu_0/\rho}\mathrm{J}\to\mathrm{J}$，使得 $\mathrm{J}=\nabla\times\mathrm{B}$。接下来，用尖括号表示系综平均，

$$\langle\cdot\rangle-\text{ensemble mean}$$

我们提出标准分解

$$\mathbf{U}=\langle\mathbf{U}\rangle+\mathbf{u}', \quad \mathbf{B}=\langle\mathbf{B}\rangle+\mathbf{b}', \quad p=\langle p\rangle+p', \tag{2.3}$$

并分别写出平均场 $\langle \mathrm{U} \rangle$ 和 $\langle \mathrm{B} \rangle$ 以及湍流涨落 $\mathbf{u}'$ 和$\mathbf{b}'$的方程；由此得到

$$\frac{\partial \langle \mathbf{U} \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{U} \rangle = -\nabla \langle \Pi \rangle - 2\boldsymbol{\Omega} \times \langle \mathbf{U} \rangle + (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{B} \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{U} \rangle - \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle - \langle \mathbf{b}'\mathbf{b}' \rangle), \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle + \eta \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle, \tag{2.4b}$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{U} \rangle = 0, \tag{2.4c}$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle, \tag{2.5}$$

是大尺度电动势（EMF），并且

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + (\langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \langle \mathbf{U} \rangle - (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{b}' - (\mathbf{b}' \cdot \nabla) \langle \mathbf{B} \rangle + \nabla \Pi' = -\nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}' - \mathbf{b}'\mathbf{b}') + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle - \langle \mathbf{b}'\mathbf{b}' \rangle), \tag{2.6a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} - \eta \nabla^2 \mathbf{b}' + (\langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{b}' - (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \langle \mathbf{B} \rangle - (\mathbf{b}' \cdot \nabla) \langle \mathbf{U} \rangle = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{b}' - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle), \tag{2.6b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}' = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \tag{2.6c}$$

3. 发电机理论中的非平衡效应

Mizerski（2018a、b，2020、2021、2022）在不存在科里奥利力但存在手性随机强迫的情况下，针对地磁发电机和星系发电机开展的研究结果表明，非定常 α效应与强迫存在所导致的能量产生率成正比，并且在由强迫诱导的时间尺度上呈振荡性，该时间尺度可能很长（关于椭圆不稳定性背景下的非定常发电机，另请参见 Mizerski等，2012）。在此，我们采用双尺度直接相互作用近似，以提取非搅拌非平衡湍流对大尺度磁流体发电机的影响。换言之，这种新方法能够在不存在外部随机强迫的情况下，研究非定常磁流体动力学湍流及湍流发电机效应，同时假定背景湍流具有一定的统计性质。我们证明，在非平衡湍流中，$\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ 这一物理量通过 α效应，在大尺度电动势的产生过程中发挥着重要作用，而 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ 效应在定常湍流中会消失。

3.1. *TSDIA*方法的应用

引入一个小参数 δ，并定义慢、快空间变量和时间变量

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{X} = \delta \mathbf{x}, \quad \tau = t, \quad T = \delta t. \tag{3.1}$$

大尺度场仅依赖于慢变量，$\langle \mathrm{U} \rangle (\mathbf{X}\ T)$，而涨落同时依赖于两者，$\mathbf{u}'(\boldsymbol{\xi}, \mathrm{X};\ \tau, T)$。我们还定义了傅里叶变换，其中涉及伽利略

变换到以速度 $\langle \mathsf{U} \rangle$ 运动的参考系

$$u_i'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}; \tau, T) = \int \mathrm{d}^3 k \hat{u}_i'(\mathbf{k}, \mathbf{X}; \tau, T) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\xi} - \langle \mathbf{U} \rangle \tau)}, \tag{3.2}$$

不过，为了使记号简洁，通常会省略对慢变量 X 和 T 的显式依赖。TSDIA方法的详细内容见附录 A（另见 Yoshizawa 1998 的 § 9.6、Yoshizawa 1985、1990 以及 Yokoi 2023），这里我们介绍主要结果。该方法引入了背景湍流的概念，其统计性质给定，且不受大尺度场和旋转的影响，因此具有各向同性；这种背景湍流由以下相关函数定义

$$\left\langle \hat{f}_i(\mathbf{k}; \tau) \hat{g}_j(\mathbf{k}_1; \tau_1) \right\rangle = \left[P_{ij}(\mathbf{k}) Q_{fg}(k; \tau, \tau_1) + \frac{1}{2} \mathrm{i} \epsilon_{ijk} \frac{k_k}{k^2} H_{fg}(k; \tau, \tau_1) \right] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1), \tag{3.3}$$

$$\left\langle G'_{fgij}(\mathbf{k}; \tau, \tau_1) \right\rangle = \delta_{ij} G_{fg}(k; \tau, \tau_1), \tag{3.4}$$

其中，f 和 g 分别表示变量 u'_{00} 和 b'_{00} 中的一个，而 $G'_{fij}(\mathbf{k}; \tau, \tau_1)$ 表示描述系统对无穷小扰动响应的格林函数。在此阶段，明确写出以下量很有用

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}'_{00}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{j}'_{00}(\mathbf{x}, \tau_1) \rangle &= -\mathrm{i} \epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}k \int \mathrm{d}k' k'_j \left\langle \hat{u}'_{00i}(\mathbf{k}; \tau) \hat{b}'_{00k}(\mathbf{k}'; \tau_1) \right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \mathrm{d}k H_{ub}(k; \tau, \tau_1) = \int \mathrm{d}k H_{bu}(k; \tau_1, \tau), \end{aligned} \tag{3.5}$$

因为该量将在下文发展的非平衡 α-效应理论中发挥重要作用。

附录 A 中给出的电动势公式的推导得到

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - (\beta + \zeta) \langle \mathbf{J} \rangle - \nabla \zeta \times \langle \mathbf{B} \rangle + \gamma (\langle \mathbf{W} \rangle + 2\boldsymbol{\Omega}), \tag{3.6}$$

其中，$\mathsf{J} = \nabla \times \mathsf{B} = \langle \mathsf{J} \rangle + \mathsf{j}'$ 和 $\mathsf{W} = \nabla \times \mathsf{U} = \langle \mathsf{W} \rangle + \mathsf{w}'$ 分别表示电流和涡量。Yoshizawa (1998) 和 Yokoi (2013, 2018) 对统计稳态情形进行了详细研究。

现在我们着重讨论 α-效应，它可以分解为两个贡献：

$$\alpha = \alpha_S + \alpha_{\mathrm{X}}, \tag{3.7}$$

一个是标准贡献，与所谓的剩余螺度有关；

$$\begin{aligned} \alpha_S = & \frac{1}{3} \int \mathrm{d}^3 k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \left[G_{uu}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) H_{bb}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) \right. \\ & \left. - G_{bb}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) H_{uu}(k, \mathbf{X}; \tau_1, \tau, T) \right], \end{aligned} \tag{3.8}$$

另一个则较不明显，与交叉螺度及量 $\langle \mathsf{u}' \mathsf{j}' \rangle$ 有关，其形式为

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{X}} = & -\frac{1}{3} \int \mathrm{d}^3 k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 G_{bu}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) H_{ub}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) \\ & + \frac{1}{3} \int \mathrm{d}^3 k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 G_{ub}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T) H_{bu}(k, \mathbf{X}; \tau, \tau_1, T). \end{aligned} \tag{3.9}$$

由于背景湍流的螺旋函数满足

$$H_{bu}(\tau, \tau_1) = H_{ub}(\tau_1, \tau), \tag{3.10}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{X}} =& -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 G_{bu}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right) H_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)\\ &+\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 G_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right) H_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau_1,\tau,T\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

现在，我们引入关于时间变量交换的 H_{ub} 对称部分和反对称部分

$$H_{ub}^{(s)}\left(\tau,\tau_1\right)=\frac{1}{2}\left(H_{ub}\left(\tau,\tau_1\right)+H_{ub}\left(\tau_1,\tau\right)\right), \tag{3.12a}$$

$$H_{ub}^{(a)}\left(\tau,\tau_1\right)=\frac{1}{2}\left(H_{ub}\left(\tau,\tau_1\right)-H_{ub}\left(\tau_1,\tau\right)\right), \tag{3.12b}$$

这使得可以进一步将 α_{X} 项分解为两个贡献

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{X}} =& -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \left[G_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)+G_{bu}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)\right] H_{ub}^{(a)}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)\\ &+\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \left[G_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)-G_{bu}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)\right] H_{ub}^{(s)}\left(k,\mathbf{X};\tau_1,\tau,T\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

公式 (3.13) 中的第一项，即

$$\alpha_{\mathrm{neq}} =-\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \left[G_{ub}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)+G_{bu}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)\right] H_{ub}^{(a)}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right), \tag{3.14}$$

显然，这一项体现了湍流非定常性的贡献，因为反对称部分 $H_{ub}^{(a)}$ 显然是一种非平衡效应。

3.2. 非平衡 α_{neq}-效应的物理机制

如果我们进一步假设函数

$$\mathcal{G}\left(\tau,\tau_1\right)=G_{ub}\left(\tau,\tau_1\right)+G_{bu}\left(\tau,\tau_1\right) \tag{3.15}$$

is 与 k 无关，则非平衡 α 效应可表示如下:

$$\alpha_{\mathrm{neq}} =-\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \mathcal{G}\left(\tau,\tau_1\right)\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{j}_{00}'\right\rangle^{(a)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right), \tag{3.16}$$

其中

$$\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{j}_{00}'\right\rangle^{(a)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)=\frac{1}{2}\left[\left\langle \mathbf{u}_{00}'\left(\mathbf{x},\tau\right)\cdot\mathbf{j}_{00}'\left(\mathbf{x},\tau_1\right)\right\rangle-\left\langle \mathbf{u}_{00}'\left(\mathbf{x},\tau_1\right)\cdot\mathbf{j}_{00}'\left(\mathbf{x},\tau\right)\right\rangle\right]. \tag{3.17}$$

由（3.17）中的时间积分表示的记忆效应显然至关重要，因为 $\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{j}_{00}'\right\rangle^{(a)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau\right)=0$。接下来，考察格林函数的演化方程可得出结论： G_{ub} 必须是 $\mathbf{b}_{00}'$ 的奇函数。这是可以预料的，因为 α_{X} 对 α 效应的贡献源于洛伦兹力的作用，而由于H_{ub} 与量 $\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{j}_{00}'\right\rangle$ 相关联，即 H_{ub} 关于 $\mathbf{b}_{00}'$ 呈线性，因此 G_{ub} 必须是后者的奇函数。此外，由于 $\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{j}_{00}'\right\rangle$ 是标量（在反射下符号不变）， G_{ub} 必须是赝标量。唯一既是赝标量、又关于 $\mathbf{b}_{00}'$ 为奇函数的动力学量是交叉螺度 $\left\langle \mathbf{u}_{00}'\cdot\mathbf{b}_{00}'\right\rangle$，因此我们预期 $G_{ub}\sim Q_{ub}$。考虑到响应函数 $\mathcal{G}(\tau,\tau_1)$ 是无量纲的，我们现在可以给出

以下对非平衡 α_{neq} 效应的粗略估计

$$\alpha_{\mathrm{neq}} \sim -\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \Upsilon^{(s)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)\left\langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\right\rangle^{(a)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right), \tag{3.18}$$

其中

$$\Upsilon\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)=\frac{\left\langle \mathbf{u}'_{00}\left(\mathbf{x},\tau\right)\cdot\mathbf{b}'_{00}\left(\mathbf{x},\tau_1\right)\right\rangle}{\sqrt{\left\langle u'^2_{00}\right\rangle\left(\mathbf{x},\tau\right)\left\langle b'^2_{00}\right\rangle\left(\mathbf{x},\tau_1\right)}}, \tag{3.19}$$

$$\Upsilon^{(s)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)=\frac{1}{2}\left[\Upsilon\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)+\Upsilon\left(\mathbf{x},\tau_1,\tau\right)\right], \tag{3.20}$$

交叉螺度已按动能与磁能涨落的几何平均值进行了归一化（关于不同交叉螺度归一化方式的讨论，见 Yokoi 2011）。后一个方程表达了一种由湍流状态偏离平衡所产生的效应。

(3.13) 中的第二项可能较小，因为它含有因子 $G_{ub}(\tau,\tau_1)$ $-G_{bu}(\tau,\tau_1)$。例如，在 $\nu=\eta$ 的情况下，两个响应函数 G_{ub} 和 G_{bu} 相等，且 $\alpha_{\mathrm{X}}=\alpha_{\mathrm{neq}}$。即使扩散率不相等但较弱，这一结论仍近似成立，

$$G_{ub}\approx G_{bu}, \qquad \text{and} \qquad \alpha_{\mathrm{X}}\approx\alpha_{\mathrm{neq}}. \tag{3.21}$$

与 α_{neq} 的情况相同，针对性论证也可应用于 (3.13) 中的第二项，因此该项正比于无量纲交叉螺度$\Upsilon=\Upsilon(\mathbf{x}\ \tau,\tau)$以及量 $\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle=\langle\mathbf{u}'_{00}(\mathbf{x}\ \tau)\ \cdot\mathbf{j}'_{00}(\mathbf{x}\ \tau)\rangle$，即 $\alpha_{\mathrm{X}}-\alpha_{\mathrm{neq}}\sim\tau_t\Upsilon\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle$，其中 τ_t 是能量最强的湍流涡旋的周转时间。然而，如上所述，当扩散较弱或磁普朗特数 $\mathrm{Pr}_M=\nu/\eta\approx1$ 时，这种效应应当较弱。

最后，我们还预计，在完全湍流的流动中，$\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle$ 相关性与动能螺度 $\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{w}'_{00}\rangle$成正比，因为在这类流动中，速度与磁场通常趋于对齐。同样，前因子必须关于 $\mathbf{b}'_{00}$ 呈反对称且为奇函数，因此我们提出

$$\left\langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\right\rangle\approx\Upsilon\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{w}'_{00}\rangle=\frac{\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{b}'_{00}\rangle\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{w}'_{00}\rangle}{\sqrt{\left\langle u'^2_{00}\right\rangle\left\langle b'^2_{00}\right\rangle}}. \tag{3.22}$$

将后一关系代入 (3.18) 得到

$$\alpha_{\mathrm{neq}}\sim-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau_1\left(\Upsilon^{(s)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right)\right)^2\left\langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{w}'_{00}\right\rangle^{(a)}\left(\mathbf{x},\tau,\tau_1\right), \tag{3.23}$$

这表明，非平衡 α_{neq}-效应依赖于动能螺度与交叉螺度的共存及其在磁流体力学湍流中的历史（更准确地说，在仅存在动能螺度的情况下，只有时间相关性 $\langle\mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{w}'_{00}\rangle^{(a)}(\mathbf{x}\ \tau,\tau_1)$ 的反对称部分对这一新效应有贡献）。

3.3. α_{neq}-效应的计算

现在我们将更详细地考察这一发电机机制。为了计算非平衡湍流的影响，我们采用与 Yoshizawa (1998) 中§ 7类似的方法。在定常湍流中，函数 $H_{fg}(k,\mathrm{X};\ \tau,\tau_1,T)$ 和$G_f(k,\mathrm{X};\ \tau,\tau_1,T)$ 仅依赖于 $|\tau-\tau_1|$，因此，为了研究非平衡效应，我们为这些函数假设了与 Yoshizawa (1998) 类似的公式（参见本书公式 6.53–6.54），但经过修改，以引入简单、明确且彼此不同的

对 τ 和 τ_1 的依赖关系

$$H_{fg}\left(k,\mathbf{k}\cdot\langle\mathbf{B}\rangle,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)=\sigma\left(k,\mathbf{X},T\right)\mathrm{e}^{-\varpi(k,\mathbf{X},T)|\tau-\tau_1|}\mathcal{H}\left(\tau\right)\mathcal{H}_1\left(\tau_1\right), \tag{3.24}$$

$$G_{fg}\left(k,\mathbf{X};\tau,\tau_1,T\right)=\theta\left(\tau-\tau_1\right)\varsigma\left(k,\mathbf{X},T\right)\mathrm{e}^{-\varpi(k,\mathbf{X},T)|\tau-\tau_1|}\mathcal{G}\left(\tau\right)\mathcal{G}_1\left(\tau_1\right), \tag{3.25}$$

对于某些函数 $\mathcal{H}(\tau)$、 $\mathcal{H}_1(\tau_1)$、 $\mathcal{G}(\tau)$ 和 $\mathcal{G}_1(\tau_1)$。我们可以将这些函数分解为傅里叶模，从而采用以下更简单的通用模型

$$H_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)=\sigma\mathrm{e}^{-\varpi|\tau-\tau_1|}\sin\left(\varpi_{h0}\tau\right)\sin\left(\varpi_{h1}\tau_1\right), \tag{3.26a}$$

$$G_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)=\theta\left(\tau-\tau_1\right)\varsigma\mathrm{e}^{-\varpi|\tau-\tau_1|}\sin\left(\varpi_{g0}\tau\right)\sin\left(\varpi_{g1}\tau_1\right), \tag{3.26b}$$

为简洁起见，记号中省略了对慢变量和波数 k 的依赖；此外， $\varpi>0$ 并且为便于说明，我们还假设 $\varpi_{h0}>0$、 $\varpi_{g0}>0$、$\varpi_{h1}>0$ 和 $\varpi_{g1}>0$。为简单起见，我们还假设

$$G_{ub}\approx G_{bu}. \tag{3.27}$$

以下计算

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau_1 G_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)H_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)&\\ =\frac{\sigma\varsigma}{4}\left(\cos\Delta_0\tau-\cos\Sigma_0\tau\right)&\left[\frac{1}{4\varpi^2+\Delta_1^2}\left(2\varpi\cos\Delta_1\tau+\Delta_1\sin\Delta_1\tau\right)\right.\\ &\left.-\frac{1}{4\varpi^2+\Sigma_1^2}\left(2\varpi\cos\Sigma_1\tau+\Sigma_1\sin\Sigma_1\tau\right)\right],\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中

$$\Delta_i=\varpi_{hi}-\varpi_{gi},\qquad \Sigma_i=\varpi_{hi}+\varpi_{gi}, \tag{3.29}$$

这表明，在非平衡湍流中， α 效应的两种贡献——“标准” α_S 以及与交叉螺度相关的 α_X——都会因非定常性而增强。由于在大多数情况下，这些频率对应于湍流涨落的快速振荡，因此余弦和正弦项不会对较长时间尺度产生贡献（其时间平均值为零）。在长时间尺度上进行时间平均 $\delta^{-1}t$后，非零贡献来自 $\varpi_{hi}=\varpi_{gi}$ （或 $\varpi_{hi}\approx\varpi_{gi}$）的情况。因此，我们选取满足以下关系的 $(\varpi,\ \varpi_h,\ \varpi_g)$ 模：

$$\Delta_i\ll\varpi\ll\varpi_{hi},\,\varpi_{gi},\quad \text{for}\quad i=0,1, \tag{3.30}$$

在这种情况下

$$\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau_1 G_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)H_{fg}\left(\tau,\tau_1\right)\approx\frac{\sigma\varsigma}{8\varpi}; \tag{3.31}$$

作为比较，在定常情况下可得 $\sigma_s\varsigma_s/2\varpi_s$ with $H_{fg}=\sigma_s\exp(-\varpi_s\left|\tau-\tau_1\right|)$,$G_{fg}=\varsigma_s\exp(-\varpi_s\left|\tau-\tau_1\right|)$。不过，Mizerski（2018a、b，2020，2021，2022）已采用不同方法研究了非定常性对“标准”α_S 贡献的影响。本文着重讨论交叉螺度贡献 $\alpha_{\mathrm{X}}\approx\alpha_{\mathrm{neq}}$，该贡献在TSDIA方法中显而易见。将公式 (3.26a,b) 代入 (3.14) 得

$$\alpha_{\mathrm{neq}}\approx-\frac{\pi}{6}\int\mathrm{d}k\frac{\sigma\varsigma k^2}{\varpi}. \tag{3.32}$$

根据我们在上述内容中的先前观察，我们得到 $\varsigma\sim\Upsilon$。值得注意的是，若假设 H_{ub} and 具有更简单的非定常形式，也会得到非常相似的结果。

G_{ub} 函数

$$H_{ub}(\tau,\tau_1)=\sigma \mathrm{e}^{-\varpi|\tau-\tau_1|}\sin\left[\varpi_h(\tau-\tau_1)\right], \tag{3.33a}$$

$$G_{ub}(\tau,\tau_1)=\theta(\tau-\tau_1)\varsigma \mathrm{e}^{-\varpi|\tau-\tau_1|}\sin\left[\varpi_g(\tau-\tau_1)\right], \tag{3.33b}$$

其满足 $H_{ub}(\tau,\tau_1)=-H_{ub}(\tau_1,\tau)$，并考虑极限 (3.30)。

在上述计算中，我们采用了一些关于湍流统计性质的标准模型，以强调螺度演化历史在湍流发电机过程中的重要性。由交叉螺度和动能螺度同时存在所诱导的 α_{neq}-效应可能很强，其强度取决于它们的大小。

4. 湍流中动能螺度与交叉螺度的共存

我们现在考虑在充分发展湍流中交叉螺度与动能螺度共存的可能性。尽管无法就此得出确定的结论，但为了形成对其产生机制的一些直观认识，研究湍流中交叉螺度的源项与汇项仍然是有益的。

在附录B中，我们考察了受迫湍流（具有均匀、各向同性、定常且具有螺度的高斯强迫），并表明在一阶平滑近似下，动能螺度与强迫螺旋度成正比，而交叉螺度由乘积 $\langle \mathrm{f}\cdot\nabla\times\mathrm{f}\rangle(\langle \mathrm{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega})$ 决定。换言之，在 FOSA 方法下，交叉螺度的存在取决于平行于背景旋转矢量的平均场分量是否存在。

附录 C 中给出了更为一般的计算，其中我们推导了交叉螺度的一般演化方程（另见 Yokoi 和 Hamba 2007 、 Yokoi 2011 、 Yokoi 和 Balarac 2011 、 Yokoi 和 Hoshino（2011）、Yokoi 2013）。该方程涉及平均量，例如平均电动势 E、平均雷诺应力和麦克斯韦应力 $\langle u_i'u_j'-b_i'b_j'\rangle$。对于前者，我们采用结果（3.6）；对于后者，我们采用同样通过 Yokoi 和 Hoshino（2011）中的 TSDIA方法得到的表达式，即:

$$-\langle u_i'u_j'-b_i'b_j'\rangle\frac{\partial\langle B\rangle_i}{\partial x_j}=\frac{7}{10}\beta\mathcal{S}_{ij}\mathcal{M}_{ij}-\frac{7}{10}\gamma\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2\right), \tag{4.1}$$

其中

$$\mathcal{S}_{ij}=\frac{\partial\langle U\rangle_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle U\rangle_j}{\partial x_i},\qquad \mathcal{M}_{ij}=\frac{\partial\langle B\rangle_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle B\rangle_j}{\partial x_i}. \tag{4.2}$$

这导致

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle=&-\alpha\left(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\langle\mathbf{W}\rangle+2\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)+(\beta+\zeta)\left(\langle\mathbf{J}\rangle\cdot\langle\mathbf{W}\rangle+2\langle\mathbf{J}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)\\&-\gamma\left(\langle\mathbf{W}\rangle+2\boldsymbol{\Omega}\right)^2-\frac{7}{10}\gamma\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2\right)\\&+\frac{7}{10}\beta\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}\right)+\left(\nabla\zeta\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)\cdot\left(\langle\mathbf{W}\rangle+2\boldsymbol{\Omega}\right)\\&+\nabla\cdot\left[\left\langle\left(-\Pi'+\frac{\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2}{2}\right)\mathbf{b}'\right\rangle+\left\langle\frac{\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2}{2}\right\rangle\langle\mathbf{B}\rangle-\nu\langle\mathbf{w}'\times\mathbf{b}'\rangle+\eta\langle\mathbf{u}'\times\mathbf{j}'\rangle\right]\\&-(\nu+\eta)\langle\mathbf{w}'\cdot\mathbf{j}'\rangle.\end{aligned} \tag{4.3}$$

当然，如果湍流受到某种强迫 f 的搅动，还会有另一个产生项 $\langle \mathrm{f}\cdot\mathbf{b}'\rangle$。

根据 (3.23)，非平衡 α效应的大小取决于动能螺度和交叉螺度，以及它们的历史。总的 α效应由两个

贡献 $\alpha = \alpha_{\rm S} + \alpha_{\rm X}$组成，其中标准贡献可假设与动能螺度成正比， $\alpha_{\rm S} \approx -\tau_t \langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{w}' \rangle/3$。两项贡献 $\alpha_{\rm S}$和 $\alpha_{\rm X}$ 之间的最终平衡，决定了 α 系数与动能螺度同号还是异号。此前提到的 Yokoi 和 Hamba (2007)、Yokoi (2011)、Yokoi 和 Balarac (2011)、Yokoi 和 Hoshino（2011）以及 Yokoi (2013) 的研究，在若干简化假设下考察了方程 (4.3) 中不同项的作用；其中一个重要假设是忽略 G_{ub} 和 G_{bu} 响应函数的影响，而这些响应函数正是本文研究的非平衡效应的来源。假设 $\alpha = -\tau_t \langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{w}' \rangle/3$，他们指出，第一项 $-\alpha \langle \mathsf{B} \rangle \cdot \langle \mathsf{W} \rangle$ 总是会导致交叉螺度的衰减。在非平衡湍流中，情况则不再如此，因为根据 $\alpha_{\rm S}$ 项与 $\alpha_{\rm X}$ 项之间的平衡，(4.3) 中的 $-\alpha \langle \mathsf{B} \rangle \cdot \langle \mathsf{W} \rangle$ 项可能会增强或削弱交叉螺度。此外，Yokoi 和 Hoshino（2011）取 $\beta + \zeta \sim \langle \mathsf{u}'^2 \rangle$ 和 $\gamma \sim \langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{b}' \rangle$，由此确定了另外两项，它们总是会导致交叉螺度衰减，即

$$-\gamma \left(\langle \mathbf{W} \rangle + 2\boldsymbol{\Omega} \right)^2 - \frac{7}{10} \gamma \mathrm{Tr} \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}^2 \right). \tag{4.4}$$

此外，Yokoi 和 Hoshino（2011）描述了托卡马克装置中多种可能产生交叉螺度的情形，其中涉及项 $(\beta + \zeta)$ $\langle \mathsf{J} \rangle \cdot \langle \mathsf{W} \rangle$, $\beta \mathrm{Tr}$ (S $\cdot$M) 和 $\nabla \cdot \left[\left\langle \mathsf{u}'^2 + \mathsf{b}'^2 \right\rangle \langle \mathsf{B} \rangle \right]$。最后，在项 $-2\alpha \langle \mathsf{B} \rangle \cdot \boldsymbol{\Omega}$ 中，我们找回了平行于旋转矢量的平均场分量所起的作用，这与 FOSA 方法中的情况相同。

(4.3) 中其余所有项的作用难以预测；一般而言，它们既可能增强，也可能削弱充分发展湍流中的交叉螺度。(4.3) 右端的最终平衡取决于湍流的许多动力学特征，并且预计会随时间变化。因此，为了展示磁化湍流中交叉螺度与动能螺度共存的可能性，我们在重力、密度分层以及外加磁场 g $\parallel \nabla\rho \parallel$ B_0 $\parallel \boldsymbol{\Omega}$ 存在的条件下，使用 Pencil Code（Pencil Code 合作组）在一个周期盒中，对方程 (2.1*a*–c) 的可压缩形式进行了数值模拟，网格点数为 256^3；上下边界采用应力自由和完全导电边界条件；参见附录 D。沿分层方向旋转会产生动能螺度（模拟结果见 Jabbari 等人 2014 年的图 5），而沿分层方向的磁场作用会产生交叉螺度（Rüdiger 等人，2011）。

物理参数的取值如下：我们再次使用未缩放的磁场 $B = 0.01\, c_{\rm s} \sqrt{\mu_0 \bar{\rho}}$和重力 $g = 1\, c_{\rm s}^2 k_1$（在其他运行中会改变这两者），其中 $c_{\rm s}$ 为声速， $\Omega = 0.5\, c_{\rm s} k_1$ 在所有运行中保持不变， $\bar{\rho}$ 为平均密度， k_1 为盒尺度波数；其余参数在所有运行中均为常数，列于表1中。我们使用阿尔芬速度 $v_A = B/\sqrt{\mu_0 \overline{\rho}}$ ，通过 v_{A0} 和 $v_A^{\rm rms}$分别量化外加磁场和均方根磁场的强度。在可变重力强度下，对两个相差一个数量级的外加磁场取值所得的结果见图1以及表1和表2；其他图示另见附录 E。归一化螺度 $\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{b}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}$ 和 $\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{w}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}$ 随时间的变化绘于图中，在所有考虑的情形下二者均明显非零；交叉螺度以红色绘制，蓝线表示动能螺度，而其时间平均值以白线标出。此外，仅供参考，图中还显示了非平衡效应的估算值，形式为

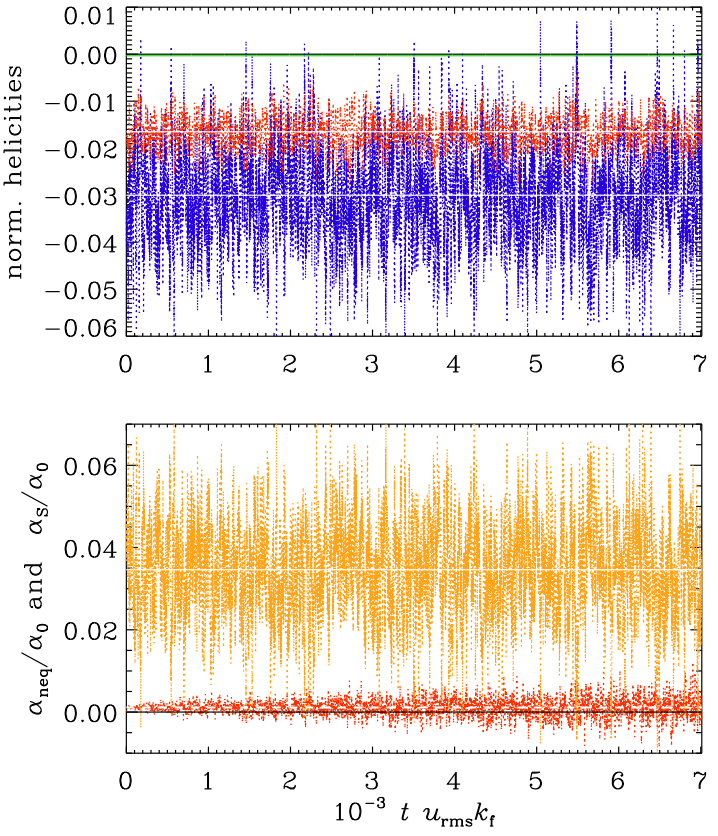

图 1. 使用 Pencil Code 对周期盒中的磁流体力学湍流进行数值模拟，运行A的结果。上图显示归一化交叉螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}$（红色）和动能螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{w}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}$（蓝色）随时间的变化；时间平均值以白色实线标出，绿色线表示电流螺度 $\langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}$。下图以红色和橙色分别显示系数 $\alpha_{\rm neq}$（4.5）和 $\alpha_{\rm S}$（4.6）随时间的估计值（以 $\alpha_0 = u_{\rm rms}/3$ 归一化）；白色实线标出 $\alpha_{\rm S}/\alpha_0$ 的时间平均值，白色虚线标出 $\alpha_{\rm neq}/\alpha_0$ 的时间平均值。

效应的形式为

$$\alpha_{\rm neq} \approx -\frac{1}{3} \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}} \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau_1 \left[\langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{x}, \tau_1) \rangle - \langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, \tau_1) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{x}, \tau) \rangle \right], \tag{4.5}$$

这可以与以下标准的 α 效应估算值进行比较，该效应与动能螺旋度和电流螺旋度的存在有关

$$\alpha_S \approx -\frac{1}{3} \tau_t \left(\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{w}' \rangle - \langle \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle \right), \tag{4.6}$$

其中，$\tau_t = 1/u_{\rm rms} k_{\rm f}$ 是能量最强的湍流涡旋的周转时间，$u_{\rm rms} = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ 和 $k_{\rm f} = 30\, k_1$ 分别表示强迫波数（$k_1 = 2\pi/L$ 是长度为 L 的盒子的波数）。

尽管在数值研究的案例中，湍流的统计非定常性相当弱，且对 $\alpha_{\rm neq}$ 系数的估算始终至少比 $\alpha_{\rm S}$ 弱一个数量级，但前者显然不为零，其相对重要性似乎与交叉螺度的大小相关。其相对

	$\frac{g}{c_s^2 k_1}$	$\frac{v_{A0}}{c_s}$	$\frac{\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{b}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}}$	$\frac{\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{w}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}}$	$\frac{\langle \mathsf{b}' \cdot \mathsf{j}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}}$	$\frac{\alpha_{\rm neq}}{\alpha_0}$	$\frac{\alpha_{\rm S}}{\alpha_0}$	$\frac{u_{\rm rms}}{c_s}$	$\frac{v_A^{\rm rms}}{c_s}$
C	0.5	0.01	-9.8×10^{-3}	-1.6×10^{-2}	-2.0×10^{-4}	7.8×10^{-4}	1.8×10^{-2}	0.10	0.03
A	1.0	0.01	-1.7×10^{-2}	-3.0×10^{-2}	-3.3×10^{-4}	1.1×10^{-3}	3.5×10^{-2}	0.11	0.04
D	2.0	0.01	-2.0×10^{-2}	-3.6×10^{-2}	-2.8×10^{-4}	6.1×10^{-4}	4.1×10^{-2}	0.16	0.04
E	0.5	0.10	-5.5×10^{-2}	-1.9×10^{-2}	-6.2×10^{-4}	-5.6×10^{-3}	1.5×10^{-2}	0.08	0.07
B	1.0	0.10	-5.3×10^{-2}	-3.2×10^{-2}	-1.2×10^{-2}	2.3×10^{-3}	1.8×10^{-2}	0.09	0.12

表1. 运行 A–E 的模拟结果汇总。

	$k_{\rm f}$	$\frac{\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{b}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}}$	$\frac{\langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{w}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}}$	$\frac{\langle \mathsf{b}' \cdot \mathsf{j}' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle w'^2 \rangle}}$	$\frac{\alpha_{\rm neq}}{\alpha_0}$	$\frac{\alpha_{\rm S}}{\alpha_0}$	$\frac{u_{\rm rms}}{c_s}$	$\frac{v_A^{\rm rms}}{c_s}$
A	30	-1.7×10^{-2}	-3.0×10^{-2}	-3.3×10^{-4}	1.1×10^{-3}	3.5×10^{-2}	0.11	0.04
A2	10	-1.3×10^{-1}	-1.2×10^{-1}	1.3×10^{-3}	-1.7×10^{-2}	6.9×10^{-2}	0.12	0.12
A3	3	-6.4×10^{-2}	-2.1×10^{-1}	-3.0×10^{-2}	-6.0×10^{-3}	5.5×10^{-2}	0.19	0.09

表2。运行A、A2和A3的模拟结果汇总。

在磁场较强（运行B）和重力较弱（运行E）时， $\alpha_{\rm neq}$-效应的增强十分明显，这与交叉螺度相对于动力学螺度的增强相对应。当然，在后一种情况下（见图2），尽管 $\alpha_{\rm neq}$ 系数的相对大小最大，但其符号与 $\alpha_{\rm S}$ 不同，因此此时非平衡效应倾向于抑制标准发电机效应。从图3可以看出，较弱的磁场和较强的重力已将非平衡效应抑制到相对大小极小的程度。

在尺度分离较小的情况下，即当 $k_{\rm f}$的值较小时，我们预计湍流会呈现更强的间歇性，非定常性也会增强。为探究这种可能性，我们在其他参数与运行A相同的条件下，针对较小的 $k_{\rm f}$ 值进行了额外模拟。表2所示的结果确实表明，当 $k_{\rm f}$ 从30降至10时，$\alpha_{\rm neq}$ 增至原来的两倍；但将 $k_{\rm f}$进一步从10降至3，并未使 $\alpha_{\rm neq}$进一步增加。不过，这在一定程度上是由于采用了 α_0进行归一化，而 α_0增加了约60%。

我们得出结论：在充分发展的螺旋湍流中，也就是具有强动能螺度的湍流中，交叉螺度也很可能产生，并且至少在某些时段内，两种螺度可以共存。

5. 结论

我们分析了非平衡湍流中的磁流体发电机过程。结果表明，在非平衡磁流体力学湍流中，无穷小脉冲交叉响应 $\mathsf{u}' \leftrightarrow \mathsf{b}'$ 的作用显著，而在稳态下这一作用消失。这会在大尺度电动势的表达式中产生额外项。

主要结论是，磁流体动力学湍流中的非平衡效应会引入一个取决于无量纲交叉螺度 $\Upsilon = \langle \mathsf{u}' \cdot \mathsf{b}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle b'^2 \rangle}$的平方、动能螺度及其在磁流体动力学湍流中的历史的修正项，从而改变 α 效应，其形式如式（3.23）所示。这要求湍流中动能螺度和交叉螺度同时存在。第4节对交叉螺度产生机制的讨论以及数值

模拟的结果表明，这种共存是可能的，甚至或许普遍存在于许多自然系统中。早先的研究已经指出并深入讨论了一些简单而强有力的产生机制，例如 Yokoi 和 Hoshino（2011）。

湍流中的非平衡效应还会影响平均电动势（3.6）的其他组成部分，即湍流扩散率 β 以及系数 ζ 和 γ，其作用方式并不简单，这是通过格林交叉响应函数 G_{ub} 和 G_{bu} 的影响实现的。这一有趣的课题应在未来的研究中进行更深入的探讨。

致谢

我们感谢剑桥艾萨克·牛顿数学科学研究所在“发电机理论前沿：从地球到恒星”（DYT2）项目期间提供的支持与款待；本文的大部分工作是在该项目期间完成的。

经费

KAM 获得了波兰教育与科学部为波兰科学院地球物理研究所提供的补助金支持。NY 获得了日本学术振兴会（JSPS）科学研究费补助金 JP18H01212 的支持。我们还感谢英国工程与物理科学研究委员会资助项目 EP/R014604/1 以及瑞典研究理事会（Vetenskapsrådet，2019-04234）的支持。Nordita 由北欧研究委员会资助。我们感谢瑞典国家资源分配委员会在斯德哥尔摩和林雪平皇家理工学院并行计算中心提供的计算资源配额。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据已在 Zenodo 上公开，DOI 为：10.5281/zenodo.7683615（v2023.02.28）。所有计算均使用 Pencil Code 完成；DOI:10.5281/zenodo.3961647。

作者 ORCID

K. A. Mizerski，https://orcid.org/0000-0003-0106-675X N. Yokoi，https://orcid.org/0000-0002-5242-7634 A. Brandenburg，https://orcid.org/0000-0002-7304-021X

附录 A. 速度场和磁场自相互作用与交叉相互作用响应函数的双尺度直接相互作用近似（TSDIA）概要。

双尺度直接相互作用近似（TSDIA）是将用于强非线性均匀各向同性

湍流的直接相互作用近似（DIA）与针对大尺度非均匀性的导数展开多尺度分析相结合而成。TSDIA 为研究具有大尺度非均匀性的强非线性湍流提供了有力工具。将 TSDIA 框架应用于磁流体湍流时，通常采用 Elsässer 变量表述。在这种表述中，速度方程和磁场方程的对称性得到了充分利用，从而降低了处理原始磁流体力学方程的复杂度。已有文献讨论了 TSDIA 中 Elsässer 变量表述与通常的速度—磁场表述之间的对应关系（Yoshizawa 1998、Hamba & Sato 2008、Yokoi 2013）。本文概述了采用速度和磁场变量的 TSDIA 表述，并特别介绍磁流体湍流中的自相互作用响应函数和交叉相互作用响应函数。关于 TSDIA 背景下 DIA 的概述，读者可参阅 Yoshizawa (1998) 和 Yokoi (2020) 等教材。

波数空间方程 我们引入关于快空间变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的傅里叶表示如下

$$f'(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\tau,T)=\int d\mathbf{k} f(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T)\exp[-i\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\langle\mathbf{U}\rangle\tau)], \tag{A 1}$$

这里，快变量的傅里叶变换是在随局部平均速度 $\langle\mathbf{U}\rangle$ 共动的参考系中进行的。下文为简化记号，省略涨落场 $f(\boldsymbol{\xi},\mathbf{X};\tau,T)$ 中慢变量的自变量，仅记为 $f(\boldsymbol{\xi};\tau)$。

波数空间中以速度和磁场为变量的双尺度微分方程组写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^i(\mathbf{k};\tau)}{\partial\tau}+\nu k^2u^i(\mathbf{k};\tau)+ik^j\langle B\rangle^jb^i(\mathbf{k};\tau)\\
&-iM^{ij\ell}(\mathbf{k})\iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\times\left[u^j(\mathbf{p};\tau)u^\ell(\mathbf{q};\tau)-b^j(\mathbf{p};\tau)b^\ell(\mathbf{q};\tau)\right]\\
&\qquad=\delta\left[-D^{ij}(\mathbf{k})\frac{\widehat{D}u^j(\mathbf{k};\tau)}{DT_{\mathrm{I}}}-D^{ij}(\mathbf{k})u^m(\mathbf{k};\tau)\left(\frac{\partial\langle U\rangle^j}{\partial X^m}+\epsilon^{mj\ell}\Omega_0^\ell\right)\right.\\
&\qquad\quad\left.+\langle B\rangle^j\frac{\partial b^i(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^j}+D^{ij}(\mathbf{k})b^m(\mathbf{k};\tau)\frac{\partial\langle B\rangle^j}{\partial X^m}\right],
\end{aligned} \tag{A 2}$$

$$-ik^ju^j(\mathbf{k};\tau)+\delta\frac{\partial u^j(\mathbf{k};\tau)}{\partial X^j}=0, \tag{A 3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial b^i(\mathbf{k};\tau)}{\partial\tau}+\eta k^2b^i(\mathbf{k};\tau)+ik^j\langle B\rangle^ju^i(\mathbf{k};\tau)\\
&+iN^{ij\ell}(\mathbf{k})\iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\times\left[b^j(\mathbf{p};\tau)u^\ell(\mathbf{q};\tau)-u^j(\mathbf{p};\tau)b^\ell(\mathbf{q};\tau)\right]\\
&\qquad=\delta\left[-D^{ij}(\mathbf{k})\frac{\widehat{D}b^j(\mathbf{k};\tau)}{DT_{\mathrm{I}}}+D^{ij}(\mathbf{k})b^m(\mathbf{k};\tau)\left(\frac{\partial\langle U\rangle^j}{\partial X^m}+\epsilon^{mj\ell}\Omega_0^\ell\right)\right.\\
&\qquad\quad\left.+\langle B\rangle^j\frac{\partial u^i(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}}^j}-D^{ij}(\mathbf{k})u^m(\mathbf{k};\tau)\frac{\partial\langle B\rangle^j}{\partial X^m}\right],
\end{aligned} \tag{A 4}$$

$$-ik^jb^j(\mathbf{k};\tau)+\delta\frac{\partial b^j(\mathbf{k};\tau)}{\partial X^j}=0, \tag{A 5}$$

其中

$$\left(\nabla_{\mathbf{X}_\mathrm{I}}, \frac{D}{DT_\mathrm{I}}\right) = \exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}\tau\right)\left(\nabla_{\mathbf{X}}, \frac{D}{DT}\right)\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}\tau\right) \tag{A 6}$$

是差异。算子。这里在（A 2）和（A 4）），

$$M^{ijk}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(k^j D^{ik}(\mathbf{k}) + k^k D^{ij}(\mathbf{k})\right), \tag{A 7}$$

中使用无散投影算子

$$D^{ij}(\mathbf{k}) = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}, \tag{A 8}$$

and

$$N^{ijk}(\mathbf{k}) = k^j\delta^{ik} - k^k\delta^{ij}. \tag{A 9}$$

算子 M 和 N 是点顶点，表示非线性模态耦合中的波数守恒，其中 δ（$\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}$）。

在（A2）和（A 4）中，为使物质导数具有客观性（相对于旋转保持不变），我们采用共旋导数

$$\frac{\widehat{D}u'^i}{DT} = \frac{\partial u'^i}{\partial T} + \langle U\rangle^j\frac{\partial u'^i}{\partial X^j} + \epsilon^{jik}\Omega_0^k u'^j \tag{A 10}$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}/\delta \tag{A 11}$$

代替拉格朗日导数或对流导数

$$\frac{Du'^i}{DT} = \frac{\partial u'^i}{\partial t} + \langle U\rangle^j\frac{\partial u'^i}{\partial x^j}, \tag{A 12}$$

其相对于旋转不是客观的。

尺度参数展开 我们针对尺度参数 δ展开场 $f(\mathbf{k};\tau)$，并进一步按照外场（在本文中为平均磁场）对每个场展开如下

$$\begin{aligned} f^i(\mathbf{k};\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}\delta^n f_n^i(\mathbf{k};\tau) - \sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n+1} i\frac{k^i}{k^2}\frac{\partial}{\partial X_\mathrm{I}^j} f_n^j(\mathbf{k};\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\delta^n f_{nm}^i(\mathbf{k};\tau) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\delta^{n+1} i\frac{k^i}{k^2}\frac{\partial}{\partial X_\mathrm{I}^j} f_{nm}^j(\mathbf{k};\tau). \end{aligned} \tag{A 13}$$

在这一双尺度公式中，非均匀性和各向异性通过高阶场中的尺度参数 δ 以及外部参数 $\langle$ B$\rangle$ 引入。最低阶场 f_{00} 场对应于均匀各向同性湍流。

利用展开式（A13），我们将各阶方程写成矩阵形式。采用谱积分的简写形式

$$\int_\Delta = \iint d\mathbf{p}d\mathbf{q}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{A 14}$$

$f_{00}(\mathbf{k};\,\tau)$ 方程表示为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{00}(\mathbf{k};\tau) \\ b^i_{00}(\mathbf{k};\tau) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\ell_{00}(\mathbf{q};\tau) \\ b^\ell_{00}(\mathbf{q};\tau) \end{pmatrix}, \tag{A 15}$$

$f_{01}(\mathbf{k};\,\tau)$ 方程如下

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{01}(\mathbf{k};\tau) \\ b^i_{01}(\mathbf{k};\tau) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & 2M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\ell_{01}(\mathbf{q};\tau) \\ b^\ell_{01}(\mathbf{q};\tau) \end{pmatrix} = -ik^j\langle B\rangle^j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{00}(\mathbf{k};\tau) \\ b^i_{00}(\mathbf{k};\tau) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F^i_{01u} \\ F^i_{01b} \end{pmatrix}, \tag{A 16}$$

$f_{10}(\mathbf{k};\,\tau)$ 方程为

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{10}(\mathbf{k};\tau) \\ b^i_{10}(\mathbf{k};\tau) \end{pmatrix} \\ &+i \begin{pmatrix} -2M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & 2M^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \\ N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta b^j_{00}(\mathbf{p};\tau) & -N^{ij\ell}(\mathbf{k})\displaystyle\int_\Delta u^j_{00}(\mathbf{p};\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\ell_{10}(\mathbf{q};\tau) \\ b^\ell_{10}(\mathbf{q};\tau) \end{pmatrix} \\ &= \langle B\rangle^j \frac{\partial}{\partial X^j_{\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i_{00}(\mathbf{k}) \\ b^i_{00}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} - D^{ij}(\mathbf{k}) \frac{\widehat{D}}{DT_{\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^j_{00}(\mathbf{k}) \\ b^j_{00}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -D^{ij}(\mathbf{k}) \left(\dfrac{\partial\langle U\rangle^j}{\partial X^\ell} + \epsilon^{\ell jn}\Omega^n_0 \right) & D^{ij}(\mathbf{k}) \dfrac{\partial\langle B\rangle^j}{\partial X^\ell} \\ -D^{ij}(\mathbf{k}) \dfrac{\partial\langle B\rangle^j}{\partial X^\ell} & D^{ij}(\mathbf{k}) \left(\dfrac{\partial\langle U\rangle^j}{\partial X^\ell} + \epsilon^{\ell jn}\Omega^n_0 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\ell_{00}(\mathbf{k};\tau) \\ b^\ell_{00}(\mathbf{k};\tau) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} F^i_{10u} \\ F^i_{10b} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{A 17}$$

其中，F_{01u}、F_{01b}、F_{10u} 和 F_{10b} 分别表示式 (A 16) 和 (A 17) 右端第二项（r.h.s.）的各个分量。它们可分别视为 $f_{01}(\mathbf{k};\,\tau)$ 和 $f_{10}(\mathbf{k};\,\tau)$ 演化方程的强迫项。

格林函数简介 为求解这些微分方程，我们引入与（A15）相关的格林函数。我们考察湍流对无穷小扰动的响应。为反映

磁流体力学方程和场展开（A 13）的结构，格林函数线性化微分方程的左端与（A 16）和（A 17）的左端形式相同，也与作用于 $f_{01}(\mathbf{k};\tau)$ 和 $f_{10}(\mathbf{k};\tau)$ 场的微分算子形式相同。为处理速度与磁场之间的相互作用，我们考虑四个格林函数： G_{uu} 表示速度场 $\mathbf{u}$ 对速度扰动 $\mathbf{u}$ 的响应； G_{ub} 表示 $\mathbf{u}$ 对磁场扰动 $\mathbf{b}$ 的响应；G_{bu} 表示 $\mathbf{b}$ 对速度扰动 $\mathbf{u}$ 的响应； G_{bb} 表示磁场 $\mathbf{b}$ 对磁场扰动 $\mathbf{b}$ 的响应。根据（A 16）和（A 17）的左端，我们构建表示对无穷小强迫响应的方程组。因此，这四个格林函数应由其演化方程定义如下:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\nu k^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\tau}+\eta k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{bu} \\ G^{ij}_{ub} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2M^{ikm}\int_\Delta u^k_{00} & 2M^{ikm}\int_\Delta b^k_{00} \\ N^{ikm}\int_\Delta b^k_{00} & -N^{ikm}\int_\Delta u^k_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{mj}_{uu} & G^{mj}_{bu} \\ G^{mj}_{ub} & G^{mj}_{bb} \end{pmatrix} = \delta^{ij}\delta(\tau-\tau') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A 18}$$

鉴于（A16）和（A 17）右端是力项，我们借助格林函数形式上求解f_{01} 和 f_{10} 场。 f_{01} 场可表示为

$$\begin{pmatrix} u^i_{01} \\ b^i_{01} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{ub} \\ G^{ij}_{bu} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j_{01u} \\ F^j_{01b} \end{pmatrix}. \tag{A 19}$$

注意，$\mathbf{u}_{01}$ 和 $\mathbf{b}_{01}$ 分别表示与平均磁场 $\langle\mathbf{B}\rangle$耦合的 $\mathbf{b}_{00}$ 和 $\mathbf{u}_{00}$ 。因此，以外积的形式将 $\mathbf{u}_{01}$ 和 $\mathbf{b}_{01}$ 分别与 $\mathbf{b}_{00}$ 和 $\mathbf{u}_{00}$ 相乘，不会对电动势有贡献。

另一方面， f_{10} 场可表示为

$$\begin{pmatrix} u^i_{10} \\ b^i_{10} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \begin{pmatrix} G^{ij}_{uu} & G^{ij}_{ub} \\ G^{ij}_{bu} & G^{ij}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j_{10u} \\ F^j_{10b} \end{pmatrix}. \tag{A 20}$$

基本场的统计假设 我们假设基本场（或最低阶场）是均匀且各向同性的。

$$\frac{\left\langle \vartheta^i_{00}(\mathbf{k};\tau)\chi^j_{00}(\mathbf{k}';\tau')\right\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} = D^{ij}(\mathbf{k})Q_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\tau,\tau') + \frac{i}{2}\frac{k^\ell}{k^2}\epsilon^{ij\ell}H_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\tau,\tau'), \tag{A 21}$$

其中， $\boldsymbol{\vartheta}_{00}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{00}$ 分别表示 $\mathbf{u}_{00}$ 和 $\mathbf{b}_{00}$, 中的一个，而指标 ϑ 和 χ 分别取 u和 b中的一个。格林函数写为

$$\langle G^{ij}_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\tau,\tau')\rangle = D^{ij}(\mathbf{k})G_{\vartheta\chi}(\mathbf{k};\tau,\tau'). \tag{A 22}$$

谱函数 Q_{uu}、 Q_{bb}、 Q_{ub}、 H_{uu}、 H_{bb}、 H_{ub} 和 H_{bu} 与基本场或最低阶场的湍流统计量（湍动能、磁能、交叉螺度、动能螺度、电流螺度、速度与磁场之间的扭转相关性）之间的关系为

$$\int d\mathbf{k}\; Q_{uu}(k;\tau,\tau) = \langle {\mathbf{u}'_{00}}^2\rangle/2, \tag{A 23}$$

$$\int d\mathbf{k}\; Q_{bb}(k;\tau,\tau) = \langle {\mathbf{b}'_{00}}^2\rangle/2, \tag{A 24}$$

$$\int d\mathbf{k}\; Q_{ub}(k;\tau,\tau) = \langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{b}'_{00}\rangle, \tag{A 25}$$

$$\int d\mathbf{k}\; H_{uu}(k;\tau,\tau) = \langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{00}\rangle, \tag{A 26}$$

$$\int d\mathbf{k}\; H_{bb}(k;\tau,\tau) = \langle \mathbf{b}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle, \tag{A 27}$$

$$\int d\mathbf{k}\; H_{ub}(k;\tau,\tau) = \langle \mathbf{u}'_{00}\cdot\mathbf{j}'_{00}\rangle, \tag{A 28}$$

$$\int d\mathbf{k}\; H_{bu}(k;\tau,\tau) = \langle \mathbf{b}'_{00}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{00}\rangle. \tag{A 29}$$

电动势（EMF）的计算 湍流电动势（EMF）可用速度和磁场的波数表示形式表示为

$$E^i_{\rm M} \equiv \epsilon^{ijk}\langle u'^j b'^k\rangle = \epsilon^{ijk}\int d\mathbf{k}\;\langle u^j(\mathbf{k};\tau)b^k(\mathbf{k}';\tau)\rangle/\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{A 30}$$

利用（A19）和（A20）的结果，我们计算速度–磁场相关函数，计算至 $f_{01}g_{00}$ 阶和 $f_{10}g_{00}$ 阶，得到

$$\langle u^j b^k\rangle = \langle u^j_{00}b^k_{00}\rangle + \langle u^j_{01}b^k_{00}\rangle + \langle u^j_{00}b^k_{01}\rangle + \delta\langle u^j_{10}b^k_{00}\rangle + \delta\langle u^j_{00}b^k_{10}\rangle + \cdots. \tag{A 31}$$

在直接相互作用近似（DIA）形式中，最低阶谱函数 Q_{uu}、Q_{bb}、Q_{ub}、H_{uu}、H_{bb}、H_{ub} 和 H_{bu}，以及最低阶格林~函数 G_{uu}、G_{bb}、G_{ub} 和 G_{bu}，分别由其精确对应量 Q_{uu}、~Q_{bb}、$\cdots$ 和 G_{uu}、G_{bb}、$\cdots$ 所替代。在对传播子（谱函数和响应函数）执行这一重整化过程后，可以计算出重要的湍流相关函数。为简便起见，以下将表示精确~传播子的波浪号省略，例如 $Q_{uu}\to Q_{uu}$、$G_{uu}\to G_{uu}$ 等。

下面给出湍流电动势的最终结果：

$$\langle \mathbf{u}'\times\mathbf{b}'\rangle = \alpha\langle\mathbf{B}\rangle - (\beta+\zeta)\nabla\times\langle\mathbf{B}\rangle - (\nabla\zeta)\times\langle\mathbf{B}\rangle + \gamma\left(\langle\mathbf{W}\rangle + 2\boldsymbol{\Omega}\right), \tag{A 32}$$

其中，输运系数 α、β、ζ 和 γ 表示为

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[-I\{G_{bb},H_{uu}\} + I\{G_{uu},H_{bb}\} - I\{G_{bu},H_{ub}\} + I\{G_{ub},H_{bu}\}\right], \tag{A 33}$$

$$\beta = \frac{1}{3}\left[I\{G_{bb},Q_{uu}\} + I\{G_{uu},Q_{bb}\} - I\{G_{bu},Q_{ub}\} - I\{G_{ub},Q_{bu}\}\right], \tag{A 34}$$

$$\zeta = \frac{1}{3}\left[I\{G_{bb},Q_{uu}\} - I\{G_{uu},Q_{bb}\} + I\{G_{bu},Q_{ub}\} - I\{G_{ub},Q_{bu}\}\right], \tag{A 35}$$

$$\gamma = \frac{1}{3}\left[I\{G_{bb},Q_{ub}\} + I\{G_{uu},Q_{bu}\} - I\{G_{bu},Q_{uu}\} - I\{G_{ub},Q_{bb}\}\right] \tag{A 36}$$

采用积分的简写形式

$$I\{A,B\} = \int d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 A(k;\tau,\tau_1)B(k;\tau,\tau_1). \tag{A 37}$$

附录B. 一阶平滑近似下的交叉螺度与 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$

在科里奥利力作用下，并采用“一阶平滑近似”（FOSA），线性化方程在傅里叶空间中可写为

$$\left(-\mathrm{i}\omega + \nu k^2\right) \hat{u}_i(\mathbf{q}) + 2\Omega\epsilon_{i3j}\hat{u}_j(\mathbf{q}) = \hat{f}_i(\mathbf{q}) + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\langle\mathbf{B}\rangle\, \hat{b}_i(\mathbf{q}), \tag{B 1}$$

$$\left(-\mathrm{i}\omega + \eta k^2\right) \hat{b}_i(\mathbf{q}) = \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\langle\mathbf{B}\rangle\, \hat{u}_i(\mathbf{q}), \tag{B 2}$$

其中，假设外力为均值为零的高斯分布，且均匀、定常、各向同性

$$\left\langle \hat{f}_i(\mathbf{k},\omega)\hat{f}_j(\mathbf{k}',\omega') \right\rangle = \left[\frac{D_0}{k^3}P_{ij}(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\frac{D_1}{k^5}\epsilon_{ijk}k_k\right]\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega'), \tag{B 3}$$

且 $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j/k^2$ 是垂直于波矢 $\mathbf{k}$ 的平面上的投影算子。引入

$$\gamma_\nu = -\mathrm{i}\omega + \nu k^2, \qquad \gamma_\eta = -\mathrm{i}\omega + \eta k^2, \tag{B 4}$$

并考虑由下式定义的弱种子场极限

$$\langle\mathbf{B}\rangle^2 \ll \langle\mathbf{U}\rangle^2, \quad \text{hence also} \quad \left\langle \mathbf{b}'^2 \right\rangle \ll \left\langle \mathbf{u}'^2 \right\rangle, \tag{B 5}$$

方程可化简为

$$\hat{u}_i(\mathbf{q}) \approx \mathfrak{G}_{ij}\hat{f}_j^{>}(\mathbf{q}), \tag{B 6}$$

$$\hat{b}_i(\mathbf{q}) \approx \mathrm{i}\frac{\mathbf{k}\cdot\langle\mathbf{B}\rangle}{\gamma_\eta}\mathfrak{G}_{ij}\hat{f}_j(\mathbf{q}), \tag{B 7}$$

其中

$$\mathfrak{G}_{ij} = \frac{1}{\gamma_\nu^2 + 4\Omega^2\frac{k_z^2}{k^2}}\left[\gamma_\nu\delta_{ij} - 2\Omega\epsilon_{i3j} + 2\Omega\frac{k_i k_m}{k^2}\epsilon_{jm3}\right]. \tag{B 8}$$

交叉螺度的形式为

$$\begin{aligned}
\langle h_{ub}\rangle &= \langle u_i'(\mathbf{x},t)b_i'(\mathbf{x},t)\rangle \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4q \int \mathrm{d}^4q' \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - (\omega+\omega')t]} \frac{\mathbf{k}'\cdot\langle\mathbf{B}\rangle}{\gamma_\eta(\mathbf{q}')}\mathfrak{G}_{ij}(\mathbf{q})\,\mathfrak{G}_{ik}(\mathbf{q}')\left\langle \hat{f}_j(\mathbf{q})\hat{f}_k(\mathbf{q}')\right\rangle \\
&= -\mathrm{i}\langle B\rangle_m \int \mathrm{d}^4q \frac{k_m}{\gamma_\eta(-\mathbf{q})}\mathfrak{G}_{ij}(\mathbf{q})\,\mathfrak{G}_{ik}(-\mathbf{q})\left[\frac{D_0}{k^3}P_{jk}(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\frac{D_1}{k^5}\epsilon_{jks}k_s\right] \\
&= -8\Omega\langle B\rangle_m \int \frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}X \frac{\omega^2 D_1}{(\omega^2+\eta^2k^4)\,\mathcal{F}(\omega,X)}\frac{k_z k_m}{k^2} \\
&= -16\pi\left(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)\int\frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-1}^{1}\mathrm{d}X\frac{\omega^2X^2D_1}{(\omega^2+\eta^2k^4)\,\mathcal{F}(\omega,X)} \\
&= -16\pi D_1\mathcal{I}(\nu,\eta,\Omega,k_\ell)\left(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}\right),
\end{aligned} \tag{B 9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\omega,X) &= \left(\omega^2+\nu^2k^4\right)^2 - 8\Omega^2X^2\left(\omega^2-\nu^2k^4\right) + 16\Omega^4X^4 \\
&= \left(\omega^2-4\Omega^2X^2\right)^2 + 2\omega^2\nu^2k^4 + 8\nu^2k^4\Omega^2X^2 + \nu^4k^8 > 0,
\end{aligned} \tag{B 10}$$

and

$$D_1 \sim \langle\mathbf{f}\cdot\nabla\times\mathbf{f}\rangle, \qquad \mathcal{I}(\nu,\eta,\Omega,k_\ell) > 0. \tag{B 11}$$

另一方面，对于标量 $\langle s_{uj}\rangle = \langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$，这种方法得出 s

$$
\begin{aligned}
\langle s_{uj}\rangle &= \langle u_i'(\mathbf{x},t) j_i'(\mathbf{x},t)\rangle \\
&= -\epsilon_{irt}\langle B\rangle_m \int \mathrm{d}^4 q \int \mathrm{d}^4 q' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-(\omega+\omega')t\right]} \frac{k_r' k_m'}{\gamma_\eta(\mathbf{q}')} \mathfrak{G}_{ij}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{tk}(\mathbf{q}') \left\langle \hat{f}_j(\mathbf{q})\hat{f}_k(\mathbf{q}')\right\rangle \\
&= -\epsilon_{irt}\langle B\rangle_m \int \mathrm{d}^4 q \frac{k_r k_m}{\gamma_\eta(-\mathbf{q})} \mathfrak{G}_{ij}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{ik}(-\mathbf{q}) \left[\frac{D_0}{k^3} P_{jk}(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\frac{D_1}{k^5}\epsilon_{jks}k_s\right] \\
&= 8\Omega\langle B\rangle_m \int k\mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1}\mathrm{d}X \frac{\omega^2 D_0}{(\omega^2+\eta^2 k^4)\mathcal{F}(\omega,X)} \frac{k_z k_m}{k^2} \\
&= 16\pi(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}) \int k\mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega \int_{-1}^{1}\mathrm{d}X \frac{\omega^2 X^2 D_0}{(\omega^2+\eta^2 k^4)\mathcal{F}(\omega,X)} \\
&= 16\pi D_0 \widetilde{\mathcal{I}}(\nu,\eta,\Omega,k_\ell)(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\boldsymbol{\Omega}),
\end{aligned}
\tag{B 12}
$$

其中

$$
D_0 \sim \left\langle \mathbf{f}^2\right\rangle, \qquad \widetilde{\mathcal{I}}(\nu,\eta,\Omega,k_\ell) > 0. \tag{B 13}
$$

在上述推导中，我们使用了

$$
\int \frac{k_j}{k} f\left(\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\mathring{\Omega} = 0, \qquad \int \frac{k_i k_j k_k}{k^3} f\left(\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\mathring{\Omega} = 0, \tag{B 14}
$$

$$
\int \frac{k_j k_n}{k^2} f\left(\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\mathring{\Omega} = \pi\int_{-1}^{1} f(X^2)\left\{\delta_{jn}\left(1-X^2\right) + \delta_{j3}\delta_{n3}\left(3X^2-1\right)\right\}\mathrm{d}X. \tag{B 15}
$$

$^\circ$其中，Ω 表示立体角，并采用了球坐标（k、θ、φ）（通过代换 $X=\cos\theta$）。此外，我们也可以用类似的方法计算动能螺度和湍流能量

$$
\begin{aligned}
\langle h_{kin}\rangle &= \langle u_i(\mathbf{x},t) w_i(\mathbf{x},t)\rangle \\
&= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^4 q \int \mathrm{d}^4 q' k_j' \mathfrak{G}_{in}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{km}(\mathbf{q}') \left\langle \hat{f}_n(\mathbf{q})\hat{f}_m(\mathbf{q}')\right\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-(\omega+\omega')t\right]} \\
&= -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^4 q k_j \mathfrak{G}_{in}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{km}(-\mathbf{q}) \left[\frac{D_0}{k^3}P_{nm}(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\frac{D_1}{k^5}\epsilon_{nmp}k_p\right] \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}X \frac{2D_1\left(\omega^2+\nu^2k^4+4\Omega^2X^2\right)}{\left(\omega^2+\nu^2k^4\right)^2 - 8\Omega^2X^2\left(\omega^2-\nu^2k^4\right)+16\Omega^4X^4} \\
&= -4\pi D_1 \mathcal{I}_{u^2}(\nu,\Omega,k_\ell)
\end{aligned}
\tag{B 16}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{u}'^2\right\rangle &= \langle u_i(\mathbf{x},t) u_i(\mathbf{x},t)\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^4 q \int \mathrm{d}^4 q' \mathfrak{G}_{in}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{im}(\mathbf{q}') \left\langle \hat{f}_n(\mathbf{q})\hat{f}_m(\mathbf{q}')\right\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-(\omega+\omega')t\right]} \\
&= \int \mathrm{d}^4 q \mathfrak{G}_{in}(\mathbf{q})\mathfrak{G}_{im}(-\mathbf{q}) \left[\frac{D_0}{k^3}P_{nm}(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\frac{D_1}{k^5}\epsilon_{nmp}k_p\right] \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}X \frac{D_0\left(\omega^2+\nu^2k^4+4\Omega^2X^2\right)}{\left(\omega^2+\nu^2k^4\right)^2 - 8\Omega^2X^2\left(\omega^2-\nu^2k^4\right)+16\Omega^4X^4} \\
&= 4\pi D_0 \mathcal{I}_{u^2}(\nu,\Omega,k_\ell).
\end{aligned}
\tag{B 17}
$$

注意，在弱种子场极限（B5）下，湍流能量简化为 $\langle \mathbf{u}'^2\rangle+\langle \mathbf{b}'^2\rangle \approx\langle \mathbf{u}'^2\rangle$。现在，我们可以利用上述结果来证明

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle &= \left(\frac{\mathcal{I}_{uj}\left(\nu,\eta,\Omega,k_\ell\right)}{\mathcal{I}_{ub}\left(\nu,\eta,\Omega,k_\ell\right)}\frac{D_0^2}{D_1^2}\right)\frac{\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle}{\langle \mathbf{u}'^2\rangle}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{w}'\rangle \\ &\sim \frac{\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle}{\langle \mathbf{u}'^2\rangle}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{w}'\rangle \end{aligned} \tag{B 18}$$

附录 C. $\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle$ 和 $\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$的演化方程

利用这些演化方程

$$\frac{D\mathbf{u}'}{Dt} = -\nabla\Pi' - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}' - \left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{U}\rangle + \left(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\nabla\right)\mathbf{b}' + \left(\mathbf{b}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{B}\rangle + \nu\nabla^2\mathbf{u}' + \nabla\cdot\left(\mathbf{b}'\mathbf{b}'\right) + \nabla\cdot\left(\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle - \langle\mathbf{b}'\mathbf{b}'\rangle\right), \tag{C 1}$$

$$\frac{D\mathbf{b}'}{Dt} = \left(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot\nabla\right)\mathbf{u}' - \left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{B}\rangle + \left(\mathbf{b}'\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{U}\rangle + \eta\nabla^2\mathbf{b}' + \left(\mathbf{b}'\cdot\nabla\right)\mathbf{u}' - \nabla\times\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{C 2}$$

where

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\langle\mathbf{U}\rangle + \mathbf{u}'\right)\cdot\nabla, \tag{C 3}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{b}'\rangle =& -\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\left(\langle\mathbf{W}\rangle + 2\boldsymbol{\Omega}\right) - \left\langle u_i'u_j' - b_i'b_j'\right\rangle\partial_j\langle B\rangle_i \\ &+ \nabla\cdot\left[\left\langle\left(-\Pi' + \frac{\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2}{2}\right)\mathbf{b}'\right\rangle + \left\langle\frac{\mathbf{u}'^2+\mathbf{b}'^2}{2}\right\rangle\langle\mathbf{B}\rangle\right] \\ &- \mu_0\left(\nu+\eta\right)\langle\mathbf{w}'\cdot\mathbf{j}'\rangle,\end{aligned} \tag{C 4}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{j}'\rangle =& -\langle\mathbf{u}'\times\mathbf{j}'\rangle\cdot\left(\langle\mathbf{W}\rangle + 2\boldsymbol{\Omega}\right) - \left\langle w_i'u_j' - j_i'b_j'\right\rangle\partial_j\langle B\rangle_i - \partial_j\langle U\rangle_m\langle\epsilon_{ijk}u_i'\partial_m b_k'\rangle \\ &+ \langle\left[\left(\langle\mathbf{B}\rangle + \mathbf{b}'\right)\cdot\nabla\right]\mathbf{b}'\cdot\mathbf{j}' + \left[\left(\langle\mathbf{B}\rangle + \mathbf{b}'\right)\cdot\nabla\right]\mathbf{u}'\cdot\mathbf{w}' - u_i'\epsilon_{ijk}\partial_j u_m'\partial_m b_k'\rangle \\ &- \nabla\cdot\langle\Pi'\mathbf{j}'\rangle - \left(\nu-\eta\right)\left\langle\mathbf{w}'\cdot\nabla^2\mathbf{b}'\right\rangle,\end{aligned} \tag{C 5}$$

其中，在最后一个方程中，除无滑移边界条件外，我们还假设边界处的螺旋量 $\langle \mathbf{w}'\cdot\mathbf{j}'\rangle$ 为零。

附录 D. 可压缩情形中使用的基本方程

在数值模拟中，我们不求解方程组 (2.1*a*–c)，而是求解以下方程组，以描述声速恒定为 c_s 的可压缩等温气体，其中未知量为 U、 ρ 和磁矢势 A:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathbf{U}\cdot\nabla\right)\mathbf{U} = -c_\mathrm{s}^2\nabla\ln\rho - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{U} + \frac{1}{\rho}\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nu\mathbf{Q} + \mathbf{g} + \mathbf{f}, \tag{D 1a}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{U}\right), \tag{D 1b}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{U}\times\mathbf{B} - \eta\mu_0\mathbf{J}, \tag{D 2}$$

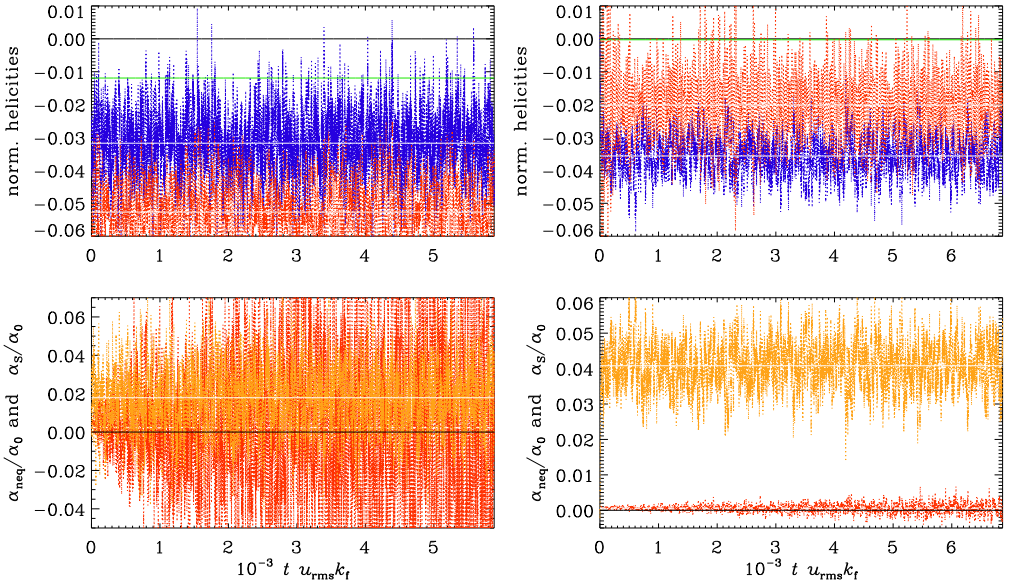

图2. 与图1相同，但对应于运行B和E，且磁场更强：$B = 0.1\,c_s\sqrt{\mu_0\bar{\rho}}$，并采用两个重力值 $g = 1\,c_s^2k_1$和 $g = 0.5\,c_s^2k_1$。

其中

$$\mathbf{Q} = -\nabla^2\mathbf{U} - \frac{1}{3}\nabla\nabla\cdot\mathbf{U} - \mathbf{S}\nabla\ln\rho, \tag{D 3}$$

$$\mu_0\mathbf{J} = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}, \tag{D 4}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \nabla\times\mathbf{A}, \tag{D 5}$$

and

$$\mathsf{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U} \tag{D 6}$$

是无迹应变率张量的分量，f 是由平面非偏振波组成的随机强迫函数，其典型波数为 k_f，振幅满足 $u_{rms}/c_s \approx 0.1$；参见表1。这里，$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ 是角速度，g $= (0, 0, -g)$ 是重力，$\mathsf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ 是施加的磁场，η是磁扩散率，ν 是运动黏度，其取值满足 $u_{rms}/\nu k_1 \approx 1000$。因此，采用 $N^3 = 256^3$个网格点的分辨率就足够了。由于我们选择了 $k_f/k_1 = 30$，雷诺数 $\mathrm{Re} \equiv u_{rms}/\nu k_f \approx 30$。磁普朗特数则与 Jabbari等（2014）一样取值为 $\mathrm{Pr}_M \equiv \nu/\eta = 0.5$，因此磁雷诺数为 $\mathrm{Re}_M \equiv u_{rms}/\eta k_f \approx 15$。平衡分层由 ln($\rho/\rho_0$) $= -z/H_\rho$给出，其中 $H_\rho = c_s^2/g$ 是密度标高。

附录 E：B–E 组运行结果

在图2中，我们给出了磁场较强时运行B和运行E的结果：$B = 0.1\,c_s\sqrt{\mu_0\bar{\rho}}$，以及重力取 $g = 1\,c_s^2k_1$和 $g = 0.5\,c_s^2k_1$两个值时的结果。最后，在图3中，我们给出了磁场较弱时运行C和运行D的结果：$B = 0.01\,c_s\sqrt{\mu_0\bar{\rho}}$，以及重力取 $g = 0.5\,c_s^2k_1$和 $g = 2\,c_s^2k_1$两个值时的结果。

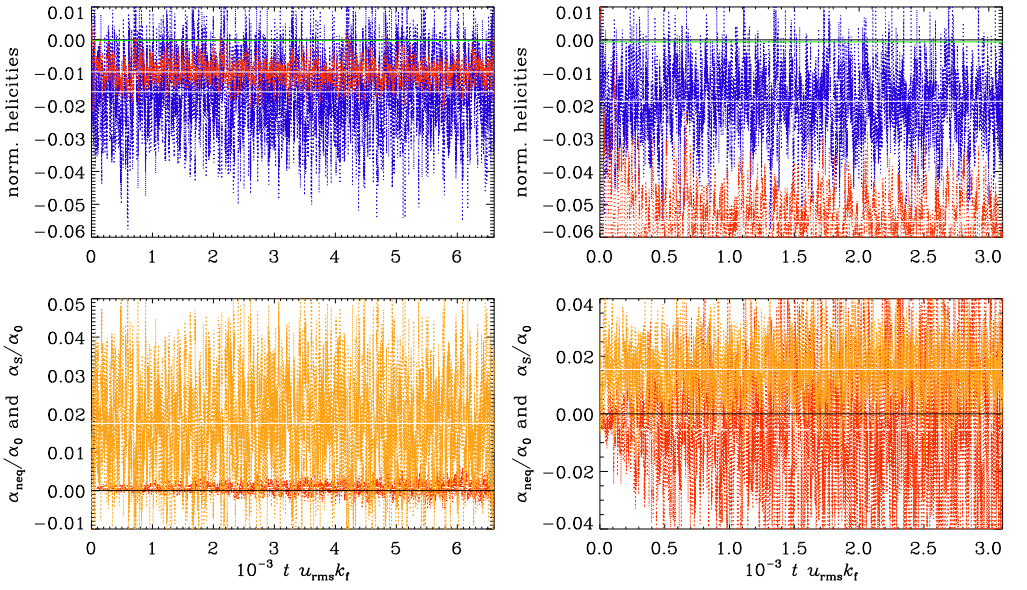

图3。与图1相同，但对应于磁场较弱的运行C和D $B = 0.01\,c_{\rm s}\sqrt{\mu_0\bar{\rho}}$，以及两个重力值：$g = 0.5\,c_{\rm s}^2 k_1$ 和 $g = 2\,c_{\rm s}^2 k_1$。

参考文献

Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1991a，弱磁化盘中的强局部剪切不稳定性。I——线性分析，天体物理学杂志，**376**，214–222。Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1991b，弱磁化盘中的强局部剪切不稳定性。II——非线性演化，天体物理学杂志，**376**，223–233。Brandenburg, A. & Subramanian, K. 2005，天体物理磁场与非线性发电机理论，《物理报告》，**417**，1–209。Dormy, E. & Soward, A. M. 2007，自然发电机的数学方面，Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group，博卡拉顿。Gibney, E. 2022，核聚变反应堆打破能量纪录，《自然》，**602**，371。Hamba, F. & Sato, H. 2008，平均场发电机理论中的湍流输运系数与剩余能量，《等离子体物理学》**15**，022302。Hamba, F. & Tsuchiya, M. 2010，磁流体湍流槽道流中的交叉螺度发电机效应，《等离子体物理学》，**17**，012301。Jabbari, S., Brandenburg, A., Losada, I. R., Kleeorin, N., & Rogachevskii, I. 2014，发电机产生的磁场形成的磁通集中，《天文学与天体物理学》，**568**，A112。Krause, F. & R¨adler, K.-H. 1980，平均场磁流体力学与发电机理论，Pergamon Press。Li, J., Ni, M. & Lu, Y. 2019，托卡马克发展的前沿与展望，《自然科学评论》，**6**(3)，382–383。Mizerski, K. A., Bajer, K. & Moffatt, H. K. 2012，椭圆不稳定性产生的平均电动势，《流体力学杂志.**707**，111–128。Mizerski, K. A. 2018a，无电阻等离子体中由Lehnert波驱动的大尺度磁流体发电机，*SIAM*应用数学杂志（*SIAP*），**78**，1402–1421。Mizerski, K. A. 2018b，高导电等离子体中由受迫拍波驱动的大尺度发电机作用，等离子体物理学杂志.**84**，735840405。Mizerski, K. A. 2020，湍流流体磁力发电机的重整化群分析：非定常性的影响，《天体物理学杂志增刊》，**251**:21 (29页)。Mizerski, K. A. 2021，磁流体湍流的非定常性在理解地磁偏移中的可能作用，《*Symmetry*》，**13**，1881。

Mizerski, K. A. 2022, 强磁化、高温、低密度等离子体中的非定常湍流所引发的发电机效应，《天文学与天体物理学》，**660**，A110。Moffatt, H. K. & Dormy, E. 2019，《自激流体发电机》，剑桥大学出版社，剑桥。Pencil Code 合作组：A. Brandenburg, A. Johansen, P. A. Bourdin, W. Dobler, W. Lyra, M. Rheinhardt, S. Bingert, N. E. L. Haugen, A. Mee, F. Gent, N. Babkovskaia, C.-C. Yang, T. Heinemann, B. Dintrans, D. Mitra, S. Candelaresi, J. Warnecke, P. J. Käpylä, A. Schreiber, P. Chatterjee, M. J. Käpylä, X.-Y. Li, J. Krüger, J. R. Aarnes, G. R. Sarson, J. S. Oishi, J. Schober, R. Plasson, C. Sandin, E. Karchniwy, L. F. S. Rodrigues, A. Hubbard, G. Guerrero, A. Snodin, I. R. Losada, J. Pekkilä, 和 C. Qian，《开放源代码软件杂志》，**6**，2807。Roberts, P. H. & Soward, A. M. 1972，地核的磁流体力学，《流体力学年度评论》，**4**，117–154。Roberts, P. H. & King, E. M. 2013，地球磁性的起源，《物理学进展报告》，**76**，096801。Rüdiger, G., Kitchatinov, L. L., & Brandenburg, A. 2011，太阳对流区中的交叉螺度与湍流磁扩散率，《太阳物理学》，**269**，3–12。Yokoi, N. & Hamba, F. 2007，将湍流磁流体残余能量方程模型应用于太阳风，《等离子体物理学》**14**，112904。Yokoi, N. 2011，湍流交叉螺度演化建模：产生、耗散与输运率，《湍流杂志》，**12**，N27。Yokoi, N. & Balarac, G. 2011，磁流体力学流动中的交叉螺度效应与湍流输运，《物理学会议系列杂志》，**318**，072039。Yokoi, N. & Hoshino, M. 2011，磁重联中的流动-湍流相互作用，《等离子体物理学》**18**，111208。Yokoi, N. 2013，**107**，114 184 交叉螺度与相关发电机，《地球物理学、天体物理学与流体动力学》，–。Yokoi, N. 2018，强可压缩磁流体力学湍流中的电动势，《等离子体物理学杂志》，**84**，735840501。Yokoi, N. 2023，等离子体物理学中未受重视的交叉螺度效应：发电机与动量输运中的反扩散效应，《等离子体物理学评论》，已投稿。Yoshizawa, A. 1985，磁流体力学湍流剪切流的统计理论，《流体物理学》，**28**，3313–3320。Yoshizawa, A. 1990，反场箍缩与行星磁场的自洽湍流发电机建模，《流体物理学 B，**2**，1589–1600。Yoshizawa, A. 1998，《流体力学与磁流体力学湍流流动：建模与统计理论》，克鲁维尔学术出版社。