arXiv:2303.01109v1 [math.AP] 2 Mar 2023

光滑度量测度空间上涉及 Witten 拉普拉斯算子的非线性椭圆方程的梯度估计及其推论

ALI TAHERI 和 VAHIDEH VAHIDIFAR

Abstract. 本文针对光滑度量测度空间上一类涉及 Witten 拉普拉斯算子的非线性椭圆方程，给出了正解的新的局部和全局 Li-Yau 型梯度估计。这些估计是在相关 Bakry-Emery 黎奇曲率张量满足´自然下界的条件下推导得出的，并可用于证明一般的 Harnack 不等式和刘维尔型定理等。本文的结果统一、推广并改进了文献中针对若干特殊非线性项的已有结果，而这些非线性项早已受到广泛关注并具有重要应用。文中还阐述并讨论了一些重要推论。

Contents

1. 引言 12. 主要结果的陈述 52.1. 方程（1.1）的局部和全局 Li-Yau 型梯度估计 52.2. 方程（1.1）的局部和全局椭圆 Harnack 不等式 62.3. 刘维尔型定理及其若干应用 73. 定理 2.1 中 Li-Yau 型梯度估计的证明 83.1. 一些技术引理和恒等式 83.2. 定理 2.1 的证明 124. 定理 2.3 中椭圆 Harnack 不等式的证明 165. 定理 2.5 中刘维尔结论的证明 17参考文献 18

1. Introduction

设 $(M, g, d\mu)$ 是一个光滑度量测度空间，即 M 是一个维数为 $n \geq 2$ 的完备黎曼流形，配备加权测度$d\mu = e^{-f} dv_g$， f是定义在 M上的光滑势函数， g是黎曼度量，而 dv_g是通常的黎曼体积测度。本文针对非线性椭圆方程，推导正光滑解 u 的局部和全局 Li-Yau 型梯度估计，并给出 Harnack不等式和 Liouville型结果:

$$\Delta_f u(x) + \Sigma[x, u(x)] = 0, \qquad \Sigma : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

2010 年数学主题分类。53C44、58J60、58J35、60J60。关键词和短语。光滑度量测度空间、Witten拉普拉斯算子、梯度估计、非线性椭圆方程、Harnack不等式、李-丘估计、Liouville 型定理。

这里， $\Delta_f u = e^f \mathrm{div}[e^{-f}\nabla u] = \Delta u - \langle \nabla f,\ \nabla u\rangle$ 是 Witten拉普拉斯算子（也称加权拉普拉斯算子或漂移拉普拉斯算子；有时，为强调所选的 f，也称为 f-拉普拉斯算子），其中 ∇、div 和 Δ 分别是与度量 g相关联的通常梯度、散度和 Laplace-Beltrami算子。Witten拉普拉斯算子关于不变加权测度 $d\mu = e^{-f}dv_g$ 是一个对称扩散算子，广泛应用于概率论、几何学、随机过程、量子场论和统计力学等诸多领域 [2, 4, 20]。它是 Laplace-Beltrami算子在光滑度量测度空间情形下的自然推广；当且仅当势函数 f 为常数时，它与后者一致。

非线性项 $\Sigma = \Sigma[x, u]$ 在（1.1）中是一个足够光滑的多变量函数，同时依赖于空间变量 $x \in M$ 和自变量（解）u。下文中，为了更好地引导读者并展示结果，我们讨论来自不同背景的此类非线性项的各种实例，例如共形几何和数理物理中的实例；每个实例都呈现出不同的现象，同时表现出相应的奇异或正则行为。

关于三元组（$M, g, d\mu$）的曲率性质，我们引入广义 Bakry-´Emery 里奇曲率张量（见 [2, 3, 30]），对于 $m \geq n$，记为

$$\mathscr{R}ic_f^m(g) = \mathscr{R}ic(g) + \mathrm{Hess}(f) - \frac{\nabla f \otimes \nabla f}{m-n}. \tag{1.2}$$

这里， $\mathscr{R}ic(g)$表示 g的黎曼里奇曲率张量，$\mathrm{Hess}(f)$表示 f的海森矩阵，而 $m \geq n$ 是一个固定常数。为清楚起见，我们指出，当 $m = n$时，按照约定， f 只能是一个常数，从而得到$\mathscr{R}ic_f^n(g) = \mathscr{R}ic(g)$；同时，我们也允许 $m = \infty$，在这种情况下，通过在（1.2）中形式地取极限，我们写作 $\mathscr{R}ic_f^\infty(g) = \mathscr{R}ic(g) + \mathrm{Hess}(f) := \mathscr{R}ic_f(g)$。

根据加权 Bochner-Weitzenb¨ock 公式，对于定义在 M 上的任意光滑函数u，有：

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla u|^2 = |\mathrm{Hess}(u)|^2 + \langle \nabla u, \nabla\Delta_f u\rangle + \mathscr{R}ic_f(\nabla u, \nabla u). \tag{1.3}$$

因此，应用柯西-施瓦茨不等式可得 $\Delta u \leq \sqrt{n}|\mathrm{Hess}(u)|$；再回顾恒等式 $\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u\rangle$，显然有

$$|\mathrm{Hess}(u)|^2 \geq \frac{(\Delta u)^2}{n}, \qquad \frac{(\Delta u)^2}{n} + \frac{\langle \nabla f, \nabla u\rangle^2}{m-n} \geq \frac{(\Delta_f u)^2}{m}, \tag{1.4}$$

因此，由（1.3）和（1.4）可得

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla u|^2 - \langle \nabla u, \nabla\Delta_f u\rangle \geq \frac{1}{m}(\Delta_f u)^2 + \mathscr{R}ic_f^m(\nabla u, \nabla u). \tag{1.5}$$

特别地，在曲率下界为 $\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq \mathrm{k}g$ 的条件下，可以看出算子 $L = \Delta_f$ 满足曲率-维数条件 CD(k m)（参见 [2, 3, 4, 44]）。

本文的主要目标是为 (1.1) 的正光滑解建立局部和全局的李-丘型梯度估计及 Harnack不等式。众所周知，这些估计是推导解的各种定性性质的基础，因此具有重要意义和实用价值 (参见例如 [26, 28, 35, 49])。这些性质包括但不限于 H¨older 正则性和高阶

可微性、尖锐谱渐近及其界、热核界、Liouville 型结果，以及其他许多性质（参见 [1, 6, 8, 18, 20, 29, 37, 38, 39, 53]）。

在证明梯度估计时，通常会针对具有特定结构（奇异性、正则性、衰减和增长）的显式非线性项展开研究。本文则将分析和讨论保持在相当一般的层面，不局限于具体例子：一方面旨在对这些估计作统一处理，另一方面也希望更清楚地了解非线性项的结构和形式如何影响估计及后续结果。因此，我们的方法和分析在很大程度上统一、推广并在某些方面改进了文献中针对各种特定非线性项的已有结果（详见下文）。

对下列方程正解的梯度估计：1.1特别是当非线性项是具有变系数的对数项与线性项的叠加时：

$$\Delta_f u(x) + \mathsf{p}(x)u(x)\log u(x) + \mathsf{q}(x)u(x) = 0, \tag{1.6}$$

及其抛物型对应方程已得到广泛研究（例如，参见 Ma [31], Ruan [34], Wu [46] 和 Yang [50] 及其中的参考文献）。人们对这类问题的兴趣源于其与梯度里奇孤立子之间的自然联系。回顾一下，若存在定义在 M 上的光滑函数 f 以及常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得（参见 [11, 15, 30]），则称黎曼流形 (M, g) 为梯度里奇孤立子。

$$\mathscr{R}ic_f(g) = \mathscr{R}ic(g) + \mathrm{Hess}(f) = \lambda g. \tag{1.7}$$

梯度里奇孤立子可以是膨胀型（$\lambda > 0$）、稳态型（$\lambda = 0$）或收缩型（$\lambda < 0$）。这一概念是爱因斯坦流形的推广，在分析里奇流的奇异性方面发挥着基础作用 [23, 53]。对（1.7）两边取迹，并利用缩并比安基恒等式，可将（1.6）化为常系数的简单形式：$\Delta u + 2\lambda u \log u = (A_0 - n\lambda)u$ 其中常数 A_0 和 $u = e^f$（详情见 [31]）。其他与（1.6）密切相关的方程类型包括：

$$\Delta_f u(x) + \mathsf{p}(x)u^a(x)|\log u|^b(x) = 0, \tag{1.8}$$

对于实数 数指数 a, b 或更一般地，对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的非线性函数 $\gamma = \gamma(s)$ ：

$$\Delta_f u(x) + \mathsf{p}(x)u^a(x)\gamma(\log u)(x) + \mathsf{q}(x)u^b(x) = 0, \tag{1.9}$$

已在 [9, 17, 40, 41, 46, 47] 中得到详细研究。

Yamabe 型方程 $\Delta u + \mathsf{p}(x)u^s + \mathsf{q}(x)u = 0$ 也具有（1.1）的形式，且非线性项呈幂次形式。Bidaut-V´eron 和 V´eron [5] 研究了紧流形上的方程 $\Delta u + u^s + \mathsf{q}u = 0$，并在里奇张量满足适当条件时，$n$ 和 s，q证明该方程只有常数解。Gidas 和 Spruck [19] 研究了

$$\Delta u(x) + \mathsf{p}(x)u^s(x) = 0, \qquad 1 \le s < (n+2)/(n-2), \tag{1.10}$$

并证明，当 $\mathscr{R}ic(g) \ge 0$ 时，该方程的任意非负解都必为零。Yang [51] 证明，当 $\mathsf{p} > 0$ 为常数且 $s < 0$ 时，同一方程不存在正解，条件为 $\mathscr{R}ic(g) \ge 0$。请注意，(1.10) 中的情形 $s = 3$ 与杨-米尔斯方程有关（参见 Cafarelli、Gidas 和 Spruck [9]），而情形 $s < 0$ 则与薄膜方程的稳态解有关（参见 Guo 和 Wei [21]）。更多相关结果请参见 Brandolini、Rigoli 和 Setti [7], 、Li [25], 、Li、Tam 和 Yang[27] 以及 Zhang[52]；关于几何学中的 Yamabe问题，详见 [24, 32]。

在光滑度量测度空间背景下，Yamabe方程的自然形式为

$$\Delta_f u(x) + \mathsf{p}(x)u^s(x) + \mathsf{q}(x)u(x) = 0. \tag{1.11}$$

关于梯度估计、Harnack不等式以及上述结果的其他对应形式，读者可参阅 Case [12], Wu [47], Zhang 和 Ma [54]。

Yamabe方程的一种更一般形式是 Einstein-标量场Lichnerowicz方程（参见，例如，Choquet-Bruhat [14], Chow [15], Zhang [53]）。当底流形的维数为 $n \geq 3$ 时，该方程具有如下形式：$\Delta u + \mathsf{p}(x)u^\alpha + \mathsf{q}(x)u^\beta + \mathsf{r}(x)u = 0$，其中 $\alpha = (n+2)/(n-2)$ 且 $\beta = (3n-2)/(n-2)$；而当 $n = 2$ 时，其形式为$\Delta u + \mathsf{p}(x)e^{2u} + \mathsf{q}(x)e^{-2u} + \mathsf{r}(x) = 0$。光滑度量测度空间中的 Einstein-标量场Lichnerowicz方程还可进一步推广，写作：

$$\Delta_f u + \mathsf{p}(x)u^\alpha + \mathsf{q}(x)u^\beta + \mathsf{r}(x)u\log u + \mathsf{h}(x)u = 0, \tag{1.12}$$

and

$$\Delta_f u + \mathsf{p}(x)e^{2u} + \mathsf{q}(x)e^{-2u} + \mathsf{r}(x) = 0. \tag{1.13}$$

关于此处及相关背景下的梯度估计、Harnack不等式和Liouville型结果，参见 Dung、Khanh 和 Ngo [16], Song and Zhao [36], Taheri [40, 41],Wu [48] 以及其中的参考文献。

最后，简要介绍本文的结构。在第2节中，我们给出本文的主要结果，即方程（1.1）的局部和全局梯度估计，以及局部和全局Harnack不等式和一个一般的Liouville型结果。随后，第3、4 和5 节分别详细证明这些结果。

记号 固定一个基点 $p \in M$，记 $d = d_p(x)$为 x 与 p 之间关于度量 g 的黎曼距离，记 $r = r_p(x)$为以 p为原点的测地径向变量。记 $\mathcal{B}_R(p) \subset M$ 为以 p为中心、半径为 $R > 0$ 的闭测地球。当点 p 由上下文明确时，我们常简写为 $d(x)$、$r(x)$或 $\mathcal{B}_R$。我们记 $s_+ = \max(s, 0)$和$s_- = \min(s, 0)$，因此 $s = s_+ + s_-$，其中 $s_+ \geq 0$ 且 $s_- \leq 0$。

对于给定函数 $\Sigma = \Sigma[x, u]$，我们用下标表示其偏导数，例如 Σ_x、Σ_u 等；记号 Σ^x 则专用于函数 $\Sigma[\cdot, u]$，该函数通过固定自变量 u 并将其视为关于 x 的函数而得到；例如，下文中我们经常使用 $\nabla\Sigma^x$ 和 $\Delta_f\Sigma^x$。

为方便读者，我们回顾一下，在局部坐标 (x^i) 下，Laplace-Beltrami算子、黎曼曲率张量和里奇曲率张量分别有如下公式：

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \tag{1.14}$$

and

$$[\mathscr{R}m(g)]^\ell_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^\ell_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma^\ell_{ik}}{\partial x_j} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^\ell_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^\ell_{jp}, \tag{1.15}$$

and

$$[\mathscr{R}ic(g)]_{ij} = \frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial\Gamma^\ell_{\ell j}}{\partial x_i} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\ell_{\ell k} - \Gamma^\ell_{ik}\Gamma^k_{\ell j}. \tag{1.16}$$

请注意，此处

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right), \tag{1.17}$$

分别为克里斯托费尔符号以及 g_{ij}、 $|g|$ 和 $g^{ij}=(g^{-1})_{ij}$，它们分别是度量张量 g的分量、行列式和逆的分量。

2. Statement of the main results

本节给出本文的主要结果。证明将在后续各节中给出。我们强调，全文中的曲率下界均表示为 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq -(m-1)kg$，其中 $k\geq 0$，且 m 为适当的常数 $n\leq m<\infty$。由于本文中的估计属于李-丘型，众所周知，仅有 $\mathscr{R}ic_f(g)$的下界并不足以达到目的。

2.1. 方程 (1.1) 的局部与整体 Li-Yau 型梯度估计。

定理 2.1. 设$(M,g,d\mu)$为完备光滑度量测度空间，满足 $d\mu=e^{-f}dv_g$，并假设在 $\mathcal{B}_{2R}=\mathcal{B}_{2R}(p)$中有 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq -(m-1)kg$，其中$m\geq n$ 和 $k\geq 0$为适当的常数。设 u 是 $\mathcal{B}_{2R}$中方程 (1.1)的一个正解。那么，对于任意 $\mu>1$和 $\varepsilon\in(0,1)$，以及任意 $x\in\mathcal{B}_R$,

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla u|^2}{\mu u^2}+\frac{\Sigma[x,u]}{u}\leq{}&\frac{m\mu}{2R^2}\left[(c_2+(m-1)c_1(1+R\sqrt{k})+2c_1^2)+\frac{mc_1^2\mu^2}{4(\mu-1)}\right]\\&+\frac{\sqrt{m}}{2}\left[\frac{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{(1-\varepsilon)(\mu-1)^2}+\left[\frac{27m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}+2\mu\mathsf{C}_\Sigma\right]^{1/2}\\&+\frac{m\mu}{2}\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{(u\Sigma_u[x,u]-\Sigma[x,u])_+}{u}\right\},\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，量 A_Σ、B_Σ 和 C_Σ 定义如下：

$$\mathsf{A}_\Sigma=\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{2(m-1)ku+(-\Sigma[x,u]+u\Sigma_u[x,u]-\mu u^2\Sigma_{uu}[x,u])_+}{2u}\right\}, \tag{2.2}$$

$$\mathsf{B}_\Sigma=\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{|\Sigma_x[x,u]-\mu u\Sigma_{xu}[x,u]|}{u}\right\},\qquad \mathsf{C}_\Sigma=\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{(-\Delta_f\Sigma^x[x,u])_+}{u}\right\}. \tag{2.3}$$

上述局部估计在定理中的相应界为全局界时，有一个全局对应结果。证明可通过令 $R\to\infty$ 在（2.1）中取极限，并考虑到由于界为全局界，某些项会趋于零，且相关常数与 R无关。其精确表述见下述定理。

定理 2.2。 设 $(M,g,d\mu)$ 是一个完备光滑度量测度空间，满足 $d\mu=e^{-f}dv_g$，且 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq -(m-1)kg$ 在 M 上，其中 $m\geq n$ 且 $k\geq 0$。假设 u 是 (1.1) 在 M 上的一个正解。那么对于任意 $\mu>1$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$，以及任意 $x\in M$,

$$\frac{|\nabla u|^2}{\mu u^2}+\frac{\Sigma[x,u]}{u}\leq\frac{\sqrt{m}}{2}\left[\frac{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{(1-\varepsilon)(\mu-1)^2}+\left[\frac{27m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}+2\mu\mathsf{C}_\Sigma\right]^{1/2}+\frac{m\mu}{2}\sup_M\left\{\frac{(u\Sigma_u[x,u]-\Sigma[x,u])_+}{u}\right\}. \tag{2.4}$$

这里 A_Σ， B_Σ 和 C_Σ 与 (2.2)-(2.3) 定理 2.1 中的相同，只是现在上确界是在整个 M 上取的。

2.2. 关于(1.1)的一个局部和一个整体椭圆 Harnack 不等式。

´定理 2.3. 在定理 2.1 的假设以及 Bakry-Emery 曲率界 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq-(m-1)kg$ 在 $\mathcal{B}_{2R}$ 上成立的条件下，对于 u 的任意正解 (1.1)，以及任意 x_1， $x_2\in\mathcal{B}_R$ 我们有

$$u(x_2)\leq e^{2R\sqrt{\mathbb{H}}}u(x_1). \tag{2.5}$$

该正 常数 $\mathbb{H}$ 可以用局部界 a 显式表示 s

$$\begin{aligned}\mathbb{H}=&\,m\mu^2[(c_2+(m-1)c_1(1+R\sqrt{k})+2c_1^2)+mc_1^2\mu^2/(4(\mu-1))]/(2R^2)\\&+\sqrt{m}\mu/2\{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2/[(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]+[27m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}+2\mu\mathsf{C}_\Sigma\}^{1/2}\\&+m\mu^2\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\{(u\Sigma_u[x,u]-\Sigma[x,u])_+/(2u)\}\\&-\mu\inf_{\mathcal{B}_R}\{(\Sigma[x,u])_-/u\},\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 A_Σ、B_Σ 和C_Σ 如定理 (2.2)-(2.3) 中的定理 2.1所述。特别地，由此我们有 (2.5)

$$\sup_{\mathcal{B}_R}u\leq e^{2R\sqrt{\mathbb{H}}}\inf_{\mathcal{B}_R}u. \tag{2.7}$$

对于整体版本，我们可以利用定理 2.2 中的整体界，采用类似的论证，并得到（2.5）的对应结果，其中以 $d(x_1,x_2)$ 替代 $2R$，而 $\mathbb{H}>0$则为式（2.4）给出的整体版本。具体表述如下。

´定理 2.4. 在定理 2.2 的假设以及 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq-(m-1)kg$ 上的 Bakry-Emery 曲率界 M下，对于任意满足 u 的正解 (1.1)，以及任意x_1， $x_2\in M$ 均有

$$u(x_2)\leq e^{d(x_1,x_2)\sqrt{\mathbb{H}}}u(x_1). \tag{2.8}$$

正常数 $\mathbb{H}$ 可用整体界显式表示为

$$\begin{aligned}\mathbb{H}=&\,\sqrt{m}\mu/2\{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2/[(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]+[27m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}+2\mu\mathsf{C}_\Sigma\}^{1/2}\\&+m\mu^2\sup_M\{(u\Sigma_u[x,u]-\Sigma[x,u])_+/(2u)\}-\mu\inf_M\{(\Sigma[x,u])_-/u\},\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中A_Σ、B_Σ 和C_Σ 如定理2.2.

2.3. 刘维尔型定理及其若干应用。

定理 2.5. 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个光滑度量测度空间，满足 $d\mu = e^{-f}dv_g$ $\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq 0$ 在 M 中。设 u 是 $\Delta_f u + \Sigma[u] = 0$ 的一个正解。假设对于某个 $\mu > 1$，有 $\Sigma[u] \geq 0$、$u\Sigma_u[u] - \Sigma[u] \leq 0$ 和 $\mu u^2\Sigma_{uu}[u] - u\Sigma_u[u] + \Sigma[u] \geq 0$。则 u 必为常数。特别地，$\Sigma[u] = 0$。

该定理的证明由上文建立的梯度估计推出，并见第 5 节。我们通过给出上述定理的两个显著应用来结束本节。为此，首先考虑具有实系数的幂型非线性项的叠加 p_j 及指数 a_j，其中 $1 \leq j \leq N$ 其形式为

$$\Sigma[u] = \sum_{j=1}^{N} \mathsf{p}_j u^{a_j}. \tag{2.10}$$

直接计算可得

$$u\Sigma_u[u] - \Sigma[u] = \sum_{j=1}^{N} \mathsf{p}_j(a_j - 1)u^{a_j}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\mu u^2\Sigma_{uu}[u] - u\Sigma_u[u] + \Sigma[u] &= \sum_{j=1}^{N}[\mu \mathsf{p}_j a_j(a_j - 1) - \mathsf{p}_j a_j + \mathsf{p}_j]u^{a_j} \\ &= \sum_{j=1}^{N}[\mathsf{p}_j(a_j - 1)(\mu a_j - 1)]u^{a_j}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

显然，对于范围 $\mathsf{p}_j \geq 0$，我们有 $\Sigma(u)$，而在满足 $a_j \leq 1$ 的条件下，我们有 $u\Sigma_u[u] - \Sigma[u] \leq 0$ 以及 $\mu u^2\Sigma_{uu}[u] - u\Sigma_u[u] + \Sigma[u] \geq 0$（通过适当选择 $\mu > 1$）。定理 2.5 现得出以下结论，将关于亚马贝型问题的早期结果推广到了更一般的非线性项（参见 [16, 19, 51, 48]）。这一方向的进一步应用和结果将在一篇即将发表的论文中讨论（另请参见 [40, 41]）。

定理 2.6. 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个完备光滑度量测度空间，满足 $d\mu = e^{-f}dv_g$ 且 $\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq 0$。设 u 是方程的一个正光滑解

$$\Delta_f u + \sum_{j=1}^{N} \mathsf{p}_j u^{a_j} = 0. \tag{2.13}$$

若 $\mathsf{p}_j \geq 0$ 且 $a_j \leq 1$ 对 $1 \leq j \leq N$ 成立，则 u 必为常数。

注记 2.7。注意，方程（1.1）的常数解必为 Σ 的零点。因此，若 Σ 没有正零点，则上述李维尔定理便成为一个不存在性结果。在定理 2.6 中，对于（2.10），当至少有一个 $\mathsf{p}_j > 0$ 时即满足这一条件，其中 $1 \leq j \leq N$。

作为另一项应用，再次联系第 1 节中的讨论，考虑实系数 p、q、指数为 s 且 $\gamma \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ 的对数型非线性项与幂型非线性项的叠加，形式如下：

$$\Sigma[u] = \mathsf{p}u\gamma(\log u) + \mathsf{q}u^s. \tag{2.14}$$

直接计算可得 $u\Sigma_u[u]-\Sigma[u]=\mathsf{p}u\gamma'(\log u)+\mathsf{q}(s-1)u^s$ 以及$\mu u^2\Sigma_{uu}[u]-u\Sigma_u[u]+\Sigma[u]=\mathsf{p}[(\mu-1)u\gamma'+\mu u\gamma'']+[\mathsf{q}(s-1)(\mu s-1)]u^s$。由此可直接得到以下定理，该定理是定理 2.5 的推论。

定理 2.8. 设 $(M,g,d\mu)$ 是一个完备光滑度量测度空间，满足 $d\mu=e^{-f}dv_g$ 且 $\mathscr{R}ic_f^m(g)\geq 0$。设 u 是方程的一个正光滑解

$$\Delta_f u+\mathsf{p}u\gamma(\log u)+\mathsf{q}u^s=0. \tag{2.15}$$

假设 $\mathsf{p},\mathsf{q}\geq 0$, $s\leq 1$，并且沿着解 u 有 $\gamma\geq 0$, $\gamma'\leq 0$ 和$\mu\gamma''+(\mu-1)\gamma'\geq 0$，其中某个 $\mu>1$ 满足上述条件（若 $0<s<1$，则 $1<\mu<1/s$）。那么 u 必为常数。

3. Proof of the Li-Yau type gradient estimate in Theorem 2.1

本节旨在证明方程 (1.1) 的正解的局部形式主估计。如前所见，其全局形式的估计可通过取极限 $R\to\infty$ 得到。由于这需要若干技术引理和工具，我们先简要介绍这些结果和工具，再于下一小节证明定理 2.1 中的局部估计。

3.1. 一些技术引理和恒等式。

引理 3.1. 设 u 是方程 (1.1) 的正解，且 $h=\log u$。则h 满足方程

$$\Delta_f h+|\nabla h|^2+e^{-h}\Sigma[x,e^h]=0. \tag{3.1}$$

证明。经简单计算可得 $\nabla h=(\nabla u)/u$ 和 $\Delta h=(\Delta u)/u-|\nabla u|^2/u^2$。因此$\Delta_f h=(\Delta_f u)/u-|\nabla u|^2/u^2=-\Sigma[x,u]/u-|\nabla u|^2/u^2$，从而得到所需结论。□

引理 3.2. 设 u 是方程 (1.1)， $h=\log u$ 且设 H 定义为 b y

$$H=|\nabla h|^2+\mu e^{-h}\Sigma[x,e^h], \tag{3.2}$$

其中 $\mu\geq 1$ 是任意常数。则 H 满足方程

$$\begin{aligned}\Delta_f H=\ &2|\nabla^2 h|^2+2\frac{\langle\nabla f,\ \nabla h\rangle^2}{m-n}-2\langle\nabla h,\ \nabla H\rangle+2\mathscr{R}ic_f^m\left(\nabla h,\ \nabla h\right)\\ &-2\left(\mu-1\right)e^{-h}\Sigma|\nabla h|^2+2\left(\mu-1\right)e^{-h}\langle\nabla h,\ \nabla\Sigma\rangle+\mu\Delta_f\left(e^{-h}\Sigma\right),\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，我们省略了 Σ 及其导数的自变量。

证明。 参照 H 是（3.2）的表述，对方程两边应用 Δ_f 可得

$$\Delta_f H=\Delta_f|\nabla h|^2+\mu\Delta_f(e^{-h}\Sigma[x,e^h]). \tag{3.4}$$

此外，参照（3.1）并再次参照（3.2），显然有如下关系：

$$\Delta_f h=-(|\nabla h|^2+e^{-h}\Sigma[x,e^h])=-(H-(\mu-1)e^{-h}\Sigma[x,e^h]). \tag{3.5}$$

现在来看 (3.4) 右端的第一项，根据广义 Bochner- Weitzenb¨ock 公式（应用于 h），可得

$$\Delta_f|\nabla h|^2=2|\nabla^2 h|^2+2\langle\nabla h,\nabla\Delta_f h\rangle+2\mathscr{R}ic_f^m(\nabla h,\nabla h)+2\frac{\langle\nabla f,\nabla h\rangle^2}{m-n}. \tag{3.6}$$

因此，将 (3.6) 代入 (3.4)，并注意到 (3.5)，经过简单求导后可得，

$$\begin{aligned}\Delta_f H =& 2|\nabla^2 h|^2 + 2\langle \nabla h, \nabla(-H + (\mu-1)e^{-h}\Sigma[x,e^h])\rangle \\ &+ 2\mathscr{R}ic_f^m(\nabla h, \nabla h) + 2\frac{\langle \nabla f, \nabla h\rangle^2}{m-n} + \mu\Delta_f(e^{-f}\Sigma[x,e^h]) \\ =& 2|\nabla^2 h|^2 - 2\langle \nabla h, \nabla H\rangle - 2(\mu-1)e^{-h}\Sigma[x,e^h]|\nabla h|^2 \\ &+ 2(\mu-1)e^{-h}\langle \nabla h, \nabla\Sigma[x,e^h]\rangle + 2\mathscr{R}ic_f^m(\nabla h, \nabla h) \\ &+ 2\frac{\langle \nabla f, \nabla h\rangle^2}{m-n} + \mu\Delta_f(e^{-h}\Sigma[x,e^h]),\end{aligned} \tag{3.7}$$

对各项重新排列后，即可得到所需的恒等式。 □

引理 3.3. 设 u 是 (1.1)的正解， $h =$ 对数 u 且设 H 由 (3.2)定义。那么，若 $\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq -(m-1)kg$，则有

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq& 2\frac{(\Delta_f h)^2}{m} - 2\langle \nabla h, \nabla H\rangle + [e^{-h}\Sigma - \Sigma_u]H \\ &+ \left[e^{-h}\Sigma - \Sigma_u + \mu e^h \Sigma_{uu} - 2(m-1)k\right]|\nabla h|^2 \\ &- 2\langle \nabla h, [e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}]\rangle + \mu e^{-h}\Delta_f \Sigma^x.\end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。 利用界 $\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq -(m-1)kg$ 并回忆引理 3.2 中的恒等式，可得

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq& 2\frac{(\Delta_f h)^2}{m} - 2\langle \nabla h, \nabla H\rangle - 2(\mu-1)e^{-h}\Sigma|\nabla h|^2 \\ &+ 2(\mu-1)e^{-h}\langle \nabla h, \nabla\Sigma\rangle - 2(m-1)k|\nabla h|^2 \\ &+ \mu\Sigma\Delta_f e^{-h} + 2\mu\langle \nabla e^{-h}, \nabla\Sigma\rangle + \mu e^{-h}\Delta_f\Sigma.\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意，在推导上述不等式时，具体而言，在右侧的第一项中，我们用到了基本不等式

$$|\nabla^2 h|^2 + \frac{\langle \nabla f, \nabla h\rangle^2}{m-n} \geq \frac{(\Delta h)^2}{n} + \frac{\langle \nabla f, \nabla h\rangle^2}{m-n} \geq \frac{(\Delta_f h)^2}{m}. \tag{3.10}$$

现在我们来进行一些关于非线性项 $\Sigma = \Sigma(x, e^h)$ 的有用且直接的计算。显然

$$\nabla\Sigma[x,e^h] = \Sigma_x[x,e^h] + e^h\Sigma_u[x,e^h]\nabla h, \tag{3.11}$$

因此，转而讨论拉普拉斯算子，我们可以写出

$$\Delta\Sigma[x,e^h] = \operatorname{div}(\Sigma_x[x,e^h] + e^h\Sigma_u[x,e^h]\nabla h). \tag{3.12}$$

在局部坐标中进行计算较为方便，因此我们写出

$$\begin{aligned}\Delta\Sigma(x,e^h) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\Sigma_{x_i}[x,e^h]+e^h\Sigma_u[x,e^h]h_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big\{\Sigma_{x_ix_i}[x,e^h]+\Sigma_{x_iu}[x,e^h](e^h)_i+e^hh_i\Sigma_u[x,e^h]h_i\\ &\quad +e^h(\Sigma_{x_iu}[x,e^h]+\Sigma_{uu}[x,e^h](e^h)_i)h_i+e^h\Sigma_u[x,e^h]h_{ii}\Big\}. \end{aligned}\tag{3.13}$$

为方便起见，将 $[x,e^h]$ 的参数 Σ 缩写，并将上式改写为

$$\begin{aligned}\Delta\Sigma &= \Delta\Sigma^x+e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle+e^h|\nabla h|^2\Sigma_u\\ &\quad +e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle+e^{2h}|\nabla h|^2\Sigma_{uu}+e^h\Sigma_u\Delta h\\ &= \Delta\Sigma^x+2e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle+e^h|\nabla h|^2(\Sigma_u+e^h\Sigma_{uu})+e^h\Sigma_u\Delta h. \end{aligned}\tag{3.14}$$

因此，将上式代入可得

$$\begin{aligned}\Delta_f\Sigma &= \Delta\Sigma-\langle\nabla f,\nabla\Sigma\rangle=\Delta\Sigma-\langle\nabla f,(\Sigma_x+e^h\Sigma_u\nabla h)\rangle\\ &= \Delta\Sigma-\langle\nabla f,\Sigma_x\rangle-e^h\Sigma_u\langle\nabla f,\nabla h\rangle\\ &= \Delta\Sigma^x-\langle\nabla f,\nabla\Sigma^x\rangle+2e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle\\ &\quad +e^h|\nabla h|^2(\Sigma_u+e^h\Sigma_{uu})+e^h\Sigma_u\Delta h-e^h\Sigma_u\langle\nabla f,\nabla h\rangle\\ &= \Delta_f\Sigma^x+2e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle+e^h|\nabla h|^2(\Sigma_u+e^h\Sigma_{uu})+e^h\Sigma_u\Delta_f h. \end{aligned}\tag{3.15}$$

此外，为便于今后引用，我们还注意到

$$\begin{aligned}\Delta_f e^{-h} &= \Delta e^{-h}-\langle\nabla f,\nabla e^{-h}\rangle\\ &= \operatorname{div}(-e^{-h}\nabla h)+e^{-h}\langle\nabla f,\nabla h\rangle\\ &= -e^{-h}\Delta h+e^{-h}|\nabla h|^2+e^{-h}\langle\nabla f,\nabla h\rangle\\ &= -e^{-h}(\Delta_f h-|\nabla h|^2). \end{aligned}\tag{3.16}$$

现在回到不等式（3.9），并代入（3.11）、（3.15）和（3.16），我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq\ & 2(\Delta_f h)^2/m-2\langle\nabla h,\nabla H\rangle-2(\mu-1)e^{-h}\Sigma|\nabla h|^2\\ &+2(\mu-1)e^{-h}\langle\nabla h,\Sigma_x+e^h\Sigma_u\nabla h\rangle-2(m-1)k|\nabla h|^2\\ &-\mu e^{-h}\Sigma(\Delta_f h-|\nabla h|^2)-2\mu e^{-h}\langle\nabla h,\Sigma_x+e^h\Sigma_u\nabla h\rangle\\ &+\mu e^{-h}[\Delta_f\Sigma^x+2e^h\langle\Sigma_{xu},\nabla h\rangle+e^h(\Sigma_u+e^h\Sigma_{uu})|\nabla h|^2+e^h\Sigma_u\Delta_f h], \end{aligned}\tag{3.17}$$

或者整理后可得

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq\ & 2(\Delta_f h)^2/m - 2\langle\nabla h, \nabla H\rangle - 2(\mu-1)e^{-h}\Sigma|\nabla h|^2\\ & + 2(\mu-1)e^{-h}\langle\nabla h, \Sigma_x\rangle + 2(\mu-1)\Sigma_u|\nabla h|^2\\ & - 2(m-1)k|\nabla h|^2 - \mu(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)\Delta_f h + \mu e^{-h}\Sigma|\nabla h|^2\\ & - 2\mu e^{-h}\langle\nabla h, \Sigma_x\rangle - 2\mu\Sigma_u|\nabla h|^2 + \mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x\\ & + 2\mu\langle\nabla h, \Sigma_{xu}\rangle + \mu(\Sigma_u + e^h\Sigma_{uu})|\nabla h|^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

接下来，回顾 (3.2) 和 (3.5)，可得

$$\mu\Delta_f h = -\mu(H - (\mu-1)e^{-h}\Sigma[x, e^h]) = -[H + (\mu-1)|\nabla h|^2], \tag{3.19}$$

因此，将后者代回 (3.18) 并整理各项，可得

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq\ & 2(\Delta_f h)^2/m - 2\langle\nabla h, \nabla H\rangle\\ & + (e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)[H + (\mu-1)|\nabla h|^2]\\ & + [-2(\mu-1)e^{-h}\Sigma - 2\Sigma_u - 2(m-1)k]|\nabla h|^2\\ & + (\mu e^{-h}\Sigma + \mu\Sigma_u + \mu e^h\Sigma_{uu})|\nabla h|^2\\ & - 2e^{-h}\langle\nabla h, \Sigma_x\rangle + \mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x + 2\mu\langle\nabla h, \Sigma_{xu}\rangle. \end{aligned} \tag{3.20}$$

最后，考虑到必要的消去并进一步整理各项，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_f H \geq\ & 2(\Delta_f h)^2/m - 2\langle\nabla h, \nabla H\rangle + (e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)H\\ & + [e^{-h}\Sigma - \Sigma_u + \mu e^h\Sigma_{uu} - 2(m-1)k]|\nabla h|^2\\ & - 2\langle\nabla h, e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}\rangle + \mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x, \end{aligned} \tag{3.21}$$

这就是所需的结论。 □

下面的引理也将在下一小节局部估计的证明过程中用到。

引理 3.4. 假设 a、b、$z \in \mathbb{R}$、c、$y > 0$ 和 $\mu > 1$ 是任意常数，且满足 $y - \mu z > 0$。那么对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned}&(y-z)^2 - a\sqrt{y}(y-\mu z) - by - c\sqrt{y}\\ &\quad \geq (y-\mu z)^2/\mu^2 - a^2\mu^2(y-\mu z)/[8(\mu-1)]\\ &\quad\quad - (3/4)c^{4/3}[\mu^2/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3} - (\mu^2 b^2)/[4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

证明。 从式（3.22）左侧的表达式出发，对于任意δ，ε 根据基本考虑

$$\begin{aligned}&(y-z)^2 - a\sqrt{y}(y-\mu z) - by - c\sqrt{y}\\ &\quad = (1-\varepsilon-\delta)y^2 - (2-\varepsilon\mu)yz + z^2 + (\varepsilon y - a\sqrt{y})(y-\mu z) + \delta y^2 - by - c\sqrt{y}\\ &\quad = (1/\mu - \varepsilon/2)(y-\mu z)^2 + (1-\varepsilon-\delta-1/\mu+\varepsilon/2)y^2 + (1-\mu+\varepsilon\mu^2/2)z^2\\ &\quad\quad + (\varepsilon y - a\sqrt{y})(y-\mu z) + \delta y^2 - by - c\sqrt{y}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

特别地，令 $\delta=(1/\mu-1)^2$ 且 $\varepsilon=2-2/\mu-2(1/\mu-1)^2=2(\mu-1)/\mu^2$ 可得 $1-\varepsilon-\delta-1/\mu+\varepsilon/2=0$ 且 $1-\mu+\varepsilon\mu^2/2=0$ 因此，注意到不等式 $\varepsilon y-a\sqrt{y}\geq -a^2/(4\varepsilon)$，其中 $\varepsilon=2(\mu-1)/\mu^2>0$ 由式（3.23）可推出

$$\begin{aligned}&(y-z)^2-a\sqrt{y}(y-\mu z)-by-c\sqrt{y}\\&\qquad\geq (y-\mu z)^2/\mu^2-a^2\lambda^2(y-\mu z)/[8(\mu-1)]+(\mu-1)^2y^2/\mu^2-by-c\sqrt{y}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

接下来，仅考虑最后三项，我们可以写出：对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}&(\mu-1)^2y^2/\mu^2-by-c\sqrt{y}\\&\qquad\geq(\mu-1)^2y^2/\mu^2-(1-\varepsilon)(\mu-1)^2y^2/\mu^2-(\mu^2b^2)/[4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]-c\sqrt{y}\\&\qquad\geq\varepsilon(\mu-1)^2y^2/\mu^2-(\mu^2b^2)/[4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]-c\sqrt{y}\\&\qquad\geq-(3/4)c^{4/3}[\mu^2/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}-(\mu^2b^2)/[4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中，上文利用了 $(1-\varepsilon)(\mu-1)^2y^2/\mu^2-by\geq-(\mu^2b^2)/[4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2]$ 以及 $\varepsilon(\mu-1)^2y^2/\mu^2-c\sqrt{y}\geq-(3/4)c^{4/3}[\mu^2/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}$ 分别推出第一个和最后一个不等式。代回 (3.24) 即得所需的不等式。□

3.2. 定理 **2.1**的证明。 证明基于引理 3.3中建立的估计以及一个局部化论证。为进行局部化并得到相关估计，我们首先构造一个合适的截断函数。为此我们先引入一个函数 $\psi=\psi(t)$，它满足以下条件：

(*i*) $\bar{\psi}$ 属于 $\mathscr{C}^2[0,\infty$ 类）。(*ii*) $0\leq\psi(t)\leq 1$ 对于 $0\leq t<\infty$，满足

$$\bar{\psi}(t)=\begin{cases}1 & t\leq 1,\\ 0 & t\geq 2.\end{cases}\tag{3.26}$$

(*iii*) ψ 是非增的（即 $\psi'\leq 0$），此外，对于适当的常数 c_1、$c_2>0$，其一阶和二阶导数满足以下界

$$-c_1\leq\frac{\bar{\psi}'}{\sqrt{\bar{\psi}}}\leq 0\qquad and\qquad \bar{\psi}''\geq -c_2.\tag{3.27}$$

接下来，在 M 中选取并固定一个参考点 p，并令 $r=r_p(x)$，定义

$$\psi(x)=\bar{\psi}\left(\frac{r(x)}{R}\right).\tag{3.28}$$

显然，当 $0\leq r(x)\leq R$ 时，$\psi\equiv 1$；当 $r(x)\geq 2R$ 时，$\psi\equiv 0$。现在考虑支撑于 $\mathcal{B}_{2R}$ 上的局部化函数 ψH。再假设 $\mathcal{B}_{2R}$ 中的 x_1 是 ψH 取得最大值的点。对于 $\psi H\leq 0$，该估计显然成立，因此可以假设 $[\psi H](x_1)>0$。此外，利用 Calabi 的论证 [10]，可以假设 x_1 不在 p 的割迹中。因此在此点有：

$$\nabla(\psi H)=0\qquad and\qquad \Delta(\psi H)\leq 0,\qquad \Delta_f(\psi H)\leq 0.\tag{3.29}$$

现在从基本恒等式出发

$$\Delta_f(\psi H)=H\Delta_f\psi+2\langle\nabla\psi,\nabla H\rangle+\psi\Delta_f H\tag{3.30}$$

并注意到在极大点处的关系（3.29） x_1，我们可以写出

$$\begin{aligned} 0 &\geq H\Delta_f\psi + 2\langle\nabla\psi, \nabla H\rangle + \psi\Delta_f H \\ &\geq H\Delta_f\psi + \frac{2}{\psi}\langle\nabla\psi, \nabla(\psi H)\rangle - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}H + \psi\Delta_f H \\ &\geq H\Delta_f\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}H + \psi\Delta_f H. \end{aligned} \tag{3.31}$$

现在，我们通过为该不等式右端的三个单独项分别求得适当的下界来继续讨论。对于第一项，参见 (3.28)，经过直接计算可得 $\nabla\psi = (\bar{\psi}'/R)\nabla r$ 以及 $\Delta\psi = \bar{\psi}''|\nabla r|^2/R^2 + \bar{\psi}'\Delta r/R$。由此可得

$$\Delta_f\psi = \Delta\psi - \langle\nabla f, \nabla\psi\rangle = \frac{\bar{\psi}''}{R^2}|\nabla r|^2 + \frac{\bar{\psi}'}{R}\Delta_f r. \tag{3.32}$$

对于此处右端的最后一项，结合 参见。[45]，利用 Wei-Wiley 拉普拉斯比较定理 ($\mathscr{R}ic_f^m(g) \geq -(m-1)k$ 可得 $\Delta_f r \leq (m-1)\sqrt{k}$ 双曲余切函数($\sqrt{k}r$)。因此¯代回 (3.32)，并注意到 $\psi' \leq 0$ ，可得:

$$\Delta_f\psi \geq \frac{1}{R^2}\bar{\psi}'' + \frac{(m-1)}{R}\bar{\psi}'\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}r). \tag{3.33}$$

此外，注意到 coth($\sqrt{k}r$) $\leq$coth($\sqrt{k}R$) 且 $\sqrt{k}$coth($\sqrt{k}R$) $\leq(1+\sqrt{k}R)/R$，在满足 $R \leq r \leq 2R$ [的条件下（此处我们利用了双曲余切函数的单调性 x 以及界$x$coth $x \leq 1+x$，其中 $x > 0$] ），可推出

$$(m-1)\bar{\psi}'\sqrt{k}\coth(\sqrt{k}r) \geq (m-1)(1+\sqrt{k}R)\bar{\psi}'/R. \tag{3.34}$$

¯因此，将其代回（3.33），并注意关于 ψ，¯ ¯ ¯具体而言， $0 \leq \psi \leq 1$ 以及（ ψ'3.27）中关于 ψ'' 的下界，便可得

$$\begin{aligned} \Delta_f\psi &\geq \frac{1}{R^2}\bar{\psi}'' + \frac{(m-1)}{R}\left(\frac{1}{R} + \sqrt{k}\right)\bar{\psi}' \\ &\geq -\frac{c_2}{R^2} - \frac{(m-1)}{R}c_1\left(\frac{1}{R} + \sqrt{k}\right) \\ &= -\frac{1}{R^2}[c_2 + (m-1)c_1(1 + R\sqrt{k})], \end{aligned} \tag{3.35}$$

这可直接用于估计（3.31）右端的第一项。接下来考察同一不等式中的中间项，利用对¯的给定界 ψ' [，由（3.27）中的第一个不等式], 可得

$$\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi} = \frac{\bar{\psi}'^2}{\bar{\psi}}\frac{|\nabla\varrho|^2}{R^2} = \left(\frac{\bar{\psi}'}{\sqrt{\bar{\psi}}}\right)^2\frac{|\nabla\varrho|^2}{R^2} \leq \frac{c_1^2}{R^2}. \tag{3.36}$$

由于右侧第三项在（3.31）中已经可以利用引理 3.3 的结论，将上述片段代回后，我们在

极大点 x_1 处得到不等式

$$\begin{aligned}0 \geq\ & H\Delta_f\psi - 2(|\nabla\psi|^2/\psi)H + \psi\Delta_f H\\ \geq\ & -H[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]/R^2\\ & + \psi(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)H + \psi[2(\Delta_f h)^2/m - 2\langle\nabla h, \nabla H\rangle]\\ & + \psi(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u + \mu e^h\Sigma_{uu} - 2(m-1)k)|\nabla h|^2\\ & - 2\psi\langle\nabla h, e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}\rangle + \psi\mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

现在回顾上述不等式，由于在 x_1 处有 $H>0$ 和 $\nabla(\psi H)=0$，很容易看出，

$$\psi\langle\nabla h, \nabla H\rangle = -H\langle\nabla h, \nabla\psi\rangle \leq H|\nabla h||\nabla\psi| \leq c_1\frac{\sqrt{\psi}}{R}H|\nabla h|. \tag{3.38}$$

同样，应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\langle\nabla h, e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}\rangle \leq |\nabla h||e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}|. \tag{3.39}$$

因此，将（3.38）和（3.39）代回（3.37），注意到（3.1），并将两边乘以 $\psi\geq 0$, 即可得到

$$\begin{aligned}0 \geq\ & -\psi H[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]/R^2\\ & + (2\psi^2/m)(|\nabla h|^2 + e^{-h}\Sigma)^2 - 2c_1\psi^{3/2}|\nabla h|H/R\\ & + \psi^2[e^{-h}\Sigma - \Sigma_u + \mu e^h\Sigma_{uu} - 2(m-1)k]|\nabla h|^2\\ & + \psi^2 H(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u) - 2\psi^2|e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}||\nabla h|\\ & + \psi^2\mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x. \end{aligned} \tag{3.40}$$

现在，为了由此得到所需的界，更有效的方法是令

$$y = \psi|\nabla h|^2, \qquad z = -\psi e^{-h}\Sigma, \tag{3.41}$$

特别注意到 $y-z=-\psi\Delta_f h$ 和 $y-\mu z=\psi H$ 分别由（3.1）和（3.2）得出。将上述结果代入（3.40），可得

$$\begin{aligned}0 \geq\ & -\psi H[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]/R^2\\ & + (2/m)[(y-z)^2 - (mc_1/R)y^{1/2}(y-\mu z) - m\mathsf{A}_\Sigma y - m\mathsf{B}_\Sigma y^{1/2}]\\ & + \psi^2 H(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u) + \psi^2\mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x, \end{aligned} \tag{3.42}$$

其中

$$\mathsf{A}_\Sigma = (m-1)k - \inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u + \mu e^h\Sigma_{uu})_-/2\}, \tag{3.43}$$

$$\mathsf{B}_\Sigma = \sup_{\mathcal{B}_{2R}}|e^{-h}\Sigma_x - \mu\Sigma_{xu}|. \tag{3.44}$$

利用引理3.4 令 $a = mc_1/R,\quad b = m\mathsf{A}_\Sigma$ 和 $c = m\mathsf{B}_\Sigma$ 可得 [参见(3.22)]：

$$\begin{aligned}(y-z)^2 - mc_1 y^{1/2}(y-\mu z)/R - m\mathsf{A}_\Sigma y - m\mathsf{B}_\Sigma y^{1/2}&\\ \geq \frac{1}{\mu^2}(y-\mu z)^2 - \frac{m^2c_1^2\mu^2}{8(\mu-1)R^2}(y-\mu z)&\\ - \frac{m^2\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2} - \frac{3}{4}\left[\frac{m^4\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}.&\end{aligned} \tag{3.45}$$

因此由（3.42）可得

$$\begin{aligned}0 \geq &-\psi H[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]/R^2\\ &+ \frac{2}{m}\left[\frac{(\psi H)^2}{\mu^2} - \frac{m^2c_1^2\mu^2}{8(\mu-1)R^2}(\psi H)\right.\\ &\left.- \frac{m^2\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2} - \frac{3}{4}\left[\frac{m^4\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}\right]\\ &+ \psi^2 H(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u) + \psi^2\mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x,\end{aligned} \tag{3.46}$$

或者经过基本考虑并重新排列各项后

$$\begin{aligned}0 \geq &\frac{2}{m\mu^2}(\psi H)^2\\ &- \left[\frac{1}{R^2}[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]\right.\\ &\left.- \inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)_-\} + \frac{mc_1^2\mu^2}{4(\mu-1)R^2}\right]\psi H\\ &- \left[\frac{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{2(1-\varepsilon)(\mu-1)^2} + \frac{3}{2}\left[\frac{m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3} - \mu\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Delta_f\Sigma^x)_-\}\right].\end{aligned} \tag{3.47}$$

这里我们用到了 $\psi H(e^{-h}\Sigma-\Sigma_u)_- \leq \psi^2 H[e^{-h}\Sigma-\Sigma_u]$ 和 $\mu(e^{-h}\Delta_f\Sigma^x)_- \leq \psi^2\mu e^{-h}\Delta_f\Sigma^x$。现在令

$$\begin{aligned}\mathsf{D} = &[c_2 + (m-1)c_1(1+R\sqrt{k}) + 2c_1^2]/R^2\\ &- \inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Sigma - \Sigma_u)_-\} + [mc_1^2\mu^2/(4(\mu-1)R^2)],\end{aligned} \tag{3.48}$$

and

$$\begin{aligned}\mathsf{E} = &\, m\mu^2\mathsf{A}^2/(2(1-\varepsilon)(\mu-1)^2)\\ &+ 3/2[m\mu^2\mathsf{B}^4/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3} - \mu\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Delta_f\Sigma^x)_-\},\end{aligned} \tag{3.49}$$

我们可以将（3.47）写成

$$0 \geq 2(\psi H)^2/(m\mu^2) - \mathsf{D}(\psi H) - \mathsf{E}. \tag{3.50}$$

因此，由这个不等式可得

$$\begin{aligned}\psi H &\le (m\mu^2)/4\left[\mathsf{D}+\sqrt{\mathsf{D}^2+(8\mathsf{E})/(m\mu^2)}\right]\\ &\le (m\mu^2)/4\left[2\mathsf{D}+\sqrt{(8\mathsf{E})/(m\mu^2)}\right]=(m\mu^2/2)\mathsf{D}+\mu\sqrt{m\mathsf{E}/2}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

由于 $\psi\equiv 1$ 在 $\mathcal{B}_R$ 上，且 x_1 是 ψH 在 $\mathcal{B}_{2R}$上的极大点，我们有

$$\sup_{\mathcal{B}_R} H=\sup_{\mathcal{B}_R}[\psi H]\le\sup_{\mathcal{B}_{2R}}[\psi H]=(\psi H)(x_1).\tag{3.52}$$

因此可得

$$\sup_{\mathcal{B}_R} H\le(m\mu^2/2)\mathsf{D}+\mu\sqrt{m\mathsf{E}/2}.\tag{3.53}$$

因此，回顾（3.2），将（3.48）和（3.49）中的 D 和 E 代入，并将两边乘以 $1/\mu$，可写出对每个 $x\in\mathcal{B}_R$:

$$\begin{aligned}\mu^{-1}|\nabla h|^2+e^{-h}\Sigma(x,e^h)&\le m\mu\mathsf{D}/2+(m\mathsf{E}/2)^{1/2}\\ &\le m\mu[c_2+(m-1)c_1(1+R\sqrt{k})+2c_1^2]/(2R^2)\\ &\quad-(m\mu/2)\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Sigma-\Sigma_u)_-\}\\ &\quad+[m^2c_1^2\mu^3/(8(\mu-1)R^2)]\\ &\quad+\sqrt{m}\{[m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2/(4(1-\varepsilon)(\mu-1)^2)]\\ &\quad+(3/4)[m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4/(4\varepsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}\\ &\quad-(\mu/2)\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(e^{-h}\Delta_f\Sigma^x)_-\}\}^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

最后，注意到关系 $h=\log u$，并整理各项后，代回 u

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla u|^2}{\mu u^2}+\frac{\Sigma[x,u]}{u}&\le m\mu[c_2+(m-1)c_1(1+R\sqrt{k})\\ &\quad+2c_1^2+mc_1^2\mu^2/(4(\mu-1))]/(2R^2)\\ &\quad-(m\mu/2)\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{(\Sigma/u-\Sigma_u)_-\}\\ &\quad+\sqrt{m}\{[m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2/(4(1-\epsilon)(\mu-1)^2)]\\ &\quad+(3/4)[m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4/(4\epsilon(\mu-1)^2)]^{1/3}\\ &\quad-(\mu/2)\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\{([\Delta_f\Sigma^x]/u)_-\}\}^{1/2},\end{aligned}\tag{3.55}$$

这就是（2.1）中的所需估计。证明至此完成。

4. Proof of the elliptic Harnack inequality in Theorem 2.3

现在，为了证明 Harnack 不等式，我们需要沿着连接 γ 和 x_1 的 x_2 内部的测地路径积分微分 Harnack 不等式 $\mathcal{B}_R$。为此，我们先将（1.1）的局部梯度估计改写如下:

$$\sup_{\mathcal{B}_R}\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\le\frac{m\mu^2}{2R^2}\left[[c_2+(m-1)c_1(1+R\sqrt{k})+2c_1^2]+\frac{mc_1^2\mu^2}{4(\mu-1)}\right]$$
$$+\frac{\sqrt{m}\mu}{2}\left[\frac{m\mu^2\mathsf{A}^2}{(1-\varepsilon)(\mu-1)^2}+\left[\frac{27m\mu^2\mathsf{B}^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}-2\mu\inf_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{(\Delta_f\Sigma^x)_-}{u}\right\}\right]^{1/2}$$
$$+\frac{m\mu^2}{2}\sup_{\mathcal{B}_{2R}}\left\{\frac{(u\Sigma_u[x,u]-\Sigma[x,u])_+}{u}\right\}-\mu\inf_{\mathcal{B}_R}\left\{\frac{(\Sigma[x,u])_-}{u}\right\}:=\mathbb{H}.\quad(4.1)$$

这里，我们将（4.1）右侧的表达式记为 $\mathbb{H}$，它是一个正数。现在，沿着 $|\nabla u|/u$ 中的测地线 γ 积分$\mathcal{B}_R$（其中 $\gamma(0)=x_1$ 且 $\gamma(1)=x_2$），可得

$$\begin{aligned}\log u(x_2)-\log u(x_1)&=\int_0^1\frac{d}{ds}\log u(\gamma(s))\,ds\\&=\int_0^1\langle[\nabla u/u](\gamma(s)),\gamma'(s)\rangle\,ds\le\left[\sup_{\mathcal{B}_R}\frac{|\nabla u|}{u}\right]\int_0^1|\gamma'|\,ds\\&\le d(x_1,x_2)\sqrt{\mathbb{H}}\le 2R\sqrt{\mathbb{H}}.\end{aligned}\quad(4.2)$$

因此，取对数$[u(x_2)/u(x_1)]\le d(x_1,x_2)\sqrt{\mathbb{H}}\le 2R\sqrt{\mathbb{H}}$ 或进行指数运算后

$$u(x_2)\le e^{2R\sqrt{\mathbb{H}}}u(x_1)\quad(4.3)$$

从而得到所需的不等式。其余断言现在都是这一不等式的直接推论。□

5. Proof of the Liouville result in Theorem 2.5

从（2.4）出发，并注意到$\mathsf{B}_\Sigma=0$（由 $|\Sigma_x-\mu u\Sigma_{xu}|\equiv 0$得到），$k=0$以及$\mathsf{C}_\Sigma=0$（由 $\Delta_f\Sigma^x\equiv 0$得到），重新整理不等式后可得

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla u|^2}{\mu u^2}+\frac{\Sigma(u)}{u}&\le\frac{\sqrt{m}}{2}\left[\frac{m\mu^2\mathsf{A}_\Sigma^2}{(1-\varepsilon)(\mu-1)^2}+\left[\frac{27m\mu^2\mathsf{B}_\Sigma^4}{4\varepsilon(\mu-1)^2}\right]^{1/3}+2\mu\mathsf{C}_\Sigma\right]^{1/2}\\&\quad+\frac{m\mu}{2}\sup_M\left\{\frac{(u\Sigma_u[u]-\Sigma[u])_+}{u}\right\}\\&\le m\mu\left[\sup_M\left\{\frac{(-\Sigma[u]+u\Sigma_u[u]-\mu u^2\Sigma_{uu}[u])_+}{4(\sqrt{1-\varepsilon})(\mu-1)u}\right\}\right.\\&\quad\left.+\sup_M\left\{\frac{(u\Sigma_u[u]-\Sigma[u])_+}{2u}\right\}\right].\end{aligned}\quad(5.1)$$

接下来，由于对 Σ 及其导数施加了假设，很容易看出

$$(-\Sigma[u]+u\Sigma_u[u]-\mu u^2\Sigma_{uu}[u])_+\equiv 0,\qquad(u\Sigma_u[u]-\Sigma[u])_+\equiv 0.\quad(5.2)$$

因此，由（5.1）可得

$$\frac{|\nabla u|^2}{\mu u^2}+\frac{\Sigma[u]}{u}\equiv 0,\quad(5.3)$$

因此，再由对 Σ 施加的假设可知 $|\nabla u|^2/u^2 \equiv 0$。结论随即得出。□

作者声明。作者声明不存在利益冲突。他们对本研究的贡献相同。本研究期间生成和/或分析的数据集可应合理请求向通讯作者获取。作者衷心感谢英国工程与自然科学研究委员会的支持。

References

[1] E. Acerbi，R. Mingione，某类抛物型系统的梯度估计，《杜克数学杂志》，136，（2007），285-320。[2] D. Bakry，超收缩性及其在半群理论中的应用，载于：《数学讲义》，1581，施普林格出版社，柏林/纽约，（1994），1–114。[3] D. Bakry，M. ´Emery，超收缩扩散，载于：Az´ma J.、Yor M.（编），概率研讨会˙XIX 1983/84。《数学讲义》，1123，施普林格出版社，柏林、海德堡。[4] D. Bakry，I. Gentil，M. Ledoux，《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，数学综合研究丛书，348，施普林格出版社，2012。[5] M.F. Biduat-V`eron，L. Ver`on，紧黎曼流形上的非线性椭圆方程及埃姆登方程的渐近性，《数学发明》，106，（1991），489–539。[6] V. B¨ogelein，F. Duzaar，G. Mingione，具有退化扩散的一般抛物型系统的正则性，《美国数学学会回忆录》，221（1041），（2013），vi+143 页，美国数学学会。[7] L. Brandolini，M. Rigoli，A.G. Setti，完备流形上Yamabe 型方程的正解及其应用，《函数分析杂志》，160，（1998），176–222。[8] K. Brighton，光滑度量测度空间上的刘维尔型定理，《几何分析杂志》，23（2013），562–570。[9] L.A. Cafarreli，B. Gidas，J. Spruck，具有临界索obole夫增长的半线性椭圆方程的渐近对称性与局部行为，《纯粹与应用数学通讯》，42，（1989），271–297。[10] E. Calabi，霍普夫极大值原理的推广及其在黎曼几何中的应用，《杜克数学杂志》，25，（1958），45–56。[11] H. Cao，里奇孤立子的最新进展，载于：《几何分析新进展》，高级数学讲义（ALM），第11卷，1–38。国际出版社，（2010）[12] J. Case，光滑度量测度空间上的Yamabe型问题，《微分几何杂志》，101，（2015），467–505。[13] S.Y. Cheng，S.T. Yau，黎曼流形上的微分方程及其几何应用，《纯粹与应用数学通讯》，28，（1975），333–354。[14] Y. Choquet-Bruhat，《广义相对论与爱因斯坦方程》，牛津数学专著，牛津大学出版社，2009。[15] B. Chow，P. Lu，L. Nei，《哈密顿的里奇流》，数学研究生教材77，美国数学学会，2006。[16] N.T. Dung，N.N. Khanh，Q.A. Ngˆo，完备光滑度量测度空间上由Lich-nerowicz方程驱动的 f-热方程的梯度估计，《数学手稿》，155，（2018），471–501。[17] M. Ghergu，S. Kim，H. Shahgholian，具有对数型非线性的半线性椭圆方程在孤立奇点附近的精确行为，《非线性分析进展》，8（2019），995–1003。[18] M. Giaquinta，《变分法与非线性椭圆系统中的多重积分》，数学年鉴研究丛书，第105卷，普林斯顿大学出版社，1983。[19] B. Gidas，J. Spruck，非线性椭圆方程正解的整体与局部行为，《纯粹与应用数学通讯》，34（1981），525–598。[20] A. Grigor'yan，流形上的热核分析，高级数学研究丛书，美国数学学会，2013。[21] Z.M. Guo，J.C. Wei，具有奇异非线性之半线性方程解的断裂集豪斯多夫维数，《数学手稿》，120，（2006），193–209。[22] R. Hamilton，热方程的矩阵哈纳克估计，《分析与几何通讯》，（1993），113–126。

[23] R. Hamilton，里奇流中奇异性的形成，《微分几何综述》，2，（1995），7–136。[24] J.M. Lee，T.H. Parker，Yamabe问题，《美国数学学会通报》，17，（1987），37–91。[25] J. Li，黎曼流形上非线性抛物方程与非线性椭圆方程的梯度估计及Harnack不等式，《函数分析杂志》，100，（1991），233–256。[26] P. Li，S.T. Yau，关于薛定谔算子的抛物核，《数学学报》，156（1986），153–201。¨P. Li，L.F. Tam，D.G. Yang，完备黎曼流形上的 $\Delta u+ku-Ku^p=0$椭圆方程及其几何应用，《美国数学学会汇刊》，350，（1998），1045–1078。[28] P. Li，《几何分析》，剑桥高等数学研究丛书，134，剑桥大学出版社，2012。[29] X.D. Li，完备黎曼流形上对称扩散算子的刘维尔定理，《纯粹与应用数学杂志》，84（2005）1295–1361。[30] J. Lott，Bakry-´Emery里奇张量的若干几何性质，《瑞士数学评论》，78（2003），865–883。[31] L. Ma，完备非紧黎曼流形上一个简单椭圆方程的梯度估计，《函数分析杂志》，241（2006），374–382。[32] P. Mastrolia，M. Rigoli，A.G. Setti，《完备非紧流形上的Yamabe 型方程》，施普林格出版社，巴塞尔，2012。[33] G. Morrison，A. Taheri，非线性椭圆系统 $\mathscr{L}[u$的一族满足不可压扭转约束的无穷尺度解；A、B] $=\nabla\mathscr{P}$与判别式 Δ（h、g），《非线性分析》，173（2018），209-219。[34] Q.H. Ruan，非紧流形上薛定谔方程的椭圆型梯度估计，《伦敦数学学会通报》，39（2007），982–988。¨R. Schoen，S.T. Yau，《微分几何讲义》，国际出版社，1994。[35] X.F. Song，L. Zhao，紧流形上椭圆与抛物型Lichnerowicz方程的梯度估计，《应用数学与物理杂志》，61，（2010），655–662。[36] P. Souplet，Q.S. Zhang，热方程的精确梯度估计与Yau刘维尔定理，《伦敦数学学会通报》，38（2006），1045–1053。[37] A. Taheri，《函数空间与偏微分方程》，第I卷，牛津数学及其应用讲义丛书，40，牛津大学出版社，2015。[38] A. Taheri，《函数空间与偏微分方程》，第II卷，牛津数学及其应用讲义丛书，41，牛津大学出版社，2015。[39] A. Taheri，涉及Witten拉普拉斯算子的非线性抛物方程的刘维尔定理与椭圆梯度估计，在线发表于：《变分法进展》，德格鲁伊特出版社，2021。[40] A. Taheri，与超Perelman-里奇流耦合的带权 Γ-非线性抛物方程的梯度估计及其推论，在线发表于：《势分析》，施普林格出版社，2021。[42] A. Taheri，V. Vahidifar，关于散度形式下结合不可压缩约束的一族非线性椭圆系统的多重解，《非线性分析》，221，2022。[43] A. Taheri，V. Vahidifar，具有演化度量与势函数的光滑度量测度空间上非线性抛物方程的梯度估计，即将发表于《非线性分析》，2023。[44] C. Villani，《最优传输：旧与新》，数学综合研究丛书，338，施普林格出版社，2008。[45] G. Wei，W. Wylie，Bakry-´Emery里奇张量的比较几何，《微分几何杂志》，83（2009），377–405。[46] J.Y. Wu，完备流形上非线性抛物方程的李-丘型估计，《数学分析及其应用杂志》，369，（2010）400-407。[47] J.Y. Wu，带权热方程的椭圆梯度估计及其应用，《数学杂志》，280（2015），451–468。[48] J.Y. Wu，非线性抛物方程的梯度估计与刘维尔定理，《数学手稿》，159（2019），511–547。[49] S.T. Yau，完备黎曼流形上的调和函数，《纯粹与应用数学通讯》，28（1975），201-228。[50] Y.Y. Yang，黎曼流形上非线性抛物方程的梯度估计，《美国数学学会会刊》，136（2008），4095–4102。[51] Y.Y. Yang，黎曼流形上的方程 $\Delta u+cu^{-\alpha}=0$ 的梯度估计，《数学学报》，26，（2010），1177-1182。

[52] Q.S. Zhang, $\Delta u - Vu + Wu^p = 0$ 的正解及其抛物型对应方程, 《太平洋数学杂志》, 213, (2004), 163-200。[53] Q.S. Zhang, 里奇流下的索博列夫不等式、热核与庞加莱猜想, CRC出版社, 2011。[54] J. Zhang, B. Ma, 完备非紧流形上 $\Delta_f u + cu^{-\alpha} = 0$ 非线性方程的梯度估计, 《数学通讯》, 19, (2011), 73-84。

School of Mathematical and Physical Sciences, University of Sussex, Falmer, Brighton,United Kingdom.电子邮箱：a.taheri@sussex.ac.uk

School of Mathematical and Physical Sciences, University of Sussex, Falmer, Brighton, United Kingdom.电子邮箱：v.vahidifar@sussex.ac.uk