arXiv:2303.01127v1 [math.LO] 2 Mar 2023

1-H-极小域中可定义的群与域

JUAN PABLO ACOSTA LÓPEZ 和 ASSAF HASSON

摘要。我们证明，在 1-h-极小域中可定义的无限群 G 具有一种严格K可微结构，使得 G 成为一个（弱）李群；并证明具有相同李代数的可定义局部子群在单位元处有相同的芽。由此我们得出，在 K 中可定义的无限域与 K 的有限扩张可定义同构，而在 K 中可定义的一维群是有限-阿贝尔-有限群。在此过程中，我们建立了可定义弱 K流形及其间可定义态射的基础理论。

1. 引言

各种亨泽尔赋值域都适于进行模型论研究。其中包括 p-进数（更一般地说， p-进闭域），以及（非平凡赋值的）实闭域和代数闭域，还有它们的各种扩张（例如加入受限解析函数）。近期，人们提出了一种针对驯性赋值域（特征零）的新公理框架。该框架称为亨泽尔极小性[1]„，由 [4] 和 [5] 提出，作为o-极小性的赋值域类比。1-h-极小性的概念既宽泛又强大。已知的例子包括所有纯亨泽尔赋值域（特征零），以及它们通过受限解析函数得到的扩张。1-h-极小性的已知驯性推论包括良好的维数理论，以及可定义函数的强正则性（例如，可定义函数的一般泰勒逼近定理）。

本文开始研究在 1-h-极小域中可定义的群。借助上述由 1-h-极小性提供的温和性和正则性条件，并受到 o-极小环境中（始于 [11]）以及 p-进闭域中的类似研究（[12]）的启发，我们的第一个定理（命题 6.4，此处以稍弱的形式陈述）如下：

定理 1. 设 K 是一个 1-h-极小域， G 是一个在 K中可定义的无限群。那么， G 具有一个可定义的弱 $\mathcal{C}^k$ （任意 k）流形结构，且相对于该结构， G具有严格可微弱 $\mathcal{C}^k$-李群的结构。也就是说，从可定义的严格可微弱李群范畴到可定义群范畴的遗忘函子是范畴等价。若在 K中代数闭包与可定义闭包重合，则可定义弱李群就是可定义李群。

上文所说的可定义弱李群（在 K 上），是指其底层的 K-流形结构可能没有可定义的（因而也未必是有限的）图册，但可以由

日期：2023年3月3日。作者获得了以色列科学基金会（ISF）第555/21号资助。[1]在 [4] 和 [5] 中，提出了亨泽尔极小性的各种概念—— n-h-极小性——用于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$。为使阐述清晰，我们将只讨论1-h-极小性。

（定义域）有限个相容的 étale 映射覆盖。我们不确定这是否是该结论成立的必要条件，还是证明所致；我们沿用 Pillay 在 o-极小和 p-进环境中的论证（[11], [12]），但在目前的环境中，有限覆盖并非一般元意义下平凡，因此必须使用上述意义下的弱可定义流形。为了推进这一论证，我们必须将可定义函数的研究扩展到 [4]（及其续篇）所做工作的范围之外。具体而言，我们不再研究连续可微函数（如 o-极小环境中的做法），而是研究严格可微函数，并为此类函数证明反函数定理，从而也能为可定义函数推出隐函数定理以及这些定理的其他标准推论。

我们尚不清楚，在 1-h-极小背景下，严格可微性是否可由连续可微性推出（实分析中便是如此），但借助该背景下适用于可定义函数的多变量泰勒逼近定理，可以轻易推得这一结论。

在确立可定义群是李群之后，我们接下来的定理将建立自然的李对应（即断言可定义群态射在单位元处的芽由其在该点的导数决定）。为便于应用，我们将结果表述为局部群的情形（推论 6.11）：

定理 2. 设 K 是一个 1-h-极小域，U 和 V 是可定义严格可微局部李群，且 g、f 是 $U \to V$ 的可定义严格可微局部李群态射。若记 $Z = \{x \in U\colon g(x) = f(x)\}$，则 $\dim_e Z = \dim(\ker(f'(e) - g'(e)))$。

接下来我们证明两个应用。首先，我们借鉴 o-极小背景中的技巧，证明在 1-h-极小域 K 中可定义的每个无限域，都可定义同构于 K 的一个有限扩张，即命题 7.3。这推广了关于实闭赋值域（[2]）和 p-进闭域（[12]）的类似结果。若能在对 RV-排序作出适当额外假设的条件下，将这些结果推广到可解释域（沿着 [6] 或 [9, §6] 的思路），将会很有意思。

我们的下一个应用是证明可定义的一维群是有限扩张阿贝尔扩张阿贝尔的，即推论 8.10。这推广了 o-极小背景（[11]）和 p-进闭域（[12]）中的类似结果，并结合 [1]，给出了 ACVF_0 中可定义的一维群的完备分类。

本文是研究 1-h-极小域中可定义群的第一步。似乎关于完备局部域上李群的一些更标准的结果也可以推广到这一背景。例如，可以证明任何可定义局部群都包含可定义开子群。由于证明较长且涉及新技巧，我们将其留待后续论文。

1.1. 论文结构。第 2 节回顾几何结构中 1-h-极小性和维数理论的基础。第 3 节证明适用于 1-h-极小域的多变量泰勒近似定理，并提出若干强正则性条件（这些条件一般由泰勒定理蕴含），将在论文后续部分中用到。这些结果可能

为专家所熟知；我们将其纳入本文，主要是为了使论述更加完整、清晰（因为其中一些内容似乎尚未见诸文字）。

在第 4 节中，我们证明反函数定理，并证明有关浸入、浸没和常秩函数局部结构的相关定理。尽管其中一些证明类似于实分析（以及更广义的 o-极小背景）中相应命题的证明，但并非所有证明都如此。具体而言，在证明导数为零的函数局部常值时，我们以关键方式用到了 1-h-极小性；而这一结果又用于证明可定义群的李对应。

利用前几节的结果，我们在第 6 节开始研究可定义群。首先证明，可定义群可以赋予一种本质上唯一的严格可微弱李群结构，并且可定义群态射的芽由其在单位元处的导数决定。随后，我们定义与可定义李群相关联的（可定义）李代数，并证明它满足李代数的熟知性质。我们通过局部计算完成这一工作；此前先将李括号刻画为单位元附近交换子函数的二阶部分。

第 7 节专门讨论 1-h-极小域中可定义的域的分类，而在第 8 节中，我们证明关于可定义的一维群的结果。

2. 预备知识

本节介绍一些背景定义和记号，并描述后续各节将用到的相关基本结果。下文的大多数术语要么是标准术语，要么取自 [4]。全文中，K 表示一个非平凡赋值域。我们在记号上不区分结构及其论域。严格来说，我们允许 K 为一个多分类结构（其所有分类都来自 K^{eq}），但除非另有明确说明，我们所说的可定义集是指带参数可定义的 K^n 的子集。所有元组均为有限元组；我们按照模型论中的常见做法，用 $a \in K$ 表示 $a \in K^n$ 的长度 $n =$ （a）。变量也采用相同的约定。

为强调当前设定与实数之间的类比，我们对赋值采用乘法记号。因此，赋值群记作 $(\Gamma, \cdot)$，赋值记作 $|\cdot|\colon K \to \Gamma_0 = \Gamma \cup \{0\}$；若 $x \in K^n$，则定义 $|x| := \max_{1 \le k \le n} |x_k|$。

在 K^n 中，半径为 $r \in \Gamma$ 的开球是形如 $B = \{x \in K^n \colon |x - a| < r\}$（其中 $a \in K^n$）的集合。球赋予 K 一种域拓扑（赋值拓扑）。直到第 6 节为止，文中提及的所有拓扑概念都仅指这种拓扑。

我们记 $\mathcal{O} := \{x \colon |x| \le 1\}$ 为赋值环，记 $\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{O} \colon |x| < 1\}$ 为赋值理想，并记 $k := \mathcal{O}/\mathcal{M}$ 为剩余域。我们还记 $RV = K^\times/1 + \mathcal{M}$。更一般地，只要 $s \in \Gamma$ 和 $s \le 1$，我们就记 $\mathcal{M}_s = \{x \in K \colon |x| < s\}$，并记 $RV_s = K^\times/1 + \mathcal{M}_s$。如果 K 具有混合特征 $(0, p)$，我们记 $RV_{p,\ n} = RV_{|p|^n}$ 和 $RV_{p,\ \bullet} = \bigcup_n RV_{p,\ n}$。

讨论逼近定理时，采用实分析中的大 O 记号会很方便。为清楚起见，我们在赋值域的语境下回顾这一记号：

定义 2.1. (1) 如果 $f\colon U \to K^m$ 和 $g\colon U \to \Gamma_0$ 是在 K^n中 0 的某个开邻域上定义的函数，那么 $f(x) = O(g(x))$ 表示存在 $r, M > 0$ 属于 Γ，

使得若 $|x| < r$，则 $|f(x)| \leq Mg(x)$。我们还将 $f_1(x) = f_2(x) + O(g(x))$ 记作 $f_1(x) - f_2(x) = O(g(x))$。(2) 若 $g\colon U \to K^r$，且 $s \in \mathbb{N}$，则 $O(g(x)^s) = O(|g(x)|^s)$。(3) 若 $f\colon Y \times U \to K^m$ 是一个函数，其中 U 是 K^n中 0 的某个开邻域，且若$g\colon U \to \Gamma_0$，则 $f(y,x) = O_y(g(x))$ 表示对每个 $y \in Y$，存在 $^r y, M_y > 0$，使得若 $|x| < r_y$，则 $|f(y,x)| \leq M_y g(x)$。

如引言中所述，本文采用严格可微性的概念，现回顾如下：

定义 2.2. 设 $U \subset K^n$ 为一个开子集，$f\colon U \to K^m$ 为一个映射。若存在一个线性映射 $A\colon K^n \to K^m$，使得对每个 $\epsilon > 0$，都存在满足 $|f(x) - f(y) - A(x-y)| \leq \epsilon|x-y|$的 $\delta > 0$，且对每个满足 $|x-a| < \delta$和 $|y-a| < \delta$的 x, y，则称 f 在 $a \in U$ 处严格可微。

若 f 在 U的每一点都严格可微，则称其在 U 上严格可微。

在定义所述的情形下，线性映射 A 唯一确定，记作 $f'(a)$。若 f 在一个开集 U上严格可微，则它连续可微。

定义 2.3. 设 $U \subset K^n$ 和 $V \subset K^n$ 是开子集。若 $f\colon U \to V$ 严格可微、双射，且其逆函数严格可微，则称其为严格微分同胚。

正如我们将看到的，严格微分同胚不过是严格可微的微分同胚。

给定一个半径为 r 的开球 $B \subseteq K^n$、K^n 的子集 Y，以及一个满足 $s \leq 1$ 的元素 $s \in \Gamma$，若 $B' \cap Y = \emptyset$ 对于包含 B 的半径为 $s^{-1}r$ 的开球 B' 成立，则称 B 与 Y 是 s-相邻的。

注意，每个不属于 Y 闭包的点都包含在一个与 Y s-相邻的球中。这是因为，若 B 是一个与 Y 不相交、半径为 r 的开球，则包含在 B 中的每个半径为 sr 的开球都与 Y s-相邻。

沿用 [4] 的说法，若有限集 $Y \subset K$ 具有如下性质：对于每个与 Y 不相交的球 B，它要么与 X 不相交，要么包含于 X，则称 $Y \subset K$ 预备了集合 $X \subset K$。更一般地，若 $s \in \Gamma$ 满足 $s \leq 1$，则当每个与 Y B s-相邻的开球要么包含于 X，要么与 X 不相交时，称 Y s 预备了 X。

若 K 是混合特征 $(0,p)$ 的赋值域，给定一个整数 $m \in \mathbb{N}$、一个开球 $B \subseteq K^n$ 和一个集合 $Y \subseteq K^n$，我们称 B 与 Y m-相邻，当且仅当它与 Y $|p|^m$-相邻。类似地，若 $s \in \Gamma$ 且 $s \leq 1$，则称 B 与 Y m-s-相邻，当且仅当它与 Y $|p|^m s$-相邻。给定一个有限 $Y \subset K$ 和 $X \subset K$，若 Y m 预备集合 X（分别地，若 m-s 预备该集合），则称其为预备集合；当且仅当 Y $|p|^m$ 预备 X（分别地，$Y|p|^m s$ 预备 X）。

接下来，我们回顾等特征零 ([4]) 和混合特征 ([5]) 情形下 1-h-极小性的定义：

定义 2.4。设 K 是一个 $\aleph_0$-饱和的非平凡赋值域，特征为零，且它是一个赋值域语言扩张语言中的结构。

(1) 若 K 的剩余特征为 0，则 K 是 1-h-极小的；当且仅当对于 Γ 中任意的 $s \leq 1$、任意的 $A \subseteq K$、$A' \in RV_s$（一个单元素）以及每个 $(A \cup RV \cup A')$-可定义集 $X \subset K$，都存在一个 A-可定义的有限集 $Y \subset K$ s，它对 X 作准备。

(2) 若 K 的特征为混合特征 $(0,p)$，则 K 是 1-h-极小的；当且仅当对于 Γ 中任意的 $s \leq 1$、任意的 $A \subseteq K$、$A' \in RV_s$（一个单元素）以及每个 $(A \cup RV_{p,\bullet} \cup A')$-可定义集 $X \subset K$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 以及一个 A- 可定义的有限集 $Y \subset K$，它对 X 作 m-s- 准备。

在下文中，直接援引定义时，我们只需要考虑 $s = 1$ 的情形（因此不会出现 A'）。不过，应用 1-h-极小性的性质时，参数 s 会隐式出现，例如可定义函数的一般连续性（见 [4, 命题 5.1.1]）。

下文需要研究“一对有限可定义函数”（按 [15] 的术语，即可定义对应）的性质。事实证明，有时可以将关于这类对象的论述化约为在通过代数 Skolem 函数（即针对可定义有限集的 Skolem 函数）扩张语言后，关于可定义函数的论述。为此，以下结果将很方便（见 [4,命题 4.3.3], 和 [5,命题 3.2.2]）：

事实 2.5. 设 K 是一个 1-h-极小赋值域。那么存在一个语言 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$、一个 K 的初等扩张 K'，以及 K' 上一个 $\aleph_0$-饱和的 $\mathcal{L}'$-结构，该结构扩张了 K' 的 $\mathcal{L}$-结构，使得 K' 作为一个 $\mathcal{L}'$-结构是 1-h-极小的，并且对所有 $A \subseteq K'$，都有 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}'}(A) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{L}'}(A)$。

以上及下文中，代数闭包和可定义闭包均假定取自K 排序。下文将把事实 2.5 结论中出现的性质简称为“acl $=$ dcl”。

注释 2.6. 给定一个 $\mathcal{L}$-可定义集 S，关于 S 的拓扑或几何性质的陈述通常可以用一阶 $\mathcal{L}$公式表达。由于 K 上的拓扑可在赋值域语言中定义，且 1-极小结构中可定义集的维数由拓扑决定（见命题 2.11），此类陈述的假设和结论（对于我们固定的 $\mathcal{L}$-可定义集 S）在 K 中、在任何初等扩张 $K \prec K'$中，以及在后者的任何 1-h-极小扩张中，真值都相同。因此，根据事实 2.5，在证明此类陈述（对于固定的可定义 S）时，不妨假设 acl $=$ dcl。

2.1. 几何结构。几何结构在 [8, §2] 中引入。让我们回顾一下定义：一个 $\aleph_0$-饱和结构 M 是预几何的，如果 acl(·) 是一个拟阵，也就是说，它满足交换性质：

$$\text{if } a \in \mathrm{acl}(Ab) \setminus \mathrm{acl}(A), \text{ then } b \in \mathrm{acl}(Aa) \text{ for singletons } a, b \in M.$$

在这种情况下，拟阵给出了维数 $\dim(a/b)$ 的概念：元组 a 在元组 b 上的维数，是满足 $a \in \mathrm{acl}(a'b)$ 的 a 的子元组 a' 的最小长度；而 b-可定义集 X 的维数，则是维数 $\dim(a/b)$ 的最大值，其中 $a \in X$（这与 b 无关）。按照惯例，我们令 $\dim(\emptyset) = -\infty$。我们回顾维数的基本性质（所有参考文献见 [8,§2] ）。该维数满足可加性

$$\dim(ab/c) = \dim(a/bc) + \dim(b/c),$$

我们将在无需进一步说明的情况下引用这一点。如果 $\dim(a/bc) = \dim(a/c)$，则称 a 和 b 在 c 上代数独立。注意，根据维数的可加性，这是一个对称关系。还要注意，可加性意味着：如果 b、c 在 a 上相互代数相关，即 $b \in \mathrm{acl}(ac)$ 且 $c \in \mathrm{acl}(ab)$，那么 $\dim(b/a) = \dim(c/a)$（特别地，当 c 是 b 在一个

a-可定义双射下的像时，这一点成立）。如果 M 是一个预几何结构，并且 $f\colon X \to Y$ 是一个纤维维数恒定为 k 的满射可定义函数，那么 $\dim(X) = \dim(Y) + k$。这是可加性公式的一个推论。

给定一个 a可定义集 X， X 在 a 上的泛型元素是满足 $\dim(b/a) = \dim(X)$ 的元素 $b \in X$。根据紧致性，在足够饱和的模型中总能找到泛型元素。若 $\dim(X \setminus Y) < \dim(X)$，则称 $Y \subset X$ 为大。这等价于 Y 包含 X 的每个泛型点。

若一个预几何结构 M 消去量词 $\exists^\infty$，则称其为几何结构。若 M 是几何的，那么维数在可定义族中是可定义的。具体而言，对于可定义族 $\{X_a\}_{a\in S}$，集合 $\{a \in S : \dim(X_a) = k\}$ 是可定义的。

下面这个简单事实是将预几何的定义转化为可定义集的性质。顺便指出，这种改述意味着预几何这一性质在约化结构下保持不变。也就是说，若 M 是一个 $\aleph_0$ 饱和的预几何 $\mathcal{L}'$ 结构，且 $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$，那么 M 也是一个预几何 $\mathcal{L}$ 结构。为完整起见，我们给出证明：

事实 2.7. 设 M 是一个 $\aleph_0$-饱和结构。那么， M 是预几何的，当且仅当对于每个可定义的 $X \subset M \times M$，若投影 $\pi_1\colon X \to M$ 到第一个因子的映射是有限到一的，且 $\pi_2\colon X \to M$ 是到第二个因子的投影，则集合 $Y = \{c \in M\colon \pi_2^{-1}(c) \cap X$ 是无限的$\}$是有限的。

证明。设 M 是预几何的，并设 $X \subset M \times M$ 是 A-可定义的，使得对于所有 $x \in M$， $\pi_1^{-1}(x) \cap X$ 都是有限的。再设 $Y = \{y \in M\colon \pi_2^{-1}(y) \cap X$ 是无限的$\}$ 是无限的。根据紧致性和饱和性，我们可以选取 $b \in Y$，使得 $\dim(b/A) = 1$。类似地，我们可以找到 $a \in \pi_2^{-1}(b) \cap X$，使得 $\dim(a/Ab) = 1$。因此 $\dim(ab/A) = 2$，从而 $\dim(X) \geq 2$。这与对于所有 $x \in M$，$\pi_1^{-1}(x) \cap X$ 都是有限的这一事实矛盾。

反过来，假设 A 是 M 的有限子集，且 a、$b \in M$ 是单元素，并且 $a \in \operatorname{acl}(Ab) \setminus \operatorname{acl}(A)$。那么存在一个 A-可定义集 $X \subset M \times M$，使得 $(b, a) \in X$，并且$\pi_1^{-1}(b) \cap X$是有限的，设其基数为 k。若取 $Z = \{c \in M\colon \pi_1^{-1}(c) \cap X$的基数为 $k\}$，那么可以用 $X \cap Z \times M$ 替换 X，并且可以假设对于所有 $c \in M$， $\pi_1^{-1}(c) \cap X$ 要么为空，要么具有恒定的有限基数。在这种情况下，根据假设，我们得出$Y = \{y \in M\colon \pi_2^{-1}(y) \cap M$ 是无限的$\}$ 是有限的。注意， Y是 A-不变且可定义的，因此它是A-可定义的。我们得出 $a \notin Y$，因为 $a \notin \operatorname{acl}(A)$，所以 $b \in \operatorname{acl}(Aa)$，如所要求。□

关于 acl-维数的下一个刻画应该是众所周知的：

事实 2.8. 设 M 是一个 $\aleph_0$-饱和结构，并且消去了 $\exists^\infty$ 量词。假设存在一个函数 $X \mapsto d(X)$，其定义域为 M（的笛卡尔幂）的非空可定义子集，值域为 $\mathbb{N}$，且满足：

(1) 如果 $X \subset M^n \times M$ 使得第一坐标投影 $\pi_1\colon X \to M^n$ 是有限到一的，那么 $d(X) = d(\pi_1(X))$。 (2) 如果 $X \subset M^n \times M$ 使得第一坐标投影 $\pi_1\colon X \to M^n$ 具有无限纤维，那么 $d(X) = d(\pi_1(X)) + 1$。 (3) 如果 $\pi\colon M^n \to M^n$ 是坐标置换，那么 $d(X) = d(\pi(X))$。

(4) $d(X \cup Y) = \max\{d(X), d(Y)\}$。 (
5) $d(M) = 1$(6) $d(X) = 0$当且仅当 X
是有限的。

那么， M 是一个几何结构，且 d 与其 acl-维数一致。

证明。只需证明 M 是预几何的。我们使用事实 2.7。设 $X \subset M \times M$ 满足：对所有 $x \in M$, $\pi_1^{-1}(x) \cap X$ 都是有限的。取 $Y = \{y \in M : \ \pi_2^{-1}(y) \cap X$ 是无限的$\}$。由于M 消去了 $\exists^\infty$ 量词，我们得到 Y 是可定义的。如果 Y 是无限的，我们便得出$d(X) \geq d(X \cap \pi_2^{-1}(Y)) = d(Y) + 1 = 2$。第一个不等式由条目 (4) 得出，第二个等式由条目 (3) 和 (2) 得出，第三个等式由条目 (6) 得出。另一方面， $d(X) = d(\pi_1(X)) \leq d(M) = 1$，第一个等式由条目 (1) 得出，第二个不等式由条目 (4) 得出，第三个等式由条目 (5) 得出。这就产生了矛盾，证明至此完成。

为了证明 $d(X) = \dim(X)$ 对于 $X \subset M^n$ ，我们可以对 n 使用归纳法。基础情形 $n = 1$ 由条目 (4)、(5) 和 (6) 得出。因此，假设 $X \subset M^n \times M$。记 $Y = \{x \in M^n : \ \pi_1^{-1}(x) \cap X$ 是无限的$\}$。根据假设， Y是一个可定义集。记 $X_1 = \pi_1^{-1}(Y) \cap X$ 以及 $X_2 = X \setminus X_1$。然后由条目 (1)、(2) 和 (4)，我们得出 $d(X) = \max\{d(X_1), d(X_2)\} = \max\{d(Y) + 1, \ d(\pi_1(X) \setminus Y)\}$。出于同样的原因，我们有公式 $\dim(X) = \max\{\dim(Y) + 1, \ \dim(\pi_1(X) \setminus Y)\}$，因此 $d(X) = \dim(X)$，如要求。□

下一个事实也是标准的：

事实 2.9. 假设 M 是一个几何结构。假设 $X \subset M^n$ 是 a-可定义的。那么存在对 X 的划分，将其分为有限个 a-可定义集 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$，使得对于划分 X_k 的每个成员，都存在一个坐标投影 $\pi : X_k \to M^r$ ，该投影是有限到一的，且其像的维数为 r。

注释 2.10. 对于这一陈述，我们需要允许将单位映射 id : $M^n \to M^n$ 作为坐标投影。

另外，回想一下， M^0 是一个只含一个元素的集合。对于这一陈述，我们还需要允许将常值函数 $M^n \to M^0$ 作为坐标投影。

证明. 对环境空间 n 的维数作归纳。考虑投影到前 $n-1$ 个坐标的映射 $\pi_1 : M^n \to M^{n-1}$。那么，由满足纤维 $X_y = \pi_1^{-1}(y) \cap X$ 为无限集的 y 构成的集合 $Y \subset M^{n-1}$ 是可定义的。因此，对 X 作划分后，我们可以假设 X 在 M^{n-1} 上的所有非空纤维要么都是有限的，要么都是无限的。如果 $X \to K^{n-1}$ 的所有纤维都是有限的，那么由归纳法即可完成证明。

如果所有非空纤维都是无限的，那么由归纳法可知，存在一个划分 $Y = \bigcup_i Y_i$，并且对每个 Y_i，都存在一个坐标投影 $\tau : Y_i \to K^r$ ，其纤维有限，且 $r = \dim(Y_i)$。记$\pi_2 : M^n \to M$ 为投影到最后一个坐标的投影。于是令 $X_i = X \cap \pi_1^{-1}(Y_i)$，投影 $\pi(x) = (\tau(\pi_1(x)), \pi_2(x))$便具有所需性质。□

下一个命题是关键。它断言 1-h-极小域是几何的，并且（结合前一个事实）将这类结构中的拓扑与维数联系起来：

命题 2.11. 设 K 是一个 1-h-极小赋值域。那么：

(1) K 是一个几何结构。

(2) 每个 $X \subset K^n$ 都满足 $\dim(X) = n$，当且仅当 X 具有非空内部。每个$X \subset K^n$ 都满足 $\dim(X) < n$，当且仅当 X 无处稠密。(3) 对于 $X \subset K^n$，我们有 $\dim(X) = \max_{x\in X} \dim_x(X)$，其中我们将 $\dim_x(X)$ 记为 X 在 x处的局部维数，定义为 $\dim_x(X) = \min\{\dim(B \cap X) : x \in B$ 是一个开球$\}$

证明。这实质上是 [4, 在剩余特征为 0 时命题 5.3 的第 (1)–(5) 项，4] 而在混合特征时则包含于 [5, 命题 3.1。1]

例如，假设 K 的剩余特征为 0。K 是几何的这一点在 [4, 命题 5.3 的证明过程中得到了证明。4]我们也可以由事实 2.8 和 [4, 命题 5.3 推导出这一点。4]

拓扑刻画 $\dim(X) = n$当且仅当 X 有非空内部，是 [4, 命题 5.3 第 (1) 项的一个特例。4]$\dim(X) < n$当且仅当 X 无处稠密，由此可得。事实上，若 $\dim(X) = n$，则 X 有非空内部，因此它不是无处稠密。若 $\dim(X) < n$ 且 $U \subset K^n$ 是非空开集，则 $\dim(U \setminus X) = n$，因此$U \setminus X$ 有非空内部。这意味着 X 无处稠密。

维数是局部维数最大值，这是命题 5.3.4 的第 (5) 项

[4] □

命题 2.12. 设 K 是一个 1-h-极小域。设 $f\colon U \to K^m$ 是一个可定义函数。那么存在一个可定义开稠密子集 $U' \subset U$，使得 $f\colon U' \to K^m$ 连续。

证明. 在剩余特征为 0 时，这实质上是 [4, 命题 5.1.1] 的一个特例；在混合特征时，则包含于 [5, 命题 3.1.1] 中。

事实上，由于开稠密集的交仍是开稠密集，我们可将问题归结到情形$m = 1$。由这些命题可知，f 连续的点所成的集合 Z 在 U中稠密。由于 Z 并非无处稠密，我们根据命题 2.11 的第 (2) 项得出 $\dim(Z) = n$，因此 Z 具有非空内部。若 $V \subset U$ 是一个非空可定义开子集，那么，由于 $Z \cap V$是 $f|_V$连续的点所成的集合，根据刚才的证明，$Z \cap V$具有非空内部。由此可知，f 连续的点所成的集合在 U中有稠密内点，证毕。□

接下来，我们为 $Y^{[s]}$ 描述一种拓扑，其中 $Y^{[s]}$ 是 Y 的基数为 s 的子集所成的集合，Y 是一个豪斯多夫拓扑空间，s 是一个正整数。我们证明一个稍微一般的结论，该结论将在以下情形中应用：X 是 $Y^s \setminus \Delta$，即由 Y^s 的具有互异坐标的元组组成的集合；对称群 S_s 作用在 s 个元素上，并通过坐标置换作用于 Y^s。在此情形下，轨道空间可与 $Y^{[s]}$ 识别。

事实 2.13. 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，G 是一个通过同胚作用于 X 的有限群，并且每个 $x \in X$ 在 G 中都有平凡稳定子。则赋予商拓扑的 X/G 是豪斯多夫的，并且映射 $p\colon X \to X/G$ 是一个闭有限覆盖映射。事实上，对于每个 $x \in X$，存在一个开集 $x \in U \subset X$，使得 $\{gU : g \in G\}$ 两两不交，$p^{-1}p(U) = \bigcup_g gU$，并且 $p|_{gU}$ 是到 $p(U)$ 上的同胚。

证明。我们知道，p 是开集，因为对于开集 U，$p^{-1}p(U) = \bigcup_{g\in G} gU$ 是开集。考虑 x的轨道$\{gx\}_{g\in G}$。根据假设，若 $g \neq h$，则 $gx \neq hx$。令 V为 X 中包含$\{gx\}_{g\in G}$的一个开集。现在，由于 X 是豪斯多夫的，我们得出存在 U_g 个 gx的开邻域，它们包含于 V中，且对 $g \neq h$有 $U_g \cap U_h = \emptyset$。若取$U = \bigcap_{g\in G} g^{-1}U_g$，则 $gU \subset U_g$

因此 $\{gU: \ g \in G\}$ 两两不交。我们得出 p是闭的，并且限制在 gU上是一个同胚。由此可知 X/G 是豪斯多夫的。事实上，若 $p(x) \neq p(y)$，则存在 X的开集 V_1 和 V_2，它们互不相交，并且满足 $p^{-1}p(x) \subset V_1$ 以及$p^{-1}p(y) \subset V_2$。由于 p是闭的，存在 X/G 中的开集 $p(x) \in U_1$ 和 $p(y) \in U_2$，使得$p^{-1}(U_i) \subset V_i$。我们得出 U_1 和 U_2 互不相交。□

命题 2.14. 设 K 是一个 1-h-极小赋值域。假设 $U \subset K^n$ 是开集，且 $f: U \to (K^r)^{[s]}$ 可定义。那么存在一个开稠密可定义集 $U' \subset U$，使得 f 在 U' 中连续。

证明。此陈述等价于说，f 连续的点集的内部是稠密的。由于这一性质可以用一阶公式表达，我们可以假设 acl $=$ dcl，参见事实 2.5 及其后的说明。

在这种情况下，我们有一个可定义截面 $s: (K^r)^{[s]} \to K^{rs}$；并且，若 $V \subseteq U$ 是开稠密集，且 sf 连续（如命题 2.12 所示），那么 f 在 V 中连续。□

命题 2.15. 假设 $X \subset K^n$ 是 b-可定义的。那么存在对 X 的有限划分，使其划分为 b-可定义集，并且对于划分中的每个元素 Y，都存在一个坐标投影 $\pi: Y \to U$，其映射到开集 $U \subset K^m$，使得 π 的所有纤维具有相同的基数，等于 s，且关联映射 $f: U \to (K^{n-m})^{[s]}$ 连续。

注 2.16. 与注释 2.10 一样，我们需要考虑 $m = 0$ 和 $m = n$这两种情形。集合 K^0只包含一个点，因此只有一种拓扑。

证明。由维数理论和前面的观察可知这一点。具体来说，我们对 X的维数进行归纳。

首先回顾一下，X 可以划分为有限个 b-可定义集，使得对划分中的每个集合 X'，都存在一个坐标投影 $\pi: X' \to K^r$，其纤维有限且 $r = \dim(X')$，见事实 2.9。

因此现在设 $\pi: X \to K^r$ 是一个纤维有限且 $r = \dim(X)$的坐标投影，并记 $\pi': X \to K^{n-r}$ 为投影到其余坐标的投影。存在一个整数 s，它是 π的纤维基数的上界。若记 Y_k 为满足 $a \in K^r$ 使得$X_a = \pi'(\pi^{-1}(a))$ 的基数为 k 的元素集合，则得到 $Y_0 \cup \cdots \cup Y_s = K^r$。现在令 $V_j \subset Y_j$ 为 Y_j 内部中的开稠密集，并使映射 $V_j \to (K^{n-r})^{[j]}$（由 $a \mapsto X_a$ 给出）连续，见命题 2.14。根据命题 2.11 的第 2 项，集合 $\{x \in X: \pi(x) \in Y_j \setminus V_j, 1 \leq j \leq s\}$ 的维数小于 X，因此我们可以对其应用归纳假设。□

回忆一下，拓扑空间 X 的子集 $Y \subset X$ 若可表示为一个开集与一个闭集的交，则称其为局部闭的。这等价于 Y 在其闭包中是相对开集。还等价于：对于每个点 $y \in Y$，都存在 y 的一个邻域 V，使得 $Y \cap V$ 在 V 中是相对闭集。

命题 2.17。设 K 是 1-h-极小的，且 $X \subset K^n$ 是一个 a-可定义集。那么 X 是 K^n 的有限个 a-可定义的局部闭子集的并。

证明。这是命题 2.15 的推论。具体而言，X 可划分为有限个可定义子集的并，对每个子集，都存在一个纤维有限的坐标投影，将其映到

一个开集 U上，因此我们可以假设 X 具有这种形式。我们还可以进一步假设纤维具有恒定基数 k，且关联映射 $U \to (K^r)^{[k]}$ 连续。于是 X 在 $U \times K^r$ 中是闭集，因而是局部闭集。□

最后，我们回顾维数的一个更困难的性质。我们只会在命题 5.20、命题 6.9 和推论 6.14 中使用这一性质，而这些结果并未用于主要定理。

命题 2.18. 设 K 是一个 1-h-极小域，且 $X \subset K^n$。那么 dim(cl(X) $\setminus$ X) <dim(X)。

这是 [4, 命题 5.3.4] 中关于剩余特征为 0 的第 6 项；在混合特征情形下，它包含于 [5] 命题 3.1.1 中。

3. 泰勒近似

在本节中，我们将证明，在 1-h-极小情形下，单变量泰勒近似定理（[5, 定理 3.1.2]）蕴含该定理的多变量版本。在等特征 (0,0)) 情形下，这就是 [4, 定理 5.6.1]。尽管混合特征情形下的证明本质上是类似的，但为完整起见，并鉴于这一结果在后文中的重要性，我们仍将给出详细证明。

接下来，我们将介绍一些可定义函数的正则性条件（在当前语境下，这些条件由泰勒逼近定理蕴含），它们对于与可定义群的李代数相关的计算是必要的。

首先，回顾多重指标记号。若 $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$，我们记 $|i| = i_1 + \cdots + i_n$和 $i! = i_1! \cdots i_n!$. 对于 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n$，我们记 $x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$。另外，若 $f\colon U \to K$ 是定义在 K^n 的开集上的函数，则只要 $f^{(i)}(x) = (\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} f)(x)$存在，我们就用它表示该导数。注意，我们并不假设混合偏导数相等；不过，请参见推论 3.6。

命题 3.1. 设 K 是一个剩余特征为 0 的 1-h-极小域。假设 $f\colon U \to K$是一个 a-可定义函数，且 $U \subset K^n$ 是开集，并设 $r \in \mathbb{N}$。那么存在一个维数严格小于 n的 a-可定义集C，使得对于任意与 C 不相交的开球 $B \subseteq U$，导数 $f^{(i)}$ 在 B 中对每个满足 $|i| \leq r$的 i 都存在，并且在 B中具有常值赋值。此外，

$$\left| f(x) - \sum_{\{i : |i| < r\}} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i \right| \leq \max_{\{i : |i| = r\}} \left| \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i \right|$$

对于每个 $x, x_0 \in B$。

这是 [4, 定理 5.6。1]。我们的首要任务是将这一结果推广到正剩余特征的情形。

以下事实可通过标准的紧致性论证证明，并且常常被隐式地应用。为方便起见，我们补充这一论证。

事实 3.2. 设 M 是一个 $\aleph_0$-饱和结构，且 $\{\Phi^l(\bar{D})\}_{l \in I}$ 是一族关于 M 中可定义集 $D = (D_1, \dots, D_n)$ 的性质，由一个有向集 I 索引。设 b 是 M 中的一个元组，S 是一个 b- 可定义集。假设

(1) 对所有 l，性质 Φ^l 在可定义族中是可定义的。也就是说，若 $\{D_{i,a}\}_{a\in T}$ 是 b-可定义族，则集合 $\{a\in T\colon \Phi^l(\bar{D}_a)$ 成立$\}$ 是 b-可定义的。(2) 对所有 $l\le l'$，Φ^l 蕴含 $\Phi^{l'}$。(3) 对每个 $a\in S$，存在 ba-可定义集 $D_{i,\,a}$，满足对某个 $l_a\in I$ 有 Φ^{l_a}。

于是存在 $\{D_{i,a}\}_{a\in S}$ b-可定义的集合族，以及一个固定的 $l\in I$，使得对每个 $a\in S$，$\Phi^l(\bar{D}_a)$ 都成立。

注 3.3. 严格来说，Φ^l 是

$$\{(D_1,\dots,D_n): D_i \text{ is a definable set and}\}$$

的一个子集；若元组 $(D_1,\cdots,D_n)$ 属于 Φ^l，则称 $\Phi^l(D_1,\dots,D_n)$ 成立。

还要注意，元组 $(D_1,\dots,D_n)$ 可以替换为 $D_1\times\cdots\times D_n$，因此不失一般性，可以取 Φ^l 为 $\Phi^l(D)$ 的形式。

证明。设 $a\in S$。根据假设，存在 b-可定义族 $\{D^a_{i,a'}\}_{a'\in S^{0,i}\ ^a}$，以及一个元素$l^a\in I$，使得 $(D^a_{1,a},\dots,D^a_{n,a})$ 满足 Φ^{l^a}。将 S^a 视为由满足以下条件的 $a'\in S$ 构成的集合：对 $i=1,\dots,n$，$a'\in S^{0,i}\ ^a$，并且 $\Phi^{l^a}(\bar{D}^a_{a'})$ 成立。根据假设，这是一个 b-可定义集，包含于 S 且包含 a。

我们得出，$S=\bigcup_{a\in S}S^a$ 是由 b可定义集构成的 S 覆盖，因此根据紧致性和饱和性，存在一个有限子覆盖，记作 $S=S^1\cup\cdots\cup S^k$，对应于 $S^r=S^{a_r}$。事实上，如果不存在有限子覆盖，那么表达 $x\in S$ 且对所有 $a\in S$均满足 $x\notin S^a$ 的部分类型是一致的b-类型，因此在 M 中的一个实现将与 $S=\bigcup_{a\in S}S^a$矛盾。

那么，$D_{i,\,a}$ 定义为$D^{a_r}_{i\ ,\ a}$，如果 $a\in S^r\setminus\bigcup_{r'<r}S^{r'}$ 满足 $\{D_{i,a}\}_{a\in S}$ 构成可定义族。若取 l 使得$l\ge l^{a_1}$，.....，l^{a_k}，那么我们便得到，对于每个 $a\in S$，Φ^l（$\bar{D}_a$）都成立，正如所需。

□

记号 3.4. 若 $D\subset E\times F$且 $a\in E$，我们常将 $D_a=\{b\in F\colon$（a,b）$\in D\}$记作如此。若 $b\in F$，在不会引起歧义时，我们记 $D_b=\{a\in E\colon$（a,b）$\in D\}$。若 $f\colon D\to C$ 是一个函数，我们令 $f_a\colon D_a\to C$表示函数 f_a（b）$=f$（a,b），对于 $b\in F$的情形也类似，记作 f_b。

命题 3.5. 设 K 是一个正剩余特征的 1-h-极小域，$f\colon U\to K$ 是一个a-可定义函数，且 $U\subset K^n$ 是开集，并设 $r\in\mathbb{N}$。那么存在一个整数 m 和一个集合 C，它是闭的且 a-可定义，满足 $\dim(C)<n$；使得对于每个开球，若 $B\subseteq U$ m 与 C 相邻，则对于每个满足 $|i|\le r$ 的 i，$f^{(i)}$ 都存在于 B 中，且 $f^{(i)}$ 在 B 上具有常值赋值。此外，

$$\left|f(x)-\sum_{\{i:|i|<r\}}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i\right|\le\max_{\{i:|i|=r\}}\left|\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i\right|$$

对于每个 x，$x_0\in B$。

证明。我们对 n进行归纳，$n=1$ 的情形由 [5, 定理 3.1.2]给出。假设结论对 n 成立，并令 $f\colon U\to K$ 为一个 a-可定义函数，其中 $U\subset K^n\times K$ 为开集，i 为一个多重指标，且$|i|\le r$。那么，对每个 $x\in K^n$，存在一个有限的 ax-可定义集 $C_x\subset K$ 和一个整数 m_x，使得

that

$$|f_x(y) - \sum_{s<r} \frac{1}{s!} f_x^{(s)}(y_0)(y-y_0)^s| \leq |\frac{1}{r!} f_x^{(r)}(y_0)(y-y_0)^r| \tag{1}$$

对每个 y 和开球 m_x中 C_x附近的 y_0 都成立，并且 $|f_x^{(s)}(y)|$ 存在，且在任何这样的开球中均为常值。根据标准的紧致性论证（见事实 3.2），我们可以假设这些C_x 是一致可定义的，并且存在某个 $m \in \mathbb{N}$，使得对所有 x都有 $m_x = m$。定义$C = \cup_x \{x\} \times C_x$。根据归纳假设，对于每个 $y \in K$，我们可以将定义在 $V_y = \text{Int}(U_y \setminus C_y)$ 上的函数 $g_{s,\ y}(x) = f_x^{(s)}(y)$ 逼近到 $r-s$ 阶。通过同样的紧致性论证，我们得到一个自然数 m' 和一个 a-可定义的子集族 $\{D_y\}_{y \in K^n}$，其维数满足 $\dim(D_y) < n$，并且对于每个满足 $|i| \leq r-s$ 的多重指标 i，$g_s^{(i),\ y}$ 存在，且在 V_y 中 D_y 附近的任意球 m' 上具有常值赋值。此外，

$$|g_{s,y}(x) - \sum_{\{i:|i|<r-s\}} \frac{1}{i!} g_{s,y}^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i| \leq \max_{\{i:|i|=r-s\}} |\frac{1}{i!} g_{s,y}^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i| \tag{2}$$

将 m 和 m' 替换为它们的最大值后，不妨设 $m = m'$。定义 $D := \bigcup_y D_y \times \{y\}$。由维数的可加性，$\dim(C) \leq n$ 且 $\dim(D) \leq n$。最后，取 $E = C \cup D \cup \bigcup_y (U_y \setminus V_y) \times \{y\}$。类似的维数考虑表明，$\dim(E) < n+1$。

注意，对于 $(x,y) \in U \setminus E$，我们有：对于满足 $|i| + s \leq r$的 i和 s，$f^{(i,s)}(x,y)$ 和$g_s^{(i),\ y}(x)$ 存在且相等。

现在，对于 $x \in K^n$，定义 $W_x = \text{Int}(U_x \setminus E_x)$；对于函数 $h_{x,\ s,\ i}$：$y \mapsto f^{(i,s)}(x,y)$，其中 $s + |i| \leq r$ 定义在 W_x上，我们可找到一个有限集 $F_x \subset W_x$，使得 $\{F_x\}_x$ 是一个 a-可定义族，并且存在一个整数 m'，使得在每个与 F_x相邻的 W_x m'球中，$h_{x,\ s,\ i}$ 具有常值赋值。不妨像之前一样设 $m' = m$。令 G 为 $E \cup \bigcup_x \{x\} \times F_x \cup \bigcup_x \{x\} \times (U_x \setminus W_x)$ 的闭包。注意，$\dim(G) < n+1$。

取 $B_1 \times B_2$一个球，在 U, m 中与 G 相邻。于是对于每个 $x \in B_1$，我们都得到 B_2 与 m 相邻，并且同时与C_x、F_x 和 $B_2 \subseteq W_x$相邻。类似地，对于每个 $y \in B_2$，$B_1 \subseteq V_y$ 都与 m 相邻。

我们得出结论：对于每个 $(x,y) \in B_1 \times B_2$，都存在 $f^{(i,s)}(x,y)$，且其赋值为常值；对于每个满足 $|(i,s)| \leq r$ 的指标 (i,s)，结论亦然。事实上，对于每个 (x,y)、$(x',y') \in B_1 \times B_2$，我们都有

$$|f^{(i,s)}(x',y')| = |g_{s,y'}^{(i)}(x')| = |g_{s,y'}^{(i)}(x)| = |h_{x,s,i}(y')| = |h_{x,s,i}(y)| = |f^{(i,s)}(x,y)|,$$

因为第二个等式由关于 C_x 的条件推出，而第四个等式由关于 F_x 和 W_x 的条件推出。现在，若 (x,y) 和 (x_0,y_0) 属于 $B_1 \times B_2$，则方程 1 和方程 2 成立，并且对于方程 1 的误差项，我们有 $|f_x^{(r)}(y_0)| = |f_{(0,r)}(x,y_0)| = |f_{(0,r)}(x_0,y_0)|$。记

$$M = \max \left\{ \frac{1}{i!s!} |f^{(i,s)}(x_0,y_0)(x-x_0)^i (y-y_0)^s| : |(i,s)| = r \right\}.$$

那么，方程 1 得出 $|f(x,y)-\sum_{s<r}\frac{1}{s!}f_{(0,s)}(x,y_0)(y-y_0)^s|\leq M$。此外，由方程 2 可得

$$\left|\frac{1}{s!}f^{(0,s)}(x,y_0)(y-y_0)^s-\sum_{\{i:|i|<r-s\}}\frac{1}{i!s!}f^{(i,s)}(x_0,y_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^s\right|\leq M.$$

对所有小于 r 的 s 求和，并利用超度量不等式，我们得到

$$\left|\sum_s\frac{1}{s!}f^{(0,s)}(x,y_0)(y-y_0)^s-\sum_{\{(i,s):|i|+s<r\}}\frac{1}{i!s!}f^{(i,s)}(x_0,y_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^s\right|\leq M.$$

将其与方程 1 相加，并再次利用超度量不等式，我们得出结论。 □

作为上述定理的推论，我们得到可定义函数的偏导数在一般元处可交换。

推论 3.6。设对于某个开集 $U\subset K\times K$， f 是一个可定义函数： $U\to K$。则存在一个开稠密集 $U'\subset U$，使得对于每个 $(x,y)\in U'$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

并且，特别地，上述方程中的各项在 U' 中存在。

此外，若 $f\colon U\to K$ 使得偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$、 $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 存在且在 U 上连续，则它们相等。

证明。取一个一维闭球 $C\subset K\times K$，并取一个整数 m，如泰勒逼近性质对三阶误差所给出的那样。我们还可以假设， $\pi(C)$ 和 m 对函数 $f\pi$ 满足相同的泰勒逼近性质，其中 π 是坐标置换 $(x,y)\mapsto(y,x)$。

那么，对于球 m 中彼此相邻于 C 的 (x,y)、$(x_0,y_0)\in B_1\times B_2$（大-$O$ 记号见定义 2.1），我们得到

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+(x-x_0)^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)+(y-y_0)^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)+\\&(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)+O((x-x_0,y-y_0)^3).\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}f\pi(y,x)=f(x,y)=&f(x_0,y_0)+(x-x_0)^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)+(y-y_0)^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)+\\&(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)+O((x-x_0,y-y_0)^3)\end{aligned}$$

作差后得到

$$(x-x_0)(y-y_0)\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)-(x-x_0)(y-y_0)\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=O((x-x_0,y-y_0)^3)$$

取 $h=(x-x_0)=(y-y_0)$ 足够小，我们得到 $h^2(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0))=O(h^3)$，因此 $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=O(h)$。这只有在左边为 0 时才有可能，正如所需。□

以下记号旨在与单项式 ax^n for $a\in K$ and $x\in K$相似，用于表示多元函数的泰勒近似。

定义 3.7。设 m,n 为正整数，且 $r\in\mathbb{N}$。设 $J=J(r,n)=\{j\in\mathbb{N}^n\colon |j|=r\}$。设 $a=(a_j)_{j\in J}$ 满足：对所有 $j\in J$，均有 $a_j\in K^m$。那么，对于 $x\in K^n$，我们定义 $ax^r=\sum a_jx^j,_{j\in J}$

其中 $x^j:=\prod_{i=1}^n x^{j(i)}$。注意， $x\mapsto ax^r$ 是一个函数 $K^n\to K^m$。

例如，考虑上述记号下的情形 $r=1$。此时 $J=\{e_1,\dots,e_n\}$，并且对于 $j\in J$，我们有 $x^j=x_j$（其中 $x=(x_1,\dots,x_n)$），因此对于满足 $a_j\in K^m$ 的 $a=(a_j)_{j\in J}$，可得 $ax=A\cdot x$，其中 A 是这样一个矩阵：其第 j 列为 a_j。

定义 3.8。设 $U\subset K^k$ 为开集， $f\colon U\to K^m$ 为函数，且 $a\in U$。如果 f 在 a 处可按以下意义由 a 附近的次数为 n 的多项式逼近，则称 f 在 a 处是 P_n：存在常数 b_0、$\cdots$、b_n $f(a+x)=\sum_{r\le n}b_rx^r+O(x^{n+1})$。

鉴于上述例子，根据定义可立即推出， P_1 函数是可微的；对于定义中的系数 b_1，我们可以取 $f'(a)$（或者更准确地说，$b_1^t=f'(a)$）。由下面的引理 3.10 可知，事实上，只要 f 对任意 $n\ge 1$ 是 P_n 的， $b_1=f'(a)^t$。

定义 3.9。设 $U\subset K^k$ 为开集， $f\colon U\to K^m$ 为函数，且 $a\in U$。如果存在 $\gamma\in\Gamma$，使得对于满足 $|x-a|$、$|x'-a|<\gamma$ 的任意 x、x'，都有 $f(x)=\sum_{r\le n}c_r(x')(x-x')^r+O(x-x')^{n+1}$，其中 c_r 是在 a 处为 P_{n-r} 的函数，则称 f 在 a 处是 T_n。

注意，在前面的定义中，记号 $O(x-x')^{n+1}$（见定义 2.1）中隐含的常数不依赖于 x'；因此，该定义要求关于中心 x' 具有一定的统一性，而这并不能仅仅通过假设球 a 周围每一点处的 f 都是 P_n 来推出。

还要注意，如果 f 在 $c=(b,a)$ 处是 T_n，那么特别地，对于在 b 处的 P_{n-k} 函数，有 $f(z,a+x)=f(z)+f_1(z)x+\cdots+f_n(z)x^n+O(x^{n+1})$（且 $O(x^{n+1})$ 中的常数关于 z 是统一的）。这由定义取 $x=(z,a+x)$ 和 $x'=(z,a)$ 即可得出。

P_n（分别为 T_n）函数的和与积是 P_n（分别为 T_n）；向量函数是 P_n（分别为 T_n），当且仅当其坐标函数是 P_n（分别为 T_n）。

我们也可以要求更强的条件 ST_n，其定义方式类似 T_n，但要求函数 c_r 对 $r=1$，……，n 归纳地满足 ST_{n-r}（基例为 $ST_0=T_0$）。这个定义或许更自然，而且下文可以证明，对于这一概念，同样的结果也成立；不过，所述定义已足以满足引理 3.15 的要求，而这正是我们的主要动机。

引理 3.10. 若 f 在 a处为 P_n，则对于每个数 $i\le n$，定义 3.8 中的系数 b_i 由 f唯一确定。

证明。问题很容易归结为以下情形：将 f 一个多项式限制在原点的某个开邻域 U上。也就是说，我们需要证明：如果在任意开

$U \subseteq K^r$ 那么对于所有 i都有 $b_i = 0$。对于 x_0 固定的情形，令 $x = tx_0$，并考虑单变量多项式$P(tx_0) = \sum_i \leq n (b_i x_0^i)t^i = O(t^{n+1})$。如果我们知道 $r = 1$ 的结果，就可以得到$b_i x_0^i = 0$。由于 $x_0 \in U$ 是任意的，并且 U 包含一个由 r 个无限集构成的笛卡尔积，这就意味着对于所有 i都有 $b_i = 0$。因此，我们归结为证明 $r = 1$的结果。

在这种情况下，如果 i 是最小的，且 $b_i \neq 0$，我们得到 $x^i = O(x^{i+1})$，这与矛盾。 □

命题 3.11。如果 g 在 a 处是 P_n，且 f 在 $g(a)$处是 P_n，那么复合 $f \circ g$ 在 a处是 P_n。
如果 g 在 a 处是 T_n，且 f 在 $g(a)$处是 T_n，那么 $f \circ g$ 在 a处是 T_n。
证明。对于第一个陈述，我们写作

$$
\begin{aligned}
&f(g(a+x)) = \\
&f(g(a) + g_1(a)x + ... + g_n(a)x^n + O(x^{n+1})) = \\
&f(g(a)) + f_1(g(a))h(a,x) + f_2(g(a))h(a,x)^2 + ... + O(h(a,x)^{n+1}) = \\
&fg(a) + b_1(a)x + \cdots + b_n(a)x^n + O(x^{n+1}) + O(h(a,x)^{n+1}),
\end{aligned}
$$

其中
(1) $h(a,x) = g(a,x) - g(a) = g_1(a)x + \cdots + g_n(a)x^n + O(x^{n+1})$ (2) 第二个不等式应用了以下假设：f 在 $g(a)$处是 P_n。(3) 系数 b_i 通过展开表达式

$$f_k(a)h(a,x)^k = f_k(a)(g_1(a)x + \cdots + g_n(a)x^n + O(x^{n+1}))^k.$$

最后我们指出，正如引理 3.10 $h(a,x) = O(x)$ 的证明中那样，因此 $O(h(a,x)^{n+1}) = O(x^{n+1})$。

第二个陈述的证明本质上类似：

$$
\begin{aligned}
&f(g(x)) = \\
&f(g(x') + g_1(x')(x-x') + ... + g_n(x')(x-x')^n + O(x-x')^{n+1}) = \\
&f(g(x')) + f_1(g(x'))h(x,x') + f_2(g(x'))h(x,x')^2 + ... + f_n(g(x'))(x-x')^n + O(h(x,x')^{n+1}) = \\
&f(g(x')) + b_1(x')(x-x') + \cdots + b_n(x')(x-x')^n + O(x^{n+1}) + O(h(x,x')^{n+1})
\end{aligned}
$$

其中 $h(x,x') = g(x) - g(x') = g_1(x')(x-x') + \cdots + g_n(x')(x-x')^n + O(x-x')^{n+1} = O(x-x')$，系数 $b_k(x')$ 的坐标是 $f_i(g(x'))$ 和带有 $i,j \leq k$ 的 $g_j(x')$ 的系数坐标的和与积。根据我们刚刚证明的内容，它们是P_{n-i} 函数。出现在 $h(x,x') = O(x-x')$ 上的常数不依赖于 x'，因为 g_i 在 a 处连续。我们得出结论，正如所声称的，b_k 在 a 处是 P_{n-k}。□

命题 3.12. 设 K 是 1-h-极小的，且 $f\colon U \to K^m$ 是可定义函数。则存在 $U' \subset U$可定义的开稠密集合，使得 f在 U'的每一点都 T_n。

特别地，对于每个 $f\colon U \to K^m$，都存在一个可定义的开稠密子集 $U' \subset U$，使得 f在 U'中严格可微。

这由泰勒逼近定理得出（剩余特征为 0 时由命题 3.1 得出，正剩余特征时由命题 3.5 得出）。第二个陈述成立，是因为 T_1函数是严格可微的。

在下一节中，我们将证明，在 1-h-极小赋值域中可定义的、具有可逆导数的严格可微映射是局部同胚。这里我们证明局部逆映射是严格可微的。接着，我们将证明性质 P_n 和 T_n 在这个局部逆映射下也保持不变，不过这一事实并未用于证明我们的主要结果。

命题 3.13。设 $f\colon\ U \to V$ 是一个双射，其中 $U \subset K^n$ 和 $V \subset K^n$ 是开集。设 f 满足：对于互异的 x、$y \in U$，有 $|f(x)-f(y)-(x-y)| < |x-y|$。假设 f 在 a 处可微。那么 $f'(a)$ 可逆，f^{-1} 在 $b = f(a)$ 处可微，并且 $(f^{-1})'(b) = f'(f^{-1}(b))^{-1}$。

如果 f 在 a 处严格可微，那么 f^{-1} 在 b 处严格可微。

证明。注意，该假设蕴含 $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$。这意味着 $f'(a)$ 可逆。事实上，反设并非如此，取 x 接近 a，使得 $f'(a)(x - a) = 0$，从而得到 $|f(x) - f(a)| < |x - a|$，矛盾。

假设 f 在 a 处严格可微。取 $\epsilon > 0$ 属于 Γ。那么存在 $0 < r \in \Gamma$，使得若 $|x - a|$、$|x' - a| < r$，则 $|f(x) - f(x') - f'(a)(x - x')| \leq \epsilon|x - x'|$。若记 $y = f(x)$ 和 $y' = f(x')$，则有 $|y - y'| = |x - x'|$，因此将上述不等式乘以 $f'(a)^{-1}$，得到

$$
\begin{aligned}
&|f^{-1}(y) - f^{-1}(y') - f'(a)^{-1}(y - y')| = \\
&|f'(a)^{-1}(f'(a)(x - x') - (f(x) - f(x'))| \leq \\
&|f'(a)^{-1}||f(x) - f(x') - f'(a)(x - x')| \leq \\
&\epsilon|f'(a)^{-1}||x - x'| = \epsilon|f'(a)^{-1}||y - y'|,
\end{aligned}
$$

其中，对于由矩阵 $(a_{ij})_{i,j}$ 表示的线性映射 A，我们记 $|A| = \max_{i,j} |a_{ij}|$，并利用超度量不等式得到 $|Ax| \leq |A||x|$，再将其用于上述计算中的第一个不等式。

因此我们得出，对于任意满足 $|y - b| = |x - a| < r$ 和 $|y' - b| = |x' - a| < r$ 的 y、y'，都有 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y') - f'(a)^{-1}(y - y')| \leq \epsilon|f'(a)|^{-1}|y - y'|$。由此我们证明了 f^{-1} 在 b 处严格可微，并且 $(f^{-1})'(b) = f'(f^{-1}(b))^{-1}$。

要证明 f^{-1} 可微，只需在上述论证中代入 $x' = a$，其中 f。 □

命题 3.14. 假设 $f\colon\ U \to V$ 是一个双射，其中 $U \subset K^n$ 和 $V \subset K^n$ 是开集。假设 f 满足 $|f(x) - f(y) - (x - y)| < |x - y|$，对于互不相同的 $x, y \in U$。那么，如果 f 在 b 处是 P_n（分别为 T_n），则 f^{-1} 在 f（b）处是 P_n（分别为 T_n）。

证明. 记 $a = f(b)$。注意，假设意味着对于所有互不相同的 $x, y \in U$，都有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$，因此逆映射 f^{-1} 是连续的，且实际上满足：对于互不相同的 $x, y \in V$，有 $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |x - y|$。特别地，$f^{-1}$ 在 V 中是 T_0。

现在，假设 f 在 b 处是 P_n，且 $n \geq 1$。特别地，根据命题 3.13，它是可微的，并且 $f'(b)$ 可逆。

应用 f 是 P_n 这一事实（另请参见定义之后的讨论）可得：

$$f(y) - f(b) = f'(b)(y - b) + f_2(b)(y - b)^2 + \cdots + f_n(b)(y - b)^n + O(y - b)^{n+1}.$$

重新整理可得:

$y-b=f'(b)^{-1}(f(y)-f(b))\ -f'(b)^{-1}f_2(b)(y-b)^2-\cdots-f'(b)^{-1}f_n(b)(y-b)^n+O(y-b)^{n+1}.$

代入 $y=f^{-1}(x)$，并记住 $x-a=O(y-b)$，我们得出

$(\diamond)\ f^{-1}(x)-f^{-1}(a)=f'(f^{-1}(a))^{-1}(x-a)+\sum_{2\le i\le n}c_i(a)(f^{-1}(x)-f^{-1}(a))^i+O(x-a)^{n+1},$

对于某些常数 $c_i(a)$。

接下来我们证明（对 $k\le n$ 归纳） f^{-1} 是 P_k。由于 P_0 由等式 $|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|=|x-y|$ 得出，我们假设 So 假设 f^{-1} 是 P_{k-1}。利用这一点，我们可以写出 $f^{-1}(x)-f^{-1}(a)=\sum_{1\le j<k}b_j(a)(x-a)^j+O(x-a)^k$，并通过直接计算得到

$$c_i(a)(f^{-1}(x)-f^{-1}(a))^i=\sum_{i\le j\le k}d_{ij}(a)(x-a)^j+O(x-a)^{k+1}.$$

对于某些常数 d_{ij}。注意，由于 $i\ge 2$，我们得到改进后的误差 $O(x-a)^{k+1}$。将其代入 $(\diamond)$，结论便得证。

现在假设 f 在 b处是 T_n。此时的证明类似:

$f^{-1}(x)-f^{-1}(x')=f'(f^{-1}(x'))^{-1}(x-x')+\sum_{2\le i\le n}c_i(f^{-1}(x'))(f^{-1}(x)-f^{-1}(x'))^i+O(x-x')^{n+1},$

因此，与上面一样，若 $f^{-1}(x)$ 是 T_{k-1}，我们便得到

$$f^{-1}(x)-f^{-1}(x')=f'(f^{-1}(x'))^{-1}(x-x')+\sum_{2\le i\le k}d_i(x')(x-x')^i+O(x-x')^{k+1}.$$

这里注意到， f'在 b处是 P_{n-1}，因此 $f'(f^{-1}(x'))^{-1}$在 a处是 P_{k-1}。此外，按照上面的论证，我们看到 $d_i(x')$ 的坐标是形如 $b_{i'}(x')$ 的函数的和与积，其中 $1\le i'<i$，且 $b_{i'}(x')$ 是在 a处的 $P_{k-1-i'}$函数（根据归纳假设， f^{-1}是 T_{k-1}）；以及形如 $c_{i'}(f^{-1}(x'))$ 的函数，其中 $c_{i'}(y')$ 是在 b处的 $P_{k-i'}$函数， $i'\le i$（根据假设， f是 T_n）。因此， $d_i(x')$ 在 a处是一个 P_{k-i}。□

下一个引理将在我们研究可定义群的微分结构时发挥重要作用。对于该陈述，回顾一下， O_x 意味着记号中的常数取决于 x，参见定义 2.1。

引理 3.15。设 $f\colon U\times V\to K^r$ 是一个可定义函数，其中 $U\subset K^n$ 和 $V\subset K^m$ 是 0 周围的开集。假设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是 T_2的，并且 $f(x,y)=O(x,y)^3$。如果 $axy+f(x,y)=O_x(y^2)$，那么 $a=0$。

证明。根据 T_2 的定义（其中 $x=x',y'=0$），我们得到 $f(x,y)=f_0(x)+f_1(x)y+O(y^2)$，其中 f_1 是在 0 处的 P_1 函数，而 f_0 是在 0 处的 P_2 函数。固定 x 并展开 $f(x,y)$ 的泰勒多项式，由泰勒系数的唯一性（引理 3.10），结合我们的假设，可得 $axy+f_0(x)+f_1(x)y=0$。

在 0 点展开 f_0、 f_1，并注意到 $f(x,y)=O(x,y)^3$，我们得到 $f_0(x)=O(x^3)$ 以及 $f_1(x)=O(x^2)$。事实上，我们有 $f_0(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+O(x^3)$ 以及 $f_1(x)=c_0+c_1x+O(x^2)$，

因此 $f(x,y) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + c_0y + c_1xy + O(x,y)^3 = O(x,y)^3,$，所以根据泰勒系数的唯一性，我们得到 $b_0 = b_1 = b_2 = c_0 = c_1 = 0$。

现在由 $axy = O(x,y)$，再次根据泰勒系数的唯一性，可得 $a = 0$。 □

4. 严格可微可定义映射

本节证明 1-h-极小赋值域中可定义严格可微映射的反函数定理。我们通过改造实分析中的一个标准论证来完成这一证明，该论证使用了巴拿赫不动点定理。本节中，我们利用可定义球完备性得到巴拿赫不动点定理的可定义版本，从而几乎形式化地推出所需的反函数定理。由反函数定理，我们以通常方式推导出关于浸入和浸没局部结构的结果。随后，我们证明常秩函数局部结构定理的一个一般元版本（命题 4.11）。这一最后的结果仅对一般元成立。原因在于，对于可定义函数，若其关于变量 x 的偏导数在一个开集 U 上为 0，则它在 x 中未必是局部常值的 U。因此，我们针对一个较弱的结果给出了不同的论证，见命题 4.8 及其前面的讨论。

在本节余下部分，我们固定一个 $\aleph_0$-饱和的 1-h-极小赋值域 K。

我们从一个不动点定理开始，这一定理在 [4, 注 2.7.3] 中提及。首先注意，1-h-极小域的可定义球完备性的一种版本（[4, 引理 2.7.1]）在正剩余特征下也成立：

引理 4.1. 假设 K 具有正剩余特征 p。假设 $\{B_i\}_i$ 是开球的一个可定义链，或是闭球的一个可定义链。此外，假设对每个 i，都存在 j，使得 $\mathrm{rad}(B_j) \leq |p|\mathrm{rad}(B_i)$。那么 $\bigcap_i B_i \neq \emptyset$。

证明。证明与剩余特征为 0 时的球完备性类似，参见 [4]中的引理 2.7.1。只需考虑一维情形，因为高维情形可通过考察坐标投影得出。还需注意，我们的假设意味着链 $\{B_i\}$没有极小元（因为这样的元素会具有赋值半径 0）。

闭球的情形可由开球的情形如下推出：给定一个可定义的闭球链 $\{B_i\}_{i\in I}$。对于每个 i，令 r_i 为 B_i 的赋值半径，并令 B_i' 为赋值半径为 r_i 且满足附加性质 $B \supseteq B_j$（对所有 $j < i$均成立）的唯一开球$B \subseteq B_i$。显然，$\bigcap_i B_i = \bigcap_i B_i'$（除非链 B_i 有最小元；此时无需证明）。

注意，在上述记号中，映射 $B_i \mapsto r_i$ 是单射，因此不妨假设 $\{B_i\}$ 以 Γ 的某个子集为指标集。于是，我们的链 $\{B_i\}$ 的指标集可在 RV 中解释，因此根据 [5,命题 2.3.2]，存在一个有限集 C m，它为某个 $m \in \mathbb{N}$ 的链 $\{B_i\}$ 做准备。我们断言，对于所有 $i \in I$，都有 $C \cap B_i \neq \emptyset$。这就完成了证明，因为 C 是有限的。因此，假设情况并非如此，并取满足 $B_{i_0} \cap C = \emptyset$ 的 $i_0 \in I$。根据假设，我们可以找到满足 $r_i < |p^m|r_{i_0}$ 的 $i < i_0$。那么， B_i 是一个与 C 相邻的球 m；由于我们的链没有极小元，链中作为元素的任意球 $B \subsetneq B_i$ 都不是由 C 为 m 做好准备的，这就造成了矛盾。□

注意，根据 [3, 例 1.5]，正剩余特征且无限分歧的 1-h-极小域不一定是可定义球模型完备的。因此，上述引理假设中的额外条件并非多余。

命题 4.2. 设 $B_r = \{x \in K^n : |x| \leq r\}$. 假设 $f: B_r \to B_r$ 是一个可定义函数。对于不同的 $x, y \in B_r$，假设有

(1) $|f(x) - f(y)| < |x - y|$，若剩余特征为 0。 (2) $|f(x) - f(y)| \leq |p||x - y|$，若剩余特征为 $p > 0$。

那么 f 在 B_r中有唯一不动点。

证明. 唯一性由假设立即可得。为证明存在性，取形如 $B(a)_{|f(a)-a|}$的球族。这是一个由 $a \in B_r$索引的可定义球链。事实上，若 $a, b \in B_r$ 不同且这些球不相交，则 $|f(a) - f(b)| = |a - b|$，因为不相交球中各点之间的距离不变。注意，在正剩余特征下，引理 4.1 中的附加假设成立，因为根据关于 f的假设 2，$|f(f(a)) - f(a)| \leq |p||f(a) - a|$。

根据 1-h-极小域可定义球完备性的相应版本（[4] 中剩余特征为 0 时的引理 2.7.1，其他情况下的引理 4.1），我们得到一个点 x，它属于所有球的交集。于是 x 是 f 的不动点。事实上，若反设不然，则对 $y = f(x)$，根据假设有 $|f(y) - y| < |f(x) - x|$。另一方面，若 a 任意取定，则由于 $x \in B(a)_{|f(a)-a|}$，有 $|f(x) - f(a)| \leq |x - a| \leq |f(a) - a|$，因此 $|f(x) - x| \leq |f(a) - a|$。矛盾由此得证。□

与实分析中的情形一样，这个不动点定理蕴含一个反函数定理。

命题 4.3. 假设 $f: U \to K^n$ 是一个从开集 $U \subset K^n$ 出发的可定义函数，并满足以下“双 Lipschitz 条件”：对于任意互异的 $x, y \in U$

(1) $|f(x) - f(y) - (x - y)| < |x - y|$ *if the residue characteristic is* 0.

(2) $|f(x) - f(y) - (x - y) \leq |p||x - y|$ *if the residue characteristic is* $p > 0$.

则 $f(U)$ 是开集，且 f是从 U到 $f(U)$ 的同胚。如果 f可（严格）微，则f^{-1} 也可（严格）微。

证明. 该映射的单射性直接由假设得出。同样的假设还意味着，若 $x, y \in U$互异，则 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$，这说明逆函数连续。

主要困难在于证明 $f(U)$ 是开集。平移后，不妨设 $0 \in U$且$f(0) = 0$。我们需要在 $f(U)$ 中找到 0 的一个开邻域。取 $r > 0$ 使得 $0 \in B_r \subset U$。则 $B_r \subset f(U)$。事实上，若 $|a| \leq r$，那么按照上文相同的推理，函数 $g(x) = x + a - f(x)$ 满足 $g(B_r) \subset B_r$。由关于 f 的假设可知，这意味着 g 满足命题 4.2 的假设。因此，对于某个 x_0，有 $g(x_0) = x_0$，即 $a = f(x_0)$，证毕。

f^{-1} 的可微性（以及严格可微性）现在由 3.13 得出。 □

最后，我们可以表述并证明 1-h-极小域的反函数定理：

命题 4.4。设 $f: U \to K^n$ 是从开集 $U \subset K^n$出发的可定义函数。设f 在 a 处严格可微，且 $f'(a)$ 可逆。则存在 a附近的一个开集 $V \subseteq U$，使得 $f(V)$ 为开集，且 $f: V \to f(V)$ 是一个双射，其逆函数在$f(a)$处严格可微。

证明。由严格可微性的定义，函数 $f'(a)^{-1}f$ 在 a附近的一个小开球上满足前一命题的假设。结论随即成立。□

我们不知道是否存在这样的可定义函数 $f\colon U \to K$：它具有连续偏导数，但 f 在 U 中并非严格可微[2]。显然，严格可微函数的和、积与复合仍然严格可微，局部解析函数也如此。此外，严格可微性是一阶可定义的，因此可扩展到初等扩张。并且，根据一般泰勒逼近定理，在 1-h-极小背景下，任何定义在 K^n 的开子集上的可定义函数，在一个稠密开子集上都严格可微。参见命题 3.12。

我们的下一个目标是研究常秩可定义函数。我们首先指出，若不假设可定义性，导数恒为零的严格可微函数未必是局部常值：

例 4.5。考虑一个函数 $f\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$，它在 $B \setminus \{0\}$ 中局部常值，但在 0 附近的增长方式如同 x^2。这样的函数 f 将是严格可微的，且 $f' \equiv 0$，但 f 在 0 处并非局部常值。

粗略地说，上述例子中的函数涉及无限多种选择，因此不是可定义的。相比之下，我们有：

命题4.6. 设 $f\colon U \to K^m$ 是开集 $U \subset K^n$ 上的可定义函数。假设 f 连续。假设 f 在 U 的一个开稠密子集上可微且导数为 0。那么 f 是局部常值函数，并且具有有限像。

证明。我们对 n（即定义域的维数）进行归纳。我们可以假设 $m = 1$.

首先假设 $n = 1$。由 [4, 中的赋值雅可比性质、推论3.16] 以及 [5, 推论3.13], , 存在一个有限集 $C \subset U$，使得函数 f 在 $U \setminus C$ 中是局部常值的。这意味着 $f|_{U\setminus C}$ 的纤维维数为 1，因此 f 的像是有限的。由于 f 连续，它是局部常值的；纤维构成了一个由闭集、因而也是开集组成的有限划分，并且在这些集合上 f 为常值。

现在假设该命题对 n 成立，并设 $U \subset K^n \times K$。我们记 $\pi_1\colon K^n \times K \to K^n$ 为到第一个因子的投影，记 $\pi_2\colon K^n \times K \to K$ 为到第二个因子的投影。

令 $V \subset U$ 为一个开稠密子集，使得 f 在 V处可微且导数为 0。记$C = U \setminus V$。令 $T = \{x \in K^n \mid \text{维数}(\pi_1^{-1}(x) \cap C) = 1\}$，则维数$(T) < n$。由此可得，存在一个开稠密集 $W \subset K^n$，使得对所有 $x \in W$，维数$(\pi_1^{-1}(x) \cap C) = 0$。类似地，存在一个开稠密集 $P \subset K$，使得对每个 $x \in P$，维数$(\pi_2^{-1}(x) \cap C) < n$。将$V$缩小至 $V \cap \pi_1^{-1}(W) \cap \pi_2^{-1}(P)$后，我们可以假设，若$(x, y) \in V$，则 V_x是 U_x 的一个开稠密子集，且 V_y 是 U_y的一个开稠密子集。由归纳假设和 $n = 1$ 情形可得， f_x和 f_y是局部常值的。这意味着纤维 $f^{-1}f(x, y)$的维数为 $n + 1$。事实上，若 B 是 y 的一个开邻域，且 f_x 在其上为常值，并且对每个 $y' \in B$，取 $R_{y'} \subset U_x$ 作为 x 的一个开邻域，使得 $f_{y'}$ 在其上为常值，则 f 在$\bigcup_{y'\in B} R_{y'} \times \{y'\}$上为常值。根据维数的考量，我们得出像 $f(V)$是有限的。由于 f是

[2]在实分析中众所周知，函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 在 U 中是 $\mathcal{C}^1$，当且仅当它在该处严格可微 .

连续的， $f^{-1}f(V)$在 U中是闭集；又由于 V在 U中稠密，我们得出 $f(U) = f(V)$是有限的。由于 f 是连续的，我们如前所述得出 f 是局部常值的。□

根据前一个命题，我们可以预期，一个定义域为开集 $U \subset K^r \times K^s$ 且满足 $D_y f(x,y) = 0$ 的可定义严格可微函数 $f\colon U \to K^m$，在局部具有形式 $f(x,y) = g(x)$。遗憾的是，事实并非如此。

例4.7。取由 $f(x,y) = 0$（当 $|y| > |x|$ 时）以及 $f(x,y) = x^2$（当$|y| \le |x|$时）定义的 $f\colon \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$。那么 f 严格可微， $f(x,\cdot)$ 局部常值，但在 (0, 0) 附近， f 不能写成 $g(x)$ 的形式。

正是由于这一病态现象，下面命题 4.11 的结论仅在一般元处成立 y.

下面，令 $D_y f(x,y)$ 表示函数 f_x 的微分，其定义为 $f_x(y) = f(x,y)$；我们称之为 f 关于 y 的导数（其中 y 可以是变量元组）。

命题 4.8. 假设 $U \subset K^n$ 和 $V \subset K^r$ 是开集，且 $f\colon U \times V \to K^m$ 是一个可定义函数，使得 f 在 $D_y f = 0$ 上连续，并且在 $\mathrm{dom}(f)$ 的一个稠密开子集上满足 $D_y f = 0$。那么存在一个开稠密集 $U' \subset U$，使得 $f|_{U'}$ 局部具有 $g(x)$ 的形式。

证明。集合 D 中满足以下条件的点 $x \in U$ 是可定义的：对于 $\{x\} \times V$ f 中的每一点，$g(x)$ 都局部具有该形式。更准确地说，当且仅当对于所有 $y \in V$，存在一个开球 $B \ni (x,y)$，使得对于所有 (x',y')，都有 $(x',y'') \in B$，我们有 $f(x',y') = f(x',y'')$。因此， D 在 U 中具有稠密内点这一陈述是一阶可表达的性质，所以我们可以假设 $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$，参见事实 2.5 及其后续评注。

在证明过程中，我们可以有限次地用一个稠密开子集替换 U。固定 $W \subset U \times V$，取一个稠密开集，使得 f 可微，且其关于 y 的导数为 0。缩小 U 后，我们可以假设对所有 $x \in U$， $W_x \subset V$都是稠密开集。由命题4.6可知，对每个 $x \in U$， f_x 都是局部常值且像有限（回顾一下， $f_x(y) := f(x,y)$）。集合 $\mathrm{Im}(f_x)$ 构成一个以 $x \in U$为指标的有限集可定义族，因此其基数存在一致上界n。记 $A_k = \{x \in U\colon |\mathrm{Im}(f_x)| = k\}$，我们有 $U = A_1 \cup \cdots \cup A_n$，所以 A_k 的内部之并构成 U的一个稠密开子集。由于 $\mathrm{Int}(A_k)$ 的闭包两两不交，我们可以假设对所有 x 以及某个固定的 k， $|\mathrm{Im}(f_x)| = k$。由于我们假设 $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$，存在可定义函数 $r_1, \ldots, r_k\colon U \to K^m$，使得$\{r_1(x) \ldots, r_k(x)\} = \mathrm{Im}(f_x)$。根据可定义函数的一般连续性（命题 2.12），我们可以假设 r_i 均连续。于是，集合 $B_i = \{(x,y)\colon f(x,y) = r_i(x)\}$ 构成 $U \times V$的一个有限划分，其各部分均为闭集，因而也是开子集。□

接下来的两个结果描述了满秩可定义映射的局部结构，是反函数定理的标准应用：

命题 4.9. 假设 $U \subset K^k$ 是一个可定义开集，且 $f\colon U \to K^k \times K^r$ 是一个可定义的严格可微映射。假设对于某个 $a \in U$，导数 $f'(a)$ 满秩。那么存在一个球 $a \in B \subset U$、一个球 $B_2 \ni 0$、一个可定义开集 $V \subset K^k \times K^r$，以及一个可定义的严格微分同胚 $\varphi\colon V \to B \times B_2$，使得 $f(B) \subset V$，且复合 $\varphi f\colon B \to B \times B_2$ 是包含映射 $b \mapsto (b, 0)$。

证明. 对目标空间作一次坐标置换后，我们可以假设 $f'(a)$ 的主 $k \times k$ 子式可逆。考虑定义为 $g(x,y) = f(x) + (0,y)$ 的函数 $g\colon U \times K^r \to K^k \times K^r$。于是 g 严格可微，且在 $(a,0)$ 处的导数可逆，因此根据反函数定理（命题 4.4），我们可以找到一个以 a 为中心的球 B、一个以 0 为中心的球 B_2，以及开集 $f(a) \in V$，使得 g 限制为一个严格微分同胚 $g\colon B \times B_2 \to V$。若 $i\colon B \to B \times B_2$ 是包含映射 $i(b) = (b,0)$，则可得 $gi = f$，因此结论对 $\varphi = g^{-1}$ 成立。□

命题 4.10. 设 $U \subset K^k \times K^r$ 是一个可定义开集，且 $f\colon U \to K^k$ 是一个可定义严格可微映射。令 $a \in U$。假设 $f'(a)$ 满秩。那么存在一个可定义开集 $a \in U' \subset U$、一个球 $f(a) \in B$、一个球 $B_2 \subseteq K^r$，以及一个可定义的严格微分同胚 $\varphi\colon B \times B_2 \to U'$，使得 $f(U') \subset B$，并且复合 $f\varphi\colon B \times B_2 \to B$ 是投影 $(b,c) \mapsto b$。

证明. 对 U 施行坐标置换后，我们可以假设 $f'(a)$ 的主 $k \times k$ 子式可逆。

考虑函数 $g\colon U \to K^k \times K^r$，其定义为 $g(x,y) = (f(x,y)\ y)$。那么 g 严格可微且微分可逆，因此根据反函数定理（命题 4.4），存在一个开集 $a \in U' \subset U$，使得 $g(U')$ 是开集，且 $g\colon U' \to g(U')$ 是严格微分同胚。

缩小 U' 后，我们可以假设 $g(U') = B \times B_2$ 是两个球的乘积。那么，若 $p\colon B \times B_2 \to B$ 是投影 $p(b,c) = b$，则可得 $pg = f$，因此该命题对 $\varphi = g^{-1}$ 成立。□

We 最终可以证明关于常秩可定义函数局部结构的结果 nk:

命题 4.11。设 $U \subset K^k \times K^r$ 和 $V \subset K^k \times K^s$ 是可定义开集，并设 $f\colon U \to V$ 是可定义严格可微映射，且对所有 $a \in U$，$f'(a)$ 的秩恒等于 k。那么，存在 $U' \subset U$ 和 $V' \subset V$ 可定义开集，使得 $f(U') \subset V'$，并且存在可定义严格微分同胚 $\varphi_1\colon B_1 \times B_2 \to U'$ 和 $\varphi_2\colon V' \to B_1 \times B_3$，使得复合 $\varphi_2 f \varphi_1\colon B_1 \times B_2 \to B_1 \times B_3$ 是映射 $(a,b) \mapsto (a,0)$。

证明。取一点 $(b,c) \in U$。对 U 和 V 作坐标置换后，我们可以假设 $f'(b,c)$ 的第一个 $k \times k$ 子式可逆。于是，由浸没定理和命题 4.10，应用于 $f\colon U \to K^k \times K^s$ 与到第一个因子的投影 $K^k \times K^s \to K^k$ 的复合，我们可以假设 U 具有 $B_1 \times B_2$ 的形式，而 f 具有 $f(x,y) = (x, g(x,y))$ 的形式。由于 f' 具有等于 k 的常秩，我们得出 $D_y g = 0$。根据命题 4.8，我们可以假设 $g(x,y)$ 具有 $g(x,y) = g(x)$ 的形式（将 B_1 和 B_2 缩小为更小的开球后，这些开球不一定包含 (b,c)）。现在，由 $h(x) = (x, g(x))$ 定义的函数 $h\colon B_1 \to K^k \times K^s$ 是一个可定义的严格可微浸入，因此由浸入定理 4.9，缩小 B_1 并在目标空间中与一个可定义微分同胚复合后，我们可以假设 h 具有 $h(x) = (x,0)$ 的形式。证明至此完成。□

5. 严格可微可定义流形

本节中，我们定义 1-h-极小域中的可定义流形及其变体。这些流形由有限个可定义坐标图覆盖，并配有各种类型的相容函数。

全文沿用约定：K 是一个 $\aleph_0$-饱和的 1-h-极小域。若 acl_K 与 dcl_K 不相同，那么用“étale 域”代替 K^n 的开子集，作为流形的局部模型会更合适。这是因为命题 2.15 所给出的胞腔分解，会将一个可定义集分解为有限个部分，而每个部分都只是一个开集的有限覆盖，而非开集。下面我们对这一概念作形式化描述：

定义 5.1。设 $S \subset K^m$。若可定义函数 $f\colon S \to K^n$ 是（拓扑的）étale 的，则它是局部同胚。换言之，对于每个 $x \in T$，存在一个球 $x \in B$，使得 $f(B \cap S)$ 是开集，且逆映射 $f(B \cap S) \to B \cap S \to K^m$ 是连续的。

非正式地说，我们将 étale 映射视为类似于开浸入的映射，并相应地记作此类映射，例如 $i\colon U \to K^n$。现在我们继续描述 étale 映射（或者更确切地说，étale 域）的微分结构：

定义 5.2。设 $i\colon U \to K^n$ 和 $j\colon V \to K^m$ 是 étale 映射。若可定义函数 $f\colon U \to V$ 在 $x \in U$ 处严格可微，则存在球 $x \in B$ 和 $f(x) \in B'$，使得 $i\colon B \cap U \to i(B \cap U)$、$j\colon B' \cap V \to j(B' \cap V)$ 是映到开集上的同胚，且 $f(B \cap U) \subset B' \cap V$，并且映射 $i(B \cap U) \xrightarrow{i^{-1}} B \cap U \xrightarrow{f} B' \cap V \xrightarrow{j} j(B' \cap V)$ 在 $i(x)$ 处严格可微。在此情形下，导数 $f'(x)$ 定义为 $i(B \cap U) \to j(B' \cap V)$ 的导数。

若复合映射 $i(B \cap U) \to j(B' \cap V)$ 在$i(x)$处是 T_k 的，则称函数 $f\colon U \to V$在 x 处是 T_k 的。

请注意，按照此定义，给定的包含映射 $U \subset K^r$ 不一定是严格可微的，因为映射 $i\colon U \to K^n$ 的局部逆映射 $i(U \cap B) \to K^r$ 只是拓扑嵌入，因此不一定严格可微。

本节余下部分中，令 $\mathcal{P}$ 代表以下任一形容词：拓扑的、严格可微的，或 T_n。

定义 5.3. 可定义的弱 $\mathcal{P}$-n-流形是一个可定义集 M，配备有限个可定义单射 $\varphi_i\colon U_i \to M$，且每个 U_i 都配备一个 étale 映射$r_i\colon U_i \to K^n$。我们进一步要求集合 $U_{ij} := \varphi_i^{-1}(\varphi_j(U_j))$ 在 U_i中是开集，并且过渡映射 $U_{ij} \to U_{ji}, \varphi_j^{-1}\varphi_i$ 是 $\mathcal{P}$映射。我们还定义：

(1) 可定义弱 $\mathcal{P}$流形是某个 n上的弱 $\mathcal{P}$-n流形。(2) 弱 $\mathcal{P}$流形配备了一种拓扑，使结构映射 φ_i成为开浸入。(3) 可定义弱 $\mathcal{P}$流形之间的态射是可定义函数 $f\colon M \to N$，满足对于任意坐标图 $\varphi_i\colon U_i \to M$和$\tau_j\colon V_j \to N$，集合 $W_{ij} = \varphi_i f^{-1}\tau_j(V_j)$在 U_i中是开集，且由 $x \mapsto \tau_j^{-1} f \varphi_i(x)$给出的映射 $W_{ij} \to V_j$是一个 $\mathcal{P}$映射。(4) 可定义 $\mathcal{P}$-n流形是可定义弱 $\mathcal{P}$-n流形，其中 U_i 是 K^n 的开子集（且映射 $U_i \to K^n$ 是包含映射）。(5) 可定义 $\mathcal{P}$ 流形之间的态射是弱可定义 $\mathcal{P}$流形之间的态射。

根据定义，可定义弱 K流形立即就是 K上的（抽象）流形。因此，可定义可微弱流形继承了经典的微分结构。为求完备，现重述相关定义：

定义 5.4. 若 M 是可定义严格可微弱流形且 $x \in M$，则 M 在 x 处的切空间 $T_x(M)$ 是 $T_i = T_{\varphi_i^{-1}(x)}(U_i)$ 的不交并，其中 (U_i, φ_i) 是 x 附近的一个坐标图，并通过映射 $(\varphi_j^{-1}\varphi_i)'(\varphi_i^{-1}(x))$，将与坐标图 U_i、U_j 相关的空间 T_i 和 T_j 识别起来。

对于可定义严格可微弱流形之间的严格可微可定义态射 $f\colon M \to N$，我们有一个 K-向量空间映射 $f'(x)\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$，它由上文定义 5.3 中出现的映射的微分给出。

通常，在弱严格可微流形中的一点附近有了坐标图后，我们便可以将 $T_x(M)$ 与 K^n 识别起来，但不同的坐标图可能给出不同的同构。

定义 5.5。可定义的（弱） $\mathcal{P}$-李群是可定义的（弱） $\mathcal{P}$-流形范畴中的群对象。

引理 5.6。设 $i\colon U \to K^n$ 和 $j\colon V \to K^m$ 是 étale 的，且 $f\colon U \to V$是一个可定义函数。那么， f 在 U的一个开稠密子集上连续。

此外， f 是严格可微的，并且 T_k 在 U的一个开稠密子集上。

证明。关于连续性的陈述，注意到 V 具有（ $V \subset K^r$的）子空间拓扑，因此我们可以假设 $V = K^r$。若记 U' 为 U中（相对于 U的） U连续点集的内部，则对于每个球 B，只要 i是一个同胚 $i\colon B \cap U \to i(B \cap U)$，根据可定义函数的一般连续性，我们得到 $B \cap U \cap U'$在 $B \cap U$中稠密。由此，按要求， U' 是稠密的。

对于严格可微性和 T_k，由上文可知，我们可以假设 f 连续。令 U' 为所有满足以下条件的点组成的集合的内部： $f\colon U \to V$ 严格可微且 T_k。这是一个可定义开集。由定义在开集上的函数的一般可微性和一般 T_k 性质可知，对于每个点 $x \in U$，都存在一个开球 $B \ni x$，使得 $U \cap B \cap U'$ 在 $U \cap B$ 中稠密。因此，我们得出 U' 在 U 中稠密。□

注意，前一个引理意味着，一个（弱）可定义拓扑流形 M 包含一个开稠密子集 $U \subset M$，该子集具有一个（弱）可定义 T_n 流形结构，且此结构扩展了给定的（弱）可定义拓扑流形结构。作为下面命题 5.7 的推论，我们知道， U 上的这一结构在同构以及限制到可定义开稠密子集的意义下是唯一的。因此，以下若干陈述对于可定义弱流形也成立（实质上无需改动），而不必对可微性或 T_n 作进一步假设。为使表述清晰，我们保留这些假设。

命题 5.7。如果 $f\colon M \to N$是一个可定义函数，且 M、N是可定义的弱 $\mathcal{P}$-流形，那么 f 在 M的一个开稠密集上是一个 $\mathcal{P}$-映射。

证明。考虑 M 中的坐标图，我们可以假设 $M = U \to K^n$ 是 étale 的。现在，如果 (V_i, τ_i) 是 N 的坐标图，那么 $f^{-1}\tau_i(V_i)$ 覆盖 U，因此它们的内部之并在 U 中是开稠密的。所以我们可以假设 $N = V \to K^m$ 是 étale 的。此情形即为引理 5.6。□

回想一下，可定义集 X 的局部维数定义为

$$\dim_x X = \min\{\dim(B \cap X) : x \in B \text{ is a definable open neighborhood of } x \text{ in } M\}.$$

下面的引理是标准结果：

引理 5.8. 设 M 是一个可定义拓扑弱流形。设 $X \subset M$ 是一个可定义子集。那么 $\dim(X) = \max_{x\in X} \dim_x(X)$。

如果 G 是一个可定义弱拓扑群，且 H 是一个子群，那么 H 的维数等于 H 在任意一点处的局部维数。

证明. 如果 $M = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ 是由开集构成的覆盖，且 $\varphi_i : U_i \to V_i$ 是到集合 V_i上的一个同胚，并且带有一个 étale 映射 $V_i \to K^n$，那么 $\dim(X) = \max_i(\dim\varphi_i(X \cap U_i))$，而 X 在 $x \in X \cap U_i$ 处的局部维数等于 $\varphi_i(X \cap U_i)$ 在 $\varphi_i(x)$处的局部维数，因此只需考虑 $M = V$ 在 K^n上 étale 的情形。事实上，只要 $M \subset K^m$ 取子空间拓扑，结论就成立，因为此时 $X \subset M$ 在点 x 处的局部维数等于 X 在 K^m中 x处的局部维数，因此结论由命题 2.11(3)得出。

若 G 是可定义弱拓扑群且 H 是子群，则 H 在任意点 $h \in H$ 处的局部维数恒定，不依赖于 h。事实上，左平移 $L_h : G \to G$是一个可定义同胚，它将 e 映到 h，并满足 $L_h(H) = H$，因此 $\dim_e(H) = \dim_h(H)$。
□

命题 5.9. 假设 $T \subset K^m$ 满足：存在一个坐标投影 $\pi : T \to U$ 到开子集 $U \subset K^n$ 上，且 π 的纤维有限且基数恒定，为 s。假设关联映射 $f : U \to (K^{m-n})^{[s]}$ 连续。那么 $T \to K^n$ 是 étale。

证明. 令 $x \in T$。将 U 替换为 $\pi(x)$周围一个更小的邻域后，利用事实 2.13，我们可以假设 f可提升为连续函数 $g : U \to (K^{m-n})^s$, $g = (g_1, \cdots, g_s)$。在这种情况下，可得 T在 U上经由映射$(a, i) \mapsto (a, g_i(a))$与 $\bigsqcup_{i=1}^s U$同胚。

□

引理 5.10. 设 $M = \bigcup_{i=1}^r \varphi_i(U_i)$，其中 $\varphi_i : U_i \to M$ 是可定义函数，使得 U_i 是可定义的（弱） $\mathcal{P}$-n-流形。进一步设对所有 i、j，集合 $U_{ij} := \varphi_i^{-1}(\varphi_j(U_j))$ 在 U_i 中是开集，且由 $x \mapsto \varphi_j^{-1}\varphi_i(x)$ 给出的过渡映射 $U_{ij} \to U_{ji}$ 是 $\mathcal{P}$-映射。则 M 具有唯一的可定义（弱） $\mathcal{P}$-n-流形结构，使得 $\varphi_i : U_i \to M$是一个开浸入。

证明是直接的，故略去。

命题 5.11. 设 M 是一个可定义的弱拓扑流形，则当且仅当 X 在 M 中的内部在 M 中稠密时，$X \subset M$ 是大的。

证明。由引理 5.8， $M \setminus X$ 的维数是其各点处局部维数的最大值，因此我们可以断定这两个条件都是局部的，故不妨设 $M = U \subset K^n$ 是开集。此处结论由维数理论得到。□

命题 5.12. 假设 M 是弱可定义拓扑流形。假设 $X \subset M$ 是可定义的。那么 X 是 M 的有限个局部闭可定义子集的并。

证明. 立即可将问题归约到 $M = U \to K^n$ 是 étale 的情形。在这种情况下， U 具有子空间拓扑 $U \subset K^s$，其中 s 为某个对象。因此，只需证明 $X \subset K^s$ 的情形。这是命题 2.17 的推论。□

在 acl $=$ dcl 的情况下，弱流形一般而言是流形：

命题 5.13. 假设 acl $=$dcl。

若 M 是一个可定义的弱 $\mathcal{P}$-流形，则存在一个可定义开稠密子集 $U \subset M$，它是一个可定义的 $\mathcal{P}$- 流形。

证明. 可立即将问题归约到 $i\colon M = U \to K^n$ 是 étale 的情形。设 r 是 U 的纤维基数的一致上界。在这种情况下，若记 $X_k \subset K^n$ 为满足 $i^{-1}(x)$ 的基数为 x 的点 x 所成的集合，并令 $U_k \subset X_k$ 为 X_k 的内部，则 $\bigcup_{k\leq r} U_k$ 在 K^n 中是开稠密的。将 U 替换为 $i^{-1}(U_k)$ 后，我们可以假设 i 的非空纤维具有恒定基数。由假设 acl $=$ dcl，我们得出映射 $i(U) \to (K^r)^{[s]}$ 可提升为一个可定义映射 $i(U) \to (K^r)^s$。存在一个开稠密子集 $V' \subset i(U)$，使得 $V' \to i(U) \to (K^r)^s$ 是一个 $\mathcal{P}$-映射，参见命题 5.6。由此可得 $i^{-1}(V')$ 在 V' 上 $\cong \bigsqcup_{i=1}^{s} V'$，而这显然是一个 $\mathcal{P}$- 流形。□

在这种情况下，弱流形似乎可能已经是流形，但我们并不需要这一点，因此不打算证明。

接下来的几个结果不会用于主要定理，但可能本身也有一定的研究价值。

定义 5.14。设 M 和 N 是可定义严格可微弱流形，且 $f\colon M \to N$ 是可定义严格可微函数。

若导数 $f'(x)$ 在所有点 $x \in M$ 处都是单射，则称 f 为浸入。若 f 是浸入，且是到其像上的同胚，则称 f 为嵌入。若导数 $f'(x)$ 对所有 $x \in M$ 都是满射，则称 f 为下沉。

这些概念具有预期的性质。

命题 5.15. 设 $f\colon M \to N$ 是严格可微可定义弱流形之间的严格可微可定义映射。若 f 是浸入，则 M 满足以下泛性质：对于任意严格可微可定义弱流形 P，以及 $g\colon P \to M$，函数 g 是严格可微且可定义的，当且仅当 fg 是严格可微的，并且 g 是可定义且连续的。

如果 f 是嵌入，且 $g\colon P \to M$ 如上所述，则 g 是严格可微可定义映射，当且仅当 fg 是严格可微可定义映射。

命题 5.16. 如果 $f\colon M \to N$ 是满射浸没，则映射 $g\colon N \to K$ 是严格可微可定义函数，当且仅当复合 gf 是严格可微且可定义的。

这两条性质是关于浸入和下沉局部结构的定理（命题 4.9 和 4.10）的推论。详细证明留给感兴趣的读者补充。

假设 M 是一个可定义严格可微弱流形。若 $M \to N$ 是一个集合之间的满射，则至多有一种可定义严格可微弱流形结构可以赋予 N，使得 $M \to N$ 是一个下沉。此外，单射 $N \to M$ 至多确定 N 上的一种严格可微弱流形结构，使得 $N \to M$ 是一个嵌入。具有这种结构的子集 $N \subset M$ 称为 M 的子流形。我们还可得，若 N 是一个可定义拓扑空间，且 $N \to M$ 是一个可定义连续函数，则至多有一种严格可微可定义流形结构可以赋予 N，该结构扩张给定的拓扑，并且使 $N \to M$ 成为一个浸入。换言之，使 $N \to M$ 成为嵌入的严格可微弱流形结构由集合 N 决定；使 $N \to M$ 成为浸入的严格可微弱流形结构则由拓扑空间 N 决定。

命题 5.17. 设 M、N 是可定义严格可微弱流形，并设 $f : M \to N$ 是一个单射可定义映射。则存在一个可定义开稠密子集 $U \subset M$，使得 $f|_U$ 是浸入。

证明。由命题 5.7，我们可以假设 f 是严格可微的。我们需要证明集合 $\{x \in M : f'(x) \text{ 是单射的 }\}$ 的内部在 M 中稠密。若非如此，则可以找到 M 的一个非空开子集，使得 f 在任意点都不是浸入。

因此，设 M 是 K^n 的一个开子集，N 是 K^m 的一个开子集，并且 f 在任意点都不是浸入。出于维数原因，$n \leq m$。若将 X_k 定义为 M 中满足 $f'(x)$ 的点 x 的集合，其中其秩为 k，则 $X_0 \cup \cdots \cup X_{n-1} = M$；因此，如果 U_r 是 X_r 的内部，我们就有 $U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$ 在 M 中是开稠密的。因此，我们可以假设 f 具有常秩。这与命题 4.11 中的结果矛盾，因为映射 $(x, y) \mapsto (x, 0)$ 不是单射。□

以下事实是标准结果，可能已广为人知：

事实5.18. 假设 X 是一个豪斯多夫空间，且 $X \to Y$ 是一个满射连续映射，并且是局部同胚，纤维的基数恒定为 s。那么由 p 的纤维给出的映射 $t : Y \to X^{[s]}$ 是连续的。

证明. 令 $\pi : X^s \setminus \Delta \to X^{[s]}$ 为典范投影。取 $y \in Y$ 和 $\{x_1, \ldots, x_s\} = p^{-1}(y) = t(y)$。$t(y)$ 的一个基本开邻域具有如下形式：$\pi(U_1 \times \cdots \times U_s)$，其中 $x_k \in U_k$ 是开集，且 U_k 两两不交。缩小 U_k，可假设 $p|_{U_k}$ 是到某个开集上的同胚。如果 $V = \bigcap_k p(U_k)$，那么 $t^{-1}(V) \subset \pi(U_1 \times \cdots \times U_s)$。□

事实 5.19. 设 X、Y、Z 为拓扑空间，$p : X \to Z$、$q : Y \to Z$ 为连续满射，且 $f : X \to Y$ 为满足 $qf = p$ 的连续双射。假设 X 和 Y 是豪斯多夫空间，并且 $p : X \to Z$ 具有基数恒定的有限纤维，s。如果映射 $t : Z \to X^{[s]}$（由 $x \mapsto p^{-1}(x)$ 给出）是连续的，那么 f 是同胚。

证明。由于 f 连续且双射，我们只需证明它是开映射，这是一个局部性质。固定某个 $x \in X$ 和 $z = p(z)$。根据事实 2.13，映射 $Z \to X^{[s]}$ 在 z 附近局部提升为连续映射 $(l_1, \ldots, l_s) : Z \to X^s$。将 Z 缩小到这个邻域，并相应地缩小 X 和 Y，我们可以假设 X 在 Z 上同胚于 $\bigsqcup_{i \leq s} Z$，该同胚为 $F_l : \bigsqcup_{i \leq s} Z \to X$，由 $(i, z) \mapsto l_i(z)$ 给出。为说明这是一个同胚，注意

i 次余因子在 F_l 下的像是集合 $X_i = \{x \in X \mid x = l_i p(x)\}$，它在 X 中是闭集（因为 X 是豪斯多夫的）。由于这样的 X_i 只有有限多个（且两两不交），它们也是开集。最后，F_l 在 X_i 上的逆函数与 p 一致，而后者是连续的。因此，f 限制在 $F_l(Z)$ 上是一个同胚，所以 f 在 x 处是开映射。由于 x 是任意的，结论得证。

类似地，我们有一个同胚 $F_{fl}\colon \bigsqcup_{i\le s} Z \to Y$，它与 f 相容，其含义是 $fF_l = F_{fl}$。
□

命题 5.20. 设 M, N 为严格可微弱流形，且 $f\colon M \to N$ 是一个单射可定义函数。则存在一个稠密开集 $U \subset M$，使得 $f|_U$ 是一个嵌入。

证明. 根据命题 5.17，我们可以假设 f 是浸入。若 $V_1, \dots, V_n$ 是 N 的一个有限开覆盖，且该结论对 $f\colon f^{-1}V_i \to V_i$ 成立，那么它对 f 也成立。因此，我们可以假设 $N = V \to K^m$ 是 étale。根据定义，$V \subset K^d$ 具有子空间拓扑。我们已经看到，$f\colon M \to V$ 是浸入，因此若它是到 K^d 中的一个拓扑嵌入，那么它就是到 V 中的一个嵌入。因此，我们可以假设 $N = K^m$。

现在考虑 $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$ M 的一个有限开覆盖。假设 $f|_{U_i}$ 是一个嵌入。定义 $U_i' = \mathrm{Int}(U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_i)$，以及 $U_i'' = U_i' \setminus \bigcup_{j\neq i} f^{-1}\mathrm{cl}(f(U_j'))$。注意，$\bigcup_i U_i' \subset M$ 是一个开稠密集。另请注意，$f(U_i' \setminus U_i'') = \bigcup_{j\neq i} f(U_i') \cap \mathrm{cl}(f(U_j')) \subset \bigcup_{j\neq i} \mathrm{cl}(f(U_j')) \setminus f(U_j')$。因此，由命题 2.18 可得 $\dim(U_i' \setminus U_i'') < \dim(M)$。于是，用 U_i'' 替换 U_i 后，我们可以假设对于不同的 i、j，$\mathrm{cl}(f(U_i)) \cap f(U_j) = \emptyset$。在这种情况下，可以验证 f 是一个拓扑嵌入。

因此，我们归结为 $M = U \to K^n$ 是 étale 的情形。

对于每个大小为 n 的 $I \subset \{1, \dots, m\}$，考虑由满足以下条件的 $x \in U$ 构成的集合 $A_I\colon f'(x)$ 的第 I 阶子式可逆。由 $U = \bigcup_I A_I$，我们得出 $U' = \bigcup_I \mathrm{Int}(A_I)$ 在 U 中是开稠密的，因此根据上一段中的归约，我们可以假设 $f\colon U \to K^m$ 与到前 n 个坐标的投影 $p\colon K^m \to K^n$ 的复合是一个 étale 浸入。若 A_k 是满足 pf 上方的纤维 $(^{-1})(x)$ 含有 k 个元素的 $x \in K^m$ 的集合，其中 U 在 K^n 上方的纤维大小有一致上界 s，则我们可以取该集合，并考察 $U' = \bigcup_{k\le s} \mathrm{Int}(A_k)$。因此，我们可以假设，若 $V = pf(U)$，则 U 在 V 上方的纤维大小相同，均为 s。

在此情况下，由 $x \mapsto (pf)^{-1}(x)$ 给出的函数 $V \to U^{[s]}$ 是连续的，而函数 f 是 $U \to f(U)$ 的拓扑同胚，见事实 5.18 和 5.19。□

现在我们可以证明 Sard 引理的一个 1-h-极小版本（对于 o-极小环境中的类似结果，请参见 [16, 定理 2。7]）。具体而言，给定可定义弱流形之间的可定义的严格可微态射 f，若 x 是 f 的一个值，并且 f 在 $f^{-1}(x)$ 的每一点处都是下沉，则称该值为正则值。于是，结论是奇异值的集合很小：

命题 5.21。设 M 和 N 是可定义严格可微弱流形。若 $f\colon M \to N$ 是一个严格可微映射，则存在一个开稠密子集 $U \subset N$，使得 $f\colon f^{-1}(U) \to U$ 是一个下沉。

证明。我们需要证明，满足 $f'(x)$ 不是满射的点 $x \in M$ 的集合经 f 映射后的像在 N 中无处稠密。该性质可由一阶公式表达，因此我们可以假设 $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$，参见事实 2.5 及其后续说明。

设 $m = \dim(N)$。设 $X \subset M$ 是一个可定义集，使得对所有 $x \in X$， $f'(x)$ 都不是满射。我们需要证明 $\dim f(X) < m$。我们对 X 的维数进行归纳。基本情形中，若 X 有限，则结论显然。

$f(X)$的维数是各点处局部维数的最大值，参见命题 5.8。因此，我们可以假设 $N \subset K^m$ 是开集。用有限个坐标图覆盖 M 后，我们可以假设$M \to K^n$ 是 étale 的，记作 $M \subset K^r$。

于是由命题 2.15，存在 X 的一个有限划分，其各部分均为可定义集；若 X' 是该划分中的一个元素，则存在坐标投影 $p\colon K^r \to K^l$，其在X' 上的限制是一个满射 $X' \to U$，映到开子集 $U \subset K^l$，且纤维有限并具有恒定基数。若我们证明对划分中的每个元素 X'都有 $\dim f(X') < m$，那么也有 $\dim f(X) < m$。因此，我们可以假设存在坐标投影 $p\colon X \to U$，映到开子集 $U \subset K^l$，使得对所有 $u \in U$， $p^{-1}(u)$都有 t 个元素。由假设 $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$ 可知，存在可定义截面 $s_1, \ldots, s_t\colon U \to X$，使得对所有 $u \in U$， $\{s_1(u) \cdots, s_t(u)\} = p^{-1}(u)$。由于 $X = \bigcup_{i \le t} s_i(U)$，我们可以假设 $p\colon X \to U$ 是一个双射，其逆函数为 $s\colon U \to X$。映射 $s\colon U \to M$ 在一个开稠密的 $V \subset U$上变为严格可微，参见命题 5.7。由于$s(U \setminus V)$的维数小于 X的维数，我们可以假设 s 严格可微。现在注意到 s的像落在 X 中，因此复合映射 $U \to M \to N$ 的导数在 U的任意一点处都不是满射。由此，我们归结为 $M = U \subset K^n$是开集且 $X = U$的情形。

若考虑 $A_k \subset U$，由 $A_k = \{x \in U$ 定义的集合： $f'(x)$ 的秩为 $k\}$，那么 $\bigcup_{k<m} A_k = U$，因此 $\bigcup_{k<m} \mathrm{Int}(A_k)$ 在 U 中是开且稠密的。由归纳假设可知， $U \setminus \bigcup_{k<m} \mathrm{Int}(A_k)$ 的像在 N 中无处稠密，因此我们可以假设，对于某个 $k < m$， $f'(x)$ 在 U 中具有常秩 k。

考虑集合 $Y = \{x \in U\colon \dim f^{-1}f(x) \ge \dim(U) - k\}$。那么 Y 是可定义的，因为维数在可定义族中是可定义的。此外，根据常秩定理命题 4.11， Y 有稠密内点。因此，再次由归纳假设，我们可以假设，对于所有 $x \in U$， $f^{-1}f(x)$ 的维数至少为 $\dim(U) - k$。于是，根据维数的可加性， $f(U)$ 的维数至多为 k。□

如果 $M \to N$ 是严格可微弱流形之间的映射，且 $y \in N$ 是正则值，那么可以证明 $f^{-1}(y) \subset M$ 是严格可微弱子流形。

6. 可定义李群

本节将证明，每个可定义群都是可定义弱李群，并且可定义弱李群态射的芽由其单位元处的导数决定。

以下引理的证明是 Martin Hils 告知我们的。

引理 6.1. 设 G 是前几何理论中可定义的群 a，且 X、$Y \subset G$ 是非空的可定义集 a，其维数小于 G。如果 $g \in G$ 满足 $\dim(gX \cap Y) = \dim(X)$，那么 $\dim(g/a) \le \dim(Y)$。

特别地，存在 $g \in G$ 使得 $\dim(gX \cap Y) < \dim(X)$

证明。记 $d = \dim(X)$ 和 $d' = \dim(Y)$。假设 $\dim(gX \cap Y) = d$。注意到 $d \le d'$。令 $h' \in gX \cap Y$满足 $\dim(h'/ag) = d$。令 $h = g^{-1}h'$。

由于 $h \in X$，我们有 $d \geq \dim(h/a) \geq \dim(h/ag) = \dim(h'/ag) = d$。第一个不等式是因为 $h \in X$，第三个不等式是因为 h 和 h' 在 ag上可互相定义，第四个不等式则由 h'的选取可知。由此我们得出，h和 g 在 a上代数独立。

于是我们得到 $d' \geq \dim(h'/a) \geq \dim(h'/ah) = \dim(g/ah) = \dim(g/a)$。第一个不等式是因为 $h' \in Y$，第三个等式是因为 h' 和 g 在 ah上彼此可定义，第四个等式是因为 h和 g 在 a上代数独立。

对于第二个结论，注意，若 $g \in G$满足 $\dim(g/a) = \dim(G)$，或者更一般地，$\dim(g/a) > d'$，则 $\dim(gX \cap Y) < \dim(Y)$。□

下一个引理推广了 Pillay 关于 o-极小理论的引理 2.4。稍加努力便可看出，Pillay 的证明可以推广到几何理论。我们给出另一种证明：

引理 6.2。设 G 是一个在前几何理论中可定义的群，并设 $X \subset G$满足 $\dim(G \setminus X) < \dim(G)$。那么，$X$ 的有限个平移覆盖 G。

证明。假设有 g_0、$\cdots$、$g_n \in G$，使得 $\dim(G \setminus (\bigcup_k g_k X)) = m$。将引理 6.1 应用于 $G \setminus X$ 和 $G \setminus (\bigcup_k g_k X)$，可得存在 $g_{n+1} \in G$，使得 $\dim(G \setminus \bigcup_{k \leq (n+1)} g_k X) < m$，证明完毕。□

引理 6.3。设 G 是预几何理论中的一个可定义群，且 $V \subset G$ 是大的。那么每个 $g \in G$ 都是 V 中两个元素的乘积。

证明。引理 2.1] 的证明同样适用：若取一个在 g 上一般的 $h \in G$，那么 $h^{-1}g$ 在 g 上也一般，因此 h、$h^{-1}g \in V$ 及其乘积都是 g。□

命题 6.4。可定义群可以赋予可定义的严格可微弱 T_k-李群结构。从可定义严格可微弱李群范畴到可定义群范畴的遗忘函子是范畴等价。

若 $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$，则从可定义的严格可微 T_k-李群到可定义群的遗忘函子是范畴等价。

证明。遗忘函子是满态射的，这由命题 5.7 得出。事实上，设 G和 H 是严格可微的或 T_k-李群，并设 $f\colon G \to H$ 是一个可定义群态射。于是根据命题 5.7，存在一个开稠密 $U \subset G$，使得 $f\colon U \to H$ 是严格可微的或T_k。若 $g_0 \in U$是任意的，且 $g \in G$，考虑公式 $f = L_{f(g)f(g_0)^{-1}} f L_{g_0 g^{-1}}$，其中我们用 L_h 表示由 h给出的左平移。现在，$L_{g_0 g^{-1}}$ 是一个严格微分同胚或 T_k-同构，它将 g 映到 g_0，而 $L_{f(g)f(g_0)^{-1}}$ 是一个严格微分同胚或 T_k-同构。由此可得，f 在 g_0 处严格可微或 T_k，意味着 f 在 g处严格可微或 T_k。

要证明遗忘函子本质满射，可按照 [11, 命题 2.5] 的证明进行。具体而言，设 G的维数为 n。按照命题 2.15 将 G分解，并令 $V_0 \subset G$为 n维片段 U_0、$\cdots$、U_r的并。赋予 V_0 弱严格可微流形的结构，其坐标图为包含映射 $U_i \to V_0$，参见命题 5.9。

注意到 $V_0^{-1} \subset G$ 在 G中是大的，因为反函数是一个可定义双射，它将大子集 V_0 映到 V_0^{-1}上。由于两个大集合的交仍然是大的，我们得出 $V_0 \cap V_0^{-1}$在 G中是大的。进而，$V_0 \cap V_0^{-1}$在 V_0 中是大的，因此它包含 V_0的一个开稠密子集，见命题 5.11。设 $V_1 \subset V_0 \cap V_0^{-1}$ 是 V_0 中的开稠密子集，使得 V_1 上的反函数（取值于 V_0）严格可微且 T_k，见命题 5.7。

类似地，我们有 $V_0\times V_0\cap m^{-1}(V_0)$ 在 $G\times G$中是大的。事实上， $m^{-1}(V_0)$ 是 $G\times V_0$在 $G\times G$中的原像，其中所用的映射是可定义双射 (Id m)：$G\times G\to G\times G$。与之前同理，我们找到 $Y_0\subset V_0\times V_0\cap m^{-1}(V_0)$，它在 $V_0\times V_0$ 中开且稠密，使得乘法映射 $Y_0\to V_0$ 严格可微且 T_k。

现在我们取

$$V_1'=\{g\in V_1:(h,g),(h^{-1},hg)\in Y_0 \text{ for all } h \text{ generic over } g\}.$$

注意， V_1'是可定义的，因为 $g\in V_1'$等价于对于 $X_g=\{h\in G:$ (h,g)、(h^{-1},hg) $\in Y_0\}$，$\dim(G\setminus X_g)$ $<n$，而在几何理论中，维数在可定义族中是可定义的。还要注意， V_1'在 G中是大的，因为如果 $g\in G$ 是一般元，且 $h\in G$ 是关于 g的一般元，那么(h,g)在 $G\times G$中是一般元；而(h^{-1},hg)是由在(h,g)处的一个可定义双射的像，因此在 $G\times G$中也是一般元，所以它们属于 Y_0，因为 Y_0 在 $G\times G$中是大的。

现在取 V_0 中的 V_1'的内部 V_2 和 $V=V_2\cap V_2^{-1}$。那么，根据命题 5.11， V_2 在 V_0 中是大的，因此它在 G中也大。由此我们得出， V是 V_0的一个开稠密子集。

再定义 $Y=\{(g,h):$ $g,h,gh\in V,(g,h)$ $\in Y_0\}$，则 Y在 $V_0\times V_0$中是开稠密的。这是因为 Y 在 $G\times G$ 中是大的，理由同上；并且它在 Y_0 中是开集，因为 Y_0 中的乘法是连续的。

于是我们已经证明：

(1) V在 G中是大的。(2) Y是 $V\times V$的稠密开子集，且乘法 $Y\to V$严格可微并且T_k。(3) 取逆映射是一个从 V到 V上的严格可微 T_k-映射。(4) 若 $g\in V$且 $h\in G$ 在 G 上相对于 g 是一般元，则(h,g), (h^{-1},hg) $\in Y$

对于最后一项，注意 $h,hg,h^{-1}\in G$ 是一般元，因此它们属于 V。此外，由于$g\in V_1'$，有 (h,g), (h^{-1},hg) $\in Y_0$。

由此可得

(a) 对任意 $g,h\in G$，集合 $Z=\{x\in V:$ $gxh\in V\}$ 是开集，且由$x\mapsto gxh$ 给出的 $Z\to V$ 严格可微，并且 T_k。(b) 对任意 $g,h\in G$，集合 $W=\{(x,y)$ $\in V\times V:$ $gxhy\in V\}$ 在 $V\times V$中是开集，且由 (x,y) $\mapsto gxhy$ 给出的映射 $W\to V$严格可微，并且 T_k。

事实上，对于 (a)，假设 $x_0\in Z$，取 h_1，使其在 h 上为一般元，并取 k，使其在 g,x,h,h_1 上为一般元。取 $h_2=h_1^{-1}h$。注意到 $h_1,h_2\in V$。现在将 $f(x)=gxh$ 写成定义在 x_0 的某个开邻域上的严格可微且 T_k 函数的复合，具体如下。考虑集合$Z_1=\{x\in V:(kg,x)$ $\in Y,(kgx,h_1)$ $\in Y,(kgxh_1,h_2)$ $\in Y,(k^{-1},kgxh)$ $\in Y\}$，那么由第 2 条可知， Z_1 是开集，并且映射 $x\mapsto gxh=k^{-1}(((kgx)h_1)h_2)$是严格可微且 T_k 函数的复合。又由第 4 条， $x_0\in Z_1$。

同理，对于 (b)，给定 (x_0,y_0) $\in W$ 该集合

$$W_1=\{(x,y)\in V:(kg,x),(kgx,h_1),(kgxh_1,h_2),(kgxh,y),(k^{-1},kgxhy)\in Y\}$$

由第 (3) 项可知它是开集；由第 (4) 项可知它包含 (x_0,y_0)，且在 W_1 中，所需的映射是严格可微函数与 T_k 函数的复合。

根据上面的 (1) 和引理 6.2，有限个平移 g_0V、.....、g_nV 覆盖 G。考虑映射 $\varphi_i\colon V \to G$，其定义为 $\varphi_i(x) = g_ix$。利用上面的 (a)、(b) 和 (3)，不难验证这些坐标图赋予 G 一个（唯一的）严格可微或 T_k 流形结构，如引理 5.10 所述；在此结构下，G 是一个李群。

例如，为了证明过渡映射是严格可微或 T_k，我们必须证明集合 $V \cap g_i^{-1}g_jV$ 是开集，并且映射 $\varphi_{i,\ j}\colon V \cap g_i^{-1}g_jV \to V \cap g_j^{-1}g_iV$由$x \mapsto g_j^{-1}g_ix$给出，是严格可微或 T_k。这是 (a) 的一个特例。类似地，(b) 转化为乘法是严格可微或 T_k，而 (a) 和 (3) 则转化为取逆映射是严格可微且 T_k。

当 acl $=$ dcl 时，命题 2.15 中适当版本的胞腔分解通过重复上述证明即可得到结论。或者，我们也可以直接根据刚刚证明的结果、命题 5.13 和引理 6.2（以及引理 5.10 的适当版本）得出结论。事实上，如果 G 是一个具有 acl $=$ dcl 的 1-h-极小域中的可定义群，那么 G 具有弱严格可微 T_k-李群的结构。由命题 5.13 可知，存在一个开稠密集合 $U \subset G$，使得 U 是一个严格可微 T_k-流形。由命题 5.11 和引理 6.2 可知，有限个 U 的平移覆盖 G, $g_1U \cup \cdots \cup g_nU = G$。于是，函数 $\varphi_i\colon U \to G$ 由 $x \mapsto g_ix$ 给出，构成了 G 的粘合数据，使其成为一个严格可微 T_k-李群。□

由于前一个结果表明，每个可定义群 G 都具有可定义弱李群结构，且该结构在唯一同构意义下唯一，因此，每当我们提及弱李群结构的某个性质时，均指相对于这一结构而言。

定义 6.5. 严格可微局部李群由一个包含指定点 $e \in U \subset K^n$ 的可定义开集、一个可定义开子集 $e \in U_1 \subset U$，以及可定义严格可微映射 $U_1 \times U_1 \to U$（记作 $(a, b) \mapsto a \cdot b$ 和 $U_1 \to U$（记作 $a \mapsto a^{-1}$）给出，其中存在一个可定义开集 $e \in U_2 \subset U_1$，使得

- $a \cdot e = e \cdot a = a$ 对于 $a \in U_2$。
- 若 a、b、$c \in U_2$，则 $a \cdot b \in U_1$、$b \cdot c \in U_1$，且 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。
- 若 $a \in U_2$ 则 $a^{-1} \in U_1$ 且 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$。

给定两个可定义严格可微局部李群 U 和 V，一个可定义严格可微局部李群态射由一个可定义严格可微映射 f 给出：对于某个 $e \in U' \subset U_1$ 开集，$U' \to V_1$ 满足 U_1 和 V_1，如上述定义所述，并且满足 $f(e) = e$，$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$，以及 $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ 对于 $a \in U'$。此外，若两个这样的映射 f_1 和 f_2 在 0 附近具有相同的芽，换言之，若存在单位元的一个可定义开邻域 $W \subset$，使得 $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$，并且满足 $f_1|_W = f_2|_W$，则将它们视为同一个态射。

通常只考虑满足 $e = 0$ 的局部群；经过平移可知，每个局部群都同构于一个满足这一条件的局部群。在这种情况下，若要强调某个元素作为局部群单位元的作用，我们就用 e 表示这个特定元素。

我们通常将局部群与其在 e 处的芽等同起来。就此而言，局部李群的典型例子是李群的单位元附近的芽。

以下事实是链式法则的一个众所周知的应用。为完整起见，我们给出简短证明：

事实 6.6. 假设 U 是一个局部可定义严格可微李群。那么乘法映射 $m\colon U_1 \times U_1 \to U_0$ 的导数为 $m'(0)(u,v) = u + v$。逆函数 $i\colon U_1 \to U_0$ 的导数为 $i'(0)(x) = -x$。n 次幂 $p_n\colon U_n \to U_0$ 的导数为 $p_n'(0)(x) = nx$

证明。$m'(0)$ 的公式可直接由等式 $m(x,0) = x, m(0,y) = y$ 推出。事实上，若 $m(x,y) = ax + by + o(x,y)$，则代入 $y = 0$ 得到 $a = 1$，代入 $x = 0$ 得到 $b = 1$。这里我们使用了小 o 记号 $f = o(x,y)$，意指对于所有 $\epsilon > 0$，都存在一个 r，使得如果 $|(x,y)| < r$，那么 $|f(x,y)| \leq \epsilon|(x,y)|$；并且我们使用了严格可微函数 $m(x,0)$ 和 $m(0,y)$ 的导数唯一性。

由此，$i'(0)$ 的公式可由 $m(x, i(x)) = 0$ 以及链式法则推出。

p_n 的公式由链式法则和 $p_n(x) = m(p_{n-1}(x)\ x$ 归纳得出). □

我们给出一些关于子群和商群的结果。这些结果并非主要应用所必需。

命题 6.7. 假设 $f\colon G \to H$ 是满射可定义群态射。那么 f 是下沉。

证明. 这是 Sard 引理（命题 5.21）的推论。 □

事实 6.8. 假设 X 是拓扑空间，且 $Y \subset X$ 是 X 的局部闭子集的有限并。那么 X 的每个非空开子集都包含一个非空开子集，该子集与 Y 不相交，或包含于 Y。

证明. 所述性质在布尔组合下封闭，并且对开子集成立。□

命题 6.9. 假设 G 是一个可定义群，$H \subset G$是一个可定义子群。那么 H 在 G中是闭的。

证明. 回忆一下，H 是 G的有限个局部闭子集的并，例如见命题 5.12。因此，对 $H \subset H$应用事实 6.8 可得，H 在 H中具有非空的相对内部。由于 H 是一个子群，通过平移可得 H 在 H中是开集。开子群是其某些平移的补集，因此也是闭集。由此可得 $H = H$ 是闭的。□

命题 6.10. 假设 $H \subset G$ 是 G的一个子群。那么在 G和 H上赋予弱可定义严格可微流形结构后，包含映射 $i\colon H \to G$是一个闭嵌入。

证明. 根据命题 5.20，存在一个开稠密集 $U \subset H$，使得 $i|_U$ 是一个嵌入。必要时将 U替换为 $U' = U \setminus \mathrm{cl}(i(H) \setminus i(U))$，并牢记命题 2.18 可用于证明 U'在 H中是大的，我们可以假设 $i(U)$在 $i(H)$中是开集。通过平移可得 i 是一个浸入。此外，对于一个开集 $V \subset H$，有 $i(V) = i(\bigcup_{h\in H} hU \cap V) = \bigcup_h hi(U \cap h^{-1}V)$在 $i(H)$中是开集。由于 i 是单射，结论得证。□

作为常秩函数定理（命题 4.11）的推论，我们得到以下结果：

推论 6.11. 设 U 和 V 是可定义严格可微局部李群，并设$g, f\colon U \to V$是可定义严格可微局部李群态射。若记 $Z = \{x \in U\colon g(x) = f(x)\}$，则 $\dim_e Z = \dim(\ker(f'(e) - g'(e)))$。

特别地，若 G 和 H 是可定义严格可微弱李群，且 g, f 是可定义严格可微李群态射，则 $\dim\{x\colon f(x) = g(x)\} = \dim(\ker(f'(e) - g'(e)))$。

证明。由引理 5.8 可知，第二个结论由第一个结论推出。

为使证明易于阅读，我们只验证弱李群情形下的第一个陈述。局部李群的证明类似。通过在 G 中作平移，我们看到映射 $f \cdot g^{-1}\colon G \to G$ 在 G 的任意一点处的导数秩均为常秩，等于 $\dim(G) - k$，其中 $k = \dim(\ker(f'(e) - g'(e)))$。事实上，若 $u \in G$，则 $(f \cdot g^{-1})' L_u = L_{f(u)} R_{g(u)^{-1}} (f \cdot g^{-1})'$，其中 L_u、R_u 分别表示由 u 导出的左平移与右平移。由链式法则可得 $(f \cdot g^{-1})'(u) L_u'(e) = (L_{f(u)} R_{g(u)^{-1}})'(f(u) \cdot g(u)^{-1})(f \cdot g^{-1})'(e)$。由于 L_u 和 $L_{f(u)} R_{g(u)}$ 是可定义的严格微分同胚，它们在任意一点处的导数都是向量空间同构，因此我们得出，$(f \cdot g^{-1})'(u)$ 的秩等于 $(f \cdot g^{-1})'(e) = f'(e) - g'(e)$ 的秩（见事实 6.6），证毕。

由常秩函数定理（命题 4.11），我们得出存在非空开集 $U \subset G$ 和 $V \subset H$、原点周围的球 B_1、B_2 和 B_3，以及可定义的严格可微同构 $\varphi_1\colon U \to B_1 \times B_2$ 和 $\varphi_2\colon V \to B_1 \times B_3$，使得 $f(U) \subset V$ and $\varphi_2 f = \varphi_1 \alpha$ for $\alpha\colon B_1 \times B_3 \to B_1 \times B_3$ 函数 $(x, y) \mapsto (x, 0)$。在 G 中平移后，我们不妨设 $e \in U$。更确切地说，由前面讨论过的公式 $(f \cdot g^{-1}) L_u = (L_{f(u)} R_{g(u)^{-1}})(f \cdot g^{-1})$ 可知，如果 $u \in U$ 在 φ_1 下映到 $(0, 0)$，那么 $e \in u^{-1}U$，因此我们可以将 $(U, V, \varphi_1, \varphi_2)$ 替换为 $(u^{-1}U, f(u)^{-1} V g(u)\ \varphi_1 L_u, \varphi_2 L_{f(u)} R_{g\ u}^{-1}(\ ))$。另请注意，$\varphi_1(e) = (0, 0)$。

在此情形下，我们得到 $\{0\} \times B_2 = \varphi_1(Z \cap U)$，因此 e 在 Z 处的局部维数就是 $\{0\} \times B_2 \subset B_1 \times B_2$ 在 $(0, 0)$ 处的局部维数，而这等于 B_2 的维数，正如所述。□

在特定情形下，前述结论中的维数 $\dim(\ker(f'(e) - g'(e)))$ 等于 G的维数，我们得到：

推论 6.12。设 U 和 V 是可定义严格可微局部李群，并设 g、$f\colon U \to V$ 是可定义严格可微局部李群态射。那么，f 和 g 相等（作为局部李群态射）当且仅当 $f'(0) = g'(0)$。

特别地，如果 G 和 H 是可定义严格可微弱李群，且 g、f 是可定义严格可微李群态射，那么 f 和 g 在单位元 e 的某个开邻域内重合，当且仅当 $f'(e) = g'(e)$。

以下两个推论在后文中不会用到，但其本身可能也颇有意义。

推论 6.13. 设 H_1 和 H_2 是严格可微可定义弱李群 G 的子群。那么 $T_e(H_1 \cap H_2)$ 与 $= T_e(H_1)$ 在 $\cap T_e(H_2)$ 中作为子空间相等。

证明。这是推论 6.11 的结果。事实上，我们知道 H_1、H_2 和 $H_1 \cap H_2$ 是严格可微可定义弱李群，且包含映射 $H_1 \cap H_2 \to H_i$ 和 $H_i \to G$ 是严格可微浸入，例如由命题 6.10 可知，因此该陈述是有意义的。我们还有对角映射 $\Delta\colon H_1 \cap H_2 \to H_1 \times H_2$ 是两个投影 $p_1\colon H_1 \times H_2 \to G$ 和 $p_2\colon H_1 \times H_2 \to G$ 的等化子。$p_1'(e) - p_2'(e)$ 的核是经由

对角映射将 $T_e(H_1) \cap T_e(H_2)$ 映到的像。因此，由推论 6.11 中维数相等可得 $T_e(H_1 \cap H_2) = T_e(H_1) \cap T_e(H_2)$。□

推论 6.14. 若 G 是一个可定义的严格可微弱李群，且 H_1、H_2 是子群，则存在 $U \subset G$ 的一个开邻域 e，使得 $U \cap H_1 = U \cap H_2$ 当且仅当 $T_e(H_1) = T_e(H_2)$。

证明. 由推论 6.13，我们得到对于 $H_3 = H_1 \cap H_2$，$T_e(H_3) = T_e(H_1) = T_e(H_2)$。接着，由于包含映射 $H_3 \to H_1$ 在单位元处诱导出切空间的同构，根据反函数定理 4.4，我们得出存在单位元的一个开邻域 $U \subset G$，使得 $U \cap H_1 = U \cap H_3$。注意，这里还用到了这样一个事实：使 H_1 和 H_3 成为严格可微可定义李群的拓扑，与由 G 诱导的子群拓扑一致，参见命题 6.10。

对称地，对于某个开集 U'，我们有 $U' \cap H_2 = U' \cap H_3$。 □

接下来，我们给出可定义李群 G 在 $T_e(G)$ 中熟知的李括号定义，并证明它构成一个李代数。

定义 6.15. 设 G 是一个可定义的严格可微弱李群。对于 $g \in G$，我们考虑映射 $c_g : G \to G$，其定义为 $c_g(h) = ghg^{-1}$。于是 c_g 是一个可定义群态射，因此它是严格可微的，见命题 5.7。其导数给出映射 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}_K(T_e(G)), g \mapsto c_g'(e)$；根据链式法则和等式 $c_g c_h = c_{gh}$，这是一个可定义映射和群态射。于是 Ad 严格可微，因此它在 e 处的导数给出线性映射 $\mathrm{ad} : T_e(G) \to \mathrm{End}_K(T_e(G))$。换言之，这给出了双线性映射 $(x, y) \mapsto \mathrm{ad}(x)(y), T_e(G) \times T_e(G) \to T_e(G)$，记作 $(x, y) \mapsto [x, y]$。

这个映射称为李括号。

命题 6.16. 设 G是一个可定义的弱 T_2-李群。设 $0 \in U \subset K^n$ 是一个开集，且$i : U \to G$是一个从 U到 G的开子集的 T_2-微分同胚，并将 0 映到 e。通过 i将 U赋予局部可定义群结构。那么在识别 $i'(0) : K^n \to T_e(G)$ 后，李括号由性质 $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = [x, y] + O(x, y)^3$，（对 $x, y \in U$）刻画。

证明. 函数 $f(x, y) = x \cdot y \cdot x^{-1}$满足 $f(0, y) = y$且 $f(x, 0) = 0$，因此其二阶泰勒近似具有形式 $f(x, y) = y + axy + O(x, y)^3$。事实上，它具有形式 $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + O(x, y)^3$；代入 $x = 0$ 并利用泰勒近似的唯一性，得到 $a_0 = a_5 = 0$ 和 $a_2 = 1$。对 $y = 0$ 作类似论证可得 $a_1 = a_3 = 0$，因此 $f(x, y) = y + axy + O(x, y)^3$，如所声称。

由 $\mathrm{Ad}(x)$ 的定义可得 $f(x, y) = \mathrm{Ad}(x)y + O_x(y^2)$，其中 O_x 表示系数可能依赖于 x。

注意，$\mathrm{ad}(x)$ 的定义给出 $\mathrm{Ad}(x)(y) = y + [x, y] + O(x^2 y)$。事实上，我们有 $\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{Ad}(0) + \mathrm{Ad}'(0)(x) + O(x^2) = I + \mathrm{ad}(x) + O(x^2)$，其中 I 是单位矩阵；在 y 处求值后，我们得出 $\mathrm{Ad}(x)y = y + [x, y] + O(x^2 y)$。

我们得出 $y + axy + O(x, y)^3 = y + [x, y] + O_x(y^2)$。这意味着 $[x, y] = axy$。参见引理 3.15。现在由 $x \cdot y \cdot x^{-1} = y + axy + O(y, x)^3$, 以及公式 $x \cdot y^{-1} = x - y + b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2 + O(x, y)^3$（参见事实 6.6），我们得到 $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y \cdot x^{-1}) \cdot y^{-1} = axy + b_3 y^2 + O(x, y)^3$。另一方面，如果 $c(x, y) = x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$，那么 $c(0, y) = 0$ 意味着 $b_3 = 0$，如要求所示。□

命题 6.17。设 G 是一个可定义的严格可微弱李群。则 $(T_e(G), [,])$ 是一个李代数。

证明。我们需要证明 $[x,x] = 0$ 以及雅可比恒等式。我们将使用命题 6.16 的刻画（由命题 6.4，我们可以假设 G 是 T_2）。$[x,x] = 0$ 现在可立即得出。

证明雅可比恒等式的思路是利用结合律，以两种不同方式将 xyz 表示为 $f(x,y,z)zyx$：第一种是从左到右进行置换，第二种是先置换 yz，再从左到右进行置换。具体细节如下。

写作 $c(x,y) = xyx^{-1}y^{-1}$，有

$$xyz = c(x,y)yxz = c(x,y)yc(x,z)zx = c(x,y)([y,c(x,z)] + O(y,c(x,z))^3)c(x,z)yzx = \\ c(x,y)([y,[x,z]] + O(x,y,z)^4)c(x,z)c(y,z)zyx = \\ (c(x,y) + [y,[x,z]] + c(x,z) + c(y,z) + O(x,y,z)^4)zyx.$$

最后一步，我们使用公式 $xy = x + y + O(x,y)^2$。另一方面，

$$xyz = xc(y,z)zy = ([x,c(y,z)] + O(x,c(y,z))^3)c(y,z)xzy = \\ ([x,[y,z]] + O(x,y,z)^4)c(y,z)c(x,z)zxy = ([x,[y,z]] + O(x,y,z)^4)c(y,z)c(x,z)zc(x,y)yx = \\ ([x,[y,z]] + O(x,y,z)^4)c(y,z)c(x,z)([z,[x,y]] + O(x,y,z)^4)c(x,y)zyx = \\ ([x,[y,z]] + c(y,z) + c(x,z) + c(x,y) + [z,[x,y]] + O(x,y,z)^4)zyx.$$

由此得到 $[y,[x,z]] = [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + O(x,y,z)^4$，并根据泰勒展开的唯一性，得到 $[y,[x,z]] = [x,[y,z]] + [z,[x,y]]$，这就是雅可比恒等式。□

给定一个严格可微可定义弱李群 G，我们将 $Lie(G)$ 记作切空间$T_e(G)$，并将其视为带有李括号 $[x,y]$ 的李代数。

7. 可定义域

本节证明，若 L 是 1-h-极小赋值域中的一个可定义域，那么作为可定义域，L 同构于 K 的一个有限域扩张。这个结果推广了 [2, 定理 4.2], ，该定理对此情形在实闭赋值域中给出了证明；也推广了 [12, 定理 4.1] ，该定理对此情形在 p-进闭域中给出了证明。

借助我们在上一节建立的术语和结果，证明的主要要点与 o-极小域中可定义的无限域分类中所用的要点相似， [10, 定理 1.1]。

引理 7.1. 设 K 是 1-h-极小的， $L \subseteq K$ 是一个可定义子域。那么 $L = K$。

证明。 L是一个可定义集，由于 K 的特征为 0，它是无限的。由此可知存在一个非空开球 $B \subset L$，例如可由维数理论（命题 2.11 的第 2 项）得出。由一个非空开球生成的域是 K。事实上， $B - B$ 包含一个以原点B'为中心的球， $C = B' \setminus \{0\}^{-1}$ 是一个闭球的补集，并且 $C - C = K$。□

引理 7.2. 假设 K 是 1-h-极小的。令 F_1 和 F_2 为 K的有限扩张，并将它们视为 K中的可定义域。若 $\varphi\colon F_1 \to F_2$ 是可定义域态射，则 φ 是 K 扩张的态射；换言之，它在限制到 K时是单位元。

证明. 集合 $\{x \in K : \varphi(x) = x\}$ 是 K的可定义子域，因此由引理 7.1可得所需结论。□

命题 7.3. 设 K 是 1-h-极小的，且 F 是一个可定义域。那么 F 作为可定义域同构于 K 的一个有限扩张。从有限 K-扩张到可定义域的遗忘函子构成范畴等价。

证明. 该函子是满的这一点由引理 7.2 得出。

设 F 是一个可定义域。由命题 6.4 可知，$(F,+)$ 是一个可定义的严格可微弱李群。若 $a \in F$，则映射 $L_a : x \mapsto ax$ 是一个可定义群态射，因此由命题 6.4 的满性可知它是严格可微的。我们得到一个可定义映射 $f : F \to M_n(K)$，其定义为 $a \mapsto L'_a(0)$。根据链式法则，对于所有 $a,b \in F$，有 $f(ab) = f(a)f(b)$。显然，$f(1) = 1$。最后有 $f(a+b) = f(a) + f(b)$（李群中乘法 $G \times G \to G$ 的导数是求和映射，参见事实 6.6）。由此可知 f 是一个环映射；又因为 F 是域，所以它是单射。若令 $i : K \to M_n(K)$ 由 $i(k) = kI$ 给出，其中 I 是单位矩阵，则 $i^{-1}f(F) \subset K$ 是 K 的一个可定义子域，因此由引理 7.1 可知 $i(K) \subset f(F)$。所以 F/K 是所需的有限域扩张。□

8. 一维群是有限-阿贝尔-有限群

本节证明，若 K 是一个 1-h-极小赋值域，且 G 是 K 中可定义的一维群，那么 G 是有限 - 阿贝尔 - 有限群。这推广了 [13, 定理 2.5]，其中证明了在 p 进闭域中可定义的一维群是有限扩张的阿贝尔群。该结果类似于 [11, 推论 2.16]，其中表明在 o-极小结构中可定义的一维群是有限扩张的阿贝尔群。

这里的证明并非对任一已有证明的直接改编，因为我们不假设 NIP，这使论证更加复杂。

定义 8.1. 设 G 是一个群。我们用 C^w 表示元素 $x \in G$ 的集合，其中这些元素的中心化子 $c_G(x)$ 在 G 中具有有限指数。

注意，C^w 是 G 的特征子群。

引理 8.2. 设 G 是一个（抽象）群。取定义 8.1 中的 C^w，以及它的中心 Z。那么 C^w 和 Z 是 G 的特征子群，且 Z 是交换的。此外，Z 在 G 中具有有限指数，当且仅当 G 是有限扩张的阿贝尔群。

当 G 在一个几何理论中可定义时，C^w 和 Z 都是可定义的。此外，$x \in C^w$ 当且仅当 $\dim(c_G(x)) = \dim(G)$。

证明。显然，C^w 和 Z 是特征子群，且 Z 是阿贝尔的。因此，特别地，若 $[G : Z] < \infty$，则 G 是有限扩张的阿贝尔群。另一方面，若 A 是一个有限的阿贝尔子群，则 $A \subset C^w$，因为对每个 $a \in A$，$A \subset c_G(a)$。若 $a_1, \ldots, a_n$ 是 A 在 C^w 中的左陪集代表元集合，则 $\bigcap_{k=1}^n c_G(a_k) \cap A \subset Z$；又由于 $a_k \in C^w$，$c_G(a_k)$ 在 G 中具有有限指数，因此 Z 在 G 中具有有限指数。

如果 G 在几何理论中是可定义的，注意到 $x \in C^w$ 当且仅当 x^G，即 G 在共轭作用下的轨道，是有限的。这是因为映射 $x \mapsto x^g$ 的纤维是 $c_G(x)$ 的陪集。所以 C^w

是可定义的，因为几何理论消除了存在无穷量词。我们还可以得到，如果 $\dim(c_G(x)) = \dim(G)$，那么 $c_G(x)$ 的指数有限。□

引理 8.3. 设 $f\colon X \times Y \to Z$ 是一个前几何理论中可定义的函数。记 $n = \dim(X)$ 和 $m = \dim(Y)$。假设对于所有 $x \in X$，函数 $f_x(y) = f(x,y)$ 的非空纤维维数均为 m。假设对于所有 $y \in Y$，函数 $f_y(x) = f(x,y)$ 的非空纤维维数均为 n。那么 f 的像是有限的。

证明. 我们断言，f 的非空纤维维数为 $n+m$。事实上，若 $(x_0,y_0) \in X\times Y$，则 $f^{-1}f(x_0,y_0)$ 包含 $\cup_{x\in f_{y_0}^{-1}f_{y_0}(x_0)}\{x\} \times f_x^{-1}f_x(y_0)$，因此由维数的可加性可得结论。□

引理 8.4. 假设 G 在一个前几何理论中是可定义的，且 $G = C^w$。那么交换子映射 $c\colon G \times G \to G$ 的像是有限的。

证明。交换子映射 $c(x,y)$ 在固定 x、而 y 遍历 $c_G(y)$ 的一个右陪集时为常值；在固定 y、而 x 遍历 $c_G(x)$ 的一个右陪集时也为常值。这意味着 c 的像是有限的，参见引理 8.3。□

引理 8.5. 假设 G 是一个在前几何理论中可定义的 n 维群，且满足 $G = C^w$。那么存在一个有限指数的可定义特征子群 G_1，其中含有一个在 G_1 中心的特征有限子群 L，使得 G_1/L 是阿贝尔群。若 Z 是 G_1 的中心，则对于某个 m，Z/L 包含 $(G_1/L)^m$，即 G_1/L 的 m 次幂。

如果该理论是 NIP，那么 G 的中心具有有限指数。

证明。如果该理论具有 NIP，那么根据 Baldwin-Saxl（例如，[14, 引理 1.3]），中心具有有限指数。事实上，$Z = \bigcap_{g\in G} c_G(g)$ 是一个可定义子群族的交，其中每个子群根据假设 $G = C^w$ 都具有有限指数。因此，由于 G 是 NIP，可知 Z 是有限多个中心化子与 $[G$ 的交：$Z] < \omega$。

一般而言，由引理 8.4 可知 $c(G,G)$ 是有限的。$c(G,G)$ 的中心化子是 G_1，并且根据假设 $G = C^w$，它在 G 中具有有限指数。显然，G_1 是 G 的特征子群，因此我们可以用 G_1 替换 G，并假设 $c(G,G)$ 包含于 G 的中心。

在这种情况下，我们证明 $c(G,G)$ 生成一个有限的中心特征子群 $L = D(G)$。事实上，由于 $c(G,G)$ 是中心的，简单计算可得，对于所有 $g,h,x \in G$，有 $c(gh,x) = c(g,x)c(h,x)$。由此可知，$c(g,h)^m = c(g^m,h)$ 属于 $c(G,G)$。因此，$c(g,h)$ 的阶有限。由于 $c(G,G)$ 是由有限阶元素组成的中心子群，它生成的群是中心且有限的。显然，它是特征的。

我们还可以看出，如果 m 是 $D(G)$ 的阶，那么对于所有 $g \in G$，都有 $g^m \in Z$。这是因为 $c(g^m,h) = c(g,h)^m = 1$，所以 $(G/D(G))^m$ 包含于 $Z/D(G)$，如所需。□

引理 8.6. 设 G 是一个在 1-h-极小理论中可定义的 n 维阿贝尔群。那么 G 的 m-扭子群是有限的，并且 $G^m \subset G$是一个维数为 n 的子群。

证明。映射 $x \mapsto x^m$ 是一个可定义群态射，且在单位元处的导数可逆，参见事实 6.6。因此，根据推论 6.11，G 的 m-挠子有限；于是根据维数的可加性，$\dim(G^m) = \dim(G) = n$。□

引理 8.7. 设 G是在一个 1-h-极小域中可定义的 n维群。那么 C^w 是映射 Ad： $G \to GL_n(K)$ 的核。

若李代数 Lie(G) 是阿贝尔的，则 C^w 的指数有限。

证明。第一条由推论 6.12 和引理 8.2 得出。

若李括号是阿贝尔的，则根据李括号的定义，Ad 在 e 处的导数为 0。这意味着根据推论 6.12， $C^w = \ker(\mathrm{Ad})$ 包含 e 的一个开邻域，因此 C^w 是 n 维的。由于 Ad 的核是 C^w，由维数的可加性可知 C^w 在 G 中的指数有限。□

引理 8.8。设 G 是一个 n 维的、可定义于 1-h-极小理论中的有限扩张阿贝尔群。那么 $G = C^w$ 和 G 的中心的维数均为 n。

证明。设 H 为有限正规子群，使得 G/H 是阿贝尔的。由域中的有限虚元消去可知 G/H 是可定义的。此外，由推论 6.11 可知，商映射 $p: G \to G/H$ 在单位元处诱导切空间的同构，并且在此同构下，对所有 $g \in G$， $1 = \mathrm{Ad}(p(g)) = \mathrm{Ad}(g)$。由引理 8.7 得出 $G = C^w$。现在应用引理 8.5，可得特征子群 $L \subset G_1 \subset G$，使得 G/G_1 有限，L 有限且 G_1/L 是阿贝尔的，并且对某个 m， $Z(G_1)/L \supset (G_1/L)^m$。注意， $Z(G_1)$ 包含 $Z(G)$ 的一个有限指数子群，因此只需证明 $(G_1/L)^m$ 的维数为 n。

这由引理 8.6 得出。 □

命题 8.9. 假设 K 是 1-h-极小的。假设 G是严格可微可定义弱李群。那么，李群(G)是阿贝尔的，当且仅当 G 是有限-阿贝尔-有限群。在此情形下， G 具有特征可定义子群 $L \subset G_1 \subset G$，使得 G/G_1 是有限的， G_1/L 是阿贝尔的，并且 L在 G_1中是有限且中心的。此外，若 Z 是 G'的中心，那么 Z 是 n维的，并且对于某个 m， Z/L 包含 $(G_1/L)^m$。

若 K 是 NIP 的，那么我们可以取 $L = 1$。

证明. 将前面的结果以及引理 8.7、8.5、8.8 综合起来即可得出。 □

推论 8.10. 假设 G是在 1-h-极小赋值域中可定义的一维群。那么 G 是有限-阿贝尔-有限群。若该理论是 NIP 的，则 G 是有限扩张的阿贝尔群。

证明。由命题 6.4 可知， G 是一个严格可微可定义弱李群。由于唯一的一维李代数是阿贝尔的，结论由命题 8.9 立即得出。□

在 NIP 情形下，这个推论可以更直接地由可定义群是可定义地弱李这一事实推出。确实，这意味着存在一个元素 $x \in G$，满足 $x^n \neq e$ （因为映射 $x \mapsto x^n$ 在 e 处的导数是 $v \mapsto nv$，不等于 0，见事实 6.6）。由 $\aleph_0$-饱和性可知，存在一个 $x \in G$，使得由 x 生成的群是无限的。于是根据 [13], 注 2.4， x 的中心化子的中心化子具有有限指数且是阿贝尔的。事实上，注意到若 $a \in c_G(x)$，则 $c_G(a)$包含由 x生成的群，因此其维数为 1。

最后一个推论表明，在 [1] 中完成的对代数闭赋值域中可定义的一维阿贝尔群的分类，可以推广到特征零的 K 中的所有可定义一维群 [7]（另见其主要结果）。也就是说，由于代数闭赋值域$_0$ 是 1-h-极小且具有 NIP，一维可定义

群是有限扩张的阿贝尔群，因此 [1] 中的可定义一维阿贝尔群分类适用。我们不知道这个推论在代数闭赋值域$_p$中$_p$是否成立。类似地，对剩余特征为 0 的伪局部域中可定义的一维群进行分类时，也不需要交换性假设。由于这些域是纯亨塞尔的，因此它们也是 1-h-极小的，所以我们可以应用命题 8.9。为得到完整结果，我们注意到，尽管伪局部域不具有 NIP，但检查在 [1]中得到的可定义一维阿贝尔群列表 A表明，这些群几乎可除（即，对于所有 n， nA在 A 中的指数有限）。因此，按照命题 8.9 的记号， G_1 的中心在 G_1中具有有限指数，所以每个一维群都是有限扩张的阿贝尔群。

问题8.11。若 G是有限扩张阿贝尔的，那么 G 的中心在 G中是否具有有限指数？如果理论是NIP，或者对于每个阿贝尔可定义群， nA在 A 中具有有限指数，那么结论成立；参见引理8.8和8.5。

注记8.12。代数闭赋值域$_p$, $_p$ 不属于1-h-极小性的框架。不过，前几节中的许多要素都可以移植到这一情形。例如： K 是几何的； K^n 的子集维数为 n 当且仅当它包含一个非空开集；在开集中定义的一对有限函数一般元处连续；在开集中可定义的函数一般元处连续；并且 K 是可定义球完备的。

一对有限函数一般元处连续，这是因为acl(a)与 a 的域论代数闭包重合，并且可由关于根的连续性的适当结果推出。函数一般元处连续，这是因为dcl(a)是 a的完美闭包的亨塞尔化，因此可定义函数在可定义的分段上是有理函数、弗罗贝尼乌斯自同构的逆函数以及亨塞尔多项式的根的复合，而这些函数全都连续。

然而，Frobenius 的逆函数处处不可微，因此命题 3.12 不成立。此外，Frobenius 是一个导数为 0 的同胚，因此例如命题4.6 不成立。

参考文献

[1] Juan Pablo Acosta。《代数闭赋值域和伪局部域中可定义的一维交换群》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2112.00430，2021 年 12 月。[2] Martin Bays 和 Ya'acov Peterzil。《紧李群无穷小群中的可定义性》。Confluentes Math.，11(2)：3–23，2019 年。[3] David Bradley-Williams 和 Immanuel Halupczok。《亨塞尔极小赋值域的球完备模型》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2109.08619，2021 年 9 月。[4] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok 和 Silvain Rideau-Kikuchi。《亨塞尔极小性 I》。Forum Math. Pi，10：论文编号 e11，2022 年。[5] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok、Silvain Rideau-Kikuchi 和 Floris Vermeulen。《亨塞尔极小性 II：混合特征及其在丢番图问题中的应用》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2104.09475，2021 年 4 月。[6] Yatir Halevi、Assaf Hasson 和 Ya'acov Peterzil。《各种赋值域中的可解释域》。Adv. Math.，404：论文编号 108408，2022 年。[7] Yatir Halevi、Assaf Hasson 和 Ya'acov Peterzil。《关于各种赋值域中可解释的群》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2206.05677，2022 年 6 月。[8] Ehud Hrushovski 和 Anand Pillay。《局部域和伪有限域中可定义的群》。Israel J. Math.，85(1-3)：203–262，1994 年。

[9] Ehud Hrushovski 和 Silvain Rideau-Kikuchi。《赋值域与亚稳群》。Selecta Math. (N.S.)，25(3)：论文编号 47，58 页，2019 年。[10] Margarita Otero、Ya'acov Peterzil 和 Anand Pillay。《实闭域的 o-极小扩张中可定义的群和环》。Bull. London Math. Soc.，28(1)：7–14，1996 年。[11] Anand Pillay。《关于 o-极小结构中可定义的群和域》。J. Pure Appl. Algebra，53(3)：239–255，1988 年。[12] Anand Pillay。《关于 Q_p 中可定义的域》。Arch. Math. Logic，29(1)：1–7，1989 年。[13] Anand Pillay 和 Ningyuan Yao。《关于 p-进域中可定义的群的一则短札》。Arch. Math. Logic，58(7-8)：1029–1034，2019 年。[14] Bruno Poizat。《稳定群》，Mathematical Surveys and Monographs 第 87 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年。由 Moses Gabriel Klein 从 1987 年法文原版翻译。[15] Pierre Simon 和 Erik Walsberg。《dp-极小结构上的驯性拓扑》。Notre Dame J. Form. Log.，60(1)：61–76，2019 年。[16] A. J. Wilkie。《补集定理与若干新的 o-极小结构》。Selecta Math. (N.S.)，5(4)：397–421，1999 年。

数学系 ，内盖夫本-古里安大学 ，贝尔谢巴 84105 ，以色列
电子邮箱地址：jupaaclo1393@gmail.com

以色列贝尔谢巴84105，内盖夫本-古里安大学数学系 电子邮箱：hassonas@math.bgu.ac.il