arXiv:2303.01128v1 [math.NT] 2 Mar 2023

O有限指数和的对称性 II

FLORIAN PAUSINGER 和 DIMITRIS VARTZIOTIS

Abstract. 在本文中，我们将继续研究由两个指数函数的加权和定义的曲线之图所具有的丰富几何性质。设 $\gamma^s_{a,b}\colon [0,1]\to\mathbb{C}$ 定义为

$$\gamma^s_{a,b}(t)=(1-s)\exp(2\pi iat)+(1+s)\exp(2\pi ibt)$$

其中 $1\le a<b$ 是两个正整数，且 $s\in[-1,1]$。在第一部分中，我们确定了 $\gamma_{a,b}:=\gamma^0_{a,b}$的图的对称群。本文的主要目标是研究当 s 从 -1 变为 1 时，曲线之图的连续变化。作为主要结果，我们确定了 $s\in[-1,1]\setminus\{0\}$ 的绕数 $\mathrm{wind}(\gamma^s_{a,b},0)$，以及每条此类曲线的尖点集合。这进一步阐明了我们最初的对称性结果，并为几何和拓扑中的高级概念提供了更多非平凡但易于表述的实例。

1. Introduction

参数曲线在应用数学中发挥着至关重要的作用，是描述物体轨迹的工具。在动力系统和分岔理论的语境下，曲线，尤其是曲线的奇点，是描述系统复杂行为或行为变化的多用途工具。曲线和流形的大量应用推动了一个丰富理论的发展，该理论被称为奇点理论 [1, 2]。H. Whitney[8] 做出了开创性贡献，研究了映射的临界点；R. Thom [9] 则发展了灾变理论。J. Callahan 在关于奇点与平面映射的两篇论文中，对这些引人入胜的主题作出了非常易于阅读的介绍 [3, 4]。我们的工作旨在对几何和拓扑中的复杂概念给出简单但并非平凡的说明。在第一篇论文 [5] 中，我们给出了具有任意对称群的图的示例；秉承这一精神，现在我们专注于生成具有任意数量尖点的曲线。尖点是奇点的一种重要类型，通常意味着系统中的过渡或分岔，我们也能在示例中看到这一点。我们认为，深入理解此类奇点十分重要；因此，我们提供简单易懂的玩具模型，以阐释这一基本概念。

为介绍我们的模型，令$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_m)$表示一个正整数向量 $a_1,\ldots,a_m$，其中 $m\ge 2$，并令 $\gamma_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为如下定义的（闭）曲线：

$$\gamma_{\mathbf{a}}(t)=\exp(2\pi ia_1t)+\ldots+\exp(2\pi ia_mt)=\sum_{j=1}^{m}\exp(2\pi ia_jt). \tag{1}$$

函数 $\gamma_{\mathbf{a}}$ 是一周期的，即对所有 $t\in\mathbb{R}$，都有 $\gamma_{\mathbf{a}}(t)=\gamma_{\mathbf{a}}(t+1)$，因为 $\exp(2\pi iat)$、$t\in[0,1]$、$a\in\mathbb{Z}$在复平面上构成一个圆。此外，$\mathbf{a}$ 中的整数不必互不相同。如果某个整数在$\mathbf{a}$ 中出现多次，那么 $\gamma_{\mathbf{a}}$ 就对应于指数函数的加权和（权重为整数）。对于任意选取的参数，$\gamma_{\mathbf{a}}$ 的图像可能相当复杂；见图 1。最近的一篇论文还研究了此类指数函数的无穷和 [7]。

在 [5] 中，我们聚焦于最简单的情形，即两个指数函数之和的图像。我们能够确定这类图像的对称群，并找出所有自交点。有趣的是，我们证明了所有自交点都对应等距参数值t；也就是说，$\gamma_{a,\,b}(t)=\gamma_{a,\,b}(t')$当且仅当存在整数 $0\le j,\ j'\le b^2-a^2$，使得 $t=j/(b^2-a^2)$且 $t'=j'/(b^2-a^2)$。

我们通过引入连续权重来拓展研究。令 $s\in[-1,1]$ 为一个实参数。对于整数 $1\le a<b$ 和实数 $t\in[0,1]$，我们定义一族曲线

$$\gamma^s_{a,b}(t)=(1-s)\exp(2\pi iat)+(1+s)\exp(2\pi ibt). \tag{2}$$

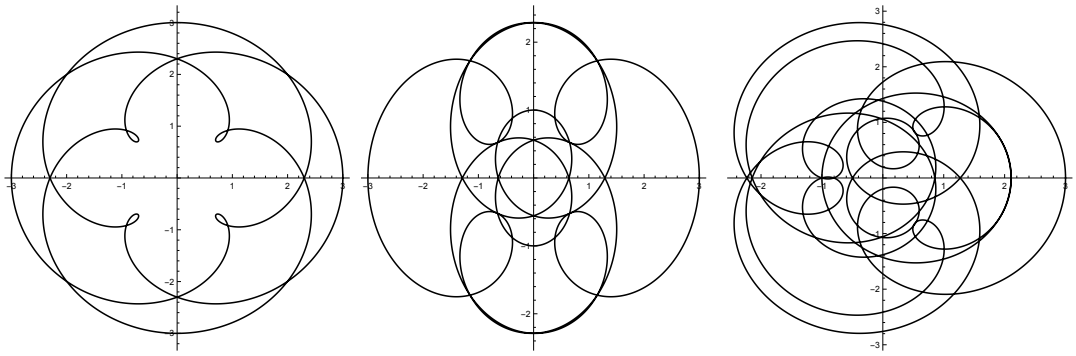


FIGURE 1. 不同图的示意图。从左至右：$\gamma_{3,\ 3,\ 7}$，$\gamma_{5,\ 15,\ 45}$ 和 $\gamma_{2,\ 7,\ 13}$。

注意，$\gamma_{a,\ b}(t) = \gamma^0_{a,\ b}(t)$，也就是说，我们定义了一个从 $2\exp(2\pi iat)$ 经由 $\gamma_{a,\ b}(t)$ 到 $2\exp(2\pi ibt)$ 的连续过渡，使权重之和始终为 2。图2 展示了 $\gamma^s_{1,\ 3}(t)$ 的示意图。

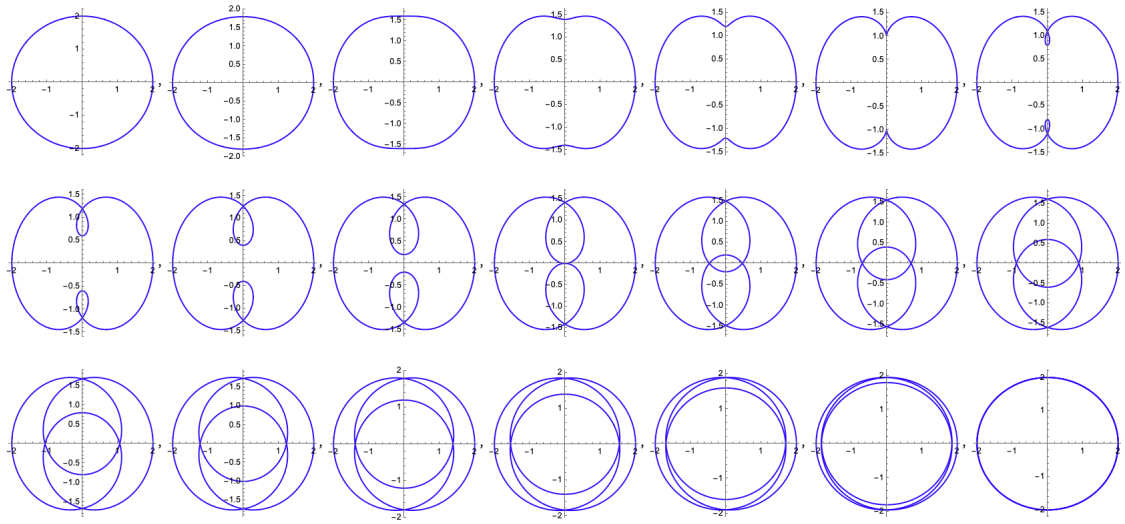


FIGURE 2. $\gamma^s_{1,\ 3}(t)$ 在 $s = -1,\ -0.9,\ \ldots, 0。9,\ 1$ 的示意图。

我们的主要目的是阐释绕数 以及尖点的概念。对于给定的参数 a 和 b，我们首先确定相应曲线 $\gamma^s_{a,\ b}$的绕数 $\mathrm{wind}(\gamma^s_{a,\ b},\ 0)$。

根据 [5, 2] 引理，我们回顾可知，$\gamma_{a,\ b}(t) = 0$ 当且仅当 $t = 2\,\frac{h}{b-a()}$对于奇数 $h \in [0, \ldots, 2(b-a)]$成立。这表明，每条曲线 $\gamma_{a,\ b}$的图都会穿过原点 $b-a$ 次。现在，观察图2 可知，$\gamma^s_{a,\ b}(t)$ 仅当 $s = 0$时才可能为零。这促使我们将原点作为研究起点，考察满足 $s \in [-1, 1] \setminus \{0\}$的每条曲线 $\gamma^s_{a,\ b}(t)$ 的绕数；另见图3。

定理 1. 对于整数 $1 \le a < b$，我们有 $\mathrm{wind}(\gamma^s_{a,b},\ 0) = a$（当 $s \in [-1, 0)$ 时），并且 $\mathrm{wind}(\gamma^s_{a,b},0) = b$（当 $s \in (0, 1]$时）。

此外，再看图2，我们可以看到，存在一个特定参数 $\bar{s}$，在该参数处会产生双重点。这些点称为尖点。作为第二个主要结果，我们确定给定整数 a, b时的数量 $\bar{s} = \bar{s}(a, b)$，以及这些尖点所在的参数 t。

特别地，我们在第4节研究特殊情形 $a = 1$ 和 $b = 3$，并证明：

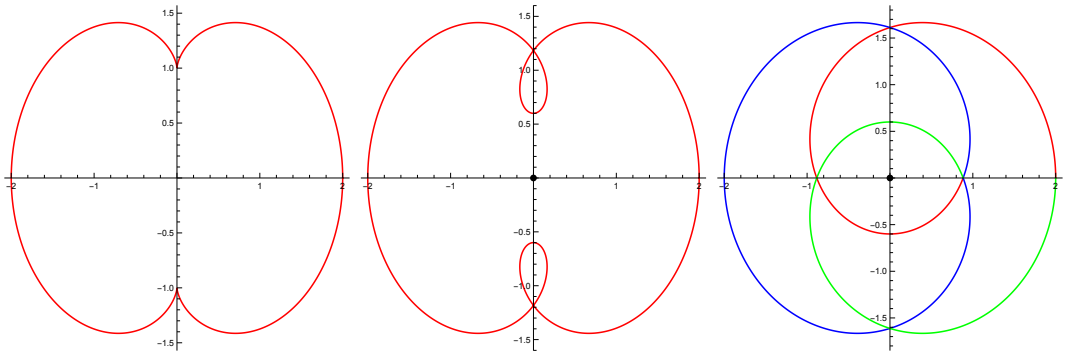


FIGURE 3. $\gamma_{1\ 3}^{-0.5}$尖点的示意图，（左），以及绕数 wind($\gamma_{1\ 3}^{-0.3}$，0) $=1$（中）和 wind($\gamma_{1\ 3}^{0.3}$，0) $=3$（右）。

定理 2. 对于 $a=1$、$b=3$ 和 $s\in[-1,1]$，曲线 $\gamma_{a,b}^{s}$ 有尖点，当且仅当$s=-1/2$ 和 $t=1/4$ 或 $t=3/4$。

这一结果可以推广。对于一般情形，我们不加证明地陈述这一观察，因为计算很快会变得繁琐，而且不会增加任何新的思想。我们观察到，对于整数 $1\le a<b$ 和实数 $s\in[-1,1]$，曲线 $\gamma_{a,\ b}^{s}$ 有尖点，当且仅当 $s=\frac{a-b}{a+b}$ 且 $t=\frac{h}{2\ (b-a)}$ 对于奇整数 $h\in[0,\dots,2\ (b-a)\ ]$。

本笔记的主要目标是给出具有任意多个尖点的曲线的简单但非平凡的例子。为此，我们在第5节中给出以下一般性陈述的证明；该陈述可视为对上述观察的部分证明，并展示了如何生成具有任意多个尖点的曲线。

定理 3. 设 $a=1$ 和 b 是满足 $a<b$的整数。若 $s=\frac{a-b}{a+b}$，则曲线 $\gamma_{a,\ b}^{s}$ 在奇整数 $h\in[0,\dots,2(b-a)]$满足 $t=\frac{h}{2\ (b-a)}$ 时有尖点。

我们的结果进一步阐明了 [5]中的对称性结果。特别地，我们看到，对于整数 $1\le k$，形如 exp($2\pi kt$) 的单个指数函数的绕数为 k。事实证明，当我们从 2 exp($2\pi at$) 连续过渡到 2 exp($2\pi bt$) 时，总存在一个参数 $\bar{s}$，此时恰好产生 $b-a$ 个环。从原点观察，这些环不断扩大，并使曲线在过渡过程中绕数从 $s<0$ 跃变为 $s>0$。

2. PRELIMINARIES

2.1. 对称性。 我们注意到，用于证明 [5, 推论 1] 的论证可以原样适用。一方面，权重 $1-s$ 和 $1+s$ 对用于确立图的旋转对称性的同余关系没有影响。另一方面，权重也不影响关于距原点最远的 $b-a$ 点的论证。因此，我们可以得出：

引理 1。 对于互素整数 $1\le a<b$ 和 $s\in$（-1，1），γ_a^s的图的对称群为 D_{b-a}，即阶为2（$b-a$）的二面体群。

2.2. 绕数。 平面中闭曲线 γ 绕给定点 z_0 的绕数 wind(γ，z_0) 是一个整数，表示曲线绕该点逆时针行进的总圈数。绕数的正负表示曲线的定向，即负绕数表示曲线绕点顺时针行进。这个概念十分重要，在数学的不同领域中存在多种不同（但等价！）的定义。我们采用复分析中的定义。若 γ 是复平面中由 $t\in[0,1]$ 参数化的闭曲线，则 γ 绕点 z_0 的绕数定义为

对于复数 $z_0 \notin \gamma([0,1])$，其定义为

$$\mathrm{wind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt.$$

可以证明，[6, 定理 10.10] 绕数取整数值，在 $\Omega = \mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$ 的每个极大连通子集上保持不变；若 z_0位于 Ω 的无界连通分支中，则绕数为零。

2.3. 平面曲线的奇点。平面 $\mathbb{R}^2$ 中的参数曲线 γ 是一个函数γ： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，满足 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t))$。若 $\gamma(0) = \gamma(1)$，则该曲线是闭曲线。向量

$$\gamma'(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right)$$

是平面 t中曲线 γ 的切向量。满足 $\gamma'(t) = 0$ 的点 $t\in[0,1]$ 称为奇点，满足 $\gamma'(t)\neq 0$ 的点称为正则点。曲线的参数导数定义为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{subject to } x'(t)\neq 0.$$

注意，奇点 t处的参数导数没有定义。特别地，当 $x'(t) = 0$时，即存在垂直切线时，参数导数没有定义。若 $y'(t) = 0$ 且 $x'(t) \neq 0$，即存在水平切线，则参数导数为零。

3. Winding numbers

为了证明定理 1，我们需要以下引理，它是留数定理的一个应用。

引理 2. 对于实数 α,β，当 $\beta > 0$ 时，我们有

$$\int_0^1 \frac{1}{\beta+\alpha\cdot\exp(2\pi it)}dt = \begin{cases}\frac{1}{\beta} & \text{if } \beta > |\alpha| \\ 0 & \text{if } \beta < |\alpha|\end{cases}.$$

证明. 让我们对复函数

$$f(z) = \frac{1}{\alpha+z}$$

沿曲线 $|z| = \beta$ 积分。对于整数 $b\neq 0$ 和实数 $\beta > 0$，我们可以将曲线参数化为

$$\gamma(t) = \beta e^{2\pi ibt} \qquad \text{for } 0\le t\le 1.$$

注意，这条曲线绕原点 b 圈（b 的符号表示定向，即顺时针或逆时针）。

Then

$$\int_{|z|=\beta} f(z) = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta e^{2\pi ibt}}\beta 2\pi ibe^{2\pi ibt}dt.$$

这个积分也可以写成

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta e^{2\pi ibt}}\beta 2\pi ibe^{2\pi ibt}dt = 2\pi ib\beta\int_0^1 \frac{1}{\alpha e^{-2b\pi it}+\beta}dt$$

现在我们可以计算

$$\int_{|z|=\beta} f(z) \qquad \text{using the residue theorem.}$$

函数 f 在 $z = -\alpha$中有一个留数。这意味着，如果 $\beta > |\alpha|$，那么圆周积分就会捕获该留数。我们有 $\mathrm{Res}(f,-\alpha) = 1$，且 $\mathrm{wind}(\gamma,-\alpha) = b$。因此，根据留数定理

$$\int_{|z|=\beta} f(z) = 2\pi ib \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha e^{-2b\pi it}+\beta}dt.$$

如果 $\beta < |\alpha|$，那么曲线没有包围任何东西，积分的值为 0 . □

定理 1 的证明。 曲线 $\gamma = \gamma_{a,\ b}^{s}$ 以 $t \in [0,1]$ 为参数时，关于 $z_0 \notin \gamma([0,1])$ 的绕数定义为

$$\mathrm{wind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}dt.$$

令 $z_0 = 0$ 并使用 γ_a^s的定义，b 我们得到 $s \in [-1,1] \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{wind}(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(1-s)2\pi ia\exp(2\pi iat) + (1+s)2\pi ib\exp(2\pi ibt)}{(1-s)\exp(2\pi iat) + (1+s)\exp(2\pi ibt)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)a\exp(2\pi iat)}{(1-s)\exp(2\pi iat) + (1+s)\exp(2\pi ibt)}dt + \int_0^1 \frac{(1+s)b\exp(2\pi ibt)}{(1-s)\exp(2\pi iat) + (1+s)\exp(2\pi ibt)}dt \\
&= a(1-s)\int_0^1 \frac{1}{(1-s) + (1+s)\exp(2\pi i(b-a)t)}dt \\
&\qquad + b(1+s)\int_0^1 \frac{1}{(1-s)\exp(2\pi i(a-b)t) + (1+s)}dt.
\end{aligned}$$

应用引理 2 得到所需结果：若 $(1-s) > (1+s)$，即若 $s \in [-1,0)$，则可得

$$\mathrm{wind}_\gamma(0) = a(1-s)\frac{1}{1-s} = a.$$

否则，$(1+s) > (1-s)$，即若 $s \in (0,1]$, 则可得

$$\mathrm{wind}_\gamma(0) = b(1+s)\frac{1}{1+s} = b.$$

□

4. Cusp points - the case $a = 1$, $b = 3$

本节考察特殊情形 $a = 1$ 和 $b = 3$ （见图3），并证明定理 2。在欧几里得空间中，我们有 $\gamma_{1,\ 3}^{s}(t) = (x_s(t)\ y_s(t))$，其中

$$\begin{aligned}
x_s(t) &= (1-s)\cos(2\pi t) + (1+s)\cos(6\pi t) \\
y_s(t) &= (1-s)\sin(2\pi t) + (1+s)\sin(6\pi t)
\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
x_s'(t) &= -2\pi(1-s)\sin(2\pi t) - 6\pi(1+s)\sin(6\pi t) \\
y_s'(t) &= 2\pi(1-s)\cos(2\pi t) + 6\pi(1+s)\cos(6\pi t).
\end{aligned}$$

可以通过参数导数研究参数曲线的奇异点。参数导数在奇异点处无定义。在本例中，我们得到

$$\frac{y_s'(t)}{x_s'(t)} = \frac{2\pi(1-s)\cos(2\pi t) + 6\pi(1+s)\cos(6\pi t)}{-2\pi(1-s)\sin(2\pi t) - 6\pi(1+s)\sin(6\pi t)}.$$

我们首先通过考察三个特殊情形来分析参数导数。首先令$s = -1$。在此情形下

$$\frac{4\pi\cos(2\pi t)}{-4\pi\sin(2\pi t)} = -\cot(2\pi t).$$

因此，当且仅当 $t = 0, 1/2, 1$ 时，导数不存在。然而， $y_s'(t) \neq 0$ 在这三个值处均成立，因此我们得出结论：曲线在这三个值处没有奇点，只有垂直切线。类似地，对于 $s = 1$，我们得到

$$\frac{12\pi\cos(6\pi t)}{-12\pi\sin(6\pi t)} = -\cot(6\pi t).$$

在这种情况下，当且仅当 $t = 0, 1/6, \ldots, 5/6, 1$ 时，导数不存在。同样，$y_s'(t) \neq 0$在这七个值处均成立，因此我们得出结论：曲线没有奇点，而只有垂直切线。

作为第三种特殊情形，我们考察 $s = -0.5$。在这种情形下，我们有

$$\begin{aligned}\frac{3\pi\cos(2\pi t) + 3\pi\cos(6\pi t)}{-3\pi\sin(2\pi t) - 3\pi\sin(6\pi t)} &= \frac{\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t)}{-\sin(2\pi t) - \sin(6\pi t)} \\ &= -\frac{2\cos\left(\frac{2\pi t+6\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi t-6\pi t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi t+6\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi t-6\pi t}{2}\right)} = -\cot(4\pi t).\end{aligned}$$

这里，当且仅当 $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ 时，导数未定义；另见图4。此外，我们有 $y_s'(1/4) = y'(3/4) = 0$。因此，在 $t = 1/4$ 和 $t = 3/4$处有两个奇点；见图3（左）。

接下来，我们考察 $s \in (-1, -0.5)$ 的参数导数。注意，我们可以将参数导数改写为

$$\frac{1 + 2s - 3(s+1)\cos(4\pi t)}{2 + s + 3(s+1)\cos(4\pi t)}\cot(2\pi t).$$

由于因子 $\cot(2\pi t)$，当 $t = 0, 1/2, 1$ 时，导数未定义。此外，当

$$2 + s + 3(s+1)\cos(4\pi t) = 0.$$

我们可以改写这个方程，得到

$$4\pi t = \arccos\left(\frac{-2-s}{3(1+s)}\right).$$

注意，反余弦是区间 $[0, \pi]$ 上余弦的反函数。因此，我们必须将范围限制在 $t \in [0, 1/4]$。由于余弦的对称性，每个解 $\bar{t}$现在对应 $[0, 1]$ 中的四个解；即 $\bar{t}$，$1/2 - \bar{t}$，$1/2 + \bar{t}$，$1 - \bar{t}$。

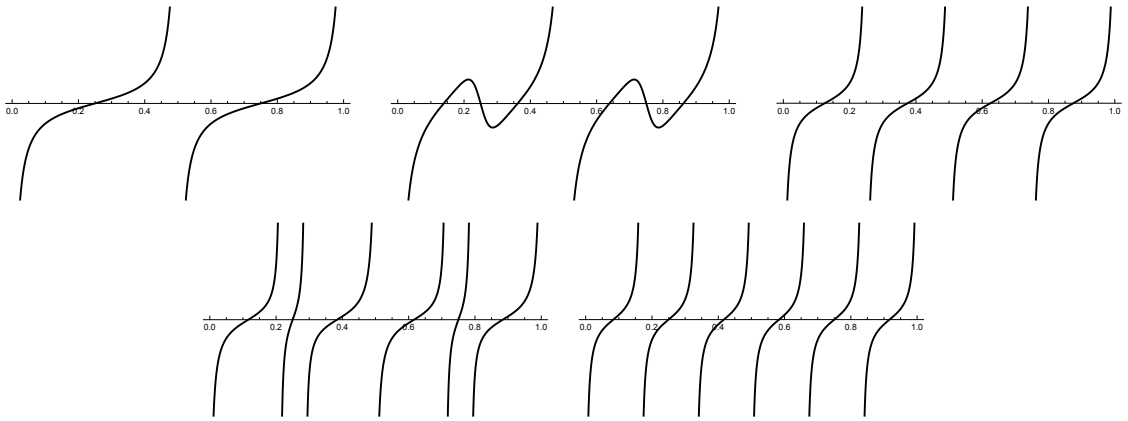


FIGURE 4. 曲线 $\gamma_{a,\,b}^{s}$ 的参数导数示意图，其中 $s = -1$，-0.6，-0.5，0。6，1

此外，根据定义，反余弦的自变量属于 $[-1, 1]$。因此，我们有

$$-1 \leq \frac{-2-s}{3(1+s)} \leq 1$$

由此

$$-1 \leq \frac{-2-s}{3(1+s)} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq s.$$

因此，$s \in (-1, -0.5)$没有额外的临界值；另见图5。

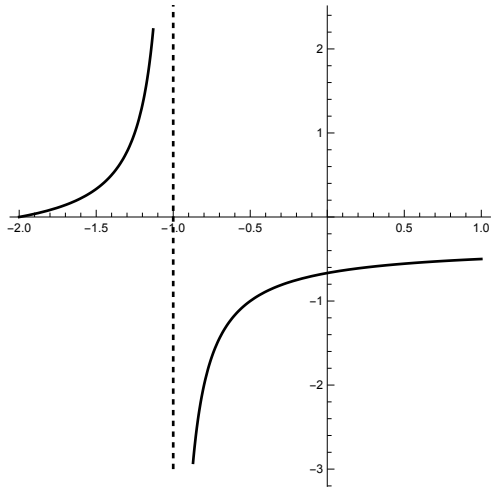


FIGURE 5. 函数 $_{3}^{-2-s}{}_{s+1}()$的示意图。

最后，我们转向 $s \in (-0.5,\ 1)$。在这种情况下，我们得到一个解，即

$$2 + s + 3(s+1)\cos(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\arccos\left(\frac{-2-s}{3(1+s)}\right)}{4\pi}$$

这意味着对于每个 $s \in (-0.5,1)$，还存在四个导数未定义的点。我们可以逐一验证这些额外的点均满足 $y'(t) \neq 0$。因此，我们找到了具有垂直切线的额外点。我们在图6中绘图总结了这些发现。

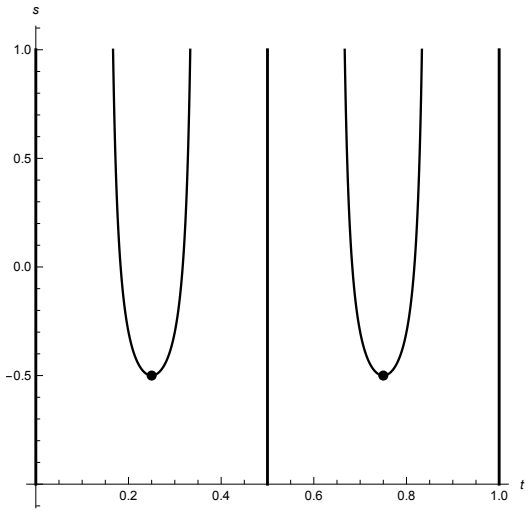


FIGURE 6. 示意图显示了 $\gamma_{1,3}^{s}$ 中参数导数未定义的点（黑色线条），其中包括两个尖点（粗黑点）。

我们找到了两个奇点，即（$s,\ t$）=（$-0.5,\ 0.25$）和（$s,\ t$）=（$-0.5,\ 0.75$）。为了确认这些点确实是曲线 $\gamma_{1\,3}^{-0.5,}$ 的尖点，我们考察从上方和下方趋近 t 时这些点处的单位切向量。对于尖点，这些

向量的方向应该相反。确实，我们有

$$\lim_{t\to(0.25)^+}\frac{(\gamma_{1,3}^{-0.5})'(t)}{\|(\gamma_{1,3}^{-0.5})'(t)\|}=(0,1),$$
$$\lim_{t\to(0.25)^-}\frac{(\gamma_{1,3}^{-0.5})'(t)}{\|(\gamma_{1,3}^{-0.5})'(t)\|}=(0,-1).$$

根据对称性，我们可以得到关于 $(s,t)=(-0.5,0.75)$ 的类似结果。因此，我们得出结论，这些奇点确实是尖点。

我们分别分析曲线 $\gamma_{a,b}^s$ 在 $t=0.25$ 的一个小邻域内的 x 坐标和 y 坐标的图；参见图 7。我们观察到，对于 $-0.5<s$， x 坐标的图有三个零点和两个局部极值，而对于 $s\le -0.5$，它只有一个零点。 x 坐标的这种符号变化最终表明，当 s 越过阈值 -0.5 时会形成一个环，并证实每当 $-0.5<s$ 时都存在一个双重点，即一个自交点。

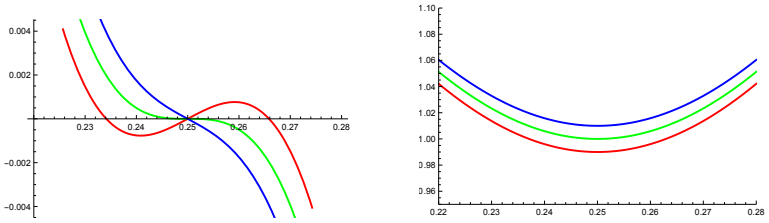


FIGURE 7. $\gamma_{1,3}^s(t)$ 的 x 分量（左）和 y 分量（右）的示意图，分别对应 $t\in[0.22,0.28]$ 和 $s=-0.495$ （红色）、 $s=-0.5$ （绿色）以及 $s=-0.505$ （蓝色）。

这就证明了定理 2。

5. CUSP POINTS - THE GENERAL CASE

本节研究一般情形，并证明定理 3。从几何角度看，我们可以像前面的例子一样，用类似的方法论证一般情形。然而，论证会变得更加微妙，因为尖点和双重点通常都不位于 y轴上。因此，由于这些点处没有垂直切线或水平切线，便更难（从形式上）识别它们。接下来，我们在上一节分析的基础上增加一个额外的第一步。由于我们知道每条曲线 $\gamma_{a,\,b}^s$ （其中 $0<a<b$ 和 $s\in[-1,1]$为整数）的图的对称群，即 D_{b-a}，因此只需研究参数区间 $t\in[0,1/(b-a)]$内的曲线。如果我们在此区间内找到一个尖点，那么根据对称性，每个区间 $[j/(b-a),\,(j+1)/(b-a)]$ 都包含一个尖点。此外，通过观察，我们猜测 $\gamma_{a,\,b}^s$ 的尖点位于

$$(s,t)=\left(\frac{a-b}{a+b},\frac{j}{2(b-a)}\right).$$

因此，为了用我们的方法检测它们，我们首先旋转$\gamma_{a,\,b}^s$ 的图，使疑似尖点位于 y轴上。第二步，我们按照上一节中的方法分析这些图。

备注 1. 请注意，*Whitney* 发展出了一套强大得多的理论，在该理论中，我们可以将曲线 $\gamma_{a,b}^s$ 视为从一个流形（有边界或无边界）到 $\mathbb{R}^2$ 的映射；在我们的例子中，该流形是一个与 $[-1,1]\times[0,1]$ 相认的圆柱面；参见 [8]，另见 [?]，那里有非常好的入门介绍。不过，这超出了本文的讨论范围。

在第一个例子中，我们有 $b-a=3-1=2$，因此两个尖点恰好位于 y 轴上。如果 $b-a\geq 3$ 我们将图旋转角度

$$\phi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2(b-a)}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b-a}\right),$$

即，减去水平轴与位于 $t=1/(2(b-a))$ 的第一个尖点之间的夹角 $\pi/2$；见图 8。通过使用曲线的复数表示，并乘以 $\exp(i\phi)$，即可实现这一旋转，其中 ϕ 是旋转角，即我们得到

$$\exp\left(\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{b-a}\right)\cdot\gamma_{a,b}^{s}(t).$$

现在我们将范围限制为 $t\in[0,1/(b-a)]$；见图 8。

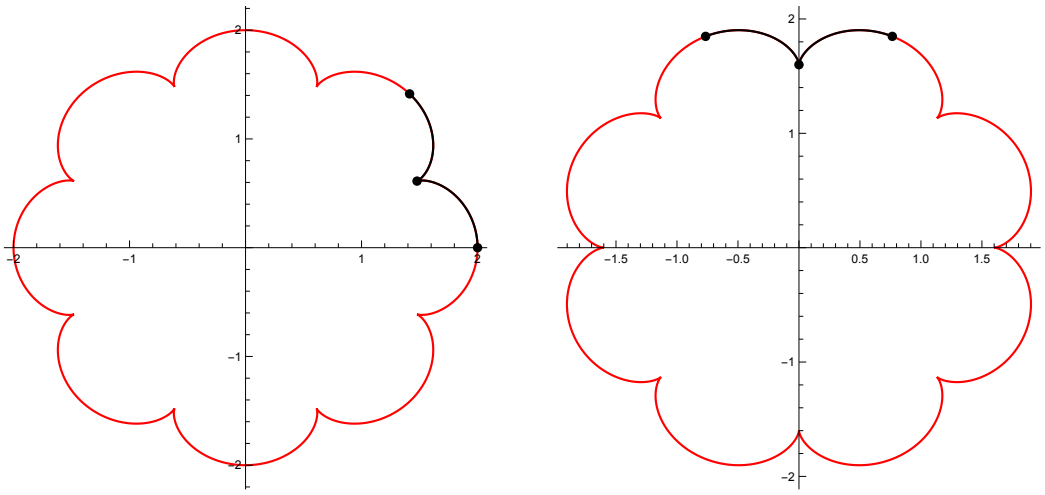


FIGURE 8. 对 $\gamma_{1\,9}^{-0.8}$ 的示意图（左图），以及图形旋转 $\phi=\pi/2-\pi/8$ 后的示意图（右图）。黑色线段表示两条曲线中 $t\in[0,1/8]$ 对应的子曲线。三个黑点分别位于 $t=0$，$t=1/16$，$t=1/8$。

和之前一样，我们可以改用曲线在 $\mathbb{R}^2$ 中的表示，并计算坐标函数的导数：

$$x_s'(t)=-2a(1-s)\pi\cos\left(\frac{\pi}{b-a}-2a\pi t\right)-2b(1+s)\pi\cos\left(\frac{\pi}{b-a}-2b\pi t\right)$$
$$y_s'(t)=2a(1-s)\pi\sin\left(\frac{\pi}{b-a}-2a\pi t\right)+2b(1+s)\pi\sin\left(\frac{\pi}{b-a}-2b\pi t\right).$$

由此 我们可以计算特殊值 $s=\frac{a-b}{a+b}$ 处的参数导数，并得到

$$\frac{y_s'(t)}{x_s'(t)}=-\tan\left(\pi\left(\frac{1}{b-a}-(a+b)t\right)\right).$$

根据假设 $a=1$，我们看到，当限制在区间 $t\in[0,1/(b-a)]$上时，参数导数在 $t=\frac{1}{2(b-a)}$ 处未定义：函数 $\tan(\phi)$ 每当$\phi=(1/2+n)\pi$ （$n\in\mathbb{Z}$）时就有一个极点。现在，很容易看出

$$a=1,\ t=\frac{1}{2(b-a)}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{b-a}-(a+b)t=-\frac{1}{2}$$

检查第二个坐标函数的导数可知，$y'(t)=0$，因此这里确实存在一个奇点。最后，为了确认该点确实是一个尖点，我们来考察

当我们从上方和下方趋近于 t 时，该点处的单位切向量。我们有

$$\lim_{t\to)^+} \frac{(\gamma_{1,b}^s)'(t)}{\|(\gamma_{1,b}^s)'(t)\|} = (0,1),$$
$$\lim_{t\to)^-} \frac{(\gamma_{1,b}^s)'(t)}{\|(\gamma_{1,b}^s)'(t)\|} = (0,-1).$$

因此，我们得出结论，这个奇点确实是一个尖点；根据对称性，对于奇数整数 $h \in [0,\dots,2(b-a)]$，每个 $t = {}_2{}^h{}_{(b-a)}$ 处都有一个尖点。这就完成了定理 3 的证明。

剩下要证明的是，这些确实是仅有的尖点，并且类似的论证也适用于 $a > 1$ 的情形。我们将此留给感兴趣的读者。

6. Conclusion

本文的主要目标是提供一种简单的方法，以生成具有任意对称群 D_k 和/或任意数量 k 的尖点，以及任意绕数 k 的非平凡曲线示例。我们可以使用任何计算机代数系统轻松生成并绘制这些示例，从而立即得到大量不同的示例。我们认为，本文结果的主要应用在于为高等数学概念提供简单的教材示例和课堂示例。从数学角度来看，一个有趣的未来研究方向是考察非整数参数 a 和 b 下的曲线图 $\gamma_{a,\,b}$。

Acknowledgements

本工作在 TWT GmbH Science & Innovation 的数学研究部完成。TWT 和作者谨此感谢 Stefan Steinerberger 在引理 2 方面提供的帮助。

References

[1] V.I. Arnold，《奇点理论》，剑桥大学出版社，2013 年。[2] J.W. Bruce，P.J. Giblin，《曲线与奇点》，第 2 版，剑桥大学出版社，2012 年。[3] J. Callahan，《奇点与平面映射》，《美国数学月刊》81，211–240（1974）。[4] J. Callahan，《奇点与平面映射 II：描绘灾变》，《美国数学月刊》84，765–803（1977）。[5] F. Pausinger，D. Vartziotis，《关于有限指数和的对称性》，《初等数学》76，62–73（2021）。[6] W. Rudin，《实分析与复分析》。第 3 版。麦格劳-希尔，1987 年。[7] D. Vartziotis，D. Bohnet，《由素数三角级数生成的分形曲线》。《分形与分数阶》，2(1)，2018 年。[8] H. Whitney，《欧几里得空间映射的奇点 I：平面到平面的映射》，《数学年刊》（第二辑）62，374–410（1955）。[9] E.C. Zeeman，《灾变理论》，《科学美国人》，1976 年 4 月，65–70 及 75–83。

FP: TWT GmbH Science & Innovation, Ernsthaldenstr. 17, 70565 Stuttgart, Germany, and School of Mathematics & Physics Queen's University Belfast BT7 1NN Belfast United Kingdom. , , „*Email address*: ext.florian.pausinger@twt-gmbh.de, f.pausinger@qub.ac.uk

DV: TWT GmbH Science & Innovation, Ernsthaldenstr. 17, 70565 Stuttgart, Germany, and NIKI Ltd. Digital Engineering Research Center Ethnikis Antistasis 205 45500 Katsikas Ioannina , , , „ Greece.

Email address: dimitris.vartziotis@twt-gmbh.de, dimitris.vartziotis@nikitec.gr