arXiv:2303.01132v1 [math.AC] 2 Mar 2023

路径图的路径理想的幂的深度与 Stanley 深度

Silviu B˘al˘anescu[1] 和 Mircea Cimpoeaş[2]

摘要

设 $I_{n,m} := (x_1x_2\cdots x_m,\ x_2x_3\cdots x_{m+1},\ \ldots,\ x_{n-m+1}\cdots x_n)$ 是环 $S = K[x_1,\ldots,x_n]$ 中长度为 n 的路径图的 m-路径理想。我们证明:

$$\operatorname{depth}(S/I_{n,m}^t) = \begin{cases} n-t+2-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1}\right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1}\right\rceil, & t \le n+1-m \\ m-1, & t > n+1-m \end{cases}, \text{ for all } t \ge 1.$$

此外，我们证明，对于所有 $t \ge 1$，$\operatorname{depth}(S/I_{n,m}) \ge \operatorname{sdepth}(S/I_{n,m}^t) \ge \operatorname{depth}(S/I_{n,m}^t)$ 且 $\operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \ge \operatorname{depth}(I_{n,m}^t)$。

关键词：Stanley 深度、深度、单项式理想。
2020年数学主题分类：13C15、13P10、13F20。

引言

设 K 为一个域，$S = K[x_1,\ldots,x_n]$ 为 K 上的多项式环。设 M 为一个 $\mathbb{Z}^n$-分次的 S-模。M 的一个 Stanley 分解是直和 $\mathcal{D}: M = \bigoplus_{i=1}^r m_iK[Z_i]$，它是一个 $\mathbb{Z}^n$-分次的 K-向量空间，其中 $m_i \in M$ 关于 $\mathbb{Z}^n$-分次是齐次的，$Z_i \subset \{x_1,\ldots,x_n\}$ 满足 $m_iK[Z_i] = \{um_i:\ u \in K[Z_i]\} \subset M$ 是 M 的一个自由 $K[Z_i]$-子模。我们定义 $\operatorname{sdepth}(\mathcal{D}) = \min_{i=1,\ldots,r}|Z_i|$，并且 $\operatorname{sdepth}(M) = \max\{\operatorname{sdepth}(\mathcal{D})|\ \mathcal{D}$ 是 $M\}$ 的一个 Stanley 分解。数 $\operatorname{sdepth}(M)$ 称为 M 的 Stanley 深度。

Herzog、Vladoiu 和 Zheng 在 [8] 中证明，若 $M = I/J$，则可以在有限步内计算 $\operatorname{sdepth}(M)$，其中 $J \subset I \subset S$ 是单项式理想。在 [12], 中，Rinaldo 为该算法在计算机代数系统 CoCoA [6]中提供了计算机实现。我们称一个 $\mathbb{Z}^n$-分次 S-模 M 满足 Stanley 不等式，如果

$$\operatorname{sdepth}(M) \ge \operatorname{depth}(M).$$

[1]Silviu B ˘al ˘anescu，布加勒斯特理工大学，应用科学学院，布加勒斯特，060042，电子邮箱：silviu.balanescu@stud.fsa.upb.ro[2]Mircea Cimpoeaş，布加勒斯特理工大学，应用科学学院，布加勒斯特，060042，罗马尼亚；Simion Stoilow 数学研究所，研究单元5，邮政信箱1-764，布加勒斯特 014700，罗马尼亚，电子邮箱：mircea.cimpoeas@upb.ro，mircea.cimpoeas@imar.ro

在 [1], 中，J. Apel 重述了 Stanley 在 [13], 中首次提出的一个猜想，即任意 $\mathbb{Z}^n$-$_7$分次 S-模 M 都满足 Stanley 不等式。一般而言，对于 $M = S/I$ 和 $M = J/I$，这一猜想被证明是错误的，其中 $0 \neq I \subset J \subset S$ 是单项式理想，参见 [7]。$_9$

Stanley 深度是一种重要的组合不变量，我们认为它值得深入研究。显式计算 Stanley 深度是一项困难的任务，即使在非常简单的情形下也是如此，例如 S 的极大单项式理想 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。因此，尽管 Stanley 猜想在最一般的情形下已被推翻，寻找满足 Stanley 不等式的大类理想仍然很有意义。此外，我们注意到，对于单项式理想，Stanley 猜想，即

$$\operatorname{sdepth}(I) \geq \operatorname{depth}(I),$$

仍未解决。关于 Stanley 深度主题的通俗入门介绍，请参阅$_{10}$读者 [9]。 $_{11}$

对于 $n \geq m \geq 1$，长度为 n 的路径图的 m-路径理想为：

$$I_{n,m} = (x_1 x_2 \cdots x_m,\ x_2 x_3 \cdots x_{m+1},\ \ldots,\ x_{n-m+1} \cdots x_n) \subset S.$$

在 [4,定理 1.3] 中，我们证明了：

$$\operatorname{sdepth}(S/I_{n,m}) = \operatorname{depth}(S/I_{n,m}) = n + 1 - \left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n+1}{m+1} \right\rceil.$$

在预印本 [14], Alin S.tefan 中指出：

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,2}) = \max\left\{ \left\lceil \frac{n+t-1}{3} \right\rceil, 1 \right\},$$

其中 $t \geq 1$。 $_{12}$

在定理 2.6 中，我们推广了上述两个结果，证明了：

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,m}) \geq \operatorname{depth}(S/I^t_{n,m}) = \begin{cases} n - t + 2 - \left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \leq n+1-m \\ m-1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

因此，在推论 2.8 中，我们给出了 $S/I^t_{n,m}$ 的投射维数公式。$_{13}$此外，在定理 2.9 中，我们证明了：

$$\operatorname{sdepth}(I^t_{n,m}) \geq \operatorname{depth}(I^t_{n,m}) = \begin{cases} n - t + 3 - \left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \leq n+1-m \\ m, & t > n+1-m \end{cases}$$

$$\text{and } \operatorname{sdepth}(I^t_{n,m}) \leq \min\{n + 1 - \left\lfloor \frac{n-t+1}{m+1} \right\rfloor,\ n - \left\lfloor \frac{\lceil \frac{t}{m} \rceil + 1}{2} \right\rfloor\}.$$

因此，$I^t_{n,\ m}$ 对任意 $t \geq 1$， $_{14}$

1 预备知识

首先，我们回顾著名的深度引理，例如参见 [15, 引理 2.3。9]。

引理 1.1. （深度引理）若 $0 \to U \to M \to N \to 0$ 是局部环 S上的模的短正合序列，或是满足 S_0 局部条件的诺特分次环上的模的短正合序列，则：

（1）深度 $M \geq \geqslant${深度 N， 深度 U}。

（2）深度 $U \geq \geqslant${深度 M，深度 $N+1$}。

（3）深度 $N \geq \geqslant${深度 $U-1$， 深度 M}。

在 [11], Asia Rauf 证明了引理 1。1（1）关于 Stanley 深度的对应结论：

引理 1.2. 若 $0 \to U \to M \to N \to 0$ 是一个 $\mathbb{Z}^n$-分次的 S-模的短正合序列，则：

$$\operatorname{sdepth}(M) \geq \min\{\operatorname{sdepth}(U), \operatorname{sdepth}(N)\}.$$

我们还回顾以下众所周知的结果。例如，参见 [11, 1 3], [3, 推论。命题 2。7], [2, 定理 1。1], [8, 引理 3。6] 和 [11, 推论 3。3]。

引理 1.3。设 $I \subset S$ 是一个单项式理想，并设 $u \in S$ 是一个不属于 I的单项式。则：

(1) Stanley 深度$(S/(I : u)) \geq$ Stanley 深度(S/I).

(2) Stanley 深度$(I : u) \geq$ Stanley 深度(I)。

(3) 深度$(S/(I : u)) \geq$ 深度(S/I)。

（4）如果 $I = u(I : u)$，则：

（a）Stanley 深度$(S/(I : u)) =$ Stanley 深度(S/I)。

（b）深度$(S/(I : u)) =$ 深度(S/I)。

（c）Stanley 深度$(I : u) =$ Stanley 深度(I)。

（5）如果 u 在 S/I 上是正则的，则：

（a）Stanley 深度$(S/(I,u)) =$ Stanley 深度$(S/I) - 1$。

(b) 深度$(S/(I,u)) =$ 深度$(S/I) - 1$.

(6) 若 $S' = S[x_{n+1}]$，则：

(a) Stanley 深度$_{S'}(S'/IS') =$ Stanley 深度$_S(S/I) + 1$，Stanley 深度$_{S'}(IS') =$ Stanley 深度$_S(I) + 1$.

(b) 深度$_{S'}(S'/IS') =$ 深度$_S(S/I) + 1$.

定理 1.4. (*[4, 定理 1.3]*) 若 $I_{n,m} = (x_1 \cdots x_m, x_2 \cdots x_{m+1}, \ldots, x_{n-m+1} \cdots x_n) \subset S$，则：Stanley 深度$(S/I_{n,m}) =$深度$(S/I_{n,m})$
$$= n+1-\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor.$$

2 主要结果

设 $1 \leq m \leq n$ 为两个整数。与上一节一样，我们考虑理想：

$$I_{n,m} = (x_1 \cdots x_m,\ x_2 \cdots x_{m+1},\ \ldots,\ x_{n-m+1} \cdots x_n) \subset S.$$

首先，我们证明以下引理：

引理 2.1. 设 $1 \leq m \leq n$ 和 $t \geq 2$ 是一些整数。则：

$$(I_{n,m}^t : x_{n-m+1} \cdots x_n) = I_{n,m}^{t-1}.$$

证明。 由于 $x_{n-m+1} \cdots x_n \in G(I_{n,m})$，包含关系 "$\supseteq$"显然。为了证明反向包含，设 $u \in (I_{n,m}^t : x_{n-m+1} \cdots x_n)$ 是一个单项式，即 $(x_{n-m+1} \cdots x_n) I_{n,m}^t$。由此可知，存在 $w \in G(I_{n,m}^t)$ 使得 $w \mid (x_{n-m+1} \cdots x_n)u$。

令 $k := \max\{j : x_j \mid w\}$。若 $k \leq n-m$，则 $w \mid x_{n-m+1} \cdots x_n)u$ 蕴含 $w \mid u$，因此 $u \in I_{n,m}^t \subseteq I_{n,m}^{t-1}$。若 $k \geq n-m+1$，由于 $w \in G(I_{n,m}^t)$，则 $x_{k-m+1} \cdots x_k \mid w$。因此 $w = (x_{k-m+1} \cdots x_k)w'$ 使得 $w' \in G(I_{n,m}^{t-1})$。此外，由于 $w \mid (x_{n-m+1} \cdots x_n)u$，可知 $w' \mid (x_{k+1} \cdots x_n)u$，从而 $u \in I_{n,m}^{t-1}$，如所要求。

□

引理 2.2. 设 $1 \leq m \leq n$、$2 \leq k \leq m$ 和 $t \geq 2$ 为一些整数。则：

$$((I_{n,m}^t : x_{n-k+2} \cdots x_n), x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1}) = (I_{n-k,m}^t, x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1}).$$

证明。 包含关系 "$\supseteq$" 是显然的。为了证明反向包含 "$\subseteq$"，我们选取一个单项式 $u \in (I_{n,m}^t : x_{n-k+2} \cdots x_n)$。如果 $x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1} \mid u$ 则无需证明。设 $x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1} \nmid u$。

由于 $u \in (I_{n,m}^t : x_{n-k+2} \cdots x_n)$，因此存在 $w \in G(I_{n,m}^t)$ 使得 $w \mid (x_{n-k+2} \cdots x_n)u$。注意，$w = w_1 \cdots w_t$，其中对所有 $1 \leq i \leq t$ 均有 $w_i \in G(I_{n,m})$。由于 $x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1} \nmid u$，我们可以推出对所有 $1 \leq i \leq t$ 都有 $x_{n-m+1} \cdots x_{n-k+1} \nmid w_i$。因此，对所有 i，有 $w_i \in G(I_{n-k,m})$，从而有 $w \in G(I_{n-k,m}^t)$。于是 $w \mid u$，因此有 $u \in I_{n-k,m}^t$，证毕。

□

命题 2.3. 使用上述记号，我们有：

$$\operatorname{sdepth}(S/I_{n,m}^t), \operatorname{depth}(S/I_{n,m}^t) \geq \begin{cases} n-t+2-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \leq n+1-m \\ m-1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

证明. 记

$$\varphi(n,m,t) := \begin{cases} n-t+2-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \leq n+1-m \\ m-1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

In o为了证明 $\operatorname{sdepth}(S/I_{n,m}^t) \geq \varphi(n,m,t)$，我们对 n、m、$t \geq$ 使用归纳法 1.

如果 $t=1$，由定理 1.4 可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/I_{n,m}) = n+1-\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n+1}{m+1} \right\rceil = \varphi(n,m,1),$$

因此得证。现在，假设 $t \geq 2$。如果 $n=m$，那么 $I_{n,\ n} = (x_1 \cdots x_n)$，因此，$I^t_{n,\ n} = (x_1^t \cdots x_n^t)$ 是一个主理想。因此，由引理 1.3(5)，我们得到：

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,n}) = n-1 = \varphi(n,n,t),$$

且无须证明。59

如果 $m=1$，那么 $I^t_{n,\ 1} = (x_1,\ldots,x_n)^t = \mathfrak{m}^t$，其中 $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_n)$ 是 S 的分次极大单项式理想。因此，我们有：

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,1}) = \operatorname{sdepth}(S/\mathbf{m}^t) = 0 = \varphi(n,1,t),$$

且无须证明。因此，我们可以假设 $n > m \geq 2$。60

如果 $n \leq 2m-1$，那么

$$I_{n,m} = x_{n-m+1}\cdots x_m \widetilde{I}_{n,m}, \text{ where}$$
$$\widetilde{I}_{n,m} = (x_1x_2\cdots x_{n-m}, x_2\cdots x_{n-m}x_{m+1}, \ldots, x_{n-m}x_{m+1}\cdots x_{n-1}, x_{m+1}\cdots x_n).$$

~由此可得 $I^t_{n,\ m} = x^t_{n-m+1}\cdots x^t_m I^t_{n,\ m}$。因此，我们有：61

$$\frac{S}{I^t_{n,m}} = \frac{S}{x^t_{n-m+1}\cdots x^t_m \widetilde{I}^t_{n,m}}. \tag{2.1}$$

另一方面，我们有：62

$$\frac{S}{\widetilde{I}^t_{n,m}} = \left(\frac{K[x_1,\ldots,x_{n-m},x_{m+1},\ldots,x_n]}{\widetilde{I}^t_{n,m}}\right)[x_{n-m+1},\ldots,x_m]. \tag{2.2}$$

此外，通过重新编号变量，我们注意到：63

$$\frac{K[x_1,\ldots,x_{n-m},x_{m+1},\ldots,x_n]}{\widetilde{I}^t_{n,m}} \cong \frac{K[x_1,\ldots,x_{2(n-m)}]}{I^t_{2(n-m),n-m}}. \tag{2.3}$$

From 由 (2.1)、(2.2)、(2.3)、引理 1.3(4,6) 和归纳假设可得 t:

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,m}) = \operatorname{sdepth}(S_{2(n-m)}/I^t_{n-m,m}) + 2m - n \geq$$

64

$$\geq \varphi(2(n-m),n-m,t) + 2m - n = \varphi(n,m,t), \tag{2.4}$$

其中我们记 $S_k := K[x_1,\ldots,x_k]$。65

在下文中，我们假设 $n \geq 2m$。令 $L_0 := I^t_{n,\ m}$ 并且归纳地考虑以下单项式理想：

$$L_j := (L_{j-1} : x_{n-m+j}),\ U_j := (L_{j-1}, x_{n-m+j}) \text{ for } 1 \leq j \leq m. \tag{2.5}$$

我们考虑以下短正合列：

$$0 \longrightarrow \frac{S}{L_1} \longrightarrow \frac{S}{L_0} \longrightarrow \frac{S}{U_1} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \frac{S}{L_2} \longrightarrow \frac{S}{L_1} \longrightarrow \frac{S}{U_2} \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$
$$0 \to \frac{S}{L_m} \to \frac{S}{L_{m-1}} \to \frac{S}{U_m} \to 0. \tag{2.6}$$

由引理 2.1 可知 $L_m = (I^t_{n,\ m} : \ \ x_{n-m+1} \cdots x_n) = I^{t-1}_{n\,m,}$。因此，由归纳假设可知：

$$\operatorname{sdepth}(S/L_m) = \operatorname{sdepth}(S/(I^t_{n,m} : x_{n-m+1} \cdots x_n)) \geq \varphi(n, m, t-1) \geq \varphi(n, m, t). \tag{2.7}$$

注意，由 (2.7) 和引理 1.3(1) 可知：

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,m}) \leq \operatorname{sdepth}(S/I^{t-1}_{n,m}). \tag{2.8}$$

此外，由 (2.5) 可知：

$$\begin{aligned} U_j = (L_{j-1}, x_{n-m+j}) &= ((I^t_{n,m} : x_{n-m+1} \cdots x_{n-m+j-1}), x_{n-m+j}) = \\ &= ((I^t_{n,m}, x_{n-m+j}) : x_{n-m+1} \cdots x_{n-m+j-1}) = \\ &= ((I^t_{n-m+j-1,m}, x_{n-m+j}) : x_{n-m+1} \cdots x_{n-m+j-1}) = \\ &= ((I^t_{n-m+j-1,m} : x_{n-m+1} \cdots x_{n-m+j-1}), x_{n-m+j}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

特别地，$U_1 = (I^t_{n,\ m},\ \ x_{n-m+1}) = (I^t_{n-m,\ m},\ \ x_{n-m+1})$，因此，由归纳假设和引理 1.3 可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/U_1) \geq \varphi(n-m, m, t) + m - 1. \tag{2.10}$$

根据欧几里得除法引理，存在一些整数 q 和 r 使得

$$n - t + 2 = (m+1)q + r,\ \text{where } 0 \leq r \leq m. \tag{2.11}$$

由此可得：

$$\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil = 2q + \left\lfloor \frac{r}{m+1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{r}{m+1} \right\rceil = \begin{cases} 2q, & r = 0 \\ 2q+1, & r \geq 1 \end{cases}. \tag{2.12}$$

此外：

$$\left\lfloor \frac{n-m-t+2}{m+1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-m-t+2}{m+1} \right\rceil = 2q - \left\lceil \frac{r-m}{m+1} \right\rceil - \left\lfloor \frac{r-m}{m+1} \right\rfloor = \begin{cases} 2q-1, & r < m \\ 2q, & r = 1 \end{cases}. \tag{2.13}$$

由 (2.12) 和 (2.13) 可得 $\varphi(n-m,m,t) + m - 1 \geq \varphi(n,m,t)$。因此，由 (2.10) 可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/U_1) \geq \varphi(n,m,t). \tag{2.14}$$

Now, 我们固定 $2 \leq j \leq m$，并令 $w_j := x_{n-2m+j} \cdots x_{n-m}$。令 $A_{j,0} := (U_j, w_j)$ and

$$A_{j,\ell} := (A_{j,\ell-1} : x_{n-m-\ell+1}) \text{ and } B_{j,\ell} := (A_{j,\ell-1}, x_{n-m-\ell+1}), \text{ for } 1 \leq \ell \leq m-j.$$

由 (2.9) 可得:

$$A_{j,\ell} = (A_{j,0} : x_{n-m} \cdots x_{n-m-\ell+1}) = ((U_j : x_{n-m} \cdots x_{n-m-\ell+1}), x_{n-2m+j} \cdots x_{n-m-\ell}) =$$

$$= ((I^t_{n-m+j-1,m} : x_{n-m-\ell+1} \cdots x_{n-m+j-1}), x_{n-2m+j} \cdots x_{n-m-\ell}, x_{n-m+j}), \tag{2.15}$$

对所有 $0 \leq \ell \leq m-j$。将引理 2.2 应用于 $n-m+j-1$ 而非 n 和 $k = j+\ell$，可得：

$$A_{j,\ell} = (I^t_{n-m-\ell-1,m}, x_{n-2m+j} \cdots x_{n-m-\ell}, x_{n-m+j}), \text{ for all } 0 \leq \ell \leq m-j. \tag{2.16}$$

我们考虑以下短正合序列:

$$0 \longrightarrow \frac{S}{(U_j : w_j)} \longrightarrow \frac{S}{U_j} \longrightarrow \frac{S}{A_{j,0}} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \frac{S}{A_{j,1}} \longrightarrow \frac{S}{A_{j,0}} \longrightarrow \frac{S}{B_{j,1}} \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$
$$0 \to \frac{S}{A_{j,m-j}} \to \frac{S}{A_{j,m-j-1}} \to \frac{S}{B_{j,m-j}} \to 0. \tag{2.17}$$

由 (2.9) 和引理 2.1 可得：

$$(U_j : w_j) = ((I^t_{n-m+j-1,m} : x_{n-2m+j} \cdots x_{n-m+j-1}), x_{n-m+j}) = (I^{t-1}_{n-m+j-1,m}, x_{n-m+j}) \tag{2.18}$$

因此，根据归纳假设可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/(U_j : w_j)) \geq \varphi(n-m+j-1, m, t-1) + m - j. \tag{2.19}$$

通过直接计算，我们注意到：

$$\varphi(n-m+j-1,m,t-1)+m-j \geq \varphi(n-1,m,t-1) = \varphi(n,m,t), \text{ for all } 1 \leq j \leq m. \tag{2.20}$$

因此，由式 (2.19) 和 (2.20) 可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/(U_j : w_j)) \geq \varphi(n, m, t). \tag{2.21}$$

由 (2.16) 可得

$$B_{j,\ell} = (A_{j,\ell-1}, x_{n-m-\ell+1}) = (I^t_{n-m-\ell,m}, x_{n-m-\ell+1}, x_{n-m+j}), \text{ for all } 1 \leq \ell \leq m-j. \tag{2.22}$$

由 (2.16)、引理 1.3、归纳假设以及直接计算可得：

$$\operatorname{sdepth}(S/A_{j,m-j}) = \operatorname{sdepth}(S/(I^t_{n-2m+j-1,m}, x_{n-2m+j}, x_{n-m+j})) \geq$$

$$\geq \varphi(n-2m+j-1, m, t) + 2m - j - 1 \geq \varphi(n, m, t). \tag{2.23}$$

类似地，由 (2.22) 和引理 1.3 可得

$$\operatorname{sdepth}(S/B_{j,\ell}) = \varphi(n-m-\ell, m, t) + m + \ell \geq \varphi(n, m, t), \text{ for all } 1 \leq \ell \leq m-j. \tag{2.24}$$

现在，由 (2.21)、(2.23)、(2.24) 以及短正合列 (2.17)，我们得出

$$\operatorname{sdepth}(S/U_j) \geq \varphi(n, m, t), \text{ for all } 2 \leq j \leq m. \tag{2.25}$$

此外，由 (2.7)、(2.14)、(2.25) 以及短正合列 (2.6)，我们得出

$$\operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,m}) \geq \varphi(n, m, t). \tag{2.26}$$

不等式 $\operatorname{depth}(S/I^t_{n,m}) \geq \varphi(n, m, t)$ 的证明类似，使用引理 1.1(2) 代替引理 1.2，并且也使用引理 1.3 中关于深度的结论。 □

令 t、$m \geq 2$ 为两个整数。在环 $S_{t+m} := K[x_1, x_2, \ldots, x_{t+m}]$ 中，我们考虑以下单项式理想：

$$U_{m,t} = (x_{i_1} \cdots x_{i_m} \in S_{m+t} \ : \ i_j \cong j (\operatorname{mod} m),\ 1 \leq j \leq m).$$

引理 2.4。使用上述记号，我们有：

(1) 深度$(S_{t+m}/U_{m,t}) = m-1$. (2) $m-1 \leq$ Stanley 深度$(S_{t+m}/U_{m,t}) \leq t+m-1-\left\lceil \frac{t}{m} \right\rceil$.
(3) Stanley 深度$(U_{m,t}) \leq t+m-\left\lfloor \frac{\lceil \frac{t}{m} \rceil + 1}{2} \right\rfloor$. (4) Stanley 深度$(U_{m,t}) \geq t+m-(t+m-m\lceil \frac{t}{m} \rceil)\left\lfloor \frac{\lceil \frac{t}{m} \rceil + 1}{2} \right\rfloor - (m\lceil \frac{t}{m} \rceil - t)\left\lfloor \frac{\lceil \frac{t}{m} \rceil}{2} \right\rfloor$.

证明。 (1) 假设 $t+m=ma+b$，其中 $1\leq b\leq m$。那么：

$$U_{m,t}=V_{m,1,a+1}\cap\ldots\cap V_{m,b,a+1}\cap V_{m,b+1,a}\cap\ldots\cap V_{m,m,a},\ \text{where } V_{m,j,k}:=(x_j,x_{j+m},\ldots,x_{j+(k-1)m}). \tag{2.27}$$

注意，我们有如下划分：

$$G(V_{m,1,a+1})\cup\cdots\cup G(V_{m,b,a+1})\cup G(V_{m,b+1,a})\cup\cdots\cup G(V_{m,m,a})=\{x_1,x_2,\ldots,x_{t+m}\}.$$

因此，由于 $V_{m,j,k}$ 是 $K[G(V_{m,j,k})]$ 的极大单项式理想，根据的定义，$U_{m,t}$ 通过归纳论证可得，深度$(S/U_{m,t})=m-1$。

(2) 根据 [3, 推论 1.9(3)]，由于 $U_{m,t}$ 是由互不相交变量集中的 m 理想的交集，故 $\operatorname{sdepth}(S/U_{m,t})\geq m-1$。另一方面，根据[3, 定理 1.3(2)]，我们有：

$$\operatorname{sdepth}(S/U_{m,t})\leq\operatorname{sdepth}(S/V_{m,1,a+1})=t+m-a-1=t+m-1-\left\lceil\frac{t}{m}\right\rceil.$$

(3) 根据 [10, 定理 1.1]和 (2.27)，我们有：

$$\operatorname{sdepth}(U_{m,t})\leq t+m-\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor=t+m-\left\lfloor\frac{\lceil\frac{t}{m}\rceil+1}{2}\right\rfloor.$$

(4) 根据 [10, 推论 1.8]和 (2.27)，我们有：

$$\begin{aligned}\operatorname{sdepth}(U_{m,t})&\geq t+m-b\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor-(m-b)\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor=\\&=t+m-(t+m-m\left\lceil\frac{t}{m}\right\rceil)\left\lfloor\frac{\lceil\frac{t}{m}\rceil+1}{2}\right\rfloor-(m\left\lceil\frac{t}{m}\right\rceil-t)\left\lfloor\frac{\lceil\frac{t}{m}\rceil}{2}\right\rfloor.\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

令 $q\geq 1$, $t,m\geq 2$, $0\leq r\leq m$ 和 $n:=(m+1)q+t-1+r$。我们考虑以下单项式：

$$w(m,t):=(x_2\cdots x_{m+1})(x_3\cdots x_{m+2})\cdots(x_t\cdots x_{t+m-1})\ \text{and}$$
$$w(m,t,q):=w(m,t)\cdot v(m,t,q),\ \text{where } v(m,t,q)=\prod_{\ell=1}^{q-1}x_{t+\ell(m+1)+1}\cdots x_{t+\ell(m+1)+m-1}.$$

通常，给定一个单项式 $v\in S$，其支撑 v，记作 $\operatorname{supp}(v)$，是所有整除 v 的变量组成的集合。

引理 2.5。使用上述记号，我们有：

$$(I_{n,m}^t:w(m,t,q))=\begin{cases}U_{m,t}+P_{m,t,q}, & r<m\\ U_{m,t}+P_{m,t,q}+(x_{n-m+1}\cdots x_n), & r=m\end{cases},\ \textit{where}$$

$$P_{m,t,q}:=(x_{t+m+1},x_{t+2(m+1)},\ldots,x_{t+(q-1)(m+1)})+(x_{t+2m+1},x_{t+3m+2},\ldots,x_{t+q(m+1)-1}).$$

此外，$P_{m,t,q}=(\{x_{t+m+1},\ldots,x_{n-r}\}\backslash\operatorname{supp}(v(m,t,q)))$ 且 $|\operatorname{supp}(v(m,t,q)|=(m-1)(q-1)+r$。

证明。为了证明这个等式，我们使用双重包含。首先，注意到 w（m，t）是$I^{t-1}_{n\,m,}$ 的一个极小单项式生成元。

若 $q \geq 2$ 且 $1 \leq \ell \leq q-1$，则

$$x_{t+\ell(m+1)}x_{t+\ell(m+1)+1}\cdots x_{t+\ell(m+1)+m-1} \mid x_{t+\ell(m+1)}v(m,t,q) \text{ and} \tag{2.28}$$

$$x_{t+\ell(m+1)+1}\cdots x_{t+\ell(m+1)+m-1}x_{t+\ell(m+1)+m} \mid x_{t+\ell(m+1)+m}v(m,t,q). \tag{2.29}$$

由于 $x_{t+\ell(m+1)}x_{t+\ell(m+1)+1}\cdots x_{t+\ell(m+1)+m-1}$，$x_{t+\ell(m+1)+1}\cdots x_{t+\ell(m+1)+m-1}x_{t+\ell(m+1)+m} \in G(I_{n,m})$，$w(m,t) \in G(I^{t-1}_{n\,m,})$ 且 $w(m,t,q) = w(m,t)v(m,t,q)$，由 (2.28) 和 (2.29) 可得：

$$x_{t+\ell(m+1)}w(m,t,q),\ x_{t+\ell(m+1)+m}w(m,t,q) \in I^t_{n,m}.$$

因此，我们得到：

$$P_{m,t,q} \subset (I^t_{n,m} : w(m,t,q)). \tag{2.30}$$

若 $r = m$，由于 $x_{n+m-1}\cdots x_n \in G(I_{n,m})$，$w(m,t) \in G(I^{t-1}_{n\,m,})$ 且 $w(m,t)|w(m,t,q)$，则：

$$x_{n+m-1}\cdots x_n \in (I^t_{n,m} : w(m,t,q)). \tag{2.31}$$

给定一个真单项式 $u \in S$，记

$$\max(u) = \max\{i \ :\ x_i|u\},\ \min(u) = \min\{i \ :\ x_i|u\} \text{ and } ||u|| = \max(u) - \min(u) + 1.$$

我们选择 $u \in G(U_{m,t})$，即 $u = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$，其中 $i_j \cong j \pmod m$，并注意到 $||u|| \geq m$。若 $||u|| = m$，则 u 是 m 个连续单项式的乘积，因此 $u \in G(I_{n,m})$。因此 $u \cdot w(m,t,q) \in I^t_{n,m}$。现在，假设 $||u|| > m$。我们有：

$$u \cdot w(m,t) = (x_2\cdots x_{m+1})\cdots(x_{\min(u)-1}\cdots x_{\min(u)+m-2})(x_{\min(u)}\cdots x_{\min(u)+m-1})\cdot$$
$$(x_{\min(u)+2}\cdots x_{\min(u)+m+1})\cdots(x_t\cdots x_{t+m-1})\cdot x_{\min(u)+m}u/x_{\min(u)}.$$

注意到 $w'(m,t) := w(m,t)x_{\min(u)}/x_{\min(u)+m} \in G(I^{t-1}_{n\,m,})$. 令 $u' := x_{\min(u)+m}u/x_{min(u)}$. 容易看出 $||u'|| < ||u||$ 且 $u \cdot w(m,t) = u' \cdot w'(m,t)$.

若 $||u'|| = m$ 则 $u' \in G(I_{n,m})$，并由上文可知 $u \cdot w(m,t) \in G(I^t_{n,m})$.

若 $||u'|| > m$ 则重复相同的过程，得到 $u'' := x_{\min(u')+m}u'/x_{\min(u')}$，其中 $||u''|| < ||u'||$。由于 $\min(u') > \min(u)$，因此可以写成：

$$u \cdot w(m,t) = u' \cdot w'(m,t) = u'' \cdot w''(m,t),$$

其中 $w''(m,t) \in G(I^{t-1}_{n\,m,})$。若 $||u''|| = m$，则结论成立。否则，我们重复同样的过程，直到找到某个 $\ell \geq 2$，使得 $u \cdot w(m,t) = u^{(\ell)} \cdot w^{(\ell)}(m,t)$，其中 $w^{(\ell)}(m,t) \in G(I^{t-1}_{n\,m,})$ 且 $|u^{(\ell)}|| = m$。

最后，我们得到 $u \cdot w(m,t,q) \in I^t_{n,\ m}$ 并得到：

$$U_{t,m} \subset (I^t_{n,m} : w(m,t,q)). \tag{2.32}$$

由（2.30）、（2.31）和（2.32），我们完成了对"⊆"的证明。为了证明另一个包含关系，令 $u \in S$ 为满足以下条件的单项式：$u \cdot w(m, t, q) \in I^t_{n,m}$。我们将其写为 $u = u' \cdot u''$，其中 $u' \in S_{t+m}$ 且 $u'' \in K[x_{t+m+1}, \ldots, x_n]$。

若 $u \notin P_{m,t,q}$，则 $\operatorname{supp}(u) \cap \{x_{t+m+1}, x_{t+m+2}, \ldots, x_{n-r}\} \subseteq \operatorname{supp}(v(m,t,q))$。此外，若 $r = m$ 且 $u \notin (x_{n-m+1} \cdots x_n)$，则 $\{x_{n-m+1}, \ldots, x_n\} \not\subseteq \operatorname{supp}(u)$。

由于 $x_{t+m+1} \notin \operatorname{supp}(u)$，$u'' \cdot v(t, m, q) \notin I^t_{n,m}$ 且 $u \cdot w(m, t, q) \in I^t_{n,m}$，可得 $u'w(t, m) \in I^t_{n,m}$。

给定单项式 $v \in S_{t+m}$, $v = x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_d}$，其中 $d = \deg(v)$，令

$$\deg_\ell(v) = |\{a_i \,:\, a_i \equiv \ell (\operatorname{mod} m)\}|, \text{ for } 1 \le \ell \le m.$$

容易看出 $u \in I^t_{t+m,m}$ 当且仅当 $\deg_\ell(v) \ge t$ 对所有 $1 \le \ell \le m$ 均成立。事实上，任意一个的极小单项式生成元 $I_{m+t,m}$ 都是以下各项的乘积：m 连续变量。

反设

$$u' \notin U_{m\,t} \qquad 1 \le k \le m,$$

。因此存在使得 $\deg_k(u') = 0$。另一方面，对于所有 $1 \le \ell \le m$, $\deg_\ell(w(t,m)) = t - 1$。因此 $\deg_k(u'w(t,m)) = t - 1 < t$, 于是 $u'w(t,m) \notin I^t_{n,m}$, 矛盾。□

定理 2.6。沿用上述记号，有：

$$(1)\ \operatorname{sdepth}(S/I^t_{n,m}) \ge \operatorname{depth}(S/I^t_{n,m}) = \begin{cases} n - t + 2 - \left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \le n+1-m \\ m - 1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

(2) Stanley 深度$(S/I^t_{n,m}) \le$ Stanley 深度$(S/I_{n,m})$

$= n + 1 - \left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n+1}{m+1} \right\rceil$。

证明。（1）记：

$$\varphi(n,m,t) := \begin{cases} n - t + 2 - \left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \le n+1-m \\ m - 1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

由命题 2.3 可知，深度$(S/I^t_{n,m}) \ge \varphi(n,m,t)$。因此，为了证明深度$(S/I^t_{n,m}) = \varphi(n,m,t)$，只需证明深度$(S/I^t_{n,m}) \le \varphi(n,m,t)$。为此，我们对 n, m 和 t 使用归纳法。

与命题 2.3 的证明类似，情形 $t = 1$、$n = m$、$m = 1$ 和 $n \le 2m - 1$ 易于证明。现在，假设 $n \ge 2m$ 和 $t \ge 2$。若 $n \le m + t - 1$，则由归纳假设、引理 1.3(3) 和引理 2.1，可得：

$$\operatorname{depth}(S/I^t_{n,m}) \le \operatorname{depth}(S/(I^t_{n,m} : x_{n-m+1} \ldots x_n)) = \operatorname{depth}(S/I^{t-1}_{n,m}) \le$$
$$\le \varphi(n,m,t-1) = m - 1 = \varphi(n,m,t).$$

现在，假设 $n \ge m + t - 1$。根据欧几里得除法，可知存在 $q \ge 1$ 和 $0 \le r \le m$，使得：

$$n = q(m+1) + t - 1 + r. \tag{2.33}$$

假设 $r < m$。根据引理 2.5，我们有：

$$S/(I^t_{n,m} : w(n,m,t)) = (K[x_1, \ldots, x_{m+t}]/U_{m,t}) \otimes_K (K[x_{m+t+1}, \ldots, x_n]/P_{m,t,q}).$$

因此，由引理 2.4(1) 和引理 1.3 可得：

$$\operatorname{depth}(S/I_{n,m}^t) \le \operatorname{depth}(S/(I_{n,m}^t : w(n,m,t))) = (m-1)+(m-1)(q-1)+r = (m-1)q+r.$$

另一方面，由 (2.33) 可得：

$$\varphi(n,m,t) = n-t+2-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil = (m+1)q+1+r-q-(q+1) = (m-1)q+r,$$

因此，深度$(S/I_{n,m}^t) \le \varphi(n,m,t)$。类似地，在 $r = m$ 的情况下，由于 $x_{n-m+1}\cdots x_n$ 在 $K[x_{m+t+1},\dots,x_n]/P_{m,t,q}$ 中是正则的，根据引理 1.3(5)，可得：

$$\operatorname{depth}(S/I_{n,m}^t) \le \operatorname{depth}(S/(I_{n,m}^t : w(n,m,t))) = (m-1)q+r-1 = \varphi(n,m,t).$$

因此，对任意 n、m 和 t，都有深度$(S/I_{n,m}^t) \le \varphi(n,m,t)$。

(2) 由于 $(I_{n,m}^t : (x_{n-m+1}\cdots x_n)^{t-1}) = I_{n,m}$，所需结果由引理 1.3(1) 和定理 1.4 得出。另见 (2.8)。 □

注 2.7. 根据引理 2.4(2)，采用与定理 2.6 的证明中类似的技巧，可以推得 Stanley 深度$(S/I_{n,m}^t) \le \varphi(n,m,t) + t - \left\lceil \frac{t}{m} \right\rceil$.

注意到 $\varphi(n,m,1) \le \varphi(n,m,t) + t - \lceil \frac{t}{m} \rceil$，因此这个上界并未优于定理 2.6(2) 给出的上界。

推论 2.8. $S/I_{n,m}^t$ 的投射维数为：

$$\operatorname{pd}(S/I_{n,m}^t) = \begin{cases} t-2+\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \le n+1-m \\ n-m+1, & t > n+1-m \end{cases}.$$

证明。这直接由定理 2.6 和 Ausl¨ander-Buchsbaum 定理得出；参见 [15,定理 3.5。13]。 □

定理 2.9。采用上述记号，有：

(1) $\operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \ge \operatorname{depth}(I_{n,m}^t) = \begin{cases} n-t+3-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \le n+1-m \\ m, & t > n+1-m \end{cases}.$

(2) $I_{n,m}^t$的Stanley 深度为 $\le$min $\{n+1-\lfloor \frac{n-t+1}{m+1} \rfloor,\ n-\left\lfloor \frac{\lceil \frac{t}{m} \rceil+1}{2} \right\rfloor\}$。

*P*证明。(1) 由定理 2.6 可得，$\operatorname{depth}(I_{n,m}^t) = \varphi(n,m,t) + 1$，其 e

$$\varphi(n,m,t) = \begin{cases} n-t+2-\left\lfloor \frac{n-t+2}{m+1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n-t+2}{m+1} \right\rceil, & t \le n+1-m \\ m, & t > n+1-m \end{cases},$$

因此，为了证明定理的第一个断言，我们必须证明：

$$\operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \ge \varphi(n,m,t)+1 \text{ or } \operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \ge \operatorname{depth}(I_{n,m}^t).$$

我们对 n, m, $t \geq 1$ 进行归纳法。

若 $t = 1$，则由命题 1.7] 可得 $\operatorname{sdepth}(I_{n,m}) \geq \operatorname{depth}(I_{n,m})$。

现在，假设 $t \geq 2$。若 $n = m$，则 $I_{n,n} = (x_1 \cdots x_n)$ 和 $I_{n,n}^t = (x_1^t \cdots x_n^t)$ 是一个主理想。因此：

$$\operatorname{sdepth}(I_{n,n}^t) = n = \operatorname{depth}(I_{n,n}^t).$$

此外，若 $m = 1$，则 $I_{n,1} = \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$，显然有：

$$\operatorname{sdepth}(I_{n,1}^t) = \operatorname{sdepth}(\mathbf{m}^t) \geq 1 = \operatorname{depth}(\mathbf{m}^t).$$

因此，我们可以假设 $n > m \geq 2$。若 $n \leq 2m - 1$，则

$$\begin{aligned} &I_{n,m} = x_{n-m+1} \cdots x_m \widetilde{I}_{n,m}, \text{ where} \\ &\widetilde{I}_{n,m} = (x_1 x_2 \cdots x_{n-m}, x_2 \cdots x_{n-m} x_{m+1}, \ldots, x_{n-m} x_{m+1} \cdots x_{n-1}, x_{m+1} \cdots x_n). \end{aligned}$$

由此可得 $I_{n,m}^t = x_{n-m+1}^t \cdots x_m^t \widetilde{I}_{n,m}^t$。与命题 2.3 的证明相同，我们有：

$$I_{n,m}^t \cong I_{2(n-m),n-m}^t[x_{n-m+1}, \ldots, x_n],$$

因此，由归纳假设和引理 1.3 可得：

$$\operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \geq \varphi(2(n-m), n-m, t) + 1 + 2m - n = \varphi(n, m, t) + 1,$$

如所要求。在下文中，我们假设 $n \geq 2m$。

我们令 $L_0 := I_{n,m}^t$ 以及 $L_j := (L_{j-1} : x_{n-m+j})$，其中 $1 \leq j \leq m$。我们有如下分解：

$$\begin{aligned} I_{n,m}^t = L_0 &= x_{n-m+1} L_1 \oplus L_0 / x_{n-m+1} L_1 \\ L_1 &= x_{n-m+2} L_2 \oplus L_1 / x_{n-m+2} L_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$L_{m-1} = x_n L_m \oplus L_{m-1} / x_n L_m. \tag{2.34}$$

由引理 2.1，我们有 $L_m = (I_{n,m}^t : x_{n-m+1} \cdots x_n) = I_n^{t-1},_m$ 因此，根据归纳假设和引理 1.3，我们得到：

$$\operatorname{sdepth}(x_n L_m) = \operatorname{sdepth}(L_m) = \operatorname{sdepth}(I_{n,m}^{t-1}) \geq \varphi(n, m, t-1) + 1 \geq \varphi(n, m, t) + 1. \tag{2.35}$$

根据 (2.35) 和分解 (2.34)，为了证明

$$\operatorname{sdepth}(I_{n,m}^t) \geq \varphi(n, m, t) + 1,$$

只需证明

$$\operatorname{sdepth}(L_{j-1} / x_{n-m+j} L_j) \geq \varphi(n, m, t) + 1, \text{ for all } 1 \leq j \leq m. \tag{2.36}$$

利用恒等式 $v(I:v)=(v)\cap I$，其中 $v\in S$ 是一个单项式，$I\subset S$ 是一个单项式理想，由此可得:

$$\frac{L_{j-1}}{x_{n-m+j}L_j}=\frac{(I^t_{n,m}:x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1})}{x_{n-m+j}(I^t_{n,m}:x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j})}\cong$$

159

$$\cong\frac{x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1}(I^t_{n,m}:x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1})}{x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j}(I^t_{n,m}:x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j})}\cong\frac{I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1})}{I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j})}. \tag{2.37}$$

我们断言：160

$$\frac{I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1})}{I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j})}\cong(x_{n-2m+j}\cdots x_{n-m+j-1})I^{t-1}_{n-m+j-1,m}[x_{n-m+j+1},\ldots,x_n]. \tag{2.38}$$

事实上，若 $u\in G(I^t_{n,m})$，使得 $x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1}|u$ 且 $x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j}\nmid u$，则容易看出 $u\in G(I^t_{n-m+j-1,m})$ 且 $x_{n-2m+j}\cdots x_{n-m+j-1}|u$。我们记

$$u=(x_{n-2m+j}\cdots x_{n-m+j-1})w,\ \text{ where } w\in K[x_1,\ldots,x_{n-m+j-1}].$$

由引理 2.1 可得:

$$w\in(I^t_{n-m+j-1,m}:x_{n-2m+j}\cdots x_{n-m+j-1})=I^{t-1}_{n-m+j-1,m}.$$

为了完成断言 (2.38) 的证明，只需注意到

$$u\cdot u'\in(I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j-1}))\setminus(I^t_{n,m}\cap(x_{n-m+1}\cdots x_{n-m+j})),$$

当且仅当 u' 是一个单项式，且 $x_{n-m+j}\notin\mathrm{supp}(u')$。161

Now，由 (2.37)、(2.38)、引理 1.3 和归纳假设可得 t:

Stanley 深度$(L_{j-1}/x_{n-m+j}L_j)$ =Stanley 深度$(I^{t-1}_{n-m+j-1,\ m})+m-j\geq\varphi(n-m+j-1,m,t-1)+1+m-j\geq$

$$\geq n-m+j-1-(t-1)+2-\left\lfloor\frac{n-m+j-t+2}{m+1}\right\rfloor-\left\lceil\frac{n-m+j-t+2}{m+1}\right\rceil+1+m-j=$$

$$=n-t+2-\left\lfloor\frac{n-m+j-t+2}{m+1}\right\rfloor-\left\lceil\frac{n-m+j-t+2}{m+1}\right\rceil+1\geq\varphi(n,m,t)+1,$$

因此，(2.36) 成立。由此，证明的第一部分完成。162

(2) 根据引理 1.3 和 [3, 定理 1.3], ，我们有:

$$\mathrm{sdepth}(I^t_{n,m})\leq\mathrm{sdepth}(I^t_{n,m}:w(m,t,q))\leq\min\{\mathrm{sdepth}(U_{m,t}S),\mathrm{sdepth}(P_{m,t,q}S)\},$$

其中 $q=\lfloor\frac{n-t+1}{m+1}\rfloor$。结论由以下事实得出：$P_{n、\ t、\ q}$具有 $2(q-1)$ 个生成元；163如果 $q\geq2$，且由引理 2.4(3)可得。164

165 □

致谢

我们衷心感谢使用计算机代数系统 CoCoA（[6]）进行实验。第二作者获得了研究、创新与数字化部的资助，资助机构为 CNCS - UEFISCDI，项目编号为 PN-III-P1-1.1-TE-2021-1633，属于 PNCDI III。

参考文献

[1] J. Apel，关于 R. P. Stanley 猜想的研究；第二部分——单项式理想模商，J. of Alg. Comb. 17，(2003)，57–74。[2] M. Cimpoeaș，生成元数量较少的单项式理想的 Stanley 深度，《中欧数学杂志》，第 7 卷，第 4 期，(2009)，629–634。[3] M. Cimpoeaș，关于 Stanley 深度的若干不等式，《罗马尼亚数学与计算机科学杂志》2(1)，(2012)，28–40。[4] M. Cimpoeaș，线图相关路径理想的 Stanley 深度，《数学报告》第 19 卷(69)，第 2 期，(2017)，157–164。[5] M. Cimpoeaș，与两个整数序列相关的一类平方自由单项式理想，《代数通讯》46，第 3 期，(2018)，1179–1187。[6] CoCoATeam，CoCoA：用于交换代数计算的系统，访问地址：http://cocoa.dima.unige.it [7] A. M. Duval、B. Goeckneker、C. J. Klivans、J. L. Martine，一个不可划分的 Cohen-Macaulay 单纯复形，《数学进展》299 (2016)，381–395。[8] J. Herzog、M. Vladoiu、X. Zheng，如何计算单项式理想的 Stanley 深度，《代数杂志》322(9)，(2009)，3151–3169。[9] J. Herzog，Stanley 深度综述，载于《单项式理想：计算与应用》，施普林格，(2013)，3–45。[10] M. Ishaq，Stanley 深度的取值与界，《喀尔巴阡数学杂志》27，第 2 期 (2011)，217–224。[11] A. Rauf，多重分次模的深度与 Stanley 深度，《代数通讯》第 38 卷，第 2 期，(2010)，773–784。[12] G. Rinaldo，计算单项式理想 Stanley 深度的算法，《数学家》LXIII (ii)，(2008)，243–256。[13] **68**，R. P. Stanley，线性丢番图方程与局部上同调，《数学发明》(1982)，175–193。

[14] A.S̨tefan, 路径理想幂的 Stanley 深度，arXiv:14096072 198。[15] R.H. Villarreal, 单项式代数。第二版，专著与教材丛书，199纯粹与应用数学，Chapman & Hall，纽约，2018。200