arXiv:2303.01133v1 [math.GR] 2 Mar 2023

非零特征下经典群的可接受性

SAIKAT PANJA

Abstract. 若群 G 满足以下条件，则称其为 *acceptable* （这一术语由 M. Larsen 提出）：对于任意有限群 H，任意两个逐元素共轭的同态都整体共轭。本文回答了代数闭域上非零特征情形下，一般线性群、特殊线性群、酉群、辛群以及所有正交群的可接受性问题。

1. Introduction

我们首先给出一个基本结果，它源自有限群在复数域上的表示论的一个应用。设 G 是一个有限群。考虑两个同态ϕ_1、 ϕ_2 : $G \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$。假设对所有 $g \in G$ ，都存在 $h(g) \in G$，使得 $\phi_1(g) = h(g)^{-1}\phi_2(g)h(g)^{-1}$。在这种情况下，这两个同态称为逐元素共轭同态。注意，此处 $h : G \longrightarrow G$ 是一个函数。若存在一个常值函数 h 满足条件，我们就称 ϕ_1 和 ϕ_2 整体共轭。现在注意，若上述映射 ϕ_1、 ϕ_2 逐元素共轭，则它们整体共轭。事实上，若它们逐元素共轭，则对应的特征标在 G 的每个共轭类上的取值都相同。因此，它们的特征标相同。于是这两个同态整体共轭。现在，假设我们将 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 换成 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 或 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$。那么自然会问，所有逐元素共轭的同态是否都整体共轭。此时，我们定义群 Γ 为可接受的（或强可接受的），若对于所有有限群（分别地，所有群） G，任意两个逐元素共轭的同态都整体共轭。

逐元素共轭与全局共轭之间关系的一般问题，在代数、数论和几何等许多领域都会出现。例如，自守形式理论中的重数一问题（见 [2]）。一个与自守形式理论中的重数一问题相关、具有启发性的问题是：紧群何时能够成为一对非等距等谱流形的公共覆盖空间（见 [17]）。受此启发，M. Larsen 研究了许多紧单李群或复单李群，将它们视为实群，并证明了

Date：2023年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20C33，20C99。

Key words and phrases. 可接受群，经典群，逐元素共轭，全局共轭。作者（Panja）获得 HRI 的 PDF-Mfellowship 资助。

该问题在 [9] 中归结为半单情形。在后续论文 [10] 中，他证明连通单连通紧李群 G 可接受，当且仅当它没有以下类型的直因子： B_n $(n \geq 4)$ D_n $(n \geq 4)$ E_n、或 F_4。这一结论同样适用于复群。此外， G_2 型群是唯一可接受的例外群（无论是否单连通）。2016 年，Y. Fang、G. Han 和 B. Sun 证明了以下两个命题等价：

(1) 对于任意连通紧李群 H 以及任意连续同态ϕ、ψ：$H \longrightarrow G$，若对于所有 $h \in H$， $\phi(h)$ 与 $\psi(h)$ 在 G 中共轭，则 ϕ 与 ψ 整体共轭。(2) G 的李代数不含有类型为 $D_n(n \geq 4)$ E_6、 E_7 或 E_8 的单理想。

这些结果在数学的许多领域都有重要应用。例如，如何根据朗兰兹参数判断给定表示是否为区分表示（见 [1]）。另一个问题是， H 在 G 的有限维不可约表示中的平凡表示重数，是否能够确定 H 的共轭类，其中 H 是复约化群 G 的闭子群（见 [22]）。

设 p 为素数，目标群取为一般线性群、特殊线性群、酉群、辛群或正交群之一，其中域为特征为 p 的代数闭域 $\overline{\mathbb{F}_q}$。我们证明，这些群都不可接受。我们还将进一步研究例外情形，这部分工作将在未来开展。

方法论。为了研究上述群，我们利用它们的共轭类。这一方法改编自 Green（[5]）和 Macdonald（[11]）关于一般线性群的工作，以及 Wall（[21]）关于酉群、辛群和正交群的工作。我们将在适当的时候简要介绍这些结果。我们的思路是研究幺幂类，因此需要知道其共轭类代表元（见 [3]）。Gonshaw、Liebeck 和 O'Brien 的工作 [4] 对此帮助很大。了解共轭类之后，我们转而构造从特定群到目标群的特定同态。在大多数情况下，我们使用群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作为源群。下面我们将介绍论文结构。

论文结构。 我们先介绍一些第 2 节中的一般结果。本节包含两个非常重要的结果，即引理 2.1 和引理 2.2 ，它们为大多数证明提供了关键支持。在第 3 节中，我们简要介绍这些群及其共轭类。随后，第 4 节、第 5 节和第 6 节分别用于证明有关一般线性群与特殊线性群、酉群、辛群和正交群的主要结果。我们的主要结果是

定理 4.3、定理 5.3、定理 6.4、定理 6.7、定理 6.10。论文最后，我们将在第 7 节讨论几个未来研究问题。

致谢。作者谨向浦那印度科学教育与研究学院的 Anupam Singh 教授表示感谢，感谢他进行的有益讨论。本工作的一部分是在2022年12月访问焦特布尔印度理工学院期间完成的。作者借此机会感谢该研究所在访问期间给予的热情接待。

2. General results

引理 2.1 (命题 1.1, [9])。设 $G = G_1 \times G_2$ 是两个群 G_1, G_2。那么 G是可接受的，当且仅当 G_1 和 G_2 是可接受的。

证明。设 G_1和 G_2是两个可接受群。假设 $\phi_1, \phi_2 \colon H \longrightarrow G_1 \times G_2$是两个逐元素共轭的同态。那么映射 $\pi_1 \circ \phi_1, \pi_1 \circ \phi_2 \colon H \longrightarrow G_1$ 逐元素共轭，因此整体共轭，例如由 g_1 共轭。类似地，存在$g_2 \in G_2$，通过它 $\pi_2 \circ \phi_1, \pi_2 \circ \phi_2 \colon H \longrightarrow G_2$整体共轭。因此 ϕ_1, ϕ_2整体共轭。

另一方面，考虑单态 $i_1 \colon G_1 \longrightarrow G_1 \times G_2$ 和 $i_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$，可得若 $G_1 \times G_2$是可接受的，则 G_1和 G_2也可接受。□

引理 2.2. 设 G 是一个可接受群。那么对于所有的 $a \in G$，子群 $\mathscr{C}_G(a)$（即 a 的中心化子）都是可接受的。

证明. 设 $\varphi_1, \varphi_2 \colon H \longrightarrow \mathscr{C}_G(a)$ 是两个逐元素共轭的同态。构造如下同态

$$\widetilde{\varphi_i} : H \times \langle a \rangle \longrightarrow G, \text{ defined as } \widetilde{\varphi_i}(h, a^m) = \varphi(h)a^m. \tag{2.1}$$

由于 G是可接受的，这些同态逐元素共轭，因而整体共轭。因此存在 $g \in G$ 使得

$$g\varphi_1(h)a^m g^{-1} = \varphi_2(g) \text{ for all } m \in \mathbb{Z}, h \in H.$$

代入 $m = 0$ 和 $h = e_H$后，可得 $g \in \mathscr{C}_G(a)$。因此，令 $m = 0$即可得到结论。□

引理 2.3（关于李群的设定，见 [23] 中的引理 2.3）。设 G 是一个可接受群， A是 G 的一个阿贝尔子群。那么 $\mathscr{C}_G(A)$ 是一个可接受子群。

证明。设 $\varphi_1, \varphi_2 \colon H \longrightarrow \mathscr{C}_G(A)$ 是两个逐元素共轭同态。构造以下同态

$$\widetilde{\varphi_i} : H \times A \longrightarrow G, \text{ defined as } \widetilde{\varphi_i}(h, a) = \varphi(h)a. \tag{2.2}$$

那么这些同态是逐元素共轭的，因此由于 G可接受，它们整体共轭。因此存在 $g \in G$ 使得

$$g\varphi_1(h)ag^{-1} = \varphi_2(g) \text{ for all } a \in A, h \in H.$$

假设 $h = e_H$，我们得到 $g \in \mathscr{C}_G(A)$。然后取 $a = e_A$，我们得到 φ_1 和 φ_2通过 g整体共轭。□

3. Conjugacy classes in the groups

本节将简要讨论经典群，并介绍其共轭类的描述。这将基于以下著作[5], [11] 和 [21]。

3.1. 一般线性群。一般线性群 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 定义为所有在 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上定义的 $n \times n$ 矩阵所组成的集合。该群的共轭类最早在著作 [5] 和 [11] 中确定，适用于有限域情形。令 Φ 表示所有非常数、首一、不可约多项式 $f(x)$ 的集合，其系数属于 $\overline{\mathbb{F}_q}$，且不等于多项式 x。令 Λ 表示所有分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ 的集合，其中 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0$，且每个 λ 都是整数。$\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的共轭类与所有函数 α 一一对应： $\Phi \longrightarrow \Lambda$，该函数在 Φ 中除有限多个多项式外均取空分拆，并且满足

$$\sum_{f \in \Phi} |\alpha(f)| \deg f = n.$$

因此，$\mathrm{GL}(n, q)$ 的共轭类由组合数据确定，这些数据由形如 (f, λ_f) 的元组组成，其中 $f \in \Phi$。我们注意到，$\mathrm{GL}(n, q)$ 中的两个矩阵共轭，当且仅当它们在 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 中共轭；我们将在 第 7 节 中用到这一点。

3.2. 酉群。对于域 $\overline{\mathbb{F}_q}$，考虑 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 的一个对合 σ。这会在环 $\overline{\mathbb{F}_{||}}[x]$ 和群 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 上诱导一个自同构。酉群是由满足 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 的所有矩阵构成的群

$\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 中满足 ${}^t\overline{A}JA = J$ 的所有矩阵，其中 J 定义为

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

（厄米形式的矩阵），这个群记作 $\mathrm{U}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$。

定义 3.1. 满足$f(0) \neq 0$的首一 r 次多项式 $f(x) \in \overline{\mathbb{F}_q}[x]$ 的扭曲对偶是由 $\widetilde{f}(x) = f(0)^{-1} x^r \overline{f}(x^{-1})$给出的多项式。多项式 f将~被称为~-对称的，当且仅当 $f = f$。首一多项式 $f(x) \in \overline{\mathbb{F}_q}[x]$称为~-不可约的，当且仅当它没有任何真 ~-对称因子。我们将~所有 ~-不可约首一多项式的集合记为 Φ

我们知道，元素 g、$h \in \mathrm{U}(n$、$\overline{\mathbb{F}_q})$ 在 $\mathbf{U}(n$、$q)$ 中共轭，当且仅当它们在 $\mathbf{GL}(n$、$\overline{\mathbb{F}_q})$ 中共轭（见 [3]），并且 $\mathbf{U}(n$、$\overline{\mathbb{F}_q})$ 中的共轭类由序列 $\sim$ 参数化 $\{(f$、$\lambda)|f \in \Phi$，其中 $\lambda \in \Lambda\}$ 是不可约多项式的集合。共轭类的共轭类代表元可见于 [20]。

3.3. 辛群与正交群。设 V 是域 $\overline{\mathbb{F}_q}$上的$2n$ 维向量空间，考虑 V 上的唯一（相似意义下）非退化交替双线性型，其形式为

$$\left\langle (x_i)_{i=1}^{2n}, (y_j)_{j=1}^{2n} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{2n+1-j} - \sum_{i=0}^{n-1} x_{2n-i} y_{i+1}.$$

辛群是 $\mathbf{GL}(2n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 中由保持 V上该交替型的元素构成的子群。选取一个适当的基后，该型的矩阵可以

$$\text{be chosen to be } J = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_n \\ -\Lambda_n & 0 \end{pmatrix} \text{ where } \Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$\mathrm{Sp}(2n, \overline{\mathbb{F}_q}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n, \overline{\mathbb{F}_q}) \mid {}^tAJA = J\}.$$

现在设 V 是域 $\overline{\mathbb{F}_q}$上的 m维向量空间。于是， V上存在唯一（相似意义下）的非退化二次型。正交群由 $\mathbf{GL}(m,\overline{\mathbb{F}_q})$ 中保持非退化二次型 Q的元素构成。相对于一个适当的基，我们将与二次型相关联的对称双线性型的矩阵固定如下：

其中 $\alpha \in \mathbb{F}_q^{\times}$，且 $\Lambda_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$J_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda_n \\ 0 & \alpha & 0 \\ \Lambda_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_e = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_n \\ \Lambda_n & 0 \end{pmatrix}$ ...., 是一个 $l \times l$ 矩阵。于是，正交群
矩阵形式的群为

$$\mathrm{O}(2m, \overline{\mathbb{F}_q}) = \{A \in \mathrm{GL}(2m, \overline{\mathbb{F}_q}) \mid {}^tAJ_eA = J_e\},$$

$$\mathrm{O}(2m+1, \overline{\mathbb{F}_q}) = \{A \in \mathrm{GL}(2m, \overline{\mathbb{F}_q}) \mid {}^tAJ_oA = J_o\}.$$

为了描述有限辛群和正交群的共轭类，我们需要用到自反多项式、辛分拆和正交分拆的概念，定义如下。关于相关示例，建议读者参阅 [3]。

定义 3.2. 首一的 r 次多项式 $f(x) \in k[x]$，满足 $f(0) \neq 0$，其对偶多项式定义为 $f^*(x) = f(0)^{-1}x^r f(x^{-1})$。若多项式 f 满足 $f = f^*$，则称其为自反多项式。首一多项式 $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$，称为
$*$–不可约，当且仅当它没有任何真自反因子。

定义 3.3. 辛分拆是数 k的一个分拆，其中奇数部分的重数为偶数。所有辛分拆的集合记为$\mathcal{D}'_{\mathrm{Sp}}$。

定义 3.4. 正交分拆是数 k的一个分拆，其中所有偶数部分的重数均为偶数。所有正交带符号分拆的集合记为 $\mathcal{D}'_{\mathrm{O}}$。

可以证明，辛矩阵或正交矩阵的特征多项式是自反的。我们沿用 J. Milnor 的术语 [12] 来区分特征多项式的 $*$-不可约因子。我们称一个 $*$-不可约多项式f 为

(1) 若 $f = f^*$ 且 f 是偶数次不可约多项式，则称为类型 1；(2) 若 $f = gg^*$ 且 g 是满足 $g \neq g^*$的不可约多项式，则称为类型 2；(3) 若 $f(x) = x \pm 1$，则称为类型 3。

根据 [21]，$\mathrm{Sp}(2n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的共轭类由函数$\lambda : \Phi \to \mathcal{P}^{2n} \cup \mathcal{D}^{2n}_{\mathrm{Sp}}$参数化，其中 Φ 表示所有首一非恒定不可约多项式的集合，$\mathcal{P}^{2n}$ 是 $1 \leq k \leq 2n$ 的所有分拆的集合，而 $\mathcal{D}^{2n}_{\mathrm{Sp}}$ 是 $1 \leq k \leq 2n$ 的所有辛分拆的集合。当且仅当满足以下条件时，这样的 λ 代表 Sp 的一个共轭类：

(1) $\lambda(x) = 0$，(2) $\lambda_{\varphi^*} = \lambda_\varphi$，(3) $\lambda_\varphi \in \mathcal{D}^n_{\mathrm{Sp}}$ 当且仅当 $\varphi = x \pm 1$，(4) $\sum |\lambda_\varphi| \deg(\varphi) = 2n$。$\varphi$

同样，根据[21], 我们发现，对于群 $\mathrm{O}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 也有类似的结论。$\mathrm{O}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的共轭类由函数 $\lambda : \Phi \to \mathcal{P}^n \cup \mathcal{D}^n_{\mathrm{O}}$参数化，其中 Φ 表示所有首一非恒定不可约多项式的集合，$\mathcal{P}^n$ 是 $1 \leq k \leq n$ 的所有分拆的集合，而 $\mathcal{D}^n_{\mathrm{O}}$ 是 $1 \leq k \leq n$ 的所有正交分拆的集合。当且仅当满足以下条件时，这样的 λ 代表 $\mathrm{O}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的一个共轭类：

(1) $\lambda(x) = 0$，(2) $\lambda_{\varphi^*} = \lambda_\varphi$，(3) $\lambda_\varphi \in \mathcal{D}^n_{\mathrm{O}}$ 当且仅当 $\varphi = x \pm 1$，(4) $\sum |\lambda_\varphi| \deg(\varphi) = n.\varphi$

给定数据对应的共轭类代表元可在 [19], [18], [4] 中找到，并且我们会在需要时提及它们。

4. General and special linear groups

引理 4.1. 对于域 $\overline{\mathbb{F}_q}$，若 $\mathrm{GL}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})$ 可接受，则 $\mathrm{GL}(n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 也可接受。

证明。 我们将使用 引理 2.2。取以下元素

$$a = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q}).$$

于是我们知道

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathrm{GL}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} A\in \mathrm{GL}(n,\overline{\mathbb{F}_q}) \\ \alpha\in \overline{\mathbb{F}_q}^* \end{smallmatrix} \right\} \\ &\cong \mathrm{GL}(n,\overline{\mathbb{F}_q}) \times \overline{\mathbb{F}_q}^*. \end{aligned}$$

因此，利用 引理 2.1，我们得出 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是可接受的。 □

命题 4.2. 对于 $q \geq 5$，群 $\mathrm{GL}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。令 $a \neq b$ 为 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 中两个阶为 p 的非零元素，其中 $q = p^f$。此外，假设 $a^2 \neq b^2$。注意，这样的选取是存在的，因为 $x^2 = 1$ 在 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 中至多有两个解。考虑以下两个同态

$$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$$

$$\text{defined as } \varphi_1(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_1(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_2(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是我们知道，这两个同态是逐元素共轭的。现在证明这两个同态并非整体共轭。反设它们整体共轭。因此，存在一个矩阵 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$，作为整体共轭子。于是我们得到以下方程:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\text{and } \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

通过比较系数所得的多项式方程，解得$r = s = 0$。这意味着不存在任何矩阵能够充当整体共轭子。因此结论成立。□

定理 4.3。设 p 为一个素数，且 $q = p^f$。对于 $q > 5$，群 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均不可接受。

证明。 由 命题 4.2 和 引理 4.1 得出。 □

推论4.4. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，群 $\mathrm{SL}(2n+1, \overline{\mathbb{F}_q})$ 都不是可接受的。

证明。 我们将使用 引理 2.2。假设可能的话，$\mathrm{SL}(2n+1, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是可接受的。取

$$a = \begin{pmatrix} -I_{2n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2n+1, \overline{\mathbb{F}_q}).$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathrm{SL}(2n+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} A \in \mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ \alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}^* \\ \det A \cdot \alpha = 1 \end{smallmatrix} \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1} \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q}) \right\} \\ &\cong \mathrm{GL}(2n, \overline{\mathbb{F}_q}). \end{aligned}$$

因此，由引理 2.2 和 定理 4.3 可得该结果。 □

命题 4.5. 设幂映射 $\psi_n : \overline{\mathbb{F}_q} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ 定义为 $\psi_n(x) = x^n$ 是一个满射。那么，$\mathrm{SL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不是可接受的。

证明。反设 $\mathrm{SL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是可接受的。我们将证明，在这种情况下，这将蕴含 $\mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是可接受的。注意，映射 ψ_k 是一个双射。设 $\varphi_1, \varphi_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是两个逐元素共轭同态。考虑下面两个映射

$$\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} : G \longrightarrow \mathrm{SL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$$
$$\text{defined as } \widetilde{\varphi_i}(x) = \psi_n^{-1}(\det \varphi_i(x))\varphi_i(x).$$

注意， $\widetilde{\varphi_1}$ 以及 $\widetilde{\varphi_2}$ 是逐元素共轭同态。因此根据假设，它们整体共轭。由于 ψ_n 是一个双射，且共轭矩阵具有相同的行列式，我们得到 φ_1 和 φ_2 整体共轭。这与 定理 4.3 矛盾，从而证明结束。 □

推论4.6. 设 $(q-1, n) = 1$。那么 $\mathrm{SL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不是可接受的。

命题4.7. 对于 $n \geq 4$，群 $\mathrm{SL}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明. 固定满足 $\lambda^2 \neq 1$ 的 $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}$。固定元素 $a = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \frac{1}{\lambda} & \\ & & I \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\overline{\mathbb{F}_q})$。于是

我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{\mathrm{SL}(n,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & A \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} \alpha,\beta\in\overline{\mathbb{F}_q}^* \\ A\in\mathrm{GL}(n-2,\overline{\mathbb{F}_q}) \\ \alpha\beta\det A=1 \end{smallmatrix} \right\} \\ &\cong \overline{\mathbb{F}_q}^* \times \mathrm{GL}(n-2,\overline{\mathbb{F}_q}).\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{GL}(n-2,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受，根据 引理 2.1，可得 $\mathrm{SL}(n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。□

5. Unitary groups

引理 5.1. 对于域 $\overline{\mathbb{F}_q}$，如果 $\mathrm{U}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})$ 可接受，那么 $\mathrm{U}(n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 也可接受。

证明。我们使用厄米形式，它由以下矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑元素 $a = \begin{pmatrix} I_n & \\ & -1 \end{pmatrix}$。根据 引理 2.2，可得如果 $\mathrm{U}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})$ 可接受，那么 $\mathscr{C}_{\mathrm{U}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a)$ 也可接受。现在我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{\mathrm{U}(n+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} A\in\mathrm{U}(n,\overline{\mathbb{F}_q}) \\ \alpha\sigma(\alpha)=1 \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{U}(n,\overline{\mathbb{F}_q}) \times \{\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}^* | \alpha\sigma(\alpha) = 1\}.\end{aligned}$$

因此，结论由引理 2.1得出。 □

命题 5.2. 群 $\mathrm{U}(4,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明. 我们将使用由以下矩阵给出的厄米形式 $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

首先固定 $1 \neq a \in \overline{\mathbb{F}_q}^*$。然后考虑以下两个矩阵

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } X_a = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

然后我们知道，这两个矩阵彼此可交换且互为共轭。考虑以下两个同态

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{U}(4, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ \text{defined as } \varphi_1((1,0)) = X_1, \varphi_1((0,1)) &= X_a, \\ \varphi_2((1,0)) = X_a, \varphi_2((0,1)) &= X_1. \end{aligned}$$

然后我们知道，这两个同态是元素共轭的，但并非整体共轭。因此，$\mathrm{U}(4, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。□

定理 5.3. 对于 和 $n \geq 4$，群 $\mathrm{U}(n, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。 直接由引理 5.1 和 命题 5.2。 □

6. Symplectic and Orthogonal groups

命题 6.1. 对于域 $\overline{\mathbb{F}_q}$，如果 $\mathrm{Sp}(2m+2, \overline{\mathbb{F}_q})$ 是一个可接受群，那么 $\mathrm{Sp}(2m, \overline{\mathbb{F}_q})$ 也是如此。

证明。固定一个满足 $\lambda^2 \neq 1$ 的元素 $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}^*$。然后固定该元素

$$a = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \frac{1}{\lambda} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2m+2, \overline{\mathbb{F}_q}).$$

于是我们知道

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{\mathrm{Sp}(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \mathscr{C}_{\mathrm{GL}(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})}(a)\cap \mathrm{Sp}(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})\\ &= \left\{\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & A\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{F}_q}^*\\ A\in\mathrm{GL}(2m,\overline{\mathbb{F}_q})\end{matrix}\right\}\cap \mathrm{Sp}(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})\\ &\cong \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\middle|\alpha\in\overline{\mathbb{F}_q}^*\right\}\times \mathrm{Sp}(2m,\overline{\mathbb{F}_q}).\end{aligned}$$

因此，结论由引理 2.1得出。 □

命题 6.2。群 $\mathrm{Sp}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。固定 $a\in(\overline{\mathbb{F}_q}^*)^2\setminus\{1\}$。容易看出

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & a\\ & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$$

它们通过 $\mathrm{Sp}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$ 的某个元素彼此共轭。考虑以下两个同态

$$\begin{aligned}&\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\longrightarrow\mathrm{Sp}(2,\overline{\mathbb{F}_q})\\ &\text{given by }\varphi_1((1,0))=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix},\varphi_1((0,1))=\begin{pmatrix}1 & a\\ & 1\end{pmatrix},\\ &\varphi_2((1,0))=\begin{pmatrix}1 & a\\ & 1\end{pmatrix},\varphi_2((0,1))=\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

然后利用与命题 4.2 相同的论证，我们得到这两个同态并非全局共轭。因此结论得出。
□

推论 6.3. 群 $\mathrm{SL}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。 由于 $\mathrm{SL}(2,\overline{\mathbb{F}_q})\cong\mathrm{Sp}(2,\overline{\mathbb{F}_q})$（见 [6]），结论立即得出。 □

定理 6.4. 群 $\mathrm{Sp}(2n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。 由 命题 6.1 和命题 6.2 可轻易推出。 □

命题 6.5. $\mathrm{O}(2m+1,\overline{\mathbb{F}_q})$ 的可接受性蕴含 $\mathrm{O}(2m-1,\overline{\mathbb{F}_q})$ 的可接受性。

证明。 固定元素 $a = \begin{pmatrix} -I_2 & \\ & I_{2m-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2m+1, \overline{\mathbb{F}_q})$。由 引理 2.2 可得 $\mathscr{C}_{\mathrm{O}(2m+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a)$ 是可接受的。现在我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{\mathrm{O}(2m+1,\overline{\mathbb{F}_q})}(a) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} A\in \mathrm{GL}(2,q) \\ B\in \mathrm{GL}(2m-1,q) \end{smallmatrix} \right\} \cap \mathrm{O}(2m+1, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ &\cong \left\{ A \in \mathrm{GL}(2, \overline{\mathbb{F}_q}) | AA^t = I \right\} \times \mathrm{O}(2m-1, \overline{\mathbb{F}_q}).\end{aligned}$$

因此，结论由引理 2.1得出。 □

命题 6.6。群 $\mathsf{O}(5, \overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。我们将使用如下形式的非退化二次型

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_2 是 2×2 阶单位矩阵。考虑矩阵

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \alpha_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a \neq 1$。那么矩阵

$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & 1 & \\ & & {}^t\alpha_1^{-1} \end{pmatrix} \text{ and } X_a = \begin{pmatrix} \alpha_a & & \\ & 1 & \\ & & {}^t\alpha_a^{-1} \end{pmatrix}.$$

那么， $X_1 \cdot X_a = X_a \cdot X_1$ 二者都是阶为 p 的元素，并且在 $\mathsf{O}(5, \overline{\mathbb{F}_q})$ 中共轭。考虑以下两个同态:

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{O}(5, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ \text{given by } \varphi_1((1,0)) = X_1, \varphi_1((0,1)) &= X_a \\ \varphi_2((1,0)) = X_a, \varphi_2((0,1)) &= X_1. \end{aligned}$$

那么，尽管这两个同态逐元素共轭，但它们并非整体共轭，理由与命题 4.2中的相同。 □

定理 6.7. 对于 $m \geq 2$ ，群 $\mathsf{O}(2m+1, \overline{\mathbb{F}_q})$ 均不可接受。

证明。 由命题 6.6 和 命题 6.5得出。 □

命题 6.8. 群 $\mathsf{O}(2m+2, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的可接受性蕴含 $\mathsf{O}(2m, \overline{\mathbb{F}_q})$ 的可接受性。

证明. 我们将使用二次型

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑元素 $a = \begin{pmatrix} I_{2m} & \\ & -I_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2m+2, \overline{\mathbb{F}_q})$。根据引理 2.2，我们有 $\mathscr{C}_{\mathrm{O}(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})}(a)$ 是可接受的。注意

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathrm{O}^+(2m+2,\overline{\mathbb{F}_q})(a)} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} A \in \mathrm{GL}(2m, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ B \in \mathrm{GL}(2, \overline{\mathbb{F}_q}) \end{smallmatrix} \right\} \cap \mathrm{O}(2m+2, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ &= \mathrm{O}(2m, q) \times \mathrm{O}(2, \overline{\mathbb{F}_q}). \end{aligned}$$

因此，结论由引理 2.1得出。 □

命题 6.9. 对于 $q \geq 5$，群 $\mathsf{O}(4,\overline{\mathbb{F}_q})$ 不可接受。

证明。 在本证明中，我们将使用二次型 $\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$。证明与命题 6.6类似，但为完整起见，我们将对其进行适当修改后重新给出。考虑矩阵

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \alpha_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a \neq 1$。则矩阵

$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & {}^t\alpha_1^{-1} \end{pmatrix} \text{ and } X_a = \begin{pmatrix} \alpha_a & \\ & {}^t\alpha_a^{-1} \end{pmatrix}.$$

那么 $X_1 \cdot X_a = X_a \cdot X_1$ 两者都是阶为 p 的元素，并且在 $\mathsf{O}(4,\overline{\mathbb{F}_q})$ 中共轭。现在考虑以下两个同态:

$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{O}(4, \overline{\mathbb{F}_q}) \\ \text{given by } \varphi_1((1,0)) = X_1, \varphi_1((0,1)) &= X_a \\ \varphi_2((1,0)) = X_a, \varphi_2((0,1)) &= X_1. \end{aligned}$$

那么，尽管这两个同态逐元素共轭，但它们并非整体共轭，论证方法与 命题 4.2 中的相同。 □

定理 6.10. 对于 $m \geq 2$，群 $\mathsf{O}(2m, q)$ 不可接受。

证明。 这是命题 6.8 和命题 6.9的直接推论。 □

7. Concluding remarks and future questions

7.1. 李型有限群。 考虑有限一般线性群 GL(n,q)，其中 q 是素数的幂。根据定理 4.3 的证明，我们很容易看出，对于所有 n 和 q，这些群都不可接受。同样的结论也适用于 U(n,q)。对于有限域，辛群和正交群（有三种）中的幺幂共轭类会进一步分裂为若干个共轭类。因此，此处采用的方法无法用于判定这些群是否可接受。我们目前认为这些群同样不可接受。

7.2. 例外情形。 我们已经看到，本文讨论的群都不可接受。相反，这些群的类似群（定义在 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 上）是可接受的（精确表格见 [9, 第 254] 页）。在同一篇论文中，M. Larsen 证明了$F_4(\mathbb{C})$及其紧形式不可接受（见 [9, 命题 3。11]）。因此，探究哪些定义在 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上的例外群是可接受的，将会很有意思。

7.3. 不变理论的应用。不变理论研究仿射簇 X 上的正则函数构成的环，这些函数在某个线性代数群 G 对 X 的作用下保持不变；该作用由态射 $G\times X\longrightarrow X$ 给出。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，G 是 GL$(V)\cong$ GL$(n,\mathbb{F})$ 的子群。考虑 G 在簇 X 上的一个作用。正则函数在 X 上构成的代数 $\mathbb{F}[X]$，可通过定义 $g\cdot f(v)=f(g^{-1}\cdot v)$（对所有 $g\in G$、$f\in V^*$ 和 $v\in V$）赋予一个 G-模结构。不变量环

$$\mathbb{F}[X]^G=\{f\in\mathbb{F}[X]|g\cdot f=f \text{ for all } g\in G\}$$

根据 Noether 的经典结果（见 [13], [14]），它是有限生成的。法国数学家 Vincent Lafforgue 的奠基性工作 [7] 和 [8] 表明：当 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$且 G 是连通线性约化群时，如果 $\mathbb{C}[G^n]^G$（其中作用为对角共轭）对于所有 $n\geq 1$都由单自变量不变量生成，那么 G 就是可接受的。意大利数学家 Claudio Procesi 在其工作 [15] 和 [16]中证明，对于 $\mathbb{C}$上的经典群——一般线性群、辛群和正交群——这一结论成立。鉴于我们已经证明 GL$(n,\overline{\mathbb{F}_q})$、SL$(n,\overline{\mathbb{F}_q})$、U$(n,\overline{\mathbb{F}_q})$、Sp$(2n,\overline{\mathbb{F}_q})$、O$^\epsilon(n,\overline{\mathbb{F}_q})$ 的不可接受性，我们最后想提出这样一个问题：是否存在 $n\geq 1$，使得当 G 是本文讨论的群之一时，$\overline{\mathbb{F}_q}[G^n]^G$ 不由单自变量不变量生成?

References

[1] U. K. Anandavardhanan and D. Prasad、 *A local-global question in automorphic forms*, 《组合数学》，149（2013），第959–995页。[2] D. Blasius、 *On multiplicities for* SL(n), 《以色列数学杂志》，88（1994），第237–251页。

[3] T. C. Burness and M. Giudici、 *Classical groups、 derangements and primes*, 《澳大利亚数学会讲座丛书》第25卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016年。[4] S. Gonshaw、 M. W. Liebeck、 and E. A. O'Brien、 *Unipotent class representatives for finiteclassical groups*, 《群论杂志》，20（2017），第505–525页。[5] J. A. Green、 *The characters of the finite general linear groups*, 《美国数学会汇刊》，80（1955），第402–447页。[6] L. C. Grove、
Classical groups and geometric algebra, 《数学研究生教材》第39卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。[7] V. Lafforgue、
Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale, 《美国数学会杂志》，31（2018），第719–891页。[8] 、
Shtukas for reductive groups and Langlands correspondence for function fields, 载于《2018年国际数学家大会论文集——里约热内卢。第一卷。全体会议报告》，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018年，第635–668页。[9] M. Larsen、 *On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms*, 《以色列数学杂志》，88（1994），第253–277页。[10] 、
On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms. II, 《牛津季刊数学杂志》第二辑，47（1996），第73–85页。[11] I. G. Macdonald、
Numbers of conjugacy classes in some finite classical groups, 《澳大利亚数学会通报》，23（1981），第23–48页。[12] J. Milnor、 *On isometries of inner product spaces*, 《数学发明》，8（1969），第83–97页。[13] E. Noether、 *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen*, 《数学年刊》，77（1915），第89–92页。[14] 、
Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen der charakteristik p, 《哥廷根科学学会通讯》，（1926），第28–35页。[15] C. Procesi、 *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, 《数学进展》，19（1976），第306–381页。[16] 、 *Lie groups*, 《大学教材丛书》，施普林格，纽约，2007年。通过不变量和表示进行研究。[17] T. Sunada、 *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, 《数学年刊》第二辑，121（1985），第169–186页。[18] D. E. Taylor、
Conjugacy classes in finite orthogonal groups, （2020年）。[19] 、
Conjugacy classes in finite symplectic groups, （2020年）。[20] 、
Conjugacy classes in finite unitray groups, （2020年）。[21] G. E. Wall、
On the conjugacy classes in the unitary、 symplectic and orthogonal groups, 《澳大利亚数学杂志》，3（1963），第1–62页。[22] S. Wang、 *On local and global conjugacy*, 《代数杂志》，439（2015），第334–359页。[23] J. Yu、 *Acceptable compact Lie groups*, 《北京数学杂志》，5（2022），第427–446页。

Email address: panjasaikat300@gmail.com

Harish-Chandra Research Institute- Main Building, Chhatnag Rd, Jhusi, Uttar Pradesh211019, India