arXiv:2303.01137v1 [cs.LO] 2 Mar 2023

代数单簿变换

Thierry Boy de la Tour

格勒诺布尔阿尔卑斯大学、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔国立综合理工学院、格勒诺布尔信息学实验室 38000 格勒诺布尔，法国thierry.boy-de-la-tour at imag.fr

摘要

单图是一种类似图的结构，其有向边长度不受限制，且彼此可自由相邻。标准节点表示为长度为零的边。它们可以用与标准图以及其他许多图（如 E-图或 8-图）一致的方式绘制。单图范畴与图结构范畴（单子多排序签名代数）具有许多相同的性质，但不存在终端单簿。它具有普遍性，因为其切片范畴（或带类型单图范畴）等价于图结构范畴。因此，类型单图自然成为指定图结构的一种方式。本文详细分析了单图的单推出变换和双推出变换，并针对属性保持变换分析了一种属性化类型单簿概念，该概念推广了类型化属性 E-图。

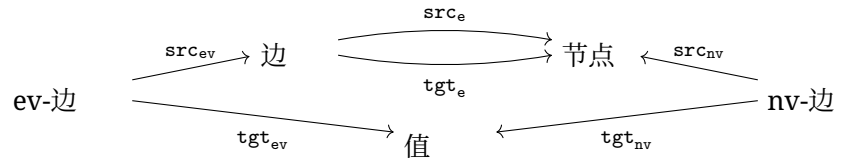
关键词：代数图变换、图结构、类型化图

1 引言

数学和计算机科学中使用了许多不同的图概念：简单图、有向图、多重图、超图等。在逻辑和重写领域中，一种常用的概念也称为箭图，即形如 (N, E, s, t) 的结构，其中 N, E 是集合，s, t 是从 E（边）到 N（节点）的函数，用于确定每条边（或箭头）的源端点和目标端点。原因之一是，箭图范畴与具有两个排序（节点和边）以及两个算子名称 src 和 tgt（类型为 edges → nodes）的多排序签名所对应的代数范畴同构。遵循这一惯例，本文中“图”一词均指箭图。

为了方便地表示复杂的数据结构，通常需要为图的结构添加属性：节点或边可以用固定集合中的元素、某个代数中的值，或值集来标记，如 [1], 等。在 [2] 中，E- 图的概念就是一个有趣的例子，因为属性也被视为节点。

更确切地说，E-图是一种代数，其签名可以用下图表示：



为类型和算子指定的名称有助于理解 E-图的结构：边将节点彼此关联，nv-边将节点与值关联，而 ev-边将边与值关联。因此，values 类型包含同时也是节点的属性。但随后我们会看到，在 E-图中，ev-边与边相邻。这并不符合标准，但我们仍然可以将这类结构视为某种形式的图，只要我们理解如何绘制它们。

因此，推广图这一概念的方式似乎涉及将图视为代数时，对图的签名进行推广。Michael L¨owe 在 [3], 中沿着这条思路，将图结构定义为单子多排序签名。确实，在上面的例子以及 [3], 中给出的许多例子里，所有算子的元数都是 1，因此可以视为从其定义域指向其值域排序的边。这就是它们被称为图结构的原因吗？但上面的例子表明，E-图与表示其签名的图截然不同。此外，不宜将我们对这类结构的理解建立在语法之上，也就是说，建立在签名中赋予排序和算子的特定名称之上。

此外，很难看出如何将某些非常简单的一元签名的代数解释为任何形式的图。以图的签名为例，将目标函数反转为 $\mathrm{tgt} : \mathrm{nodes} \to \mathrm{edges}$。那么，节点和边这两种排序之间就存在对称性，这意味着在该签名的代数中，节点和边将是性质相同的对象。这还算是图吗？我们能把它画出来吗？更糟的是，如果将这两种排序合并为一种，这是否意味着一个节点/边可以与自身相邻?

我们可以通过将图结构限制在某一类一元的签名上来解决这些问题；这些签名的代数能够确保以正统的方式运行，例如清晰地区分边和节点。但这种做法可能带有任意性，而且仍有另一项缺陷：图结构这一概念不容易自然地产生一个范畴。事实上，不同签名的代数之间难以定义态射，原因之一在于它们可以有任意数量的载体集。

本文采用的方法是拒绝在节点与边之间作任何结构区分，因此采取一种统一的观点：将节点视为长度为 0 的边，将标准边视为长度为 2 的边，因为它们与两个节点相邻。这种统一观点在逻辑上允许边与任意边相邻，而不仅仅是与节点相邻，从而推广了 E-图中的 ev-边，甚至允许边与自身相邻。最后，没有理由将长度限制

在 0 或 2 上；我们将在第6节中发现充分的理由，允许存在具有无限序数长度的边。必要的概念和记号将在第2节中介绍。单图的结构（以及态射）将在第3节中定义，由此根据单图的某些特征，得到一组单图范畴。这些范畴关于极限和余极限存在性的性质将在第4节中进行分析。

接着，我们将在第5节看到，如何通过图示准确表示单图，当然前提是它们只有有限条边，且这些边的长度有限。尤其是，对于那些可与标准图等同的单图，这类图示对应于绘制图的标准方式；E-图也是如此。

第6节致力于比较单图与图结构，以及相应的代数（我们可以称之为图结构代数）。我们展示了单图的一种普适性：所有图结构代数都可以表示为带类型单图（尽管通常不是以规范方式），即单图的态射。

图结构这一概念是在 [3] 中引入的，旨在获得偏同态范畴，使代数图改写技术能够在其中开展。第6节确立的与单图之间的对应关系，促使我们在第7节对单图的部分态射进行类似的发展。随后，我们可以在第8节定义、分析并比较单图改写的单推出方法和双推出方法。

E-图的概念在 [2] 中被引入，旨在获得行为良好的属性图范畴（相对于图重写而言），并据此提出适用于现实数据结构的表示方法。为此，我们通过为E-图增添数据类型代数，并将值类型节点与该代数的元素相对应。我们在第9节中沿用类似的方法，引入属性化类型单图的概念，将代数的元素与边相对应，从而获得同样行为良好的范畴。鉴于单图具有普适性，我们可以看到，任何 Σ-代数都可以表示为属性化类型单图。

我们在第10节作总结。请注意，第4节至第6节的部分内容已发表于 [4]。

2 基本定义与记号

2.1 集合范畴

对于任意集合 A、 B、关系 $R \subseteq A \times B$ 和子集 $X \subseteq A$，令 $R[X] \overset{定义}{=} \{y \in B \mid x \in X \wedge (x, y) \in R\}$。对于任意 $x \in A$，为简化记号，我们将 $R[x]$ 写作$R[\{x\}]$。若 R 是函数，则将 $R(x)$ 记为 $R[x]$中的唯一元素；若$S \subseteq C \times D$ 也是函数，且 $R[A] \subseteq C$，令 $S \circ R \overset{定义}{=} \{(x, S(R(x))) \mid x \in A\}$。

函数 $f\colon A \to B$是一个三元组 (A, R, B)，其中 $R \subseteq A \times B$是一个函数关系。我们分别用 $f[X]$和 $f(x)$表示 $R[X]$和 $R(x)$。对于任意 $Y \supseteq f[X]$，令 $f|_X^Y \overset{定义}{=} (X, R \cap (X \times Y), Y)$，并令 $f|_X \overset{定义}{=} f|_X^B$。函数 $g = (C, S, D)$

若 $B = C$，则可将其与 f进行左复合，此时 $g \circ f \overset{定义}{=} (A, S \circ R, D)$。若 $R[A] \subseteq C$，我们可以用 $g \circ R$ 或 $S \circ f$ 表示 $S \circ R$。

集合与函数构成范畴 Sets，其中恒等态射为 $\mathrm{Id}_A \overset{\mathrm{def}}{=} (A, \{(x,x) \mid x \in A\}, A)$。在 Sets 中，我们使用集合对 (A,B)的标准积 $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ 和余积$(A+B, \mu_1, \mu_2)$。元素 $p \in A \times B$是来自 A 和 B的元素组成的有序对，即 $p = (\pi_1(p), \pi_2(p))$。对于函数 $f\colon C \to A$ 和 $g\colon C \to B$，我们将满足 $\pi_1 \circ \langle f,g\rangle = f$ 和 $\pi_2 \circ \langle f,g\rangle = g$ 的唯一函数记作 $\langle f,g\rangle\colon C \to A \times B$，即对所有 $z \in C$，$\langle f,g\rangle(z) \overset{\mathrm{def}}{=} (f(z), g(z))$。$A+B$ 中的元素是有序对 $\mu_1(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (x,0)$ 或 $\mu_2(y) \overset{\mathrm{def}}{=} (y,1)$，其中 $x \in A$和 $y \in B$均成立，因此 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$ 推出 $A' + B' = \mu_1[A'] \cup \mu_2[B']$。

序数是一个集合 α，满足 α 的每个元素都是 α的子集，并且隶属关系 $\in$ 在 α 上的限制是 α 上的严格良序（即一种全序，其中 α 的每个非空子集都有一个极小元素）。序数的每个成员都是序数，我们用 $\lambda < \alpha$ 表示 $\lambda \in \alpha$。对于任意两个序数 α、β，必有 $\alpha < \beta$、$\alpha = \beta$ 或 $\alpha > \beta$（例如参见 [5]）。每个序数 α都有一个后继 $\alpha \cup \{\alpha\}$，记作 $\alpha + 1$。自然数 n与有限序数相对应，因此 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$，并且 $\omega \overset{定义}{=} \{0, 1, \ldots\}$是最小的无限序数。

2.2 序列

对于任意集合 E 和序数 λ，一个长度为 λ 的 E-序列 s 是 E^λ的一个元素，即一个函数 $s\colon \lambda \to E$。令 ε 为 E^0 的唯一元素（因此将 E留作隐式），对于任意 $e \in E$，令 $e{\uparrow}\lambda$ 为 $\{e\}^\lambda$的唯一元素。对于任意 $s \in E^\lambda$和 $\iota < \lambda$，ι 在 s 下的像记作 s_ι。若 λ 是非零有限序数，则s 可表示为 $s = s_0 \cdots s_{\lambda-1}$。对于任意 $x \in E$，我们记作 $x \mid s$；若存在 $\iota < \lambda$ 使得 $s_\iota = x$，则称 x 出现在 s 中。对于任意序数 α，令$E^{<\alpha} \overset{定义}{=} \bigcup_{\lambda<\alpha} E^\lambda$；这是一个不交并。对于任意 $s \in E^{<\alpha}$，令 $|s|$ 为 s的长度，即满足 $s \in E^\lambda$ 的唯一 $\lambda < \alpha$。

对于任意集合 F和函数 $f\colon E \to F$，令 $f^{<\alpha}\colon E^{<\alpha} \to F^{<\alpha}$为由下式定义的函数：$f^{<\alpha}(s) \overset{定义}{=} f \circ s$对所有 $s \in E^{<\alpha}$成立。我们有 $\mathrm{Id}_E^{<\alpha} = \mathrm{Id}_{E^{<\alpha}}$，且$(g \circ f)^{<\alpha} = g^{<\alpha} \circ f^{<\alpha}$对所有 $g\colon F \to G$成立。由于 $s \in E^\lambda$蕴含 $f \circ s \in F^\lambda$，因此$|f^{<\alpha}(s)| = |s|$。

若 s 和 s' 分别是长度为 λ的 E序列和 F序列，则它们都是定义域为 λ 的函数，因此存在函数 $\langle s, s'\rangle$，其定义域为 λ。于是$\langle s, s'\rangle$是长度为 λ的 $(E \times F)$序列，进而 $\pi_1^{<\alpha}(\langle s, s'\rangle) = \pi_1 \circ \langle s, s'\rangle = s$，类似地，对所有 $\alpha > \lambda$，$\pi_2^{<\alpha}(\langle s, s'\rangle) = s'$ 成立。若 $f\colon E \to F$ 且 $g\colon E \to G$，则 $\langle f,g\rangle\colon E \to F \times G$，因此对于所有长度为 $\lambda < \alpha$ 的 $s \in E^{<\alpha}$，我们有$\langle f,g\rangle^{<\alpha}(s) = \langle f,g\rangle \circ s = \langle f \circ s, g \circ s\rangle = \langle f^{<\alpha}(s), g^{<\alpha}(s)\rangle$是长度为 λ的 $(F \times G)$序列。

对于 $s \in E^{<\omega}$和 $(A_e)_{e\in E}$一个由 E指标化的集合族，令 $A_s \overset{定义}{=} \prod_{\iota<|s|} A_{s_\iota}$。特别地，我们取 $A_\varepsilon \overset{定义}{=} 1$ 作为集合范畴中的终对象。对于 $(B_e)_{e\in E}$一个由 E指标化的集合族以及 $(f_e\colon A_e \to B_e)_{e\in E}$一个由 E指标化的函数族，令 $f_s \overset{定义}{=} \prod_{\iota<|s|} f_{s_\iota}\colon A_s \to B_s$。

2.3 签名与代数

签名是一个函数[1] $\Sigma\colon\ \Omega \to S^{<\omega}$，满足 $\Sigma(o) \neq \varepsilon$ 对所有 $o \in \Omega$均成立。 Ω 中的元素称为算子名称，而 S 中的元素称为类型。算子名称 $o \in \Omega$ 的元数是有限序数 $n \xlongequal{\text{定义}} |\Sigma(o)| - 1$，其值域为 $\mathsf{Rng}(o) \xlongequal{\text{定义}} \Sigma(o)_n$ （ S-序列 $\Sigma(o)$的最后一个元素），其定义域为 $\mathsf{Dom}(o) \xlongequal{\text{定义}} \Sigma(o)|_n$ （该序列的其余部分）。 o 是单子的，当且仅当 $n = 1$。若 Ω 和 S 均为有限集，则签名 Σ 是有限的；若其所有算子名称都是单子的，则它是图结构。

一个 Σ-代数 $\mathcal{A}$ 是一个二元组 $((\mathcal{A}_s)_{s\in S}, (o^{\mathcal{A}})_{o\in\Omega})$，其中 $(\mathcal{A}_s)_{s\in S}$ 是一个由 S指标化的集合族，而 $(o^{\mathcal{A}}\colon\ \mathcal{A}_{\mathrm{Dom}(o)} \to \mathcal{A}_{\mathrm{Rng}(o)})_{o\in\Omega}$ 是一个由 Ω指标化的函数族。一个从 $\mathcal{A}$ 到 Σ-代数 $\mathcal{B}$ 的 Σ-同态 h 是一个由 S指标化的函数族 $(h_s\colon \mathcal{A}_s \to \mathcal{B}_s)_{s\in S}$，满足

$$o^{\mathcal{B}} \circ h_{\mathrm{Dom}(o)} = h_{\mathrm{Rng}(o)} \circ o^{\mathcal{A}}$$

对所有 $o \in \Omega$均成立。令 $1_{\mathcal{A}} \xlongequal{\text{def}} (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_s})_{s\in S}$，对于任意 Σ-同态 $k\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，$\Sigma$-同态 $k \circ h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 定义为 $(k \circ h)_s \xlongequal{\text{def}} k_s \circ h_s$，对所有 $s \in S$均成立。令 Σ-Alg 为 Σ-代数及 Σ-同态构成的范畴。

2.4 范畴

我们假定读者熟悉函子、极限、余极限，以及函子对它们的保持和反映，参见 [7]。范畴中对象之间的同构记为 $\simeq$，范畴之间的等价记为 $\approx$。

对于 T of $\boldsymbol{A}$中的任意对象，切片范畴 $\boldsymbol{A}\backslash T$ 的对象是陪域为 T 的态射；从对象 $a\colon\ A \to T$ 到对象 $b\colon\ B \to T$的态射，是 $f\colon\ A \to B$ of $\boldsymbol{A}$，且满足 $b \circ f = a$； $\boldsymbol{A}\backslash T$ 中的态射复合定义为 $\boldsymbol{A}$中底层态射的复合（参见 [2] 或 [7, 定义 4.19]）。

3 单图及其态射

定义 3.1（ A的单图、边、序数）。若存在集合 E （其元素称为 A的边）和序数 α（称为 A的序数），使得 $(E, A, E^{<\alpha})$ 是一个函数，则集合 A 是一个单图。

因此，单图是一种函数关系，这意味着其边的集合是唯一确定的。相反，对于一个单图，总是存在无穷多个序数。作为贯穿全文的示例，我们考虑单图 $A = \{(x, x\,y\,x), (y, y\,x\,y)\}$，其边的集合为 $E = \{x, y\}$。由于 $A(x)$ 和$A(y)$ 是 $E^3 \subseteq E^{<4}$的元素，因此 $(E, A, E^{<4})$ 是一个函数。因此，4是 A的一个序数，所有大于4的序数也都是。

[1]为简便起见，我们不允许像 [6]那样重载算子名称。无论如何，这些名称最终都会证明无关紧要。

容易看出，对于任意一组单图，都存在一个对其所有成员都适用的共同序数。

定义 3.2（长度 $|x|$、边 x_ι、迹 $\mathsf{tr}(A)$, O-单图）。对于任意单图 A 及其边集合 E，边 $x \in E$ 的长度就是长度$|A(x)|$；若无歧义，也写作 $|x|$。同样，对于任意 $\iota < |x|$，我们可以用 x_ι 表示 $A(x)_\iota$。A 的迹是集合 $\mathsf{tr}(A) \overset{\text{定义}}{=} \{|x| \mid x \in E\}$。对于任意序数集合 O，若 $\mathsf{tr}(A) \subseteq O$，则 A 是一个 O-单图。

由于任意序数都是序数集合，因此我们看到，序数 α 对于单图成立，当且仅当它是一个 α-单图。因此，单图的所有边长度均有限，当且仅当它是一个 ω-单图。

定义 3.3（邻接、节点 N_A、标准单图）。对于任意单图 A 及其边 x、y，若 $y \mid A(x)$，则 x 与 y 邻接。节点是长度为 0 的边，A 的节点集合记作 N_A。若 $y \mid A(x)$蕴含 $y \in \mathsf{N}_A$，即所有边都是节点序列，则称 A 为标准单图。

运行示例 A 没有节点，因此不是标准的。由于$A(x) = x\,y\,x$，于是 x与 y 以及自身邻接。类似地，$A(y) = y\,x\,y$ 表明 y 与 x 以及自身邻接。在这种情况下，邻接关系是对称的，但一般并非如此。例如，节点永远不会与任何边邻接，而边则可能与节点邻接。

定义 3.4（单图的态射）。从单图A 到单图 B 的态射 f，其边集分别为 E 和 F，记作 $f\colon A \to B$，是一个函数 $f\colon E \to F$，满足 $f^{<\alpha} \circ A = B \circ f$，其中 α 是A的任意序数。

基于运行示例，我们考察E的置换 $f = (x\ y)$（采用循环记法），可知 $f^{<4} \circ A(x) = f^{<4}(x\,y\,x) = y\,x\,y = A(y) = A \circ f(x)$，类似地可知 $f^{<4} \circ A(y) = f^{<4}(y\,x\,y) = x\,y\,x = A(x) = A \circ f(y)$，因此 $f^{<4} \circ A = A \circ f$，而 f 于是是从 A 到 A的态射。由于$f \circ f = \mathsf{Id}_E$ 显然是恒等态射 1_A，所以 f 是一个同构。

请注意，方程 $f^{<\alpha} \circ A = B \circ f$中的项是函数关系，而不是函数。一个重要特征是：对于 A，如果方程对一个序数 α 成立，那么它对所有序数都成立。因此，如果给定一个态射，我们就知道方程对所有足够大的 α 都成立；如果要证明一个函数是态射，只需证明存在一个足够大的 α，使得方程成立。

当然，这个方程等价于 $f^{<\alpha} \circ A(x) = B \circ f(x)$ 对所有 $x \in E$都成立。最后这个方程中的项是 F-序列，因此它们应当具有相同的长度：

$$|x| = |A(x)| = |f^{<\alpha} \circ A(x)| = |B \circ f(x)| = |f(x)|,$$

也就是说，态射保持边的长度。因此 $\mathsf{tr}(A) \subseteq \mathsf{tr}(B)$，且当 f 是满射时等号成立。这意味着，如果 B 是一个 O-单图

那么 A 也是如此，并且对于 B 的每个序数，也是 A 的序数。这还意味着节点的像只能是节点：

$$f^{-1}[\mathrm{N}_B] = \{x \in E \mid |f(x)| = 0\} = \{x \in E \mid |x| = 0\} = \mathrm{N}_A.$$

序列 $f^{<\alpha} \circ A(x)$ 和 $B \circ f(x)$ 也应具有相同的元素

$$\begin{aligned}(f^{<\alpha} \circ A(x))_\iota &= (f \circ (A(x)))_\iota = f(A(x)_\iota) = f(x_\iota)\\ \text{and } (B \circ f(x))_\iota &= B(f(x))_\iota = f(x)_\iota\end{aligned}$$

对所有 $\iota < |x|$ 均如此。因此，$f\colon E \to F$ 是态射，当且仅当

$$|f(x)| = |x| \text{ and } f(x_\iota) = f(x)_\iota \text{ for all } x \in E \text{ and all } \iota < |x|.$$

假设 $f\colon A \to B$ 是态射，且 B 是标准的，则有 $f(x_\iota) = f(x)_\iota \in \mathrm{N}_B$，因此 $x_\iota \in f^{-1}[\mathrm{N}_B] = \mathrm{N}_A$ 对所有 $x \in E$ 和 $\iota < |x|$ 均成立，故 A 也是标准的。

给定态射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to C$，令 α 为 B 的一个序数，则可知 $g \circ f$ 是从 A 到 C 的态射，使得

$$(g \circ f)^{<\alpha} \circ A = g^{<\alpha} \circ f^{<\alpha} \circ A = g^{<\alpha} \circ B \circ f = C \circ g \circ f.$$

定义 3.5（单图范畴，函子 E）。令 Monogr 为单图及其态射构成的范畴。令 SMonogr 为其由标准单图构成的全子范畴。对于任意由序数组成的集合 O，令 O-Monogr（分别为 O-SMonogr）为由 O-单图（分别为标准O-单图）构成的全子范畴。令 FMonogr 为由有限 ω-单图构成的全子范畴。

令 E 为从 Monogr 到集合范畴的遗忘函子，即对于每个单图 A，令 EA 为 A 的边集；对于每个态射 $f\colon A \to B$，令 E$f\colon \mathrm{E}A \to \mathrm{E}B$ 为底层函数，通常记作 f。

标准 $\{0,2\}$-单图与图之间显然存在相似之处。事实上，很容易定义一个函子 $\mathrm{M} : \text{Graphs} \to \{0,2\}$-SMonogr：它将任意图 $G = (N, E, s, t)$ 映射到单图 MG，其边集为余积 $N + E$，并将每条边 $e \in E$ 映射到节点序列 $s(e)\, t(e)$（当然也将每个节点 $x \in N$ 映射到 ε）。类似地，图态射通过函数的余积变换为单图态射。容易看出，M 是范畴等价。

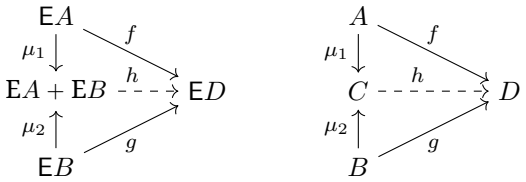
在代数图变换中，通常将 Graphs$\backslash G$ 的对象称为类型化图，其中 G 是一个称为类型图的图，参见例如 [2]。我们将把这一术语扩展到单图，并将 Monogr$\backslash T$ 的对象称为由 T 类型化的单图，而将 T 称为类型单图。

4 极限与余极限

单图的余极限遵循集合范畴和图中余极限的标准构造。

引理 4.1. 每一对单图 (A, B) 都有一个余积 $(A+B, \mu_1, \mu_2)$，使得 $\mathsf{tr}(A+B) = \mathsf{tr}(A) \cup \mathsf{tr}(B)$，并且如果 A 和 B 是有限（分别为标准）的，那么 $A+B$ 也如此。

证明。设 α 是 A和 B的序数，并令 $(\mathsf{E}A+\mathsf{E}B, \mu_1, \mu_2)$为集合范畴中 $(\mathsf{E}A, \mathsf{E}B)$的余积。由于 $\mathsf{E}A+\mathsf{E}B$的每个元素要么是某个 $x \in \mathsf{E}A$, $y \in \mathsf{E}B$对应的 $\mu_1(x)$，要么是 $\mu_2(y)$，我们可以通过令 $\mathsf{E}C \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathsf{E}A+\mathsf{E}B$，并对所有 $x \in \mathsf{E}A$, $y \in \mathsf{E}B$令 $C(\mu_1(x)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mu_1^{<\alpha} \circ A(x)$和 $C(\mu_2(y)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mu_2^{<\alpha} \circ B(y)$，来定义一个单图 C，使得 $\mu_1 : A \to C$ 和 $\mu_2 : B \to C$ 是态射。显然，$\mathsf{tr}(C) = \mathsf{tr}(A) \cup \mathsf{tr}(B)$；若 A和 B是有限（分别为标准）的，那么 C也如此。



设 $f : A \to D$ 且 $g : B \to D$，存在唯一函数 h，从 $\mathsf{E}A + \mathsf{E}B = \mathsf{E}C$ 到 $\mathsf{E}D$，使得 $f = h \circ \mu_1$ 且 $g = h \circ \mu_2$，因此

$$h^{<\alpha} \circ C(\mu_1(x)) = (h \circ \mu_1)^{<\alpha} \circ A(x) = f^{<\alpha} \circ A(x) = D \circ f(x) = D \circ h(\mu_1(x))$$

对于所有 $x \in \mathsf{E}A$，类似地，对于所有 $y \in \mathsf{E}B$，都有 $h^{<\alpha} \circ C(\mu_2(y)) = D \circ h(\mu_2(y))$ $h^{<\alpha} \circ C = D \circ h$，即 $h : C \to D$ 是一个态射。 □

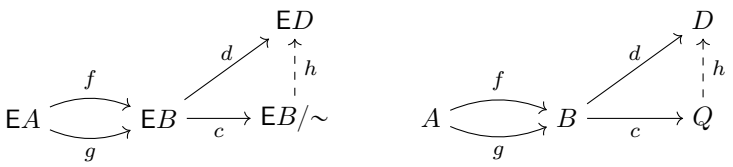
引理 4.2. 每一对平行态射 $f, g : A \to B$ 都有一个余等化子(Q, c)，使得 $\mathsf{tr}(Q) = \mathsf{tr}(B)$，并且如果 B 是有限（分别为标准）的，那么 Q 也如此。

证明。令 α 为 B 的一个序数，并令 $\sim$ 为 $\mathsf{E}B$上包含 $R = \{(f(x), g(x)) \mid x \in \mathsf{E}A\}$ 和 c 的最小等价关系：$\mathsf{E}B \to \mathsf{E}B/\sim$ 为典范满射，使得 $c \circ f = c \circ g$。因此，对所有 $x \in \mathsf{E}A$，我们有

$$c^{<\alpha} \circ B \circ f(x) = (c \circ f)^{<\alpha} \circ A(x) = (c \circ g)^{<\alpha} \circ A(x) = c^{<\alpha} \circ B \circ g(x).$$

对于所有满足 $c(y) = c(y')$的 $y, y' \in \mathsf{E}B$，即 $y \sim y'$，存在一个由 $\mathsf{E}B$中的元素组成的有限序列$y_0, \ldots, y_n$，使得 $y_0 = y$, $y_n = y'$且 $y_i \; R \; y_{i+1}$，或者对于所有 $0 \leqslant i < n$，有 $y_{i+1} \; R \; y_i$，因此 $c^{<\alpha} \circ B(y_i) = c^{<\alpha} \circ B(y_{i+1})$，从而$c^{<\alpha} \circ B(y) = c^{<\alpha} \circ B(y')$。

现在，我们可以通过令 $\mathsf{E}Q = \mathsf{E}B/\sim$ 并取 $Q(c(y)) \stackrel{\text{定义}}{=} c^{<\alpha} \circ B(y)$ 来定义一个单图，使得 $c : B \to Q$ 是一个态射。由于 c 是满射，因此 $\mathsf{tr}(Q) = \mathsf{tr}(B)$；若 B 是有限的（分别为标准的），则 Q 也如此。



设 $d\colon B \to D$ 满足 $d \circ f = d \circ g$，则存在唯一的函数 h，从 $\mathrm{E}Q$ 到 $\mathrm{E}D$，使得 $d = h \circ c$；并且 $h\colon Q \to D$ 是一个态射，因为对所有 $y \in \mathrm{E}B$，

$$D \circ h(c(y)) = D \circ d(y) = d^{<\alpha} \circ B(y) = h^{<\alpha} \circ c^{<\alpha} \circ B(y) = h^{<\alpha} \circ Q(c(y)).$$

□

推论 4.3。Monogr 中的满态射就是满射态射。

证明。假设 $f\colon A \to B$ 是一个满态射。设 $(B+B, \mu_1, \mu_2)$ 是 (B, B) 的余积，且 (Q, c) 是 $\mu_1 \circ f, \mu_2 \circ f\colon A \to B+B$ 在引理 4.2 的证明中构造的余等化子，则 $c \circ \mu_1 \circ f = c \circ \mu_2 \circ f$，因而 $c \circ \mu_1 = c \circ \mu_2$。对于所有 $y \in \mathrm{E}B$，我们由此有 $\mu_1(y) \sim \mu_2(y)$；又由于 $\mu_1(y) \neq \mu_2(y)$，那么 $\mu_1(y)$必定通过 R 与 $\mathrm{E}(B+B)$中的某个元素相关联，因此存在一个 $x \in \mathrm{E}A$使得 $\mu_1(y) = \mu_1 \circ f(x)$，于是 $y = f(x)$，因为 μ_1是单射；这证明了 f 是满射。反之显然。 □

引理 4.1、4.2 以及 $\varnothing$ 是初始单图这一事实的一个众所周知的推论是，所有有限图表都有余极限。

定理 4.4. 定义 3.5 中的范畴是有限余完备的。

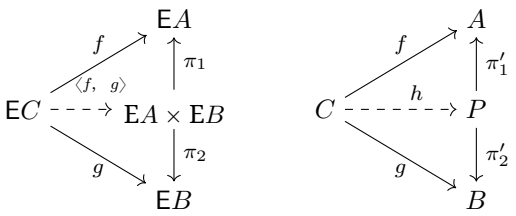
接下来，我们研究单图范畴中的极限。单图的积比图的积更难构造，这是因为长度相同的边可能与长度不同的边相邻。

引理 4.5. 任意一对单图 $(A、B)$ 都有一个积 $(A \times B、\pi'_1、\pi'_2)$，使得当 A 和 B 有限时，$A \times B$ 也有限。

证明. 令 α 为 A 和 B 的一个序数，令 $(\mathrm{E}A \times \mathrm{E}B、\pi_1、\pi_2)$ 为 $(\mathrm{E}A、\mathrm{E}B)$ 在集合范畴中的积。我们考虑 $\{(x、y) \in \mathrm{E}A \times \mathrm{E}B \mid |x| = |y|\}$ 的子集 H 所组成的集合，其中 $(x、y) \in H$ 蕴含对所有 $\iota < |x|$ 都有 $(x_\iota、y_\iota) \in H$。此集合包含 $\varnothing$ 且对并集封闭，因此它有一个最大元素 $\mathrm{E}P$。我们令$P(x,y) \overset{\text{定义}}{=} \langle A(x), B(y)\rangle$，对所有 $(x,y) \in \mathrm{E}P$ 都成立；这显然是一个 $\mathrm{E}P$-序列，因此 P 是一个单图。令 $\pi'_1 \overset{\text{定义}}{=} \pi_1|_{\mathrm{E}P}$ 和 $\pi'_2 \overset{\text{定义}}{=} \pi_2|_{\mathrm{E}P}$，我们有

$$\pi_1'^{<\alpha} \circ P(x,y) = A(x) = A \circ \pi'_1(x,y)$$

对所有 $(x,y) \in \mathrm{E}P$，因此 $\pi'_1\colon P \to A$，类似地 $\pi'_2\colon P \to B$是态射。



设 $f\colon C \to A$ 且 $g\colon C \to B$，则 $\langle f,g\rangle : \mathrm{E}C \to \mathrm{E}A \times \mathrm{E}B$，并且对所有 $z \in \mathrm{E}C$，我们有 $|f(z)| = |z| = |g(z)|$，因此 $\langle f,g\rangle[\mathrm{E}C] \subseteq \{(x,y) \in \mathrm{E}A \times \mathrm{E}B \mid |x| = |y|\}$。假设 $(x, y) \in \langle f,g\rangle[\mathrm{E}C]$，则存在一个 $z \in \mathrm{E}C$，使得 $x = f(z)$且 $y = g(z)$，因此 $|x| = |y|$，$f(z_\iota) = f(z)_\iota = x_i$ 且 $g(z_\iota) = g(z)_\iota = y_\iota$对所有 $\iota < |x|$成立，于是 $(x_\iota, y_\iota) \in \langle f, g\rangle[\mathrm{E}C]$。因此 $\langle f,g\rangle[\mathrm{E}C] \subseteq \mathrm{E}P$，令$h \overset{\text{def}}{=} \langle f,g\rangle|^{\mathrm{E}P}_{\mathrm{E}C}$，则 h 是满足 $\pi'_1 \circ h = f$ 且 $\pi'_2 \circ h = g$的唯一函数，并且 $h\colon C \to P$ 是态射，因为对所有 $z \in \mathrm{E}C$，

$$\begin{aligned} P \circ h(z) &= P(f(z), g(z)) \\ &= \langle A \circ f(z), B \circ g(z)\rangle \\ &= \langle f^{<\alpha} \circ C(z), g^{<\alpha} \circ C(z)\rangle \\ &= h^{<\alpha} \circ C(z). \end{aligned}$$

□

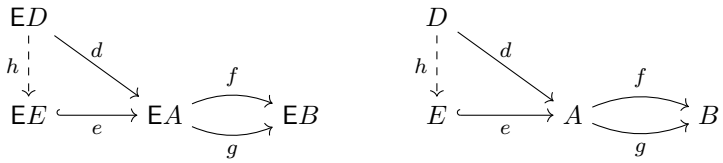
因此我们看到，$\mathrm{E}(A \times B)$ 只是 $\mathrm{E}A \times \mathrm{E}B$的一个子集。

引理 4.6. 每一对平行态射 $f,g\colon A \to B$ 都有一个等化子(E,e)，使得当 A 有限时，E 也有限。

证明. 令 α 为 A的一个序数，$\mathrm{E}E \overset{\text{定义}}{=} \{x \in \mathrm{E}A \mid f(x) = g(x)\}$, $e : \mathrm{E}E \hookrightarrow \mathrm{E}A$为典范单射，并令 $E(x) \overset{\text{定义}}{=} A(x)$ 对所有 $x \in$$\mathrm{E}E$成立。由于

$$f^{<\alpha} \circ A(x) = B \circ f(x) = B \circ g(x) = g^{<\alpha} \circ A(x)$$

那么 $E(x)$ 是一个 $\mathrm{E}E$-序列，因此 E 是一个单图。此外 $e^{<\alpha} \circ E(x) = A(x) = A \circ e(x)$，因此 $e\colon E \to A$ 是一个满足 $f \circ e = g \circ e$的态射。



对于任意满足 $f \circ d = g \circ d$的 $d\colon D \to A$，对所有 $y \in \mathrm{E}D$，我们有 $d(y) \in \mathrm{E}E$，因此 $h \overset{\text{定义}}{=} d|^{\mathrm{E}E}_{\mathrm{E}D}$ 是满足 $d = e \circ h$的唯一函数。我们有

$$e^{<\alpha} \circ h^{<\alpha} \circ D = d^{<\alpha} \circ D = A \circ d = A \circ e \circ h = e^{<\alpha} \circ E \circ h$$

且 $e^{<\alpha}\colon (\mathrm{E}E)^{<\alpha} \hookrightarrow (\mathrm{E}A)^{<\alpha}$ 是典范单射，因此 $h^{<\alpha} \circ D = E \circ h$且 $h\colon D \to E$ 是一个态射。 □

推论 4.7。Monogr 中的单态射就是单射态射。

证明。假设 $f\colon A \to B$ 是单态射。令 $(A \times A、\ \pi_1、\ \pi_2)$ 为 $(A、\ A)$ 的积，令 $(E、\ e)$ 为在引理 4.6 的证明中构造的 $f \circ \pi_1、\ f \circ \pi_2\colon A \times A \to B$ 的等化子，则 $f \circ \pi_1 \circ e = f \circ \pi_2 \circ e$，因此 $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$。对于所有 $x、\ y \in \mathrm{E}A$，若 $f(x) = f(y)$，则 $f \circ \pi_1(x、\ y) = f \circ \pi_2(x、\ y)$，因此 $(x、\ y) \in \mathrm{E}E$，进而 $x = \pi_1 \circ e(x、\ y) = \pi_2 \circ e(x、\ y) = y$，故 f 是单射。反过来显然成立。 □

引理 4.5 和 4.6 的一个著名推论是，Monogr 中所有非空有限图表都有极限。由于 O-单图（分别为标准单图）的极限是 O-单图（分别为标准），这一结论适用于定义 3.5 中的所有范畴。特别地，它们都有拉回。

现在我们将研究这些范畴中的空图表的极限，即它们可能的终对象。

定义 4.8。对于任意序数集合 O，令

$$\mathrm{T}_O = \begin{cases} \{(\lambda, 0{\uparrow}\lambda) \mid \lambda \in O\} & \textit{if } 0 \in O \\ \varnothing & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

如果 $0 \in O$，那么 0 是 T_O 的一个节点，并且显然 $\mathrm{ET}_O = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_O) = O$。因此在所有情况下，$\mathrm{T}_O$ 都是一个标准 O-单图。

引理 4.9。T_O 是 O-SMonogr 中的终对象。

证明。如果 $0 \notin O$，那么 $\varnothing = \mathrm{T}_O$ 是唯一的标准 O-单图，因此它是终对象。否则，设 A 是任意一个标准 O-单图，α 是一个满足 A 和 ℓ 的序数：令 $\mathrm{E}A \to O$ 为将每条边 $x \in \mathrm{E}A$ 映射到其长度$|x|$的函数。由于 A 是标准的，因此对于所有 $\iota < |x|$ 都有 $(\ell^{<\alpha} \circ A(x))_\iota = |A(x)_\iota| = 0$，从而有 $\ell^{<\alpha} \circ A(x) = 0{\uparrow}|x| = \mathrm{T}_O \circ \ell(x)$，所以 $\ell : A \to \mathrm{T}_O$ 是一个态射。由于态射保持边的长度，并且 T_O 中每个长度恰好有一条边，因此 ℓ 是唯一的。 □

现在我们使用这样一个事实：每个序数都是由序数组成的集合。

引理 4.10. 对于任意单图 T 和态射 $f : \mathrm{T}_\alpha \to T$，任意一个 T 的序数都大于或等于 α。

证明. 设 β 是 T的一个序数，那么根据 f 的存在性，我们有 $\alpha = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_\alpha) \subseteq \mathrm{tr}(T) \subseteq \beta$，因此 $\alpha \leqslant \beta$。 □

引理 4.11. Monogr、SMonogr 和 FMonogr 没有终对象。

证明. 假设 T 是一个终端单簿，那么存在一个 T 的序数 β，并且存在一个从 $\mathrm{T}_{\beta+1}$ 到 T的态射；由引理 4.10可知，这意味着$\beta + 1 \leqslant \beta$，矛盾。即使 T 是标准的，这一结论仍然成立，因为 $\mathrm{T}_{\beta+1}$ 是标准的。而且，如果 T 是一个有限 ω-单图，这一结论也成立，因为此时可以选取有限的 β，而 $\mathrm{T}_{\beta+1}$ 也就同样是一个有限的 ω-单图。 □

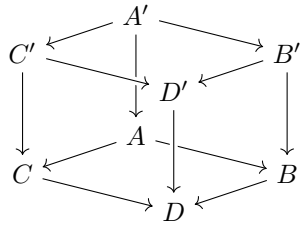
由于终对象是空图表的极限，显然这些范畴不是有限完备的。

定理 4.12。对于每个序数集合 O，O-SMonogr 都是有限完备的。范畴 Monogr、SMonogr 和 FMonogr 不是有限完备的。

证明。由引理 4.5、4.6、4.9 和 4.11 可得。 □

众所周知，categoryGraphs 也是粘合范畴；粘合性是推出和拉回的一种性质，对代数变换有重要影响（见 [8]），因此我们将对此进行探究。

定义 4.13（范·坎彭方块、粘合范畴）。若一个推出方块(A,B,C,D)满足：对于任意交换立方体



其中，后侧面 (A',A,B',B) 和 (A',A,C',C) 均为拉回，当且仅当顶面 (A',B',C',D') 是推出时，前侧面 (B',B,D',D) 和 (C',C,D',D) 均为拉回。

若每当 f 或 g 是单态射时，所有源 (A,f,g) 都有推出，则称一个范畴具有沿单态射的推出。

若一个范畴具有拉回、沿单态射的推出，且所有此类推出都是范·坎彭方块，则称该范畴是粘合的。

与证明 Graphs 是粘合范畴时一样，我们将利用集合范畴 Sets 是粘合范畴这一事实。

引理 4.14. E 反映同构。

证明. 设 $f\colon A \to B$，且 f 是双射，则它有一个逆 $f^{-1}:\mathrm{E}B \to \mathrm{E}A$。对于所有 $y \in \mathrm{E}B$ 及所有 $\iota < |y|$，令 $x = f^{-1}(y)$，我们有

$$f^{-1}(y_\iota) = f^{-1}(f(x)_\iota) = f^{-1}(f(x_\iota)) = x_\iota = f^{-1}(y)_\iota$$

因此 $f^{-1}\colon B \to A$ 是一个态射，因此 f 是一个同构。 □

一个附带的推论是，Monogr 是平衡的，也就是说，若 f 同时是单态射和满态射，那么根据推论 4.3 和 4.7 f 是双射，因此是一个同构。更重要的是，我们可以使用 [7, 定理 24.7], ，即：从一个具有某些极限或余极限的范畴出发，且保留这些极限或余极限的忠实且反映同构的函子，也会反映它们。

引理 4.15。E 保持并反映有限余极限。

证明。从引理 4.1 和 4.2 的证明中很容易看出，E 既保持余积，也保持余等化子，因此 E 保持所有有限余极限，进而也反映它们。

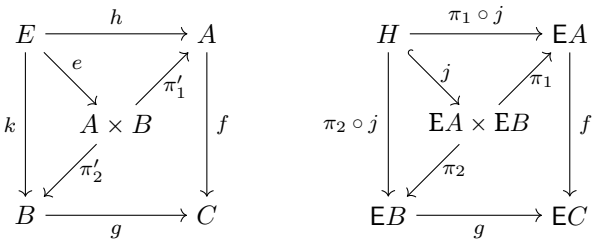
□

这对于推出尤其成立。拉回的情况则更复杂，因为 E 不保持积。

引理 4.16。E 保持并反映拉回。

证明。我们先证明 E 保持拉回。设 $f\colon A\to C, g\colon B\to C$ andα 是 A 和 B 的一个序数，不失一般性，假设有一个 (f,g,C) 的典范拉回 (E,h,k)，也就是说，设 $(A\times B,\pi_1',\pi_2')$ 是 (A,B) 的积，而 (E,e) 是 $(f\circ\pi_1',g\circ\pi_2')$ 的等化子，其中有 $h=\pi_1'\circ e$ 和 $k=\pi_2'\circ e$。设 $(\mathrm{E}A\times\mathrm{E}B,\pi_1,\pi_2)$ 是 Sets 中 $(\mathrm{E}A$ 和 $\mathrm{E}B)$ 的积。根据引理 4.5 的证明，我们有 $\mathrm{E}(A\times B)\subseteq\mathrm{E}A\times\mathrm{E}B$, $\pi_1'=\pi_1|_{\mathsf{E}(A\times B)}$ 和 $\pi_2'=\pi_2|_{\mathsf{E}(A\times B)}$。

令 $H\xrightarrow{\text{定义}}\{(x、y)\in\mathrm{E}A\times\mathrm{E}B\mid f(x)=g(y)\}$，并令 $j\colon H\hookrightarrow\mathrm{E}A\times\mathrm{E}B$ 为典范单射。由典范构造 $(H、\pi_1\circ j、\pi_2\circ j)$ 是集合范畴中 $(f、g、\mathrm{E}C)$ 的一个拉回；接下来我们证明，它是 Monogr 中 $(f、g、C)$ 的拉回$(E、h、k)$ 经 E 所得的像。



根据引理 4.6 中 E 的构造，我们有 $\mathrm{E}E=\{(x、y)\in\mathrm{E}(A\times B)\mid f(x)=g(y)\}\subseteq H$，且 $e\colon\mathrm{E}E\hookrightarrow\mathrm{E}(A\times B)$ 是典范单射。对所有$(x、y)\in H$，我们有 $|x|=|f(x)|=|g(y)|=|y|$；对所有 $\iota<|x|$，我们有 $f(x_\iota)=f(x)_\iota=g(y)_\iota=g(y_\iota)$，从而 $(x_\iota、y_\iota)\in H$，因此根据引理 4.5 中 $A\times B$ 的构造，有 $H\subseteq\mathrm{E}(A\times B)$。于是我们有 $H=\mathrm{E}E$，从而 $\pi_1\circ j=\pi_1'\circ e=h$ 以及 $\pi_2\circ j=\pi_2'\circ e=k$，所以 E 保持拉回，因而如上所述，E 也反射拉回。 □

定理 4.17。定义 3.5 中的范畴是粘合范畴。

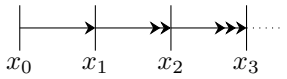
证明。拉回和推出的存在性已经得到确立。在这些范畴中的任意一个里，若一个交换立方体的底面是沿单态射的推出，且背面是拉回，那么根据推论 4.7、引理 4.15 和 4.16，它在集合范畴中的底层立方体也具有相同性质。由于集合范畴是粘合范畴（参见 [8]），底层底面是一个范坎彭方形，因此根据引理 4.15 和 4.16，初始立方体的底面也是如此。

□

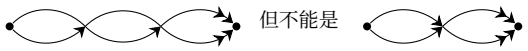
5 绘制单图

显然，只有在我们可以尝试绘制单图 A 的情况下 $\mathrm{E}A$ 是有限的，且其边的长度有限时，也就是说，只有在 A 是一个有限的 ω-单图时，我们才可以这样做。如果我们要求每个单图MG 都应绘制成图 G，那么节点应以实心圆点表示，长度为 2 的边则以连接其两个相邻节点的箭头 表示。但通常，相邻边可能不是节点，而且数量也可能多于 2，因此我们采用以下约定：

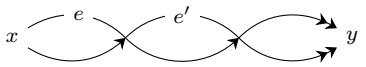
长度至少为 2 的边 e 表示为一串相连的箭头，且箭头尖端的数量依次递增



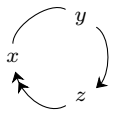
（其中 $A(e) = x_0x_1x_2x_3\cdots$），并且任何箭头都应以与下一个箭头离开 x_i 时相同的角度进入 x_i。为清晰起见，我们用一对交叉点而非单个交叉点来表示对称邻接，例如，如果 $A(e) = xe'y$ 和 $A(e') = xey$，其中 x 和 y 是节点，则图示可以是



有时需要在图示中为边命名。此时，我们可以采用绘制范畴图表时有时使用的约定：用相应节点的名称替代实心圆点，并在没有交叉点的位置中断箭头，以便标注其名称，如图所示



请注意，节点名称与其他边的名称不会混淆，例如，在



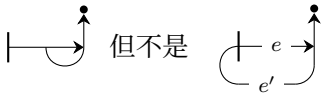
显然，x 和 z 是节点，因为箭头尖端指向它们；而 y 是一条长度为 3 的边的名称。

与图的情况一样，单图可能不是平面的，绘制时可能需要让不相邻的边交叉；在这种情况下，交叉处没有箭头尖端，因此不会与邻接交叉点混淆。不过，在这种情况下，似乎最好在一支箭头靠近另一支箭头处擦去一段，如图所示。

接下来要表示长度为 1 的边。由于 $A(e) = x$ 通常写作 $A:\ e \mapsto x$，边 e 将画成

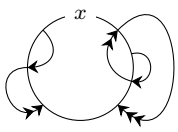


为避免混淆，粗短线只能引出一条箭头。例如，如果 $A(e) = e'$ 和 $A(e') = ex$ 其中 x 是一个节点，图示可以是



因为最后这个图示可能会被解读为单图 $A(e') = x$ 和$A(e) = e'e'$，而它与预期的单图并不同构。

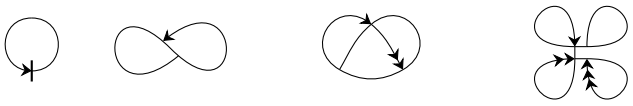
其他约定可能会因上下文或特定单图而更为合适。例如，考虑一个具有一个节点 x 和两条边 $x\!\uparrow\!3$ 及 $x\!\uparrow\!4$的单图。许多箭头尖端集中在一个实心圆点上会使图形变得混乱，除非该实心圆点足够大。一种可能性是用圆圈替代实心圆点，并将其视为一条没有箭头尖端的标准边。于是，该单图可以画成



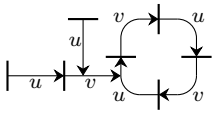
这些约定的设计使得：对于任何有限 ω-单图 A 的图示，若图中所有边均已命名，则只能将其读作单图 A 本身；否则，只能将其读作某个与 A 同构的单图。若单图 A 是一个函数而非函数关系，这便不可能，因为那样其陪域 $(\mathbf{E}A)^{<\alpha}$ 便不会被画出。当然可以将序数 α 添加到图示中，但那还能算是一幅图示吗?

请注意，图或标准 $\{0,2\}$-单图的图示既可读作图 G，也可读作单图 A，并且此时 $\mathbf{M}\,G \simeq A$。

单图的一个特殊之处是，边可以与自身相邻，如下所示



我们也可以绘制带类型单图，此时每条边 $e \in \mathbf{E}A$ 都有一个类型$a(e)$，可以写在 e 附近。例如，由 $T = \{(u, v), (v, u)\}$ 标注类型的单图，会像下面这样绘制，并带有标签 u 和 v



当然，知道 a 是一个态射有时可以推导出某条边的类型，也可能根据相邻边的类型推导出来。在当前情形中，只需指出一种类型，就足以推导出所有其他类型。

在某些应用中，采用完全不同的方式来绘制（带类型的）单图可能会更方便。

例5.1。在 *[9]* 中，项图由结构 $(V、E、lab、att)$定义，其中 V 是节点集合，E 是超边集合，$att:\ E \to V^{<\omega}$ 定义邻接关系，且 $lab:\ E \to \Omega$ 满足：对于所有$e \in E$，$|att(e)|$ 是 $lab(e)$ 的元数加 1（为简单起见，我们只考虑签名$\Sigma: \Omega \to S^{<\omega}$ 的基项，其中 $\Omega \cap S = \varnothing$）。序列 $att(e)$ 的第一个元素被视为 e 的结果节点，其余元素则视为参数节点，因此e 确定了从其结果节点到所有参数节点的路径。项图是满足以下条件的结构：路径不形成环；每个节点都可从某个根节点到达；并且每个节点都是唯一一个超边的结果节点。该定义针对无类型签名给出，但可以很容易地推广，我们现在就进行推广。

我们考虑由 $\mathsf{ET}_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} S \cup \Omega$定义的类型单图 T_Σ，并且

$$\mathrm{T}_\Sigma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \ \textit{for all}\ s \in S,$$
$$\mathrm{T}_\Sigma(o) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(o) \ \textit{for all}\ o \in \Omega.$$

注意，T_Σ 是一个标准的 ω-单图，而且事实上，任何标准的 ω-单图都具有这种形式，只要选取合适的 Σ。

任意带类型单图 $a:\ A \to \mathsf{T}_\Sigma$ 都对应于一个结构 (V, E, lab, att)，其中 $V = \mathsf{N}_A$, $E = \mathsf{E}A \backslash \mathsf{N}_A$, $lab(e) = a(e)$，且对所有 $e \in E$均成立。唯一的区别（源于我们对签名的定义）是，e 的结果节点现在是序列 $A(e)$中的最后一个节点。

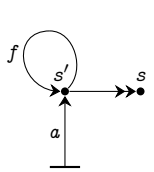
现在考虑签名 Σ，它有两种类型 s, s'、一个二元函数符号 f，其 $\Sigma(\mathsf{f}) = \mathsf{s}'\,\mathsf{s}'\,\mathsf{s}$，以及一个常量符号 c，其 $\Sigma(\mathsf{c}) = \mathsf{s}'$。我们将项图 $\mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{c})$（其中 c 出现了两次且共享）表示为带类型单图 a: $A \to \mathsf{T}_\Sigma$。我们需要两条边 e, e' 及其结果节点x, x'，第一条对应于 f，第二条对应于 c。因此，A 定义如下：

$$\mathsf{E}A = \{x, x', e, e'\},\ A(x) = A(x') = \varepsilon,\ A(e) = x'\,x'\,x \ \textit{and}\ A(e') = x'.$$

类型态射 $a:\ A \to \mathsf{T}_\Sigma$ 由下式给出

$$a(x) = \mathsf{s},\ a(x') = \mathsf{s}',\ a(e) = \mathsf{f} \ \textit{and}\ a(e') = \mathsf{c}.$$

下面给出由 a 赋予类型的单图 A 的标准绘图，以及相应项图（显然更为可取）的标准表示。





6 图结构与带类型单图

将图的绘图解读为 Γ_{g}-代数 $\mathcal{G}$的过程相当简单，其中 Γ_{g}是第 1 节给出的图的签名：每个实心圆点都被解释为 $\mathcal{G}_{\mathtt{nodes}}$中的一个元素，每个箭头都被解释为 $\mathcal{G}_{\mathtt{edges}}$ 中的一个元素，而函数 $\mathsf{src}^{\mathcal{G}}$ 和 $\mathsf{tgt}^{\mathcal{G}}$ 将该元素映射所得的像，则根据绘图中的几何邻近关系来确定。解读 E-图的过程与此类似，只是实心圆点可能被解释为节点或值，因此应当在绘图中标明这种类型信息。

由于图的绘制不过是绘制一个标准的 $\{0,2\}$-单图，我们可以跳过绘制步骤，直接将一个标准的 $\{0,2\}$-单图 A 作为一个 Γ_{g}-代数 $\mathcal{G}$进行变换。于是

$$\mathcal{G}_{\mathtt{nodes}} = \mathrm{N}_A,\ \mathcal{G}_{\mathtt{edges}} = \{x \in \mathsf{E}A \mid |x| = 2\},\ \mathtt{src}^{\mathcal{G}}(x) = x_0 \text{ and } \mathtt{tgt}^{\mathcal{G}}(x) = x_1$$

对所有 $x \in \mathcal{G}_{\mathtt{edges}}$均成立。因此， A 的每个节点都由节点赋予类型，所有其他边都由边赋予类型。这种类型赋予显然是从 A 到单图{(节点 ε), (边，节点 节点)} 的一个态射；该单图同构于$\{0,2\}$-SMonogr 的终对象（见引理 4.9）。

更一般地，对于任意给定的图结构 Γ，我们可以询问：哪些配备了到类型单图 T的适当态射的单图，能够以这种方式解释为 Γ-代数？如上所述， T 的边应当是 Γ的类型。但这还不够，因为没有规范的方法将 T 中的邻接关系（例如边$_0$ = 节点和边$_1$ =节点）与 Γ 的算子名称（例如 src 和 tgt）联系起来。因此，我们将使用签名之间的态射这一概念来重命名算子；我们还会重命名类型，以体现 T中的函子性。

定义 6.1（范畴 Sig、GrStruct、Sig$_{\mathrm{srt}}$）。一个从 $\Sigma : \Omega \to S^{<\omega}$ 到 $\Sigma' : \Omega' \to S'^{<\omega}$ 的态射 r 是一对函数 $(r_{\mathrm{opn}}、\ r_{\mathrm{srt}})$：$r_{\mathrm{opn}} : \Omega \to \Omega'$ 和 $r_{\mathrm{srt}} : S \to S'$，满足

$$r_{\mathrm{srt}}^{<\omega} \circ \Sigma = \Sigma' \circ r_{\mathrm{opn}}.$$

对于任意态射 r'： $\Sigma' \to \Sigma''$，令 $r' \circ r \overset{\text{定义}}{=} (r'_{\mathrm{opn}} \circ r_{\mathrm{opn}}、\ r'_{\mathrm{srt}} \circ r_{\mathrm{srt}})$： $\Sigma \to \Sigma''$、$1_{\Sigma} \overset{\text{定义}}{=} (\mathrm{Id}_{\Omega}、\mathrm{Id}_S)$，并令 Sig 为签名及其态射所成的范畴。令 GrStruct 为图结构的全子范畴。

令 Sig$_{\mathrm{srt}}$ 为 Sig 的子范畴，将其限制为形如 $(r_{\mathrm{opn}}、\ j)$ 的态射，其中 j 是一个典范单射。我们用 $\doteq$ 表示 Sig$_{\mathrm{srt}}$ 中对象之间的同构关系。

因此，问题在于阐明 T与 Γ之间的联系。如上所述， T 的边对应于 Γ的类型。我们还看到， T 中的每个邻接都对应于 Γ中的一个算子名称，例如，一条长度为 2、与 e_0和 e_1 邻接（即满足 $T(e) = e_0\, e_1$）的边 e 对应于两个算子名称，例如 src$_e$ 和 tgt$_e$，其定义域排序分别为 e和 e_1，值域排序分别为 e_0和 e_1。由于边的长度可能大于 2，对于每个 $\iota < |e|$，我们为边 e 的 ι^{th} 邻接创建形如 $[e{\cdot}\iota]$ 的典范算子名称（因此我们更倾向于使用 $[e{\cdot}0]$ 和 $[e{\cdot}1]$，而不是 src$_e$ 和 tgt$_e$）。

定义 6.2（函子 $\mathsf{S}:\mathbf{Monogr}\to\mathbf{GrStruct}$）。对于每个单图 T，我们关联算子名称集合 $\Omega_T \xrightarrow{\text{定义}} \{\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket \mid e\in \mathrm{E}T \text{ 和 } \iota<|e|\}$，以及图结构 $\mathsf{S}T\colon \Omega_T\to(\mathrm{E}T)^{<\omega}$，其定义为 $\mathsf{S}T(\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket)\xrightarrow{\text{定义}} e\,e_\iota$，对所有$\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_T$均成立；也就是说，我们令 $\mathrm{Dom}(\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket)\xrightarrow{\text{定义}} e$，并令 $\mathrm{Rng}(\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket)\xrightarrow{\text{定义}} e_\iota$。

对于 $\mathbf{Monogr}$ 中的每个态射 $f:\ T\to T'$，我们关联态射 $\mathsf{S}f:\ \mathsf{S}T\to\mathsf{S}T'$，其定义如下：$(\mathsf{S}f)_{\mathrm{opn}}$ 是将每个算子名称 $\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_T$ 映射到算子名称 $\llbracket f(e){\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_{T'}$ 的函数，而 $(\mathsf{S}f)_{\mathrm{srt}}$ 是函数$f:\ \mathrm{E}T\to\mathrm{E}T'$。

我们看到，$\mathsf{S}f$ 确实是图结构的一个态射：

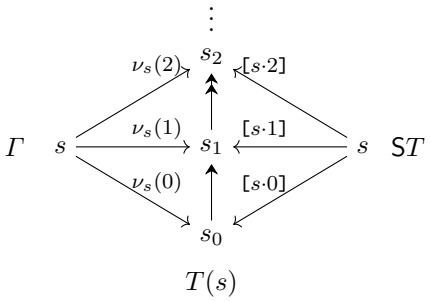
$$(\mathsf{S}f)^{<\omega}_{\mathrm{srt}}\circ\mathsf{S}T(\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket)=f(e)\,f(e)_\iota=f(e)\,f(e)_\iota=\mathsf{S}T'(\llbracket f(e){\cdot}\iota \rrbracket)=\mathsf{S}T'\circ(\mathsf{S}f)_{\mathrm{opn}}(\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket)$$

对于所有 $\llbracket e{\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_T$，显然 S 是一个忠实函子。

下一个引理至关重要，因为它表明，如果允许图结构之间保持类型的同构，则函子 S 不会遗漏任何图结构。我们通过称为编号定理的等价表述来假设选择公理 [5]。

引理 6.3。对于每个图结构 Γ，存在一个单图 T，使得 $\mathsf{S}T\doteq\Gamma$。

证明。设 $\Gamma\colon\Omega\to S^{<\omega}$，并且对于每个排序 $s\in S$，令 Ω_s 为定义域排序是 s 的算子名称 $o\in\Omega$ 的集合，即 $\Omega_s\xrightarrow{\text{定义}}\mathrm{Dom}^{-1}[s]$。根据编号定理，存在一个与 Ω_s 等势的序数 λ_s，也就是说，存在一个双射 $\nu_s:\ \lambda_s\to\Omega_s$。令 T 为满足以下条件的单图：对于所有 $\iota<\lambda_s$，$\mathrm{E}T\xrightarrow{\text{定义}} S$，并且 $T(s)_\iota\xrightarrow{\text{定义}}\mathrm{Rng}(\nu_s(\iota))$，因此 $T(s)$ 是一个长度为 λ_s 的 S-序列。



现在考虑由 $r_{\mathrm{opn}}(\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket)\xrightarrow{\text{定义}}\nu_s(\iota)$ 定义的函数 $r_{\mathrm{opn}}:\Omega_T\to\Omega$。该函数是满射，因为对于所有 $o\in\Omega$，取 $s=\mathrm{Dom}(o)$ 和$\iota=\nu_s^{-1}(o)$，便得到 $\iota<\lambda_s=|s|$，因此 $\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_T$，且显然 $r_{\mathrm{opn}}(\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket)=o$。它也是单射，因为 $r_{\mathrm{opn}}(\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket)=r_{\mathrm{opn}}(\llbracket s'{\cdot}\iota' \rrbracket)$ 意味着 $s=\mathrm{Dom}(\nu_s(\iota))=\mathrm{Dom}(\nu_{s'}(\iota'))=s'$，进而得到 $\iota=\iota'$，因此 $\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket=\llbracket s'{\cdot}\iota' \rrbracket$。最后，我们看到

$$\mathrm{Id}_S^{<\omega}\circ\mathsf{S}T(\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket)=s\,s_\iota=\mathrm{Dom}(\nu_s(\iota))\,\mathrm{Rng}(\nu_s(\iota))=\Gamma(\nu_s(\iota))=\Gamma\circ r_{\mathrm{opn}}(\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket)$$

对所有 $\llbracket s{\cdot}\iota \rrbracket\in\Omega_T$，因此 $(r_{\mathrm{opn}},\ \mathrm{Id}_S):\ \mathsf{S}T\to\Gamma$是一个同构，所以 $\mathsf{S}T\doteq\Gamma$。 □

现在可以看出，为什么单图要求边具有序数长度：边 s 的长度是 Ω_s的基数，也就是定义域排序为 s的算子名称的数量，而图结构并未对这个基数加以限制。双射 ν_s 为集合 Ω_s提供了线性序。由于 $T(s)$ 取决于 ν_s，使得 S $T \simeq \Gamma$成立的单图 T可能并不唯一，尽管 S 在对象上是单射，下面将对此进行说明。

定理 6.4. S 是从 Monogr 到 GrStruct 的同构稠密嵌入。

证明。由引理 6.3 可知，S 是同构稠密的，这显然成立，因为 S$T \simeq \Gamma$蕴含 S$T \simeq \Gamma$。假设 S$T =$ST'，则 E$T =$ET'且 $\Omega_T = \Omega_{T'}$，因此$|T(e)| = |T'(e)|$对所有 $e \in$ET都成立，并且 $T(e)_\iota = (\mathrm{S}T([\![e{\cdot}\iota]\!]))_1 = (\mathrm{S}T'([\![e{\cdot}\iota]\!]))_1 = T'(e)_\iota$对所有 $\iota < |e|$都成立，故 $T = T'$。□

因此显然，若 S 是满的，它就会是范畴等价，但事实并非如此，下面我们通过图来说明。

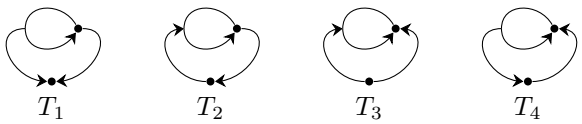
例 6.5. 我们考虑图结构 Γ_{g}。我们有 $\Omega_{nodes} = \varnothing$和 $\Omega_{edges} = \{src, tgt\}$，因此 $\lambda_{edges} = 2$。令 $\nu_{edges} : 2 \to \Omega_{edges}$ 为由 $\nu_{edges} : 0 \mapsto src, 1 \mapsto tgt$定义的双射，相应的单图为 $\mathrm{T_g} \xlongequal{\text{定义}} \{(nodes, \varepsilon), (edges, nodes\,nodes)\}$，我们很容易验证 $\mathrm{ST_g} \simeq \Gamma_{\mathrm{g}}$。然而，$\mathrm{T_g}$ 唯一的自同构是 $1_{\mathrm{T_g}}$，而 Γ_{g} 有一个非平凡自同构 $m = ((src\ tgt), \mathrm{Id}_{\{nodes,\ edges\}})$（采用循环记法），因此 S 不是态射满射。

这个自同构反映了这样一个事实：图结构并未规定其算子名称之间的顺序。将边定向为从 src 指向 tgt 的箭头，还是反过来，只是一种约定；这一点体现在例 6.5 中对 ν_{edges} 的选择上。这与单图不同：单图中的边由序数固有地定向；也与图的结构不同：图的结构中源函数排在首位。从 Monogr 到 GrStruct 的翻译必然会丢失边的方向，因此这两个范畴并不等价。

例 6.6。来自 *[2]* 的 E-图签名 Γ_{e} 有五种类型 $edges$、$nv\text{-}edges$、$ev\text{-}edges$、$nodes$、$values$，以及六个算子名称 src_e、tgt_e、src_{nv}、tgt_{nv}、src_{ev}、tgt_{ev}，其定义域与值域类型如第 1 节中所定义。我们有 $\Omega_{nodes} = \Omega_{values} = \varnothing$、$\Omega_{edges} = \{src_e, tgt_e\}$、$\Omega_{nv\text{-}edges} = \{src_{nv}, tgt_{nv}\}$ 和 $\Omega_{ev\text{-}edges} = \{src_{ev}, tgt_{ev}\}$。存在四个可能的单图 T，使得 S$T \simeq \Gamma_{\mathrm{e}}$ 由下式给出

$T(nodes) = T(values) = \varepsilon$、 $T(nv\text{-}edges) = nodes\,values$或 $values\,nodes$、
$T(edges) = nodes\,nodes$、 $T(ev\text{-}edges) = edges\,values$或 $values\,edges$.

下方展示了这四个单图。



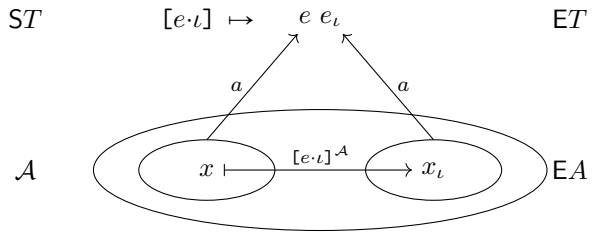


图 1：ST-代数 $\mathcal{A} = \mathsf{A}_T a$，其中 $a\colon\ A \to T$

语法所指示的类型（并且与 *[2]* 中 E-图的图示一致）当然是 T_1。

S 到定义 3.5 中的范畴的限制，是映入 GrStruct 的满子范畴的同构稠密嵌入，这些满子范畴很容易定义。O-单图对应于满足如下条件的图结构 $\Gamma\colon$ $\Omega \to S^{<\omega}$ 对所有 $s \in S$，都有 $|\Omega_s| \in O$；标准单图对应于对所有 $o \in \Omega$，都有 $\Omega_{\mathrm{Rng}(o)} = \varnothing$。有限单图对应于有限的 S，因此 FMonogr 对应于有限签名。

现在我们可以准确描述如何将一个通过 a 以 T 为类型的单图 $A\colon$ $A \to T$，读作一个 ST-代数 $\mathcal{A}$。如上所述，A 的每条边 x 都由 $a(x) \in \mathsf{E}T$ 定型，因此应解释为 $\mathcal{A}_{a(x)}$ 的一个元素，所以 $\mathcal{A}_{a(x)}$ 是所有由 $a(x)$ 定型的边 $x \in \mathsf{E}A$ 的集合。然后，对于每个 $\iota < |x| = |a(x)|$，x 的 ι^{th} 相邻边 x_ι 是 x 在此类边对应的 ι^{th} 算子名称下的像，即 $[a(x){\cdot}\iota]$。注意，该像的排序为 $a(x_\iota) = a(x)_\iota$，恰好是 ST 中算子名称 $[a(x){\cdot}\iota]$ 的值域排序（见定义 6.2），因此 $\mathcal{A}$ 确实是一个 ST-代数。这引出以下定义。

定义 6.7（函子 $\mathsf{A}_T\colon$ Monogr$\backslash T \to$ ST-代数）。给定一个单图 T，我们定义函数 A_T，它将 Monogr$\backslash T$ 中的每个对象 $a\colon\ A \to T$ 映射到由下式定义的 ST-代数 $\mathcal{A} = \mathsf{A}_T a$

- $\mathcal{A}_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^{-1}[e]$ *for all* $e \in \mathsf{E}T$, *and*
- $[e{\cdot}\iota]^{\mathcal{A}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_\iota$ *for all* $[e{\cdot}\iota] \in \Omega_T$ *and* $x \in \mathcal{A}_e$.

此外，A_T 还将每个态射 $f\colon\ a \to b$ 映射到从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B} = \mathsf{A}_T b$ 的 ST-同态 $\mathsf{A}_T f$，其中 $b\colon\ B \to T$，其定义如下

$$(\mathsf{A}_T f)_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} f|^{\mathcal{B}_e}_{\mathcal{A}_e} \text{ for all } e \in \mathsf{E}T.$$

ST-代数 $\mathcal{A}$ 可如图 1 所示。载体集 $\mathcal{A}_e$ 构成 EA的一个划分。由于 $f\colon a \to b$（图中未示出）是一个函数 $f\colon \mathsf{E}A \to \mathsf{E}B$，使得 $b \circ f = a$，因此 $b \circ f[\mathcal{A}_e] = a[a^{-1}[e]] \subseteq \{e\}$，进而 $f[\mathcal{A}_e] \subseteq b^{-1}[e] = \mathcal{B}_e$，所以 $f|^{\mathcal{B}_e}_{\mathcal{A}_e}$ 是良定义的。我们还看到 $h = \mathsf{A}_T f$ 是一个 ST-同态

从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$，因为对于每个算子名称 $[e\cdot\iota]\in\Omega_T$，我们都有 $\mathrm{Dom}([e\cdot\iota])=e$、$\mathrm{Rng}([e\cdot\iota])=e_\iota$ 以及

$$[e\cdot\iota]^{\mathcal{B}}\circ h_e(x)=[e\cdot\iota]^{\mathcal{B}}(f(x))=f(x)_\iota=f(x_\iota)=f([e\cdot\iota]^{\mathcal{A}}(x))=h_{e_\iota}\circ[e\cdot\iota]^{\mathcal{A}}(x)$$

对所有 $x\in\mathcal{A}_e$。由定义 6.7 显然可知，$\mathbf{A}_T$ 保留恒等态射和态射复合，因此确实是一个函子。

定理 6.8。对于每个单图 T，$\mathbf{A}_T$ 是一个等价。

证明。令 $a:\ A\to T$，以及 $b:\ B\to T$ 为 $\mathbf{Monogr}\backslash T$ 中的对象，并令 $\mathcal{A}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{A}_Ta$，$\mathcal{B}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{A}_Tb$。显然，$\mathbf{A}_T$ 是忠实的。

$\mathbf{A}_T$ 是满的。对于任意 $\mathbf{S}T$-同态 $h:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，令 $f:\ \mathbf{E}A\to\mathbf{E}B$ 为由 $f(x)\overset{\text{def}}{=}h_{a(x)}(x)$ 定义的函数，对所有 $x\in\mathbf{E}A$均成立。令 $e=a(x)$，使得 $x\in\mathcal{A}_e$，因为 $h_e(x)\in\mathcal{B}_e=b^{-1}[e]$ 于是 $b\circ f(x)=b(h_e(x))=e$，从而 $b\circ f=a$和$|f(x)|=|b(f(x))|=|a(x)|=|x|$。对于所有 $\iota<|x|$，我们有 $a(x_\iota)=a(x)_\iota=e_\iota$，并且由于 h 是一个 $\mathbf{S}T$- 同态，因此

$$f(x_\iota)=h_{e_\iota}([e\cdot\iota]^{\mathcal{A}}(x))=[e\cdot\iota]^{\mathcal{B}}(h_e(x))=f(x)_\iota$$

因此 $f:\ a\to b$是一个态射。由于对所有$e\in\mathbf{E}T$和所有 $x\in\mathcal{A}_e$，都有 $(\mathbf{A}_Tf)_e(x)=f|^{\mathcal{B}_e}_{\mathcal{A}_e}(x)=h_e(x)$，所以 $\mathbf{A}_Tf=h$。

$\mathbf{A}_T$ 是同构稠密的。对于任意 $\mathbf{S}T$-代数 $\mathcal{C}$，令

$$\mathbf{E}C\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{e\in\mathbf{E}T}\mathcal{C}_e\times\{e\}\ \text{ and }\ (C(x,e))_\iota\overset{\text{def}}{=}([e\cdot\iota]^{\mathcal{C}}(x),e_\iota)$$

对所有 $(x、e)\in\mathbf{E}C$ 和 $\iota<|e|$。由于 $\mathrm{Rng}([e\cdot\iota])=e_\iota$，所以 $[e\cdot\iota]^{\mathcal{C}}(x)\in\mathcal{C}_{e_\iota}$，因此 $(C(x、e))_\iota\in\mathbf{E}C$，从而 C 是一个满足 $|(x、e)|=|e|$的单图。令$c:\ \mathbf{E}C\to\mathbf{E}T$由 $c(x、e)\overset{\text{定义}}{=}e$定义，我们有

$$c((x,e)_\iota)=c([e\cdot\iota]^{\mathcal{C}}(x),e_\iota)=e_\iota=(c(x,e))_\iota,$$

因此 $c:\ C\to T$是一个态射。对于所有 $e\in\mathbf{E}T$，我们有 $(\mathbf{A}_Tc)_e=c^{-1}[e]=\mathcal{C}_e\times\{e\}$，并令 $h_e:\ \mathcal{C}_e\to(\mathbf{A}_Tc)_e$由 $h_e(x)\overset{\text{定义}}{=}(x、e)$对所有 $x\in\mathcal{C}_e$定义。函数 h_e 是双射，并且 $h\overset{\text{定义}}{=}(h_e)_{e\in\mathbf{E}T}$是一个 $\mathbf{S}T$-同态，因为

$$[e\cdot\iota]^{\mathbf{A}_Tc}\circ h_e(x)=[e\cdot\iota]^{\mathbf{A}_Tc}(x,e)=(x,e)_\iota=([e\cdot\iota]^{\mathcal{C}}(x),e_\iota)=h_{e_\iota}\circ[e\cdot\iota]^{\mathcal{C}}(x),$$

对于所有 $[e\cdot\iota]\in\Omega_T$和 $x\in\mathcal{C}_e$，因此 $\mathcal{C}\simeq\mathbf{A}_Tc$。 □

容易看出，对于任意两个签名 Σ 和 Σ'，若 $\Sigma\simeq\Sigma'$ 则Σ-Alg $\simeq\Sigma'$-Alg。由此可得，所有图结构代数都可以表示为带类型单图。

推论 6.9. 对于每个图结构 Γ，都存在一个单图 T，使得 Γ-Alg $\approx\mathbf{Monogr}\backslash T$。

证明。由引理 6.3，存在 T，使得 $\Gamma\simeq\mathbf{S}T$，因此 $\mathbf{Monogr}\backslash T\approx\mathbf{S}T$-Alg $\simeq\Gamma$-Alg。 □

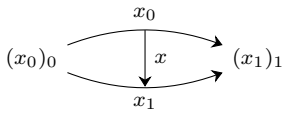
例 6.10。如下的 *[10],* 8-图 $\mathcal{G}$ 由一个集合图表给出

$$\mathcal{G}_0 \underset{t_0}{\overset{s_0}{\leftleftarrows}} \mathcal{G}_1 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\leftleftarrows}} \cdots \underset{t_{n-1}}{\overset{s_{n-1}}{\leftleftarrows}} \mathcal{G}_n \underset{t_n}{\overset{s_n}{\leftleftarrows}} \mathcal{G}_{n+1} \underset{t_{n+1}}{\overset{s_{n+1}}{\leftleftarrows}} \cdots$$

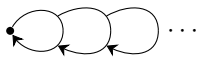
使得对于每个 $n \in \omega$，以下等式成立：

$$s_n \circ s_{n+1} = s_n \circ t_{n+1}, \qquad t_n \circ s_{n+1} = t_n \circ t_{n+1}.$$

这意味着， $\mathcal{G}_{n+2}$ 中的每个元素 x 都是一条边，其源 x_0 和目标x_1 都是 $\mathcal{G}_n$ 中的边，且彼此平行，也就是说，它们具有相同的源 $(x_0)_0 = (x_1)_0$和相同的目标 $(x_0)_1 = (x_1)_1$。图示如下：



这称为球状条件。我们考虑由 $\mathbf{ET}_\infty = \omega$、$\mathbf{T}_\infty(0) = \varepsilon$ 和 $\mathbf{T}_\infty(n+1) = n\,n$ 对所有 $n \in \omega$定义的类型单图 $\mathbf{T}_\infty$。这是一个无限的非标准 {0、 2}-单图，可图示为



我们将带类型单图 g 上的球状条件 $G \to \mathbf{T}_\infty$ 表示为：

$$\textit{for all } x \in \mathsf{E}G,\ \textit{if } g(x) \geqslant 2 \textit{ then } G(x_0) = G(x_1).$$

我们很快就能验证，这等价于 $\mathbf{ST}_\infty$-代数 $\mathcal{G} = \mathbf{A}_{\mathbf{T}_\infty} g$上的球状条件。$\mathbf{ST}_\infty$ 的种类集为 ω ，其算子名称为$[\![n+1{\cdot}0]\!]$和 $[\![n+1{\cdot}1]\!]$，定义域排序为 $n+1$，值域排序为 n，对所有 $n \in \omega$均如此。我们令 $s_n \overset{\text{定义}}{=} [\![n+1{\cdot}0]\!]^{\mathcal{G}}$ 和 $t_n \overset{\text{定义}}{=} [\![n+1{\cdot}1]\!]^{\mathcal{G}}$，它们是从 $\mathcal{G}_{n+1}$ 到$\mathcal{G}_n$ 的函数，如 8-图示意图所示。

根据定义 6.7，对于所有 $x \in \mathcal{G}_{n+2} = g^{-1}[n+2]$ 以及所有 i、 $j \in 2$，我们有

$$[\![n+1{\cdot}j]\!]^{\mathcal{G}} \circ [\![n+2{\cdot}i]\!]^{\mathcal{G}}(x) = [\![n+1{\cdot}j]\!]^{\mathcal{G}}(x_i) = (x_i)_j$$

因此

$$\begin{aligned} G(x_0) = G(x_1)\ &\textit{iff } (x_0)_0 = (x_1)_0 \textit{ and } (x_0)_1 = (x_1)_1 \\ &\textit{iff } [\![n+1{\cdot}0]\!]^{\mathcal{G}} \circ [\![n+2{\cdot}0]\!]^{\mathcal{G}}(x) = [\![n+1{\cdot}0]\!]^{\mathcal{G}} \circ [\![n+2{\cdot}1]\!]^{\mathcal{G}}(x) \\ &\quad \textit{and } [\![n+1{\cdot}1]\!]^{\mathcal{G}} \circ [\![n+2{\cdot}0]\!]^{\mathcal{G}}(x) = [\![n+1{\cdot}1]\!]^{\mathcal{G}} \circ [\![n+2{\cdot}1]\!]^{\mathcal{G}}(x) \\ &\textit{iff } s_n \circ s_{n+1}(x) = s_n \circ t_{n+1}(x) \textit{ and } t_n \circ s_{n+1}(x) = t_n \circ t_{n+1}(x). \end{aligned}$$

例 6.11。超图的签名 Γ_{h} （见 *[3,* 例 3.*4]*）由类型集 $\mathbf{S}_{\mathrm{h}} \overset{\text{定义}}{=} \{V\} \cup \{H_{n,m} \mid n、\ m \in \omega\}$ 以及对所有 n、 $m \in \omega$ 定义

由 n 个算子名称 $src^n_{,\ i}{}^m$ 以及 m个算子名称 $tgt^n_{,\ j}{}^m$ 构成，其定义域排序为$H_{n,\ m}$，值域排序为 V，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $1 \leqslant j \leqslant m$。因此，有 $n+m$个定义域为 $H_{n,\ m}$的算子名称，以及从序数 $n+m$ 到该算子名称集合的 $(n+m)!$ 个双射。但由于它们都具有相同的值域排序 V，类型单图 $\mathrm{T_h}$ 不依赖于这些双射（每一对$(n、\ m)$各一个）。它由 $\mathrm{ET_h} \overset{定义}{=} \mathrm{S_h}$ 以及

$$\mathrm{T_h}(V) = \varepsilon$$
$$\mathrm{T_h}(H_{n,m}) = V\!\uparrow\!(n+m) \ for\ all\ n, m \in \omega.$$

这是一个标准的 ω-单图。显然，任何标准的 ω-单图都可以通过 $\mathrm{T_h}$ 赋予类型，尽管方式并不唯一。每条长度为 $l > 0$ 的边都可以赋予任意排序 $H_{n,\ m}$ 使得 $n+m=l$，而每个节点都可以赋予V（如果它不与任何边相邻，也可以赋予 $H_{0,\ 0}$）。每一种这样的类型赋予都对应于一个 $\mathrm{ST_h}$-代数，其对应关系为等价 $\mathrm{A}_{\mathrm{T_h}}$，进而对应于一个超图（一个 Γ_{h}-代数），因为 $\Gamma_{\mathrm{h}} \simeq \mathrm{ST_h}$。

但是，要确切知道哪个超图 $\mathcal{H}$ 对应于一个带类型单图，我们需要更加具体，因为 Γ_{h} 与 $\mathrm{ST_h}$之间存在无穷多个同构。自然同构源于显而易见的序 $src^n、\ {}_1{}^m < \cdots < src^n、\ {}_n{}^m < tgt^n、\ {}_1{}^m < \cdots < tgt^n、\ {}_m{}^m$，适用于所有 $n、\ m \in \omega$。在这一同构中，对于所有 $i < n+m$，典范算子名称 $[H_{n,m} \cdot i]$ 对应于$src^n、\ {}^m_{i+1}$（当 $i < n$时），而对应于 $tgt^n、\ {}^m_{i+1-n}$（当 $i \geqslant n$时）。因此，一条边 x，例如一条长度为 3 且赋予类型 $H_2、\ 1$ 的边，必须解释为一条超边 $x \in \mathcal{H}_{H_2、\ 1}$，其中 $(src^2、\ {}_1{}^1)^{\mathcal{H}}(x) = x_0、\ (src^2、\ {}_2{}^1)^{\mathcal{H}}(x) = x_1、\ (tgt^2、\ {}_1{}^1)^{\mathcal{H}}(x) = x_2$ 以及 $x_0、\ x_1、\ x_2 \in \mathcal{H}_V$。

本节的结果尤其适用于类型化图。容易看出，$\mathrm{S} \circ \mathrm{M}$ 是从 Graphs 到图结构全子范畴 $\Gamma:\ \Omega \to S^{<\omega}$ 的同构稠密嵌入，其中对每个算子名称 $o \in \Omega$，都有 $|\Omega_{\mathrm{Dom}(o)}| = 2$ 和 $\Omega_{\mathrm{Rng}(o)} = \varnothing$。因此，对每个这样的 Γ，都存在一个图 G，使得 $\mathrm{Graphs}\backslash G \approx \mathrm{Monogr}\backslash \mathrm{M}G \approx \Gamma\text{-}\mathrm{Alg}$。类型图 G 仅由其边的定向决定。

7 子单图与部分态射

文献 [3] 将图结构刻画为允许通过单推出方法变换相应代数的签名。该方法基于在偏同态范畴中构造推出；偏同态被定义为从其定义域代数的子代数出发的标准同态，正如偏函数是从其定义域的子集出发的标准函数一样（这里“定义域”一词取范畴论意义）。第 6 节的结果表明，单图也可以采用类似的方法。我们首先需要定义子单图，以及它们在态射下的（逆）像和态射对子单图的限制。

定义7.1（子单图及其像、限制态射）。单图 A 是单图 M 的子单图，当且仅当 $A \subseteq M$。对于任意

单图 N和态射 $f\colon M \to N$，令 $f(A)_{\text{定义}=} \{(f(x), N \circ f(x)) \mid x \in \mathbf{E}A\}$。对于任意子单图 $C \subseteq N$，令 $f^{-1}(C)_{\text{定义}=} \{(x, M(x)) \mid x \in f^{-1}[\mathbf{E}C]\}$。若 $f(A) \subseteq C$，令 $f|_A^C\colon A \to C$ 为底层函数是$f|_{\mathbf{E}A}^{\mathbf{E}C}$的态射。

后文中我们将不加明确引用地使用以下显然事实。 $f(A)$ 和 $f^{-1}(C)$ 分别是 N 和 M 的子单图。若A 和 B 是 M 的子单图，那么 $A \cup B$ 和 $A \cap B$也是。我们有 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$，因此 $A \subseteq B$蕴含 $f(A) \subseteq f(B)$。类似地，若 C和 D是 N的子单图，则有 $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$，且 $C \subseteq D$蕴含 $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$。我们还有 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$和$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(M)$。对于任意 g：若 $N \to P$且 E是 P的子单图，则$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$。若 $(A + B$，且 μ_1、$\mu_2)$是 $(A$、$B)$的余积，而C是 $A + B$的子单图，则$C = \mu_1^{-1}(C) + \mu_2^{-1}(C)$。

现在我们可以定义单图部分态射的概念，并采用一种特殊记号将它们与标准态射区分开来，同时定义它们的复合。

定义 7.2（单图部分态射范畴）。部分态射 $\lceil f \rceil\colon A \to B$ 是一个态射 $f\colon A' \to B$，其中 A' 是 A的子单图。 f 称为 $\lceil f \rceil$的底层态射。如果未另行指定 f 的定义域，我们记作 $\lceil f \rceil\colon A \hookleftarrow A' \to B$。如果指定了 f 的定义域 A'，但未指定 $\lceil f \rceil$ 的定义域，则假定二者相同，即$\lceil f \rceil\colon A' \hookleftarrow A' \to B$。对于任意 $\lceil g \rceil\colon B \hookleftarrow B' \to C$，我们将部分态射的复合定义为

$$\lceil g \rceil \circ \lceil f \rceil \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil g \circ f|_{f^{-1}(B')}^{B'} \right\rceil : A \hookleftarrow f^{-1}(B') \to C.$$

令 $\mathbf{Monogr}^{\mathbf{P}}$ 表示单图及其部分态射构成的范畴。令 $\mathbf{SMonogr}^{\mathbf{P}}$ 表示其由标准单图构成的全子范畴。对于任意序数集合 O，令 O-$\mathbf{Monogr}^{\mathbf{P}}$ （分别为 O-$\mathbf{SMonogr}^{\mathbf{P}}$）表示其由 O-单图（分别为标准 O-单图）构成的全子范畴。令 $\mathbf{FMonogr}^{\mathbf{P}}$ 表示其由有限 ω-单图构成的全子范畴。

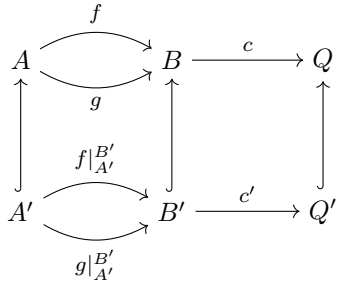
注意，$(f^{-1}(B'), f|_{f^{-1}(B')}^{B'}\colon f^{-1}(B') \to B', j'\colon f^{-1}(B') \hookrightarrow A')$是 $(j\colon B' \hookrightarrow B, f\colon A' \to B, B)$ 的拉回，因此是一个逆像（即沿单态射的拉回，见 [7]），由此很容易看出部分态射的复合是结合的，见 [11]。（但请注意，$\mathbf{Monogr}^{\mathbf{P}}$ 并非 [11], 意义下的部分映射范畴，因为部分映射是模去 A'的同构变体后定义的。）

现在我们来看看这些逆像如何帮助我们表述一个充分条件，以确保余等化子的限制仍然是余等化子。

引理 7.3（余等化子限制）。设 A' 和 B' 分别是 A和 B 的子单图，且 $f, g\colon A \to B$ 是满足以下条件的平行态射：

$$f^{-1}(B') = A' = g^{-1}(B'),$$

若 (Q,c) 是 (f,g) 的余等化子，则 (Q',c') 是 $(f|_{A'}^{B'}, g|_{A'}^{B'})$ 的余等化子，其中 $Q'=c(B')$, $c'=c|_{B'}^{Q'}$ 和 $c^{-1}(Q')=B'$。



证明。我们不妨假设 (Q,c) 是引理 4.2 中构造的 (f,g) 的余等化子，其中 $\sim$ 是由 $R=\{(f(x)\ g(x))\mid x\in \mathsf{E}A\}$ 生成的等价关系；并令 (Q',c') 为 $(f|_{A'}^{B'}, g|_{A'}^{B'})$ 的余等化子，其构造方式类似，等价关系 $\approx$ 由 $R'=\{(f|_{A'}^{B'}(x), g|_{A'}^{B'}(x))\mid x\in \mathsf{E}A'\}$ 生成。根据 f 和 g 的性质，我们有

$$f(x)\in \mathsf{E}B' \text{ iff } x\in f^{-1}[\mathsf{E}B'] \text{ iff } x\in \mathsf{E}A' \text{ iff } x\in g^{-1}[\mathsf{E}B'] \text{ iff } g(x)\in \mathsf{E}B'$$

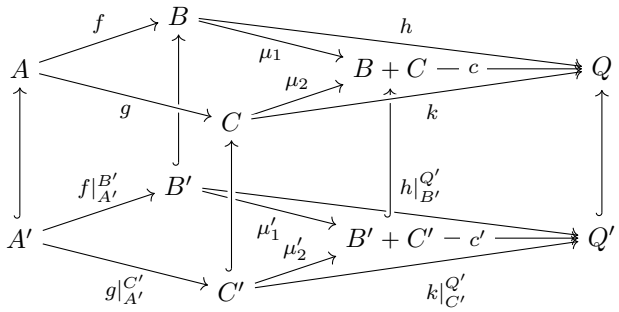
对于所有 $x\in \mathsf{E}A$ 都成立，因此对于所有 $y,y'\in \mathsf{E}B$，我们有 $y\ R'\ y'$ 当且仅当 $y\ R\ y'$，且 y,y' 中至少一个属于 $\mathsf{E}B'$。通过简单归纳可知，$y\approx y'$ 当且仅当$y\sim y'$，且 $y'\in \mathsf{E}B'$，因此 $\approx$-类就是 $\mathsf{E}B'$ 中元素的 $\sim$-类，即 $\mathsf{E}Q'=c[\mathsf{E}B']$。显然可得 $Q'=c(B')$, $c'=c|_{B'}^{Q'}$ 和$c^{-1}(Q')=B'$。 □

因此很容易得到关于推出的类似结果。

引理 7.4（推出限制）。设 A'、B'、C' 分别是 A、B、C 的子单图，且 $f: A\to B$、$g: A\to C$ 是满足以下条件的态射:

$$f^{-1}(B')=A'=g^{-1}(C'),$$

若 (h,k,Q) 是 (A,f,g)的推出，令 $Q'=h(B')\cup k(C')$, $h^{-1}(Q')=B'$和 $k^{-1}(Q')=C'$，则 $(h|_{B'}^{Q'}, k|_{C'}^{Q'}, Q')$ 是 $(A', f|_{A'}^{B'}, g|_{A'}^{C'})$的推出。



证明。我们不妨假设 (h,k,Q) 是通过推出的标准构造得到的，即 $h=c\circ\mu_1$ 和 $k=c\circ\mu_2$ 中 (Q,c) 是 $(\mu_1\circ f,\mu_2\circ g)$ 的余等化子，而 $(B+C,\mu_1,\mu_2)$ 是 (B,C) 的余积。令 $(B'+C',\mu_1',\mu_2')$ 为 (B',C') 的余积，则显然 $B'+C'\subseteq B+C$，$\mu_1'=\mu_1|_{B'}^{B'+C'}$ 和 $\mu_2'=\mu_2|_{C'}^{B'+C'}$。由于

$$(\mu_1\circ f)^{-1}(B'+C')=f^{-1}(B')=A'=g^{-1}(C')=(\mu_2\circ g)^{-1}(B'+C')$$

于是由引理 7.3 $(Q',\ c')$ 是.....的余等化子

$$((\mu_1\circ f)|_{A'}^{B'+C'},(\mu_2\circ g)|_{A'}^{B'+C'})=(\mu_1'\circ f|_{A'}^{B'},\mu_2'\circ g|_{A'}^{C'})$$

其中 $Q'=c(B'+C')$、$c'=c|_{B'+C'}^{Q'}$ 和 $c^{-1}(Q')=B'+C'$。因此我们有 $h^{-1}(Q')=(c\circ\mu_1)^{-1}(Q')=\mu_1^{-1}(B'+C')=B'$，类似地有 $k^{-1}(Q')=C'$。我们还有 $h|_{B'}^{Q'}=(c\circ\mu_1)|_{B'}^{Q'}=c'\circ\mu_1'$ 和 $k|_{C'}^{Q'}=(c\circ\mu_2)|_{C'}^{Q'}=c'\circ\mu_2'$，因此 $(h|_{B'}^{Q'}$、$k|_{C'}^{Q'}$、$Q')$ 是 $(A'$、$f|_{A'}^{B'}$、$g|_{A'}^{B'})$ 的典范推出，从而 $Q'=h|_{B'}^{Q'}(B')\cup k|_{C'}^{Q'}(C')=h(B')\cup k(C')$。 □

现在我们可以证明，单图的部分态射范畴存在推出。以下构造受 [3, 构造 2.6 的启发；定理 2.7] 不过，证明中使用了推出限制。

定理 7.5. 定义 7.2 中的范畴存在推出。

证明. 令 $\lceil f\rceil\colon A\hookleftarrow A_1\to B$ 和 $\lceil g\rceil\colon A\hookleftarrow A_2\to C$。满足 $f^{-1}(f(J))=J$ 和 $g^{-1}(g(J))=J$ 的子单图 $J\subseteq A_1\cap A_2$ 的集合包含 $\varnothing$，且对并集封闭，因此有一个最大元素，记作 I。此外，满足 $f^{-1}(X)\subseteq I$ 的最大子单图 $X\subseteq B$ 也存在，因此它必然大于 $f(I)$，即我们有 $f(I)\subseteq X$，从而 $f^{-1}(f(I))\subseteq f^{-1}(X)$，并由此得到 $f^{-1}(X)=I$。同理，满足 $g^{-1}(Y)\subseteq I$ 的最大子单图 $Y\subseteq C$ 存在，因此 $g(I)\subseteq Y$ 且 $g^{-1}(Y)=I$。

设 $f'=f|_I^X$, $g'=g|_I^Y$和 (h,k,Q) 是 Monogr 中 (I,f',g') 的推出。我们断言，$(\lceil h\rceil,\lceil k\rceil,Q)$ 是 $\mathbf{Monogr}^{\mathbf{P}}$ 中 $(A,\lceil f\rceil,\lceil g\rceil)$ 的推出，其中显然 $\lceil h\rceil\colon B\hookleftarrow X\to Q$ 且 $\lceil k\rceil\colon C\hookleftarrow Y\to Q$。我们首先看到

$$\lceil h\rceil\circ\lceil f\rceil=\left\lceil h\circ f|_{f^{-1}(X)}^{X}\right\rceil=\lceil h\circ f'\rceil=\lceil k\circ g'\rceil=\left\lceil k\circ g|_{g^{-1}(Y)}^{Y}\right\rceil=\lceil k\rceil\circ\lceil g\rceil.$$

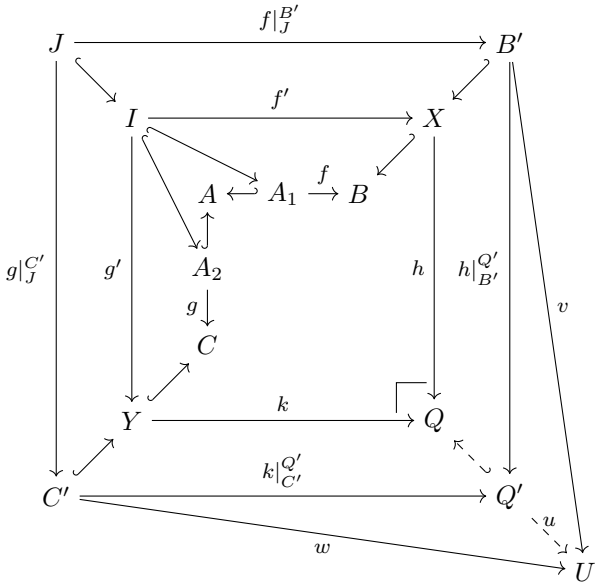
现在考虑任意一对部分态射 $\lceil v\rceil\colon B\hookleftarrow B'\to U$和$\lceil w\rceil\colon C\hookleftarrow C'\to U$，使得 $\lceil v\rceil\circ\lceil f\rceil=\lceil w\rceil\circ\lceil g\rceil$，因此 $v\circ f|_J^{B'}=w\circ g|_J^{C'}$，其中$J_{\text{定义}}=f^{-1}(B')=g^{-1}(C')$。由于 $f(J)=f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$，所以 $J\subseteq f^{-1}(f(J))\subseteq f^{-1}(B')=J$，因此 $f^{-1}(f(J))=J$；类似地，$g^{-1}(g(J))=J$，从而 $J\subseteq I$。这可以写成 $f^{-1}(B')\subseteq I$，因此推出 $B'\subseteq X$；类似地，$C'\subseteq Y$，因此 $f'^{-1}(B')=J=g'^{-1}(C')$。

因此，我们可以应用引理 7.4，得到 $(h|_{B'}^{Q'},k|_{C'}^{Q'},Q')$ 是 $(J,f'|_J^{B'},g'|_J^{C'})$ 的推出，其中 $Q'=h(B')\cup k(C')$, $h^{-1}(Q')=B'$ 且 $k^{-1}(Q')=C'$。由于 $v\circ f'|_J^{B'}=v\circ f|_J^{B'}=w\circ g|_J^{C'}=w\circ g'|_J^{C'}$，存在唯一的 $u\colon Q'\to U$

使得 $u \circ h|_{B'}^{Q'} = v$ 且 $w = u \circ k|_{C'}^{Q'}$。因此，我们有一个部分态射$\lceil u \rceil$：$Q \hookleftarrow Q' \to U$，使得

$$\lceil u \rceil \circ \lceil h \rceil = \left\lceil u \circ h|_{h^{-1}(Q')}^{Q'} \right\rceil = \left\lceil u \circ h|_{B'}^{Q'} \right\rceil = \lceil v \rceil$$

类似地，$\lceil u \rceil \circ \lceil k \rceil = \lceil w \rceil$。



假设存在一个 $\lceil u' \rceil$：$Q \hookleftarrow D \to U$，使得 $\lceil u' \rceil \circ \lceil h \rceil = \lceil v \rceil$ 且 $\lceil u' \rceil \circ \lceil k \rceil = \lceil w \rceil$，那么 $u' \circ h|_{h^{-1}(D)}^{D} = v$，因此 $h^{-1}(D) = B'$，类似地 $k^{-1}(D) = C'$。由于 $D \subseteq Q = h(X) \cup k(Y)$，于是

$$D = (D \cap h(X)) \cup (D \cap k(Y)) = h(h^{-1}(D)) \cup k(k^{-1}(D)) = h(B') \cup k(C') = Q'$$

根据 u的唯一性，我们得到 $\lceil u' \rceil = \lceil u \rceil$。

若 B 和 C 是有限的（分别为标准的、 O-Monogr 单图），那么 X和 Y也如此，因此根据定理 4.4， Q 也如此。 □

下面展示了这一构造的一个重要特征。

例 7.6。假设存在边 x，其属于 $A_1 \cap A_2$ 和 $y \in \mathrm{E}A_2 \backslash \mathrm{E}A_1$，使得 $g(x) = g(y)$。如果 x 是 $I = g^{-1}(g(I))$ 的一条边，那么 y 也应是其中一条边，但由于 $I \subseteq A_1 \cap A_2$，这是不可能的。因此， x 不是 $I = f^{-1}(X)$ 的一条边，从而 $f(x) \notin \mathrm{E}X$。由于 y 不是 $I = g^{-1}(Y)$ 的一条边，同理可得 $g(x) = g(y) \notin \mathrm{E}Y$。这意味着，尽管 x 通过 f 和 g 都有像，但这些像没有一个能通过 h 或 k 在 Q 中得到像，也就是说，它们都从推出中被 “ 删除 ” 了。

将每个单图（例如 A）替换为具有固定类型 T 的带类型单图（例如 a）：$A \to T$，便可以复现本节的结果。但这样一来，诸如 $A \subseteq B$ 的表达式就会被替换为 $a \subseteq b$，这应解释为 $A \subseteq B$ 和 $a = b|_A$，因此 $\mathsf{A}_T a$ 就是 $\mathsf{A}_T b$ 的一个子代数。通过这种方式，关于偏同态范畴中 [3] 的结果可以由推论 6.9 推导出来。但无法直接从定理 7.5 得到这些结果。

8 单图的代数变换

基于规则的图变换被视为用子图（规则左侧的像）替换子图（规则右侧的像）。替换本身被设计为先执行删除（节点或边），再执行添加的操作。后一操作可以方便地表示为推出，尤其是在现有节点之间添加边时（否则余积就足够了）。

然而，删除操作在范畴论中更难表示，因为范畴中没有补的概念。这是代数图变换领域的核心活跃议题，已有许多定义被提出，见 [12, 13, 14, 15]。最常见且自然的定义称为双推出方法 [16, 17, 18], ，它假设删除操作是添加操作的逆操作。

更确切地说，在以下推出图中

$$\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{\ l\ } & K \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ M & \xleftarrow[\ f\ ]{} & D \end{array}$$

我们将 M 理解为按照 l 和 k所规定的方式向 D 添加边的结果。 K 中边的像同时存在于 D 和 L中，因此也存在于 M中，且不会重复（因为 $f \circ k = m \circ l$）。因此，添加到 D 中的边，是 L 中未出现在 $l(K)$里的边经 m 映射所得的像。于是，我们可以逆转这一操作，将 D 理解为从 M中移除这些边的结果。单图 M 以及态射 m、 l 便是该操作的输入，而单图 D 以及态射 k、 f 则是其输出。当然，问题在于推出操作通常不是双射，因此并非总能求逆。我们首先分析 D存在的条件。

定义 8.1（推出补、粘合条件）。态射 $l\colon\ K \to L$ 和 $m\colon\ L \to M$ 的推出补，是指一个单图 D 以及一对态射 $k\colon\ K \to D$和 $f\colon\ D \to M$，使得 $(m$、 f、 $M)$ 是$(K$、 l、 $k)$的推出。

态射 $l\colon\ K \to L$ 和 $m\colon\ L \to M$ 满足粘合条件（简称 GC$(l$、 $m)$），如果对于 $L' = \mathrm{E}L \backslash l[\mathrm{E}K]$,

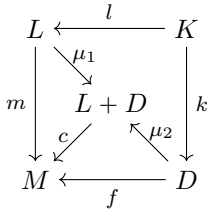
（1）对于所有 x、 $x' \in \mathrm{E}L$、 $m(x) = m(x')$ 并蕴含 $x = x'$，以及

(2) 对所有 $e, e' \in \mathrm{E}M$, $e \mid M(e')$ 和 $e \in m[L']$，均可推出 $e' \in m[L']$。

要从 M 中移除以得到 D 的 M 的边，是 $m[L']$ 的元素。若 $m(x)$ 属于 M，且满足$x \in L'$，则可称该边标记为待移除；若满足 $x \in l[\mathrm{E}K]$，则称其标记为待保留。粘合条件的条件 (1) 指出，将 m 限制到 $m^{-1}[m[L']]$ 后应为单射；换言之，只有当一条边被标记为待移除且未被标记为待保留时，才能删除它。条件 (2) 指出，只有当与一条边相邻的所有边也都被删除时，才能删除该边（否则这些边就会与一条不存在的边相邻）。显然，将此粘合条件应用于标准的 $\{0, 2\}$-单图时，它会化为图上已知的标准条件。现在我们证明，该条件刻画了推出补存在的情形（注意，假设 l 是单射并不成立）。

引理 8.2. 态射 $l : K \to L$ 和 $m : L \to M$ 存在推出补，当且仅当它们满足粘合条件。

证明。必要条件。我们不失一般性地假设，(K, l, k) 的推出 (m, f, M) 是通过典范构造得到的，即令 $(L + D, \mu_1, \mu_2)$ 为 $(L, D), (M, c)$ 的余积，bet $(\mu_1 \circ l, \mu_2 \circ k), m = c \circ \mu_1$ 和 $f = c \circ \mu_2$ 的余等化子。因此，$\mathrm{E}M$ 是 $\mathrm{E}L + \mathrm{E}D$ 按由 $R = \{(\mu_1 \circ l(z), \mu_2 \circ k(z)) \mid z \in \mathrm{E}K\}$ 生成的等价关系 $\sim$ 取商所得。令 $L' = \mathrm{E}L \backslash l[\mathrm{E}K]$，我们先证明 (1)，然后证明 (2)。



对于所有 $x, x' \in \mathrm{E}L$，若 $x \in L'$，则 $x \notin l[\mathrm{E}K]$，因此 $\mu_1(x)$ 不与任何元素通过 R 相关联，故在其 $\sim$-类中是孤立的。因此，[2] 若 $m(x) = m(x')$，则 $\mu_1(x) \sim \mu_1(x')$，从而 $x = x'$。

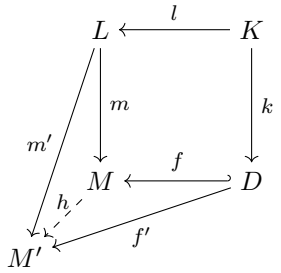
对于所有满足 $e \mid M(e')$ 和 $e \in m[L']$ 的 $e, e' \in \mathrm{E}M$，令 $x \in L'$ 满足 $e = m(x)$。假设对于某个 $y' \in \mathrm{E}D$，有 $e' = f(y')$，则 $M(e') = f^{<\alpha} \circ D(y')$，因此存在一个 $y \mid D(y')$ 使得 $e = f(y)$，于是 $m(x) \in f[\mathrm{E}D]$，这与注释 2 矛盾。由于 $M = f(D) \cup m(L)$，必定存在一个 $x' \in \mathrm{E}L$，使得 $e' = m(x')$。现在假设对于某个 $z \in \mathrm{E}K$，有 $x' = l(z)$，则 $e' = m(l(z)) = f(k(z)) \in f[\mathrm{E}D]$，而我们已经看到这是不可能的。因此 $x' \notin l[\mathrm{E}K]$，从而 $e' \in m[L']$。

[2] 另一个推论是，$\mu_1(x)$ 不与 $\mu_2[\mathrm{E}D]$ 中的任何元素通过 $\sim$ 相关联，因此 $m(x) \notin f[\mathrm{E}D]$。

充分条件。假设 (1) 和 (2) 成立，令 α 为 M 的一个序数，$\mathrm{E}D \overset{\text{定义}}{=} \mathrm{E}M \backslash m[L']$ 且 $D(e) \overset{\text{定义}}{=} M(e)$，对所有 $e \in \mathrm{E}D$ 均成立；由 (2)，这是一个 ED-序列，因此 D 是 M 的子单图，且典范单射 $f\colon D \hookrightarrow M$ 是一个态射。由 (1)，我们有 $m[L'] \cap m \circ l[\mathrm{E}K] = \varnothing$，因此 $m \circ l[\mathrm{E}K] \subseteq \mathrm{E}D$，令 $k \overset{\text{定义}}{=} (m \circ l)|^{\mathrm{E}D}_{\mathrm{E}K}$，使得 $f \circ k = m \circ l$。我们有

$$k^{<\alpha} \circ K = m^{<\alpha} \circ l^{<\alpha} \circ K = m^{<\alpha} \circ L \circ l = M \circ m \circ l = D \circ k$$

因此，$k\colon K \to D$ 是一个态射。



为了证明 (m, f, M) 是 (K, l, k)的一个推出，令 $m'\colon L \to M'$和$f'\colon D \to M'$为满足 $m' \circ l = f' \circ k$ 的态射。由于 $\mathrm{E}M = \mathrm{E}D \uplus m[L']$，我们定义 $h\colon \mathrm{E}M \to \mathrm{E}M'$ 如下：

$$h(e) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f'(e) & \text{if } e \in \mathrm{E}D \\ m'(x) & \text{if } x \in L' \text{ and } e = m(x) \end{cases}$$

因为由 (1) 可知 x 是唯一的。对于所有 $x \in \mathrm{E}L$，若 $x \in L'$，则 $h \circ m(x) = m'(x)$；否则存在一个 $z \in \mathrm{E}K$，使得 $x = l(z)$，于是

$$h \circ m(x) = h \circ m \circ l(z) = h \circ f \circ k(z) = f' \circ k(z) = m' \circ l(z) = m'(x),$$

因此 $h \circ m = m'$。显然，$h \circ f = f'$ 成立，且这两个等式唯一确定了 h。证明 $h\colon M \to M'$ 是一个态射是直接的。

□

注意，只要 M 是有限的，D 就是有限的。这证明了这一粘合条件在 FMonogr 中也成立；显然，对于任意序数集合 O，它在 SMonogr、O-Monogr 和 O-SMonogr 中也成立。因此，这一条件刻画了 D的存在性，但绝不能刻画其唯一性。

众所周知（而且很容易看出），在集合范畴中可以找到集合 D 不同构的推出补，因此单图也有这种情况（因为 Sets $\simeq$ 1-Monogr）。然而，对引理 8.2（必要条件）证明的分析表明，$f[\mathrm{E}D]$ 是不变量。

推论 8.3. 若 $D, k\colon K \to D, f\colon D \to M$ 是$l\colon K \to L, m\colon L \to M$的一个推出补，则 $f[\mathrm{E}D] = \mathrm{E}M \backslash m[L']$，其中 $L' = \mathrm{E}L \backslash l[\mathrm{E}K]$。

证明。由于 $m[\mathsf{E}L]\backslash(m\circ l)[\mathsf{E}K]\subseteq m[L']$，因此

$$m[\mathsf{E}L]\backslash m[L']\subseteq(m\circ l)[\mathsf{E}K]=(f\circ k)[\mathsf{E}K]\subseteq f[\mathsf{E}D].$$

根据推出的性质，我们有 $\mathsf{E}M=f[\mathsf{E}D]\cup m[\mathsf{E}L]$；根据注释 2，我们有$m[L']\cap f[\mathsf{E}D]=\varnothing$，因此

$$\mathsf{E}M\backslash m[L']=(f[\mathsf{E}D]\backslash m[L'])\cup(m[\mathsf{E}L]\backslash m[L'])=f[\mathsf{E}D].$$

□

确保 D （在同构意义下）唯一性的一种方法是假设l 是单射：这是定理 4.17 的一个众所周知的推论（见 [8]）。然而，分析引理 8.2（充分条件）证明中 D 的构造可知，我们总能将 D 构造为 M的子单图，因此不妨假设 f 是典范单射，从而避免对 l施加限制。因此，与标准定义相比，我们采用一种受限的双推出变换概念。

定义 8.4（跨度规则 $(l$、$r)$，匹配 m，关系 $\overset{(l\,r)}{\Longrightarrow}_{m,}$）。跨度规则是由态射 $l\colon K\to L$ 和 $r\colon K\to R$ 组成的一对 $(l$、$r)$，它们具有相同的定义域 K。对象 M中 $(l$、$r)$ 的匹配是一个态射 $m\colon L\to M$。对于任意对象 N，若存在一个双推出图，我们记作 $M\overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N$

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{\ l\ } & K & \xrightarrow{\ r\ } & R \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ M & \xleftarrow[\ f\ ]{} & D & \xrightarrow[\ g\ ]{} & N \end{array}$$

其中 f 是一个典范单射。

我们很容易看出，关系 $\overset{(l\,r)}{\Longrightarrow}_m$，在同构意义下是确定的。

推论 8.5。 $M\overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N$和 $M\overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N'$蕴含 $N\simeq N'$。

证明。我们有 m, l的两个推出补 $k\colon K\to D$, $f\colon D\hookrightarrow M$ 和$k'\colon K\to D'$, $f'\colon D'\hookrightarrow M$，因此根据推论 8.3

$$\mathsf{E}D=f[\mathsf{E}D]=\mathsf{E}M\backslash m[L']=f'[\mathsf{E}D']=\mathsf{E}D'$$

因此 $D=D'$, $f=f'$, $k=(f\circ k)|_K^D=(m\circ l)|_K^{D'}=(f'\circ k')|_K^{D'}=k'$，进而根据推出的一般性质可得 $N\simeq N'$。 □

由定理 4.4 以及引理 8.2 中 D 的构造可知，在定义 3.5 中的范畴里，存在一个 N，使得 $M\overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N$当且仅当 l 和 m 满足粘合条件。特别是，这意味着

只有在一条边 e 被明确标记为要删除时，才能将其从 M 中删除，也就是说，存在一条边 $x \in L'$ 使得 $m(x) = e$。所有未标记为要删除的边都保证会被保留。这种针对变换规则的保守语义极其安全，但要求采用一种可能略显繁琐的编程规范。

正如例 7.6 中所述，部分态射的推出可能会删除边。由于这类推出总是存在，因此可以用来定义不受粘合条件限制的变换。这就是单推出方法的核心思想，该方法由 [19] 发起，并在 [20, 3] 中得到全面发展。

定义 8.6（部分规则 $\lceil r \rceil$、关系 $\overset{\lceil r \rceil}{\Longrightarrow}_m$、规则 $\lceil l, r \rceil$）。部分规则是一个部分态射 $\lceil r \rceil \colon L \hookleftarrow K \to R$。单图 M 中 $\lceil r \rceil$ 的匹配是一个态射 $m \colon L \to M$。对于任意单图 N，如果存在部分态射 $\lceil g \rceil$ 和 $\lceil n \rceil$，使得 $(\lceil n \rceil, \lceil g \rceil, N)$ 是 $(L, \lceil r \rceil, \lceil m \rceil)$ 的一个推出，则记作 $M \overset{\lceil r \rceil}{\Longrightarrow}_m N$。

对于任意跨度规则 (l, r)，其中 $l \colon K \to L$, $r \colon K \to R$，我们关联一个部分规则 $\lceil l, r \rceil \overset{\text{定义}}{=} \lceil r' \rceil \colon L \hookleftarrow l(K) \to R'$，使得 (q, r', R') 是 (K, r, l') 的一个推出，其中 $l' \overset{\text{def}}{=} l\big|_K^{l(K)}$。

$$
\begin{array}{lccccc}
(l,r) & & L & \xleftarrow{\ l\ } & K & \xrightarrow{\ r\ } & R \\
 & {\scriptstyle 1_L}\big\downarrow & & {\scriptstyle l'}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow & \\
\lceil l,r \rceil & & L & \hookleftarrow & l(K) & \xrightarrow[r']{} & R'
\end{array}
$$

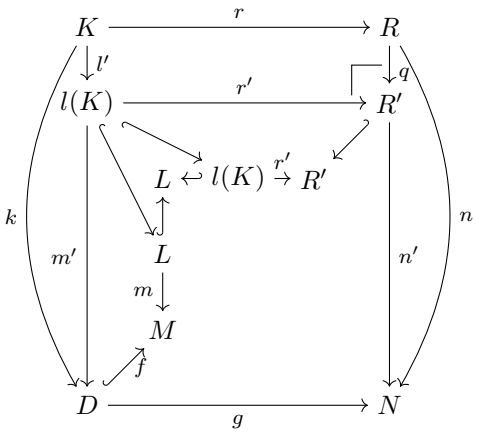
关系 $\overset{\lceil r \rceil}{\Longrightarrow}_m$ 在同构意义下也是确定的，因为 N 是通过推出得到的。显然，态射 m 是 M 中 (l, r) 的匹配，当且仅当它是 M 中 $\lceil l, r \rceil$ 的匹配。部分规则 $\lceil l, r \rceil$ 旨在执行与跨度规则 (l, r) 相同的变换。我们将证明，当粘合条件成立时，确实如此。

定理 8.7. 对于任意跨度规则 (l, r)、单图 M, N 以及 M 中 (l, r) 的匹配 m，有

$$M \overset{(l,r)}{\Longrightarrow}_m N \quad \textit{iff} \quad M \overset{\lceil l,r \rceil}{\Longrightarrow}_m N \ \textit{and}\ \mathrm{GC}(l, m).$$

证明。设 R', l', q 和 r' 如定义 8.6 所述。我们首先按照引理 7.5 中的构造，计算 $\lceil l, r \rceil$ 和 $\lceil m \rceil$ 的推出，并假设粘合条件 GC(l, m) 成立，且 $D \subseteq M$, $k \colon K \to D$, $f \colon D \hookrightarrow M$ 是 l, m 的推出补。

令 I 为满足 $r'^{-1}(r'(I)) = I$ 和 $m^{-1}(m(I)) = I$ 的 $l(K) \cap L$ 的最大子单图。由 GC(l, m) (1)，对于所有 $x \in \mathrm{E}L$，若 $m(x) \in m[l[\mathrm{E}K]]$，则 $x \notin L' = \mathrm{E}L \backslash l[\mathrm{E}K]$，即 $x \in l[\mathrm{E}K]$，因此 $m^{-1}(m(l(K))) \subseteq l(K)$；又由于反向包含总是成立，我们得到 $I = l(K)$。因此，满足 $r'^{-1}(X) \subseteq I$ 的最大单图 $X \subseteq R'$ 为 R'。



令 Y为满足 $m^{-1}(Y) \subseteq l(K)$的 M 的最大子单图，由此可得 $m^{-1}[\mathrm{E}Y] \cap L' = \varnothing$，因此 $\mathrm{E}Y \cap m[L'] = \varnothing$，并由推论 8.3 $Y \subseteq f(D) = D$。反过来，对于所有 $x \in m^{-1}[\mathrm{E}D] = m^{-1}[\mathrm{E}M \backslash m[L']]$，我们有 $m(x) \notin m[L']$，因此由 $\mathsf{GC}(l, m)$ (1) 可得 $x \notin L'$，进而 $x \in l[\mathrm{E}K]$，从而 $m^{-1}(D) \subseteq l(K)$。因此 $D \subseteq Y$，我们得到 $Y = D$。

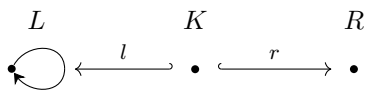
因此，$\lceil l、\ r \rceil$ 和 $\lceil m \rceil$ 的推出可由 r'和 $m' \overset{\text{def}}{=} m|^{D}_{l(K)}$的推出得到。此外，我们有 $m' \circ l' = (m \circ l)|^{D}_{K} = (f \circ k)|^{D}_{K} = k$。

充分条件。我们假设 $M \overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N$ 以及定义 8.4 中的图表。由引理 8.2 可得 $\mathsf{GC}(l, m)$。由上文可得 $(g \circ m') \circ l' = g \circ k = n \circ r$，且由于 (q, r', R') 是 (K, r, l') 的一个推出，因此存在唯一的 $n' :\ R' \to N$，使得 $n' \circ r' = g \circ m'$ 且 $n' \circ q = n$。由于 (n, g, N) 是 (K, r, k) 的一个推出，因此根据推出分解，(n', g, N) 是$(l(K), r', m')$的一个推出，从而 $M \overset{\lceil l,\ r \rceil}{\Longrightarrow}_m N$。

必要条件。根据 $\mathsf{GC}(l, m)$ 和引理 8.2，我们可以构造 l, m 的推出补 $D \subseteq M$, $k :\ K \to D$, $f :\ D \hookrightarrow M$。根据 $M \overset{\lceil l,\ r \rceil}{\Longrightarrow}_m N$ 以及上述内容，存在 $(l(K), r', m')$ 的推出 (n', g, N)；因此，根据推出复合，$(N, n' \circ q, g)$ 是 (K, r, k) 的推出，从而 $M \overset{(l,\ r)}{\Longrightarrow}_m N$。 □

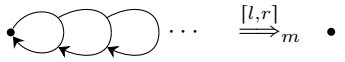
注意，任意部分规则 $\lceil r \rceil :\ L \hookleftarrow K \to R$ 都可以表示为 $\lceil r \rceil = \lceil j, r \rceil$，其中 $j :\ K \hookrightarrow L$ 是典范单射。因此，只要粘合条件成立，单推出变换与双推出变换就是等价的。单推出变换的表达能力更强，因为在粘合条件不成立时也适用，如下例所示。

例 8.8。我们考虑以下“移除环”规则：



并尝试将其应用于例 6.10 中的单图 $\mathbf{T}_\infty$ 。存在唯一的态射 $m: L \to \mathbf{T}_\infty$ ，但它不满足粘合条件。事实上，我们看到条件 (2) 被违反了，因为 $1 \notin \mathbf{T}_\infty(2)$ 和 $1 \in m[L']$ ，然而$2 \notin m[L']$。因此，将该规则应用于 $\mathbf{T}_\infty$ 的唯一方式是通过单推送变换。

为此，我们首先计算规则 $[l, r]$。由于 l 是 $l(K) = K$ 到 L的典范单射，因此 $r' = r$ （以及 $R' = R = K$），从而 $[l, r] = [r]: L \hookleftarrow K \to R$。单图 D 是满足 $D \subseteq \mathbf{T}_\infty$ 和$m^{-1}(D) \subseteq l(K)$的最大单图，因此显然有 $D = \{(0, \varepsilon)\}$。由于 $l(K)$ 和 R 都同构于 D ，因此变换的结果也是如此，即:



因此，从 $\mathbf{T}_\infty$ 中删除边 1，会悄无声息地删除所有 $n > 1$对应的边 n 。

因此我们看到，单推出实现了一种这样的语义：边可以被悄无声息地删除，但对于获得一个单图而言，删除是最小的。这可能会以级联方式删除边，而这一特性在图中并不存在。请注意，当一条边被标记为删除的次数超过一次时，粘合条件的第（1）项也可能被违反；在这种情况下，该边会被删除。此外，当一条边同时被标记为删除和保持时，也会发生这种情况。例 7.6表明，在此类情况下，该边同样会被删除。所有标记为删除的边都保证会被删除，而其他边只有在不与删除操作冲突时才会被保持。因此，这种变换规则的语义与前一种语义对偶，对于大胆（或懒惰）的程序员来说应该更具吸引力。

9 带属性类型化单图

E-图的概念是在 [2] 中设计的，旨在得到一个由带属性节点和边构成的图的黏着范畴。这源于一系列关于类型化属性图变换的研究，参见 [21, 22, 23]。属性取自数据类型代数，并且可以属于不同类型（布尔值、整数、字符串等）。在 E-图中，只有值类型节点表示这类属性。但这些节点也由 E-图来类型化；在类型 E-图中，每个值类型节点表示数据类型代数中的一种类型。这应当让人想起第6节中的构造；我们现在将利用这些构造，对 [2] 中给出的类型化属性图概念进行推广。类似地，其思路是规定，由数据类型代数中的某种类型所类型化的边，必须是相应载体集中的元素。

定义 9.1（范畴 ATM(T, Σ)）。对于任意单图 T 和签名$\Sigma: \Omega \to S^{<\omega}$，在 T, Σ 之上的属性化类型单图（简称 ATM）是由对象 $a: A \to T$ （属于 Monogr$\backslash T$ ）和一个 Σ-代数 $\mathcal{A}$ 组成的一对 $(a, \mathcal{A})$ ，满足$\mathcal{A}_s = (\mathbf{A}_T a)_s$ 对所有 $s \in S \cap \mathbf{E}T$成立。

从 $(a,\mathcal{A})$ 到在 T, Σ之上的 ATM $(b,\mathcal{B})$ 的态射 m，是由 Monogr$\backslash T$ 中的态射 $\vec{m}: a \to b$ 和一个 Σ-同态 $\dot{m}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 组成的一对 $(\vec{m},\dot{m})$，满足 $\dot{m}_s = (\mathsf{A}_T\vec{m})_s$ 对所有 $s \in S \cap \mathsf{E}T$成立。

令 $1_{(a,\mathcal{A})} \stackrel{\text{定义}}{=} (1_a, 1_{\mathcal{A}})$ 并且对于任意态射 $m': (b,\mathcal{B}) \to (c,\mathcal{C})$ 令 $m' \circ m \stackrel{\text{定义}}{=} (\vec{m}' \circ \vec{m}, \dot{m}' \circ \dot{m})$，它是从 $(a,\mathcal{A})$ 到 $(c,\mathcal{C})$的态射。令 $\mathsf{ATM}(T,\Sigma)$ 为 T, Σ 上的 ATM 范畴及其态射。

被视为属性的边并非像 E-图中那样是某个特定类型的节点；它们的特征在于，其类型由 T 的一条边指定，而这条边恰好也是数据类型签名 Σ 的一个排序，即 S 的一个元素。这与 [2] 中的类型化属性 E-图一致。

因此我们看到，签名 $\mathsf{S}T$ 和 Σ 共享类型，但我们仍将它们视为彼此不同，尤其是在算子名称方面。为体现这一性质，我们需要以下构造。

定义 9.2（签名 $\Sigma \dotplus \Sigma'$）。给定两个签名 $\Sigma: \Omega \to S^{<\omega}$ 和$\Sigma': \Omega' \to S'^{<\omega}$，令 $(\Omega + \Omega', \mu_1, \mu_2)$ 为 (Ω,Ω') 在集合范畴中的余积，令 j, j' 分别为 S, S' 到 $S \cup S'$中的典范嵌入，令 $\Sigma \dotplus \Sigma' : \Omega + \Omega' \to (S \cup S')^{<\omega}$ 为满足 $(\Sigma \dotplus \Sigma') \circ \mu_1 = j^{<\omega} \circ \Sigma$和 $(\Sigma \dotplus \Sigma') \circ \mu_2 = j'^{<\omega} \circ \Sigma'$的唯一函数。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega & \xrightarrow{\quad\Sigma\quad} & S^{<\omega} \\
{\scriptstyle\mu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^{<\omega}} \\
\Omega + \Omega' & \xrightarrow{\quad\Sigma \dotplus \Sigma'\quad} & (S \cup S')^{<\omega} \\
{\scriptstyle\mu_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j'^{<\omega}} \\
\Omega' & \xrightarrow{\quad\Sigma'\quad} & S'^{<\omega}
\end{array}$$

我们将这一构造确实定义了范畴 $\mathsf{Sig}_{\mathrm{srt}}$ 中的余积，因而 $\Sigma_1 \doteq \Sigma_2$ 和 $\Sigma_1' \doteq \Sigma_2'$ 蕴含 $\Sigma_1 \dotplus \Sigma_1' \doteq \Sigma_2 \dotplus \Sigma_2'$这一点留给读者验证。为简便起见，以下我们假设 $\mathsf{S}T$和 Σ没有共同的算子名称，从而将 $\Omega_T + \Omega$ 与 $\Omega_T \cup \Omega$ 视为相同，并省略典范单射，因此 $\mathsf{S}T = (\mathsf{S}T \dotplus \Sigma)|^{(\mathsf{E}T)^{<\omega}}_{\Omega_T}$ 且 $\Sigma = (\mathsf{S}T \dotplus \Sigma)|^{S^{<\omega}}_{\Omega}$。

定义 9.3（函子 $\mathsf{D}:\mathsf{ATM}(T,\Sigma) \to (\mathsf{S}T \dotplus \Sigma)$-代数）。对于每个签名$\Sigma: \Omega \to S^{<\omega}$ 以及满足 $\Omega_T \cap \Omega = \varnothing$的单图 T，令 $\Sigma' \stackrel{\text{定义}}{=} \mathsf{S}T \dotplus \Sigma$，并令 $\mathsf{D}:\mathsf{ATM}(T,\Sigma) \to \Sigma'$-代数为如下定义的函子：对于 $\mathsf{ATM}(T,\Sigma)$ 的每个对象$(a,\mathcal{A})$，令 $\mathsf{D}(a,\mathcal{A})$ 为由以下内容定义的 Σ'-代数 $\mathcal{A}'$

- $\mathcal{A}'_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_s$ *for all* $s \in S$ *and* $\mathcal{A}'_e \stackrel{\text{def}}{=} (\mathsf{A}_T a)_e$ *for all* $e \in \mathsf{E}T$,
- $o^{\mathcal{A}'} \stackrel{\text{def}}{=} o^{\mathcal{A}}$ *for all* $o \in \Omega$ *and* $[\![e{\cdot}\iota]\!]^{\mathcal{A}'} \stackrel{\text{def}}{=} [\![e{\cdot}\iota]\!]^{\mathsf{A}_T a}$ *for all* $[\![e{\cdot}\iota]\!] \in \Omega_T$.

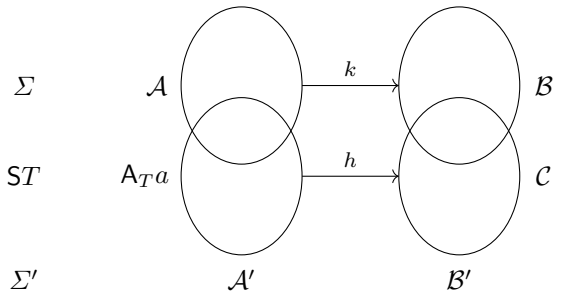
对于每个态射 $m: (a,\mathcal{A}) \to (b,\mathcal{B})$，令 $(\mathsf{D}m)_s \stackrel{\text{定义}}{=} \dot{m}_s$对所有 $s \in S$和$(\mathsf{D}m)_e \stackrel{\text{定义}}{=} (\mathsf{A}_T\vec{m})_e$ 对所有 $e \in \mathsf{E}T$。

不难验证，Dm 是从 D$(a,\mathcal{A})$到 D$(b,\mathcal{B})$的 Σ'-同态，因此 D 是一个函子。

定理 9.4。D 是从 ATM(T,Σ) 到 $(\mathsf{S}T\dotplus\Sigma)$-Alg 的等价。

证明。由 A_T 的相同性质可 легко看出，D 是忠实且满的。

我们证明 D 是同构稠密的。对于任意 Σ'-代数 $\mathcal{B}'$，设 $\mathcal{B}$（分别为 $\mathcal{C}$）是其在 Σ（分别为 ST）上的限制。由于根据定理 6.8，A_T 是同构稠密的，因此存在对象 $a:A\to T$ 属于 Monogr$\backslash T$，以及一个 ST-同构 $h:\mathsf{A}_T a\to\mathcal{C}$。我们同时定义一个集合 $\mathcal{A}_s$ 和一个函数 $k_s:\mathcal{A}_s\to\mathcal{B}_s$，对所有 $s\in S$，令 $\mathcal{A}_s\,\mathbf{def}{=}\,\mathcal{B}_s$ 且当 $s\in S\backslash\mathsf{E}T$ 时令 $k_s\,\mathbf{def}{=}\,1_{\mathcal{A}_s}$；当 $s\in S\cap\mathsf{E}T$ 时，令 $\mathcal{A}_s\,\mathbf{def}{=}\,(\mathsf{A}_T a)_s$ 且 $k_s\,\mathbf{def}{=}\,h_s$（在此情形下有 $\mathcal{C}_s=\mathcal{B}'_s=\mathcal{B}_s$）。随后，对每个 $o\in\Omega$，我们定义函数 $o^{\mathcal{A}}\,\mathbf{def}{=}\,k^{-1}_{(o)}\circ o^{\mathcal{B}}\circ k_{\mathrm{Dom}(o)}:\mathcal{A}_{\mathrm{Dom}(o)}\to\mathcal{A}_{\mathrm{Rng}(o)}$，以及 Σ-代数 $\mathcal{A}\,\mathbf{def}{=}\,\big((\mathcal{A}_s)_{s\in S},(o^{\mathcal{A}})_{o\in\Omega}\big)$。根据构造，$(a,\mathcal{A})$ 显然是定义在 T,Σ 上的 ATM，并且 $k\,\mathbf{def}{=}\,(k_s)_{s\in S}$ 是一个 Σ-同构 $k:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$。



令 $\mathcal{A}'\overset{\text{定义}}{=}\mathrm{D}(a,\mathcal{A})$, $h'_s\overset{\text{定义}}{=}k_s:\mathcal{A}'_s\to\mathcal{B}'_s$ 对所有 $s\in S$ 和 $h'_e\overset{\text{定义}}{=}h_e:\mathcal{A}'_e\to\mathcal{B}'_e$ 对所有 $e\in\mathsf{E}T$，由于 $h_s=k_s$ 对所有 $s\in S\cap\mathsf{E}T$，因此 $h'\overset{\text{定义}}{=}(h'_s)_{s\in S\cup\mathsf{E}T}$ 定义良好。接着不难看出，$h':\mathcal{A}'\to\mathcal{B}'$ 是一个 Σ'-同构，因此 D$(a,\mathcal{A})\simeq\mathcal{B}'$。

□

定理 9.4 推广了[3] [2, 定理 11.3]，该定理在由带属性的 E-图ATG 类型化的带属性 E-图范畴与记作 AGSIG(ATG)的签名代数范畴之间建立了同构。特别是，[2] 中的定理 11.3 要求 AGSIG(ATG) 满足良构条件，这意味着：如果 ST 存在一个算子名称，其定义域排序为 s，那么 s 就不是数据类型签名 Σ中的一个排序。显然，这等价于要求只有 T 的节点才能被视为 Σ的排序；这与以下事实有关：只有 E-图的值节点才应当保存属性。由于我们并不局限于 E-图，因此没有必要要求属性只能由节点承载。这带来了一个有趣的结果：

[3]我们的证明也比带属性的类型化等式图中相应结果所需的 6 页短得多。这部分归功于我们使用了 A_T（定义 6.7）和定理 6.8，也归功于与等式图的 5 种类型和 6 个算子名称相比，单图更为简单。

推论 9.5. 对于任意签名 Σ、 Σ' 以及图结构 Γ，只要$\Sigma' = \Gamma + \Sigma$，就存在一个单图 T，使得 Σ'-Alg $\approx$ ATM$(T$、 $\Sigma)$。

证明。由引理 6.3，存在一个单图 T，使得 S$T \doteq \Gamma$，因此 S$T+\Sigma \doteq \Gamma+\Sigma = \Sigma'$，进而 Σ'-Alg $\simeq$ (S$T+\Sigma$)-Alg $\approx$ ATM(T, Σ)。 □

显然，任何签名 Σ' 都可以分解为 $\Gamma + \Sigma$：将其中一些单子算子（以及这些算子涉及的类型）放入 Γ，并将所有其他算子放入 Σ。于是，任何 Σ'-代数都可以表示为关于T, Σ的 ATM，其中 S$T \doteq \Gamma$。这样便可以对这些代数应用图变换，但这需要谨慎处理，因为通常无法从一个 Σ'-代数中移除或向其中添加元素，并由此得到一个 Σ'-代数。

在 [2, 定义 11.5] 中采用的方法，是将跨度规则中使用的态射限制为一类单态射，这些单态射是从 Σ-同构扩张为 $(\Gamma + \Sigma)$-同态。由此可以证明 [2, 定理 11.11]：类型化属性 E-图范畴是粘合 HLR 范畴（这一概念推广了定义 4.13, 见 [24]），其中的单态射取自这一类。

在 ATM 范畴上也有类似结果。为简单起见，并且由于基于规则的图变换不太可能修改布尔值、整数或字符串等属性（如果确实修改了，可能就不应将其视为图变换），我们只考虑逐个元素保持数据类型代数不变的态射。这样就可以变换排序属于 Γ 但不属于 Σ 的边。

定义 9.6（范畴 ATM$(T, \mathcal{A})$、函子 U、 f 稳定 $\mathcal{A}$）。对于任意 Σ-代数 $\mathcal{A}$，令 ATM$(T, \mathcal{A})$ 为 ATM(T, Σ) 的子范畴，其对象$(a, \mathcal{A})$ 及态射 $(f, 1_{\mathcal{A}})$ 均受限制。

遗忘函子 U : ATM$(T, \mathcal{A}) \to$ Sets 定义为 U$(a, \mathcal{A})$ 定义为$= \mathrm{E}A$，其中 $a\colon A \to T$，且 U$(f, 1_{\mathcal{A}})$ 定义为 $= \mathrm{E}f$（通常记作 f）。

为简化记法，我们用 $\mathcal{A}$ 表示集合$\bigcup_{s \in S \cap \mathrm{E}T} \mathcal{A}_s$。若对所有 $x \in \mathcal{A}$ 都有 $f^{-1}[x] = \{x\}$，则称函数 f 稳定 $\mathcal{A}$。

下面仅简要说明 ATM$(T, \mathcal{A})$ 范畴是粘合范畴的证明。关键在于以下引理。

引理 9.7. 对 ATM$(T, \mathcal{A})$ 中的任意对象 $(a, \mathcal{A})$, $(b, \mathcal{A})$ 以及 Monogr$\backslash T$ 中的态射 $f\colon a \to b$，我们有

$$(f, 1_{\mathcal{A}}) : (a, \mathcal{A}) \to (b, \mathcal{A}) \text{ is a morphism in } \mathbf{ATM}(T, \mathcal{A}) \text{ iff } f \text{ stabilizes } \mathcal{A}.$$

证明. 对所有 $s \in S \cap \mathrm{E}T$，我们有 $\mathcal{A}_s = (\mathrm{A}_T a)_s = a^{-1}[s]$ 和 $\mathcal{A}_s = b^{-1}[s]$。由于 $b \circ f = a$，因此 $f^{-1}[\mathcal{A}_s] = f^{-1}[b^{-1}[s]] = a^{-1}[s] = \mathcal{A}_s$，从而 $f^{-1}[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$。因此，$f$ 稳定 $\mathcal{A}$ 当且仅当对所有 $x \in \mathcal{A}$ 都有 $f(x) = x$；这又当且仅当对所有 $s \in S \cap \mathrm{E}T$ 都有 (A$_T f)_s = f|^{\mathcal{A}_s}_{\mathcal{A}_s} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_s} = (1_{\mathcal{A}})_s$；这又当且仅当 $(f, 1_{\mathcal{A}})$ 是 ATM$(T, \mathcal{A})$ 中的态射。 □

因此，稳定性这一性质刻画了 Monogr$\backslash T$ 中的态射与 ATM$(T, \mathcal{A})$中的态射之间的区别。此外，众所周知

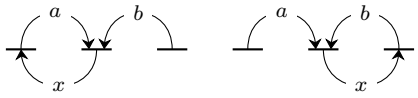
Monogr$\backslash T$ 中的推出和拉回可以由 Monogr 中的相应结构构造出来，而我们已经看到，它们又可以由集合范畴中的相应结构构造出来。

但显然，在集合范畴中，从一个稳定 $\mathcal{A}$ 的函数跨度出发，总能找到一个由稳定 $\mathcal{A}$ 的函数构成的余跨度作为推出。因此，ATM$(T,\mathcal{A})$ 不仅存在推出，而且函子 U 保持这些推出。拉回也有类似结果，而且类似于推论 4.7 的构造表明，U 也保持单态射。最后，我们看到 U 反映同构，因为只要 f 稳定 $\mathcal{A}$，f^{-1} 就会稳定 $\mathcal{A}$。我们仿照定理 4.17 得出结论。

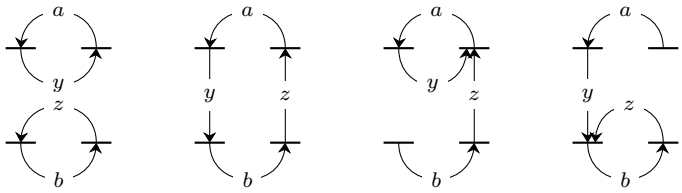
定理 9.8. ATM$(T,\mathcal{A})$ 是粘合的。

这一结果并不意味着所有非属性的边都可以自由变换。它们与属性之间的邻接关系可能会施加约束，而只有少数态射能够满足这些约束。

例 9.9. 设 Σ 是一个没有运算名称且只有一个排序 s 的签名，$\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{A}_s = \{a,b\}$ 定义的 Σ-代数。我们考虑类型单图$T = \{(e,s),(s,e)\}$。由 T 定型的单图包含任意数量（但至少一个）由 e 定型的边，这些边必须与 a 或 b 邻接；此外，还有两条由 s 定型的边，即 a 和 b，它们必须都与同一条由e 定型的边 x 邻接，由此得到两类单图



（可以添加任意数量由 e 类型化且与 a 或 b 相邻的边），或者 a 和 b 分别与 y 和 z 相邻，于是我们又得到四个类:



函数 $y,z \mapsto x$ 是从最后这两个单图到上面两个单图（分别对应）的态射。不同类的单图之间没有其他态射。因此我们看到，在范畴 ATM$(T,\mathcal{A})$ 中，可以添加或删除由 e 类型化且不与 a 或 b 相邻的边，但无法删除边 y 和 z（因为这需要一条规则，其左态射从一个不含 y 和 z 的 ATM 指向一个含有 y 和 z 的 ATM，而不存在这样的态射），尽管它们并非属性。

此外，我们看到这个范畴没有始对象、没有终对象，也没有积或余积。

10 结论

单图通过允许任意长度且具有自由邻接关系的边，推广了有向图的标准概念。长度为零的边表示一个节点；长度大于零的边则可以与任意边相邻，包括与自身相邻。“单图”中的前缀“单”体现了这种统一观点：节点被视为边，而边具有不受限制的邻接关系，从而使形式表达更加简洁（态射是由单个方程刻画的函数）；后缀“-图”则源于有限 ω-Monogr 与其图示之间存在对应关系（在同构意义下）。

就图结构及其对应的代数而言，单图具有普遍性：单图等价于附加了适当算子名称排序约定的图结构，而带类型单图的范畴则等价于相应的代数范畴。由于许多标准或特殊的有向图概念都可以表示为幺半代数，因此也可以表示为带类型单图；不过，与图结构相比，带类型单图有两项优势：它们为边提供了定向，并且（因此）无需使用算子名称。

单图的代数变换与标准图的代数变换相似。因此，带类型单图可能比图结构代数更易于处理，第9节的结果便说明了这一点。将定向边表示为序列，似乎比标准表示法更自然；标准表示法把边视为无结构的对象，并以一组函数为其指定像。因此，类型单簿成为指定图结构的一种自然方式。

参考文献

[1] T. Boy de la Tour, R. Echahed, 《属性图的并行重写》, 《理论计算机科学》848 (2020) 106–132。[2] H. Ehrig, K. Ehrig, U. Prange, G. Taentzer, 《代数图变换基础》, 《理论计算机科学专著》, 欧洲理论计算机科学协会丛书, 施普林格, 2006。[3] M. L¨owe, 《单推送出图变换的代数方法》, 《理论计算机科学》109 (1993) 181–224。[4] T. Boy de la Tour, 《单图：图结构的一个范畴》, 载于：《代数开发技术新趋势》, 第25届国际研讨会, WADT 2020, 修订版精选论文, 《计算机科学讲义》第12669卷, 施普林格, 2021, 第54–74页。[5] P. Suppes, 《公理集合论》, 多佛出版社, 1972。[6] D. Sannella, A. Tarlecki, 《代数规格说明与形式化软件开发基础》, 《理论计算机科学专著》, 欧洲理论计算机科学协会丛书, 施普林格, 2012。

[7] H. Herrlich, G. E. Strecker, 《范畴论》，第3版，Heldermann 出版社，柏林，2007。[8] S. Lack, P. Sobocinski, 《粘合范畴与准粘合范畴》，《理论信息学与应用》39 (3) (2005) 511–545。[9] D. Plump, 《项图重写》，载于：H. Ehrig, G. Engels, H.-J. Kreowski, G. Rozenberg（编），《图文法与图变换计算手册》，第2卷：应用、语言与工具，世界科学出版社，1999，第3–61页。[10] A. Burroni, 《高维字问题及其在等式逻辑中的应用》，《理论计算机科学》115 (1) (1993) 43–62。[11] E. Robinson, G. Rosolini, 《部分映射范畴》，《信息与计算》79 (2) (1988) 95–130。[12] A. Corradini, T. Heindel, F. Hermann, B. K¨onig, 《半推挤重写》，载于：ICGT 2006，《计算机科学讲义》第4178卷，施普林格，2006，第30–45页。[13] A. Corradini, D. Duval, R. Echahed, F. Prost, L. Ribeiro, 《AGREE——具有受控嵌入的代数图重写》，载于：第八届 ICGT，《计算机科学讲义》第9151卷，施普林格，2015，第35–51页。[14] A. Corradini, D. Duval, R. Echahed, F. Prost, L. Ribeiro, 《PBPO 图变换方法》，《逻辑、代数与程序设计方法杂志》103 (2019) 213–231。[15] T. Boy de la Tour, R. Echahed, 《并行相干图变换》，载于：《代数开发技术新趋势》，第25届国际研讨会，WADT 2020，修订版精选论文，《计算机科学讲义》第12669卷，施普林格，2021，第75–97页。[16] H. Ehrig, M. Pfender, H. J. Schneider, 《图文法：一种代数方法》，载于：第14届开关与自动机理论年会，美国艾奥瓦州爱荷华城，1973年10月15日至17日，1973，第167–180页。[17] A. Corradini, U. Montanari, F. Rossi, H. Ehrig, R. Heckel, M. L¨owe, 《图变换的代数方法——第一部分：基本概念与双推挤方法》，世界科学出版社，1997，第163–246页。[18] A. Habel, J. M¨uller, D. Plump, 《重新审视双推挤图变换》，《数学结构与计算机科学》11 (5) (2001) 637–688。[19] J.-C. Raoult, 《论图重写》，《理论计算机科学》32 (1,2) (1984) 1–24。[20] M. L¨owe, 《扩展代数图变换》，博士论文，柏林工业大学，德国（1991）。

[21] M. L¨owe, M. Korff, A. Wagner，《属性图变换的代数框架》，载于：R. Sleep、R. Plasmeijer、M. van Eekelen（编），《项图重写：理论与实践》，John Wiley，纽约，1993，第 185–199 页。[22] R. Heckel、J. M. K¨uster、G. Taentzer，《带类型属性图变换系统的合流性》，载于：A. Corradini、H. Ehrig、H. Kreowski、G. Rozenberg（编），《图变换：第一届国际会议 ICGT 2002》，《计算机科学讲义》第 2505 卷，施普林格，2002，第 161–176 页。[23] H. Ehrig、K. Ehrig、U. Prange、G. Taentzer，《基于粘合式 HLR 范畴的类型化属性图与图变换基础理论》，Fundam. Informaticae 74 (1) (2006) 31–61。[24] H. Ehrig、J. Padberg、U. Prange、A. Habel，《黏合式高级替换系统：图变换的新范畴框架》，Fundam. Informaticae 74 (1) (2006) 1–29。