arXiv:2303.01153v1 [physics.plasm-ph] 2 Mar 2023

电流猝灭期间逃逸电子电流主导平衡的漂移面求解器

Lu Yuan[1] **和 Di Hu**[1,*]

[1]中国北京市海淀区学院路37号，北京航空航天大学，邮编100191。
[*]通讯作者。

电子邮箱：hudi2@buaa.edu.cn

2023年3月3日

摘要。 托卡马克破裂的电流猝灭阶段产生的逃逸电子电流，可能会对未来的高性能装置造成严重损害。为了控制并减轻这类逃逸电子电流的影响，准确描述逃逸电子电流主导平衡至关重要；在此基础上，才能进一步开展稳定性分析。本文针对所有逃逸电子具有相同平行动量这一简单情形，推导了一个 Grad-Shafranov 类方程，用于求解逃逸电子的轴对称漂移面，而非磁通面。随后，我们采用简单的矩形壁，并设置 ITER 类和 MAST 类几何参数，对这一新的平衡方程进行数值求解。由此可直接得到漂移面与磁通面之间的偏差；研究发现，即使在存在开放磁力线的区域，逃逸电子仍能得到良好约束。研究还发现，逃逸电子平行动量的变化会导致电流中心发生水平位移，而总电流和外部磁场均不发生变化。逃逸电流密度剖面会影响这种位移的易感性：剖面越平坦，相同的动量变化所导致的位移越大。当外部极向磁场存在上下不对称性时，这种位移还伴随着逃逸电子电流的垂直位移。研究发现，在尺寸较小的紧凑型装置以及极向场较弱的情况下，这一效应更为显著。上述结果揭示了逃逸电子动量空间变化所导致的电流中心位移动力学，并为未来发展更精细、对逃逸电子动量分布考虑更为实际的逃逸电流平衡理论铺平了道路。这一新的平衡理论也为未来对逃逸电子电流开展稳定性分析奠定了基础。

1. 引言

等离子体破裂是由非线性不稳定的磁流体动力学（MHD）不稳定性引起的，这些不稳定性会破坏整体等离子体约束，并导致能量快速、局部地沉积到等离子体面对部件（PFC）上，从而可能对未来的高性能装置造成不可逆损害 [1]。在破裂带来的种种威胁中，逃逸电子及其在第一壁上的局部沉积是最令人担忧的后果之一 [1–3] 。在最严重的情况下，原有等离子体电流的相当大一部分可能转化为逃逸电子电流，其全部动能以及所携带的大部分磁能都可能在局部释放 [4]。必须不惜一切代价避免这种情况，因此人们一直在努力控制并耗减这类逃逸电流 [5–9]。

然而，要研究位形空间中逃逸电子的约束与损失问题，就必须充分掌握平衡解，并以此为基础开展不稳定性研究。另一方面，由于动量很高，逃逸电子不会严格沿磁力线运动。一旦它们成为主要的电流载流体，电流密度便不再沿磁面分布，电流密度（或其与环形几何中大半径的乘积）也不再是通量函数。相反，电流将沿逃逸电子的漂移面分布；在轴对称几何中，这本质上是正则角动量恒定的曲面 [10, 11]。因此，必须修正传统的 Grad-Shafranov方程 [12]，以描述这类新的等离子体平衡；还需要推导新的类多流体平衡方程 [13–15] ，以直接求解逃逸电子的漂移面。

我们认为，在本研究中采用简化的逃逸电流模型是合理的。我们从拉格朗日量 [10] 推导出强穿越型逃逸电子导引中心的力平衡方程。随后将该力平衡方程与环向对称性结合，得到关于有效磁通（即正则角动量）的类Grad-Shafranov二阶导数方程，并可在给定边界条件下求解。为简化问题，我们假设所有逃逸电子具有相同的平行动量，但其密度可以呈空间分布。随后，我们针对一系列几何参数、逃逸电子电流、逃逸电子动量和极向磁场，在静态磁通边界条件下对该方程进行数值求解。结果表明，计算得到的漂移面与磁通面之间存在明显偏差，其大小取决于逃逸电子动量、装置几何形状和极向场强度。研究发现，即使总电流和极向场保持不变，电流中心仍会随着逃逸电子动量的变化而发生水平位移，这与先前较简单模型 [16] 的结果一致。动量变化相同时，平坦电流剖面更容易发生这种位移。此外，当极向场存在上下不对称性时，逃逸电流除了发生上述水平位移外，还会发生垂直位移。

这种位移完全由逃逸电子平行动量的变化引起，可能会对逃逸电流占主导的电流猝灭等离子体的稳定性产生重要影响，也可能影响由上述位移导致的逃逸电子刮削脱落。

本文其余部分安排如下。第2节中，我们从逃逸电子的导心拉格朗日量推导新的 Grad-Shafranov 类方程。第3节中，我们对数值解进行了数值参数扫描，以研究在不同几何参数、逃逸电子电流、平行动量和极向场条件下的平衡演化。最后，第4节给出讨论和结论。

2. 逃逸电子电流的平衡方程

Grad-Shafranov 类方程可由两个要素得到：力平衡方程和一个对称方向。对于后者，本文考虑简单的二维平衡，其对称方向即环向。对于冷的电流猝灭（CQ）等离子体，当电流载流体没有较大的平行动量时，其力平衡方程应为 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}=0$。然而，对于逃逸电子，必须考虑其高动量导致的离心力，该力由 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ 项平衡。

获得此类力平衡方程的一种简单方法，是从拉格朗日量 [10], 出发，考察导心轨迹的描述，并认识到该轨迹必然自动满足单个粒子的力平衡。原则上，接下来应为逃逸电子玻尔兹曼方程构造一系列矩方程，以导出逃逸电子的“流体方程” [17], ，再由此得到力平衡方程。不过，作为第一步，我们这里只考虑一种简化情形：所有逃逸电子具有相同的平行动量（对于给定的构形空间坐标，它们在动量空间中的分布函数为 δ ）。在这种情况下，逃逸电流密度可表示为

$$\mathbf{J}=n_{RE}q\mathbf{u}. \tag{1}$$

这里， n_{RE} 是逃逸电子密度， q 是其电荷，而$\mathbf{u}$ 与单个导引中心的速度相同。

每个逃逸电子导引中心坐标的哈密顿运动方程为 [10,11]:

$$\dot{\mathbf{X}}=\frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}+\frac{\mathbf{b}}{qB_\parallel^*}\times\left(\nabla\Phi^*+\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t}\right), \tag{2}$$

$$\dot{p_\parallel}=-\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\cdot\left(\nabla\Phi^*+\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t}\right), \tag{3}$$

$$\dot{\mu}=0, \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = \frac{qB}{\gamma m}. \tag{5}$$

其中，$\mathbf{X}$ 是位形空间坐标，$p_\parallel$ 是平行动量，μ 是磁矩，θ 是回旋角，$\mathbf{b}$ 是磁场方向，γ 是相对论因子，q 和 m分别是电子电荷和静止质量。我们还定义了以下有效场：

$$\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A} + \frac{p_\parallel}{q}\mathbf{b}, \tag{6}$$

$$\mathbf{B}^* \equiv \nabla \times \mathbf{A}^*, \tag{7}$$

$$B_\parallel^* \equiv \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b}, \tag{8}$$

$$\nabla\Phi^* \equiv \frac{\mu\nabla B}{\gamma} + q\nabla\Phi. \tag{9}$$

此处$\mathbf{A}$ 为矢势，Φ 为电势。需要注意的是，如果我们考虑高平行动量情形，即 $p_\parallel/qBR \propto \epsilon$ 且 $\epsilon \equiv a/R$为逆纵横比（如参考文献 [11], 中所假设），则需要在上述方程中加入额外的曲率漂移项。然而，在本研究中，我们考虑$p_\parallel/qBR \propto \epsilon^2$，因此参考文献 [11] 中的高阶曲率项在本文中被视为高阶效应并予以忽略。尽管这种排序方式不够大胆，但对于ITER等强磁场装置在电流猝灭期间所关注的主要参数范围而言，这种处理应已足够，因为辐射阻尼和碰撞阻尼以及动力学不稳定性往往会限制逃逸电子平行动量的上限。对于准中性等离子体中的强穿越型逃逸电子，我们近似取 $\nabla\Phi^* \simeq 0$。在稳态下，所有时间偏导项也都消失。因此，我们有

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}, \tag{10}$$

$$\dot{p_\parallel} = 0. \tag{11}$$

因此，平行动量沿轨迹线保持恒定，也就是漂移面的函数，而逃逸电子轨迹由有效磁场$\mathbf{B}^*$决定。代入方程（1），可得：

$$\mathbf{J} = n_{RE}q\frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}. \tag{12}$$

请注意，在我们考虑的情形下，方程（12）自动满足力平衡，而力平衡方程仅给出：

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B}^* = 0. \tag{13}$$

这是一个分析 类似于普通等离子体中的无力平衡 [18]，其中我们有 ：

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0. \tag{14}$$

将方程（6）和方程（7）代入方程（13），并与方程（14）比较，唯一的区别是多出了这一项 $\mathbf{J} \times \left[\nabla \times \left(\frac{p_\parallel}{q}\mathbf{b}\right)\right]$。稍后我们将看到，这一项会出现在新的平衡方程右端。在这里所考虑的轴对称系统中，磁场 $\mathbf{B}$ 和有效磁场 $\mathbf{B}^*$ 可以表示为简化形式：

$$\mathbf{B} = \nabla\Psi \times \nabla\phi + \bar{F}\nabla\phi, \tag{15}$$

$$\mathbf{B}^* = \nabla\Psi^* \times \nabla\phi + \bar{F}^*\nabla\phi. \tag{16}$$

这里，Ψ是极向磁通，有效磁通 Ψ^* 与有效矢势的环向分量$\mathbf{A}^*$ 有关，而后者又与逃逸电子的正则¯ ¯角动量有关。同时，F 和 F^* 分别与环向磁场和有效环向磁场有关。因此，常数 Ψ^* 面定义了逃逸电子的漂移面。这些新特征面类似于普通等离子体平衡中的磁通面。结合式（12）和式（16），可以得到

$$\mathbf{B}^* \cdot \nabla\Psi^* = 0, \tag{17}$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla\Psi^* = 0. \tag{18}$$

因此，逃逸电子轨迹以及电流密度都沿漂移面流动。请注意，由于电流守恒的要求，在环形几何中，n_{RE} 不能是 Ψ^* 的通量函数，尽管 $n_{RE}R$ 是。这必须由密度高得多的冷背景电子来补偿，从而维持准中性。

由方程（17）和方程（18）可知，逃逸电流主导平衡可以由漂移面定义，正如磁通面定义普通等离子体平衡一样。接下来我们求解 Ψ^*。在我们的环向对称系统中，注意到

$$\mu_0\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = -\Delta^*\Psi\nabla\phi + \nabla\bar{F} \times \nabla\phi. \tag{19}$$

这里 $\Delta^* \equiv R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$。因此

$$\mu_0\mathbf{J} \times \mathbf{B}^* = -\frac{\nabla\bar{F}\bar{F}^*}{R^2} - \Delta^*\Psi^*\frac{1}{R^2}\nabla\Psi^* = 0, \tag{20}$$

因此我们得到 逃逸电子电流的一个新的（冷）Grad-Shafranov 类方程 ：

$$\Delta^*\Psi = -\frac{d\bar{F}}{d\Psi^*}\bar{F}^*. \tag{21}$$

¯请注意，这里我们利用了环向磁场 F 是有效磁通 Ψ^*的函数这一事实。遗憾的是，这个方程无法直接求解，因为右端项不是仅关于 Ψ 的函数，而是与 Ψ^*相关。要解这个方程，可以尝试将其转换为关于 Ψ^* 的二阶微分方程，并确保右端项仅包含函数 Ψ^* 以及一些空间坐标，例如 R。

为此，我们注意到

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \mathbf{J}\cdot\nabla\phi = -\mu_0 R^2 n_{RE} q \frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\mathbf{B}^*}{B^*_\parallel}\cdot\nabla\phi = -\mu_0 n_{RE} q \frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\bar{F}^*}{B^*_\parallel}. \quad (22)$$

我们注意到，方程（21）和方程（22）应当等价，因此

$$\frac{d\bar{F}}{d\Psi^*} = \mu_0 n_{RE} q \frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{1}{B^*_\parallel}, \quad (23)$$

它是 Ψ^*的函数。然而，$\mathbf{F}^*$ 不一定是 Ψ^*的函数，因此最好将$\mathbf{F}^*$ 改写为分别包含 Ψ^* 的函数部分和非函数部分。

为此，我们将方程（16）改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^* &= \nabla\times\mathbf{A}^* = \nabla\times\left(\mathbf{A}+\frac{p_\parallel}{q}\mathbf{b}\right)\\ &= (\nabla\Psi+\nabla\zeta)\times\nabla\phi + \left(\bar{F}+\bar{G}\right)\nabla\phi. \end{aligned}\quad (24)$$

这里，ζ 和 G 表示机械动量带来的额外贡献。根据方程（15）和方程（24），我们必须有

$$\bar{G} = R^2\left(\nabla\times\frac{p_\parallel}{q}\mathbf{b}\right)\cdot\nabla\phi. \quad (25)$$

注意到，在当前假设下，方程（11）成立，因此$p_\parallel$ 在给定的漂移面上为常数。本文将此作为第一步，仅考虑最简单的情形，即$p_\parallel$ 在整个体积范围内也为常数。于是我们可以进一步简化，得到:

$$\begin{aligned}\bar{G} &= R^2\frac{p_\parallel}{q}\left[\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{B}\cdot\nabla\phi - \frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2}\cdot\nabla\phi\right]\\ &= R^2\frac{p_\parallel}{q}\left[-\frac{\Delta^*\Psi}{BR^2} - \frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2}\cdot\nabla\phi\right]. \end{aligned}\quad (26)$$

在主导阶下，我们有 $\nabla B \simeq -\frac{1}{R}B\nabla R$, 因此可得

$$-\frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2}\cdot\nabla\phi = -\frac{B}{R}\frac{1}{B^2}\frac{B_Z}{R} = -\frac{B_Z}{BR^2}. \quad (27)$$

由于 $B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}$，我们有

$$\begin{aligned}\bar{G} &= \frac{p_\parallel}{qB}\left[-R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right]\\ &= -\frac{p_\parallel}{qB}\left[R\frac{\partial B_Z}{\partial R} + B_Z + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right]. \end{aligned}\quad (28)$$

直接在此写出 $\bar{G} = -\frac{p_\parallel}{qB}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right]$ 或许很诱人，但我们先比较 $R\frac{\partial B_Z}{\partial R}$和 B_Z的强度。我们注意到，B_Z的变化主要由逃逸电流的贡献主导；如果闭合磁通面仍然存在，那么从高场侧（HFS）到低场侧（LFS），B_Z 将在约为小半径 a 的长度尺度上改变符号。因此，数量级

分析得到 $R\frac{\partial B_Z}{\partial R} \sim \frac{R}{a}B_Z$，与 B_z相比，它是 $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$。保留主导阶后，我们由此得到

$$\bar{G} \simeq -\frac{p_\parallel}{qB}\Delta^*\Psi. \tag{29}$$

因此，我们可以将 F^* 表示为

$$\bar{F}^* = \bar{F}\left(\Psi^*\right) - \frac{p_\parallel}{qB}\Delta^*\Psi. \tag{30}$$

我们看到，F^* 确实并非仅为 Ψ^* 的函数，而是可以与 F 及磁通的一个函数相关联。

我们可以用类似的方法从方程（24）得到 $\nabla\zeta$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
\nabla\zeta =& -R^2\left(\nabla\times\frac{p_\parallel}{q}\mathbf{b}\right)\times\nabla\phi \\
=& R^2\frac{p_\parallel}{q}\left[\nabla\phi\times\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{B} - \nabla\phi\times\frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2}\right] \\
=& R^2\frac{p_\parallel}{q}\left[\frac{\nabla\bar{F}}{BR^2} + \frac{B}{R}\frac{\bar{F}}{B^2}\frac{\nabla R}{R^2}\right] \\
=& \frac{p_\parallel}{qB}\left[\nabla\bar{F} + \frac{\bar{F}}{R}\nabla R\right] \\
\simeq& \frac{p_\parallel}{q}\nabla R.
\end{aligned} \tag{31}$$

这里我们采用了近似 $\frac{F}{B} = \frac{RF}{\sqrt{\nabla\Psi^2+F^2}} = R + \mathcal{O}(\epsilon^2)$，以及强环向磁场假设 $R\nabla F \ll F$。最后，我们可以得到 $\nabla\Psi$的表达式

$$\nabla\Psi = \nabla\Psi^* - \frac{p_\parallel}{q}\nabla R. \tag{32}$$

由此，我们恢复了有效磁通 Ψ^* 与磁通 Ψ之间的关系，这与方程（6）一致：

$$\Psi = \Psi^* - \frac{p_\parallel}{q}R. \tag{33}$$

注意，此处 Ψ 的等值线是我们的磁通面解，而 Ψ^* 的等值线是漂移面解，因此当 $p_\parallel$ 有限时，磁通面与漂移面之间会存在偏差。将式 (30) 和式 (32) 代入式 (22)，根据式 (32) 可立即得到 $\Delta^*\Psi^*$ 与 $\Delta^*\Psi$ 之间的关系。

$$\Delta^*\Psi = \Delta^*\Psi^* + \frac{p_\parallel}{qR}. \tag{34}$$

$$\Delta^*\Psi^* + \frac{p_\parallel}{qR} = -\mu_0 n_{RE} q\frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{1}{B_\parallel^*}\left[\bar{F} - \frac{p_\parallel}{qB}\left(\Delta^*\Psi^* + \frac{p_\parallel}{qR}\right)\right]. \tag{35}$$

由此可得

$$\left(1 - \mu_0 n_{RE}\frac{p_\parallel^2}{\gamma m}\frac{1}{B_\parallel^* B}\right)\left(\Delta^*\Psi^* + \frac{p_\parallel}{qR}\right) = -\mu_0 n_{RE} q\frac{p_\parallel}{\gamma m}\frac{\bar{F}}{B_\parallel^*}. \tag{36}$$

将两边除以 $-\frac{\mu_0 n_{RE} p_\parallel}{\gamma m B^*_\parallel}$，得到:

$$\left(-\frac{\gamma m B^*_\parallel}{n_{RE}\mu_0 p_\parallel}+\frac{p_\parallel}{B}\right)\left(\Delta^*\Psi^*+\frac{p_\parallel}{qR}\right)=q\bar{F}. \tag{37}$$

采用以下近似

$$B^*_\parallel B=\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{B}=B^2+\frac{p_\parallel}{q}\mu_0\mathbf{J}\cdot\mathbf{b}=B^2+\mu_0 n_{RE}\frac{p^2_\parallel}{\gamma m}, \tag{38}$$

我们可以改写为:

$$-\frac{\gamma m B^*_\parallel}{n_{RE}\mu_0 p_\parallel}+\frac{p_\parallel}{B}=-\frac{B\gamma m}{n_{RE}\mu_0 p_\parallel}. \tag{39}$$

因此，最终得到:

$$\Delta^*\Psi^*=-\mu_0 n_{RE} qR\frac{p_\parallel}{\gamma m}-\frac{p_\parallel}{qR}. \tag{40}$$

与普通的 Grad-Shafranov方程相比，并考虑方程（33），可以看出，对于有限的$p_\parallel$，我们的漂移面解 Ψ^* 和磁通面解 Ψ都不同于普通 Grad-Shafranov方程的磁通面解；而在 $p_\parallel \to 0$的极限下，前两种解都收敛到后一种解。给定电流密度分布、$p_\parallel$和边界条件后，方程（40）的右端项已知，因此我们可以继续求解平衡。

3. 逃逸电子电流主导平衡的数值求解

本节将介绍对不同控制变量（如平行动量、电流密度分布以及外加垂直磁场）影响下的逃逸电子电流所进行的数值研究。具体而言，第 3.1 节介绍了逃逸电子电流平衡求解器的数值设置。第 3.2 节计算并绘制了具有完整上下对称边界条件的 ITER 类等离子体和较小的 MAST 类等离子体在不同参数下的逃逸电流平衡，并发现，即使其他所有参数保持不变，平行动量的变化也会导致电流中心水平位移。第 3.3 节则表明，若边界条件存在一定的上下不对称性，这种水平位移还会伴随垂直位移。

3.1. 数值设置

我们的数值求解器基于用于普通等离子体平衡的开源 Grad-Shafranov 求解器 Free-GS [19]。在第2节中，平衡方程被改为适用于我们的逃逸电流平衡的方程，并对边界条件进行了修改，使磁通满足理想导体边界条件，此外还包括

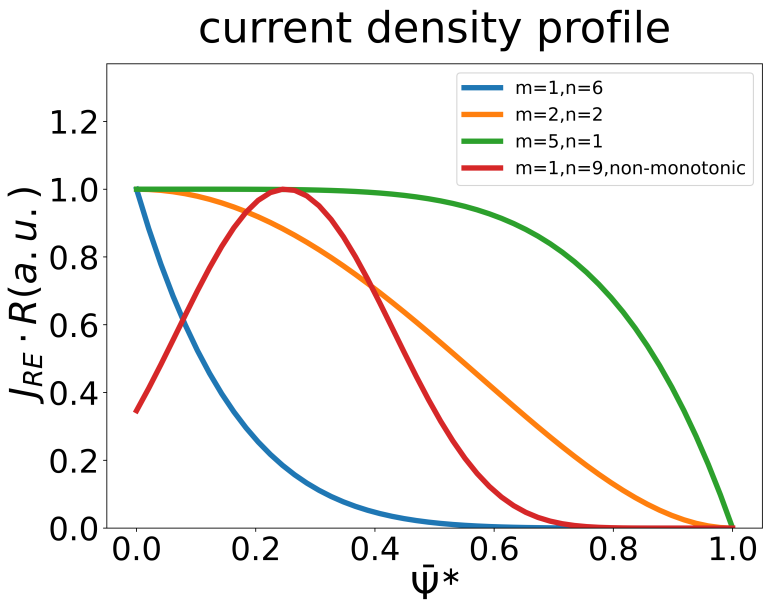

图 1. 根据式 (44) 和式 (45) 得到的电流密度分布形状。蓝色、红色和橙色曲线分别表示三种不同的单调电流剖面，绿色曲线表示非单调电流剖面。

任意静态外加极向磁场。具体而言，上下对称情况下的磁通边界条件为：

$$\Psi_b = \frac{1}{2} B_{z0} R^2. \tag{41}$$

这对应于磁矢势的环向分量 $A_\phi = \frac{1}{2} B_{z0} R$，它表示一个恒定的垂直磁场 B_{z0}。相应的 Ψ^* 边界条件为

$$\Psi_b^* = \frac{1}{2} B_{z0} R^2 + \frac{p_\parallel}{q} R. \tag{42}$$

该边界条件描述了真空室内电流位移的速度快于壁的电阻时间这一情形，因此所有磁通变化都会被屏蔽；而外部磁场穿透所需的时间长得多，因此会冻结在壁中。为简化起见，本研究仅考虑矩形边界。对于所谓的“MAST 类”几何结构，我们有 $R_{min} = 0.1m$, $R_{max} = 2.0m$,$Z_{min} = -2.0m$, $Z_{max} = 2.0m$；对于“ITER 类”几何结构，我们有 $R_{min} = 4m$,$R_{max} = 8.5m$, $Z_{min} = -4m$, $Z_{max} = 5.0m$。关于真实二维第一壁形状的更详细研究留待未来开展。

在本节中，我们主要针对不同的电流密度分布，扫描平行动量$p_\parallel$ 以及恒定、均匀的外部垂直磁场 B_{z0}。这种均匀垂直场显然是一种简化，旨在为我们的平衡解提供初步估算。现实中，外部线圈产生的极向场或垂直磁场要复杂得多 [20], ，我们计划在未来的研究中纳入这类真实的外部线圈。我们选择单调的电流密度

分布具有以下形状：

$$J_{\parallel}R = n_{RE}q\frac{p_{\parallel}}{\gamma m}R, \tag{43}$$

$$n_{RE}R = n_{RE}\left(0\right)R_0\left(1-\bar{\psi^*}^m\right)^n. \tag{44}$$

这里，$\bar{\psi^*}$ 表示归一化有效磁通。我们选取若干不同的参数 m 和 n，以表示从峰化剖面到平坦剖面的三种分布。此外，我们还考虑一种非单调电流剖面，以表示可能的中空型逃逸电流空间分布 [21–23]:

$$n_{RE}R = n_{RE}\left(0\right)R_0\left[1-\bar{\psi^*}^2+\left(\bar{\psi^*}-\bar{\psi^*}^2\right)^m\right]^n. \tag{45}$$

图 1 展示了这四种电流密度分布，以供比较；不同颜色表示 m 和 n 的不同取值，以及单调和非单调剖面。选定电流剖面形状和逃逸电流总量后，方程 40 的右端项便已确定。

除上述恒定、均匀的 B_{z0} 情况外，我们还研究了一个磁场边界条件具有上下不对称性的附加情况，以模拟真实托卡马克中极向场线圈的上下不对称性。在这项简单研究中，除均匀垂直场 B_{z0}外，我们仅考虑两个极向场线圈，分别位于 $R_u = 5m$、$Z_u = 7.5m$ 和 $R_d = 6m$、$Z_d = -7.5m$ 处。在这种上下不对称情况下，边界条件变为：

$$\Psi_b = \frac{1}{2}B_{z0}R^2 + RA_{coil}. \tag{46}$$

此处 $A_{coil} = \frac{1}{2}\mu_0\sum_i I_i\sum_{l=1,3,5,\cdots}\frac{P_l^1}{(0)\,l(l+1)}\left(\frac{a_i}{r_i}\right)^{l+1}P_l^1(\cos(\theta_i))$ 是外部极向场线圈对环向磁矢势的总贡献，其中 a_i 是线圈 i的半径，r_i 是边界点到线圈中心的距离。此处假设 $r_i > a_i$。此外，θ_i 是边界点相对于线圈中心的极向角，I_i 是线圈电流，P_l^1是第一阶缔合勒让德多项式。于是，Ψ^* 对应的边界条件为

$$\Psi_b^* = \frac{1}{2}B_{z0}R^2 + RA_{coil} + \frac{p_{\parallel}}{q}R. \tag{47}$$

有了这些边界条件，我们便可以求解逃逸电子电流主导平衡。

3.2. 上下对称边界条件下的数值结果

这里展示使用式 40 和第 3.1 节所述的上下对称边界条件计算得到的逃逸电流平衡。

为展示我们新的平衡解与普通 Grad-Shafranov 解之间的差异，以及在 $p_{\parallel} \to 0$ 极限下二者的趋同情况，我们在此展示两个基准算例：采用理想边界的类 MAST 几何构型，并使用 FreeGS 结果，参数为 $B_{z0} = 0$ 和 $I_p = 200kA$。我们平衡解的磁通面和漂移面，以及

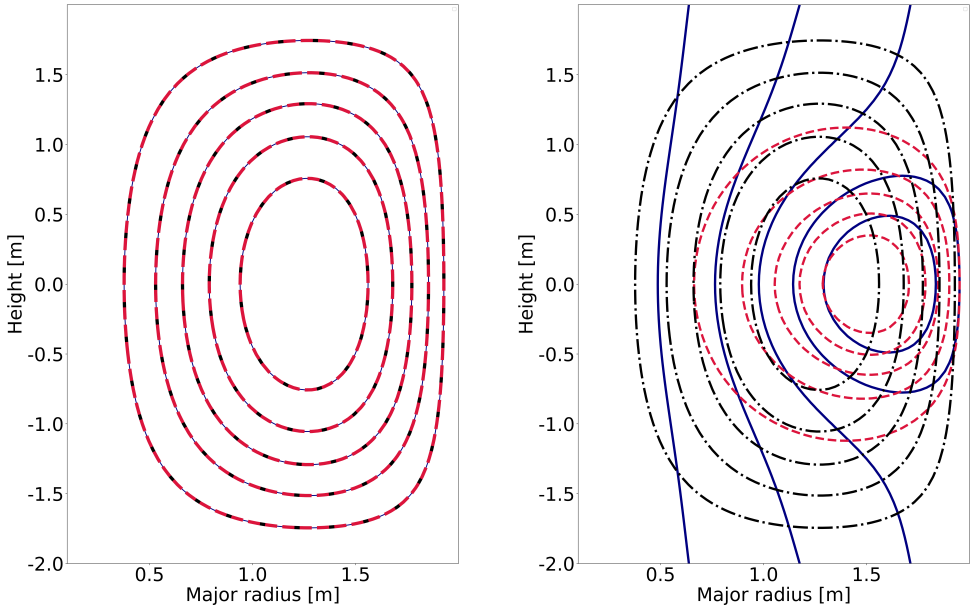

图2。 在类似 MAST 的几何构型下，我们的新平衡解与普通 Grad-Shafranov方程解的磁通面（红色虚线）和漂移面（蓝色实线）对比，其中普通 Grad-Shafranov方程解以黑色点划线表示， $B_{z0} = 0$ 和$I_p = 200kA$ 分别对应（a） $\gamma = 0$ 和（b） $\gamma = 20$。

FreeGS 给出的磁通面解，在图 2 中针对 $p_{\parallel} = 0$ 和 $p_{\parallel} = 20mc$ 两种情形进行了比较。黑色点划线表示 Grad-Shafranov 解，深蓝色实线表示新的漂移面解，红色虚线表示新的磁通面解。在图 2(a) 中，当 $p_{\parallel} = 0$ 时，三种解的等值线彼此重合，因此三种曲面完全一致。这表明，在电子动量较低的极限下，我们能够恢复普通的无力 Grad-Shafranov 解。然而，随着电子动量增加，各解之间的偏差逐渐变得更加明显，如图 2(b) 中 $p_{\parallel} = 20mc$ 时所示。此处 Grad-Shafranov 解保持不变，因为电流载流体的平行动量并未显式出现在平衡方程中。与此同时，随着电子平行动量增加，我们新的平衡解中的磁通面和漂移面均向外偏移。漂移面与磁通面解之间的偏差也开始显现，正如我们在第2节中所述，该偏差与 $p_{\parallel}$ 成正比。

接下来，我们考察由方程 44 描述的峰值电流分布情形，其中 $m = 1$和 $n = 6$ ，逃逸电子电流总量为 $I_{RE} = 200kA$ ，而 $p_{\parallel}$则不断变化。图 3 展示了针对若干选定的 $p_{\parallel}$ 和 $B_{z0} = -0.045T$得到的平衡解，其中

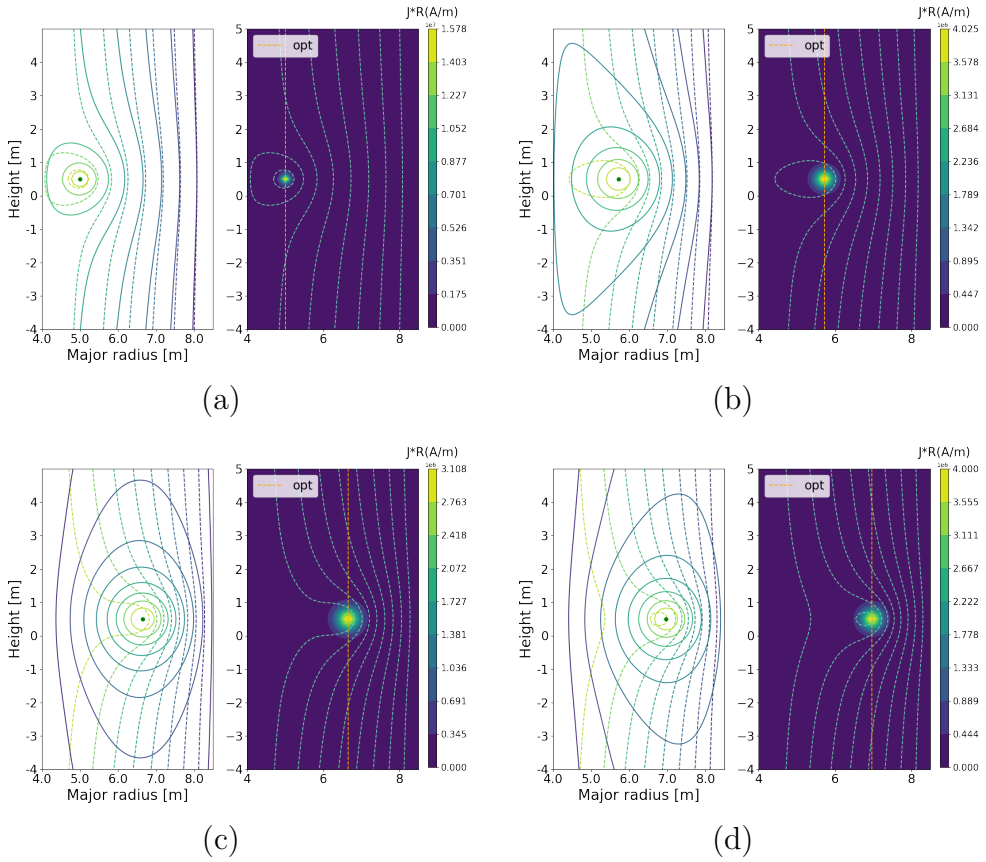

图3. 具有 $B_{z0} = -0.045T$的逃逸电流平衡，以及(a) $\gamma = 56$、(b)$\gamma = 116$、(c) $\gamma = 176$ 和(d) $\gamma = 200$。电流剖面呈单调变化，具有 $m = 1$ 和 $n = 6$ ，逃逸电子电流总量为 $I_{RE} = 200kA$。实线轮廓表示漂移面，虚线轮廓表示磁通面。

实线等高线表示漂移面，虚线等高线表示磁通面。所选的 B_{z0} 值与维持普通等离子体电流中心水平位置所需的量级相当 [24]，但由于逃逸电子平行动量的贡献以及理想壁的反作用，两者并不完全相同。橙色竖直虚线标示电流中心的水平位置。每个子图中右侧图的色标表示 $J_{\|}R$ 的取值，它是 Ψ^*的函数。请注意，这种中心峰值电流分布可能会引发逃逸电流的扭曲不稳定性，但这并非本文二维平衡研究所关注的问题，详细的稳定性研究将留待未来工作。从图 3(a) 到 (d) 可以看出，即使垂直磁场和逃逸电子电流完全相同，电流中心仍会随着平行动量的变化而明显位移，这与先前的简化模型 [16]一致。这种平行动量变化可能由多种机制引起，例如与背景粒子碰撞 [25]、辐射阻力 [26]、动力学不稳定性 [27]或环向电场。在较小的 $p_{\|}$ 极限下，

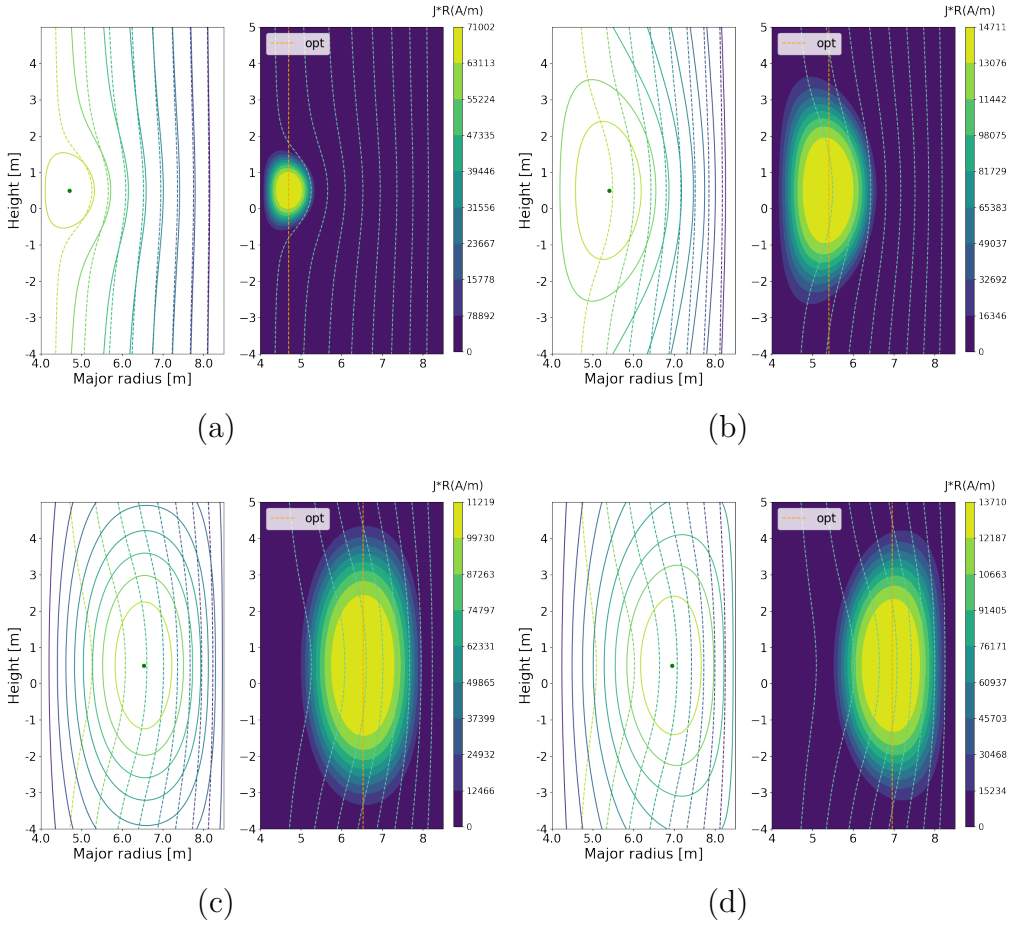

图 4. 具有 $B_{z0} = -0.045T$ 的逃逸电流平衡，以及分别对应 (a) $\gamma = 56$、(b)$\gamma = 116$、(c) $\gamma = 176$ 和 (d) $\gamma = 200$ 的情况。电流剖面随 $m = 2$ 和 $n = 2$ 单调变化，逃逸电子总电流为 $I_{RE} = 200kA$。实线轮廓表示漂移面，虚线轮廓表示磁通面。

漂移面与磁通面之间的偏差很小，但随着 $p_{\parallel}$ 增大，这种偏差持续增大。在较大 $p_{\parallel}$ 极限下，尽管仅剩极少的闭合磁通面，仍然存在显著的闭合漂移面，而且即使在开放磁力线区域，逃逸电子仍能得到良好约束。普通的 Grad-Shafranov方程无法捕捉这一特征，因为电流沿磁通面流动，并且在开放磁力线区域不可能存在闭合电流面。这种逃逸电子漂移与前述电流中心位移密切相关，因为发生漂移的逃逸电子也是主要的电流载流体；因此，任何逃逸电子漂移都会使电流通道发生移动，进而使磁通发生移动，并进一步导致逃逸电子漂移。由此可见，随着逃逸电子动量减小，电流向内位移；而随着动量增大，电流向外位移。

作为对比，我们展示了另一个具有更平坦电流剖面 $m = 2$ 和 $n = 2$的逃逸电流平衡示例，如图 4 所示。可以看到类似的水平

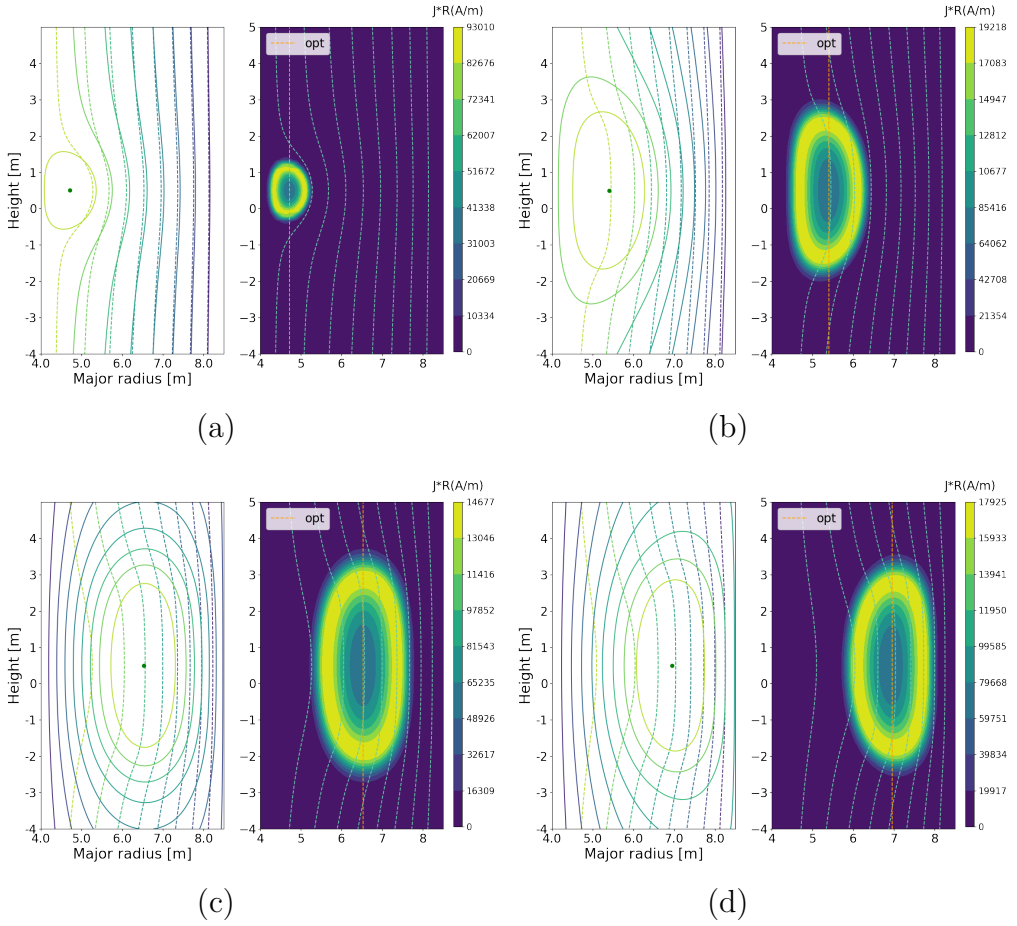

图 5. 具有 $B_{z0} = -0.045T$ 的逃逸电流平衡，以及分别对应的 **(a)** $\gamma = 56$、**(b)** $\gamma = 116$、**(c)** $\gamma = 176$ 和 **(d)** $\gamma = 200$。电流剖面呈非单调分布，$m = 1$ 和 $n = 9$，逃逸电子总电流为 $I_{RE} = 200kA$。实线等值线表示漂移面，虚线等值线表示磁通面。

电流位移，这仅由平行动量的变化引起。与 $m = 1$ 和 $n = 6$ 的情形一致，在磁力线开放的区域仍存在闭合的逃逸电子漂移面。然而，与图 3 相比，图 4 显示，随着水平电流位移的发生，电流通道显著收缩。这是由于逃逸电子电流向壁移动时，“最后闭合漂移面”随之收缩；这模拟了真实电流位移事件中，边缘逃逸电子电流被刮削，并在感应电场作用下重新分布到核心区的过程。比较图 3 和图 4 中电流中心位置相近时的 $p_\parallel$ 值可见，对于相同的电流位移，电流剖面越平坦，$p_\parallel$ 所需的变化越小，这表明其电流中心位置对平行动量变化更为敏感。这可能是因为与峰值电流分布情形相比，平坦电流剖面情形下电流收缩更为显著，从而导致其内部电感变化更大。

现在我们来看看非单调电流剖面的情况，其中 $m = 1$ 和

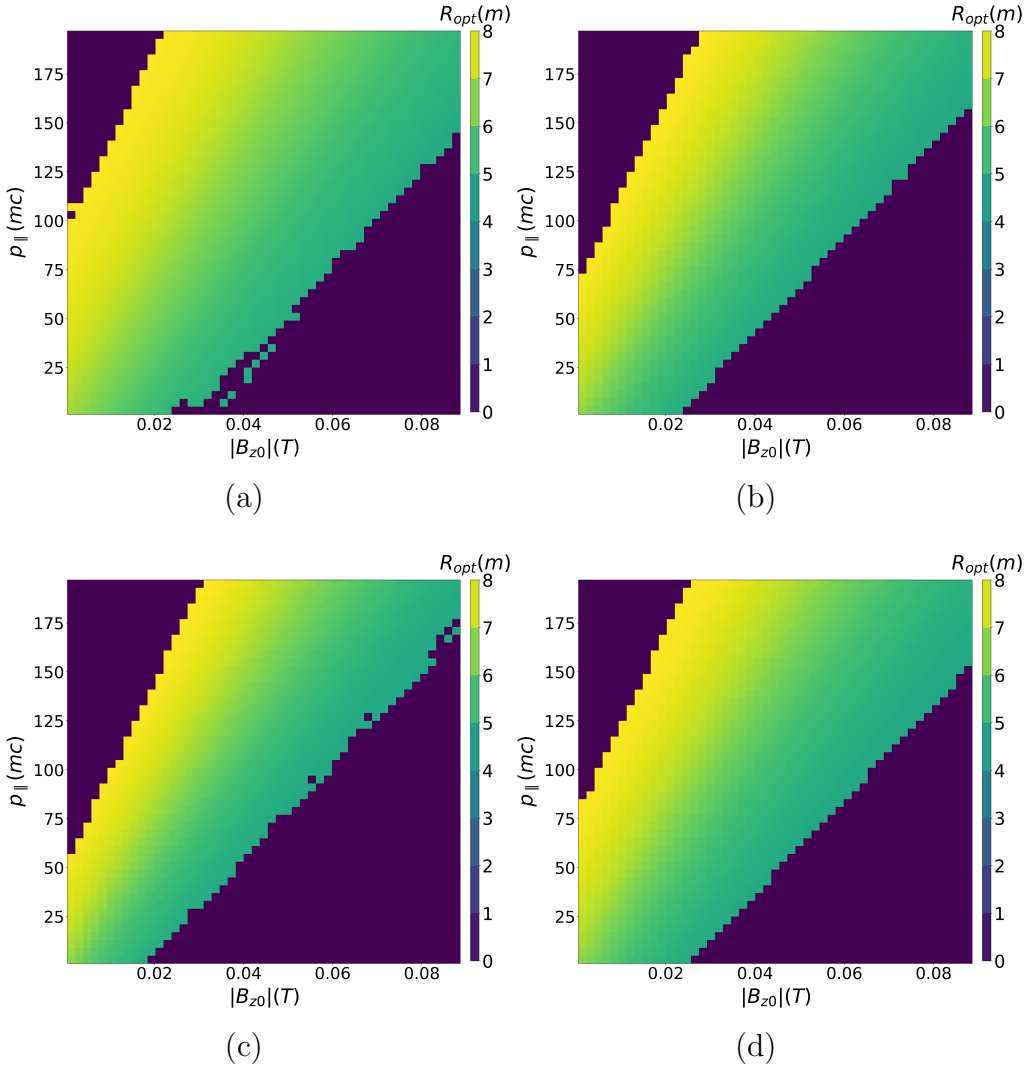

图6。 电流中心大半径位置随 $p_\parallel$ 和 B_{z0} 的变化关系：（a）单调 $m = 1$、$n = 6$ 情形；（b）单调 $m = 2$、$n = 2$ 情形；（c）单调 $m = 5$、$n = 1$ 情形；以及（d）非单调 $m = 1$、$n = 9$ 情形。深蓝色表示由于电流位移过大而无法找到平衡的位置。

$n = 9$ 由公式45描述。图5展示了在几种$p_\parallel$ 取值下的平衡解。比较图5和图4可见，对于相同的$p_\parallel$ 变化，这种中空电流剖面情况与具有 $m = 2$ $n = 2$ 单调电流剖面形状的情况呈现出相似的位移。比较图5(a)、(b)与图5(c)，可以看到边缘电流密度也发生了类似的刮削。对于本文研究的情况，非单调特征似乎并未对电流中心位移的易感性产生显著影响。

图 6 更直观地比较了图 1 所示四种电流剖面中，电流中心位移随 $p_\parallel$ 和 B_{z0} 变化的情况。所有情形的总电流 $I_{RE} = 200kA$均保持不变。图中伪

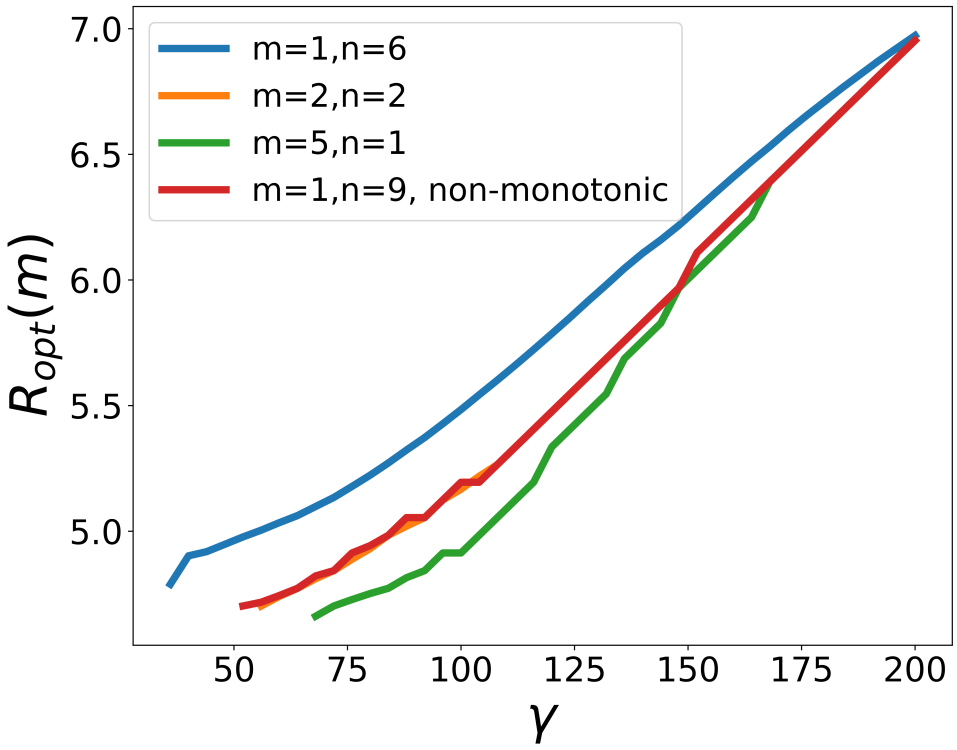

图7. 不同电流剖面形状下，电流中心位移随 $p_{\parallel}$ for $B_{z0} = -0.045T$ for 的变化，且总电流相同 $I_{RE} = 200kA$。

彩色映射表示电流中心的大半径，深蓝色表示由于电流中心位移过大而无法找到平衡的情形。图 6 中的所有图均显示出相同的趋势：垂直磁场（沿 Z 方向向下）增强时，会推动电流中心向内移动，这与常规等离子体平衡的预期一致。与常规平衡不同，在总电流和电流剖面形状不变的情况下，改变逃逸电子的动量会推动电流中心向外移动。比较图 6(a)、(b)和(c)可知，在相同幅度的 $p_{\parallel}$ 变化和 B_{z0} 变化下，电流剖面越平坦，越容易发生电流中心位移，这与我们之前的观察一致；随着电流剖面愈发平坦，能够找到平衡的“边界”也变得更窄。图 7 更直观地展示了这一趋势，其中不同颜色代表不同的电流剖面和 $B_{z0} = -0.045T$。显然，与扁平剖面（橙色和绿色）相比，峰化剖面（蓝色）需要更大的$p_{\parallel}$ 变化才能达到相同的电流中心位移。同样，非单调电流剖面似乎不会显著影响位移敏感性。

此外，由公式（40）可推知，漂移面与磁通面之间的偏差取决于右端项中第二项相对于第一项的大小。

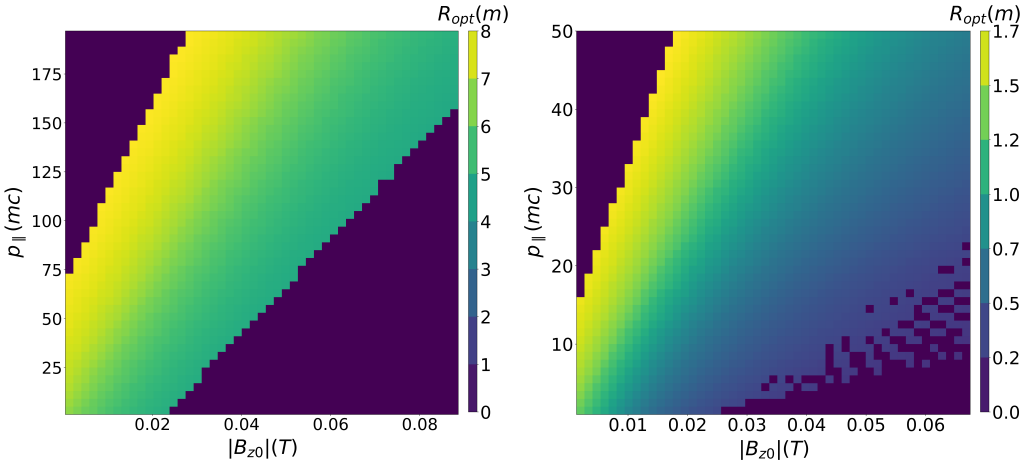

图 8. 电流中心大半径位置随 $p_\parallel$ 和 B_{z0} 变化的关系，(a) 为单调 $m = 2$、 $n = 2$ 情形，(b) 为单调 $m = 2$、 $n = 2$ 情形。图 (a) 和图 (b) 展示了不同装置下 o 点取值范围；图 (a) 取自上文图 6，表示 ITER 装置下 o 点的取值范围为 $m = 2$、 $n = 2$，图 (b) 展示的是 MAST，即小型装置下 o 点的取值范围。所有情形的总电流 $I_{RE} = 200kA$均相同。深蓝色区域表示由于电流位移过大而无法找到平衡的位置。

因此，人们自然会预期，逃逸电子电流越强，极向磁场也越强，上述偏差就会越小；而装置越小、越紧凑，这种偏差就越明显。

为研究这一点，我们首先比较两个具有相同 $I_{RE} = 200kA$且电流剖面单调的情形，其 $m = 2$ 和 $n = 2$分别为不同取值；一个采用我们一直使用的相同 ITER 类几何结构，另一个则采用第 3.1 节所述的 MAST 类几何结构。图 8 展示了电流中心位移随各自的 $p_\parallel$ 和 B_{z0} 变化的关系，请注意坐标轴和色标的范围不同。对于相同大小的 $p_\parallel$，与 ITER 类情形相比，大半径较小的 MAST 类情形会经历更显著的水平漂移。从数学上看，这是由于式 (40) 右端项第二项中的$1/R$ 贡献所致。从物理上看，这是因为更紧凑的装置具有更强的离心效应。因此，我们预计此处展示的逃逸电子漂移行为对于未来的小型紧凑装置会更加重要。

接下来，我们通过两个类似 ITER 的几何结构案例，研究逃逸电子电流的影响：一个采用 $I_{RE} = 200kA$，另一个采用 $I_{RE} = 1MA$。两个案例具有相同的单调电流剖面形状，其中 $m = 2$和 $n = 2$。图 9 展示了各自平衡的示例，以及电流中心位移的伪彩色图。比较图 9(a) 和 (b)，两个

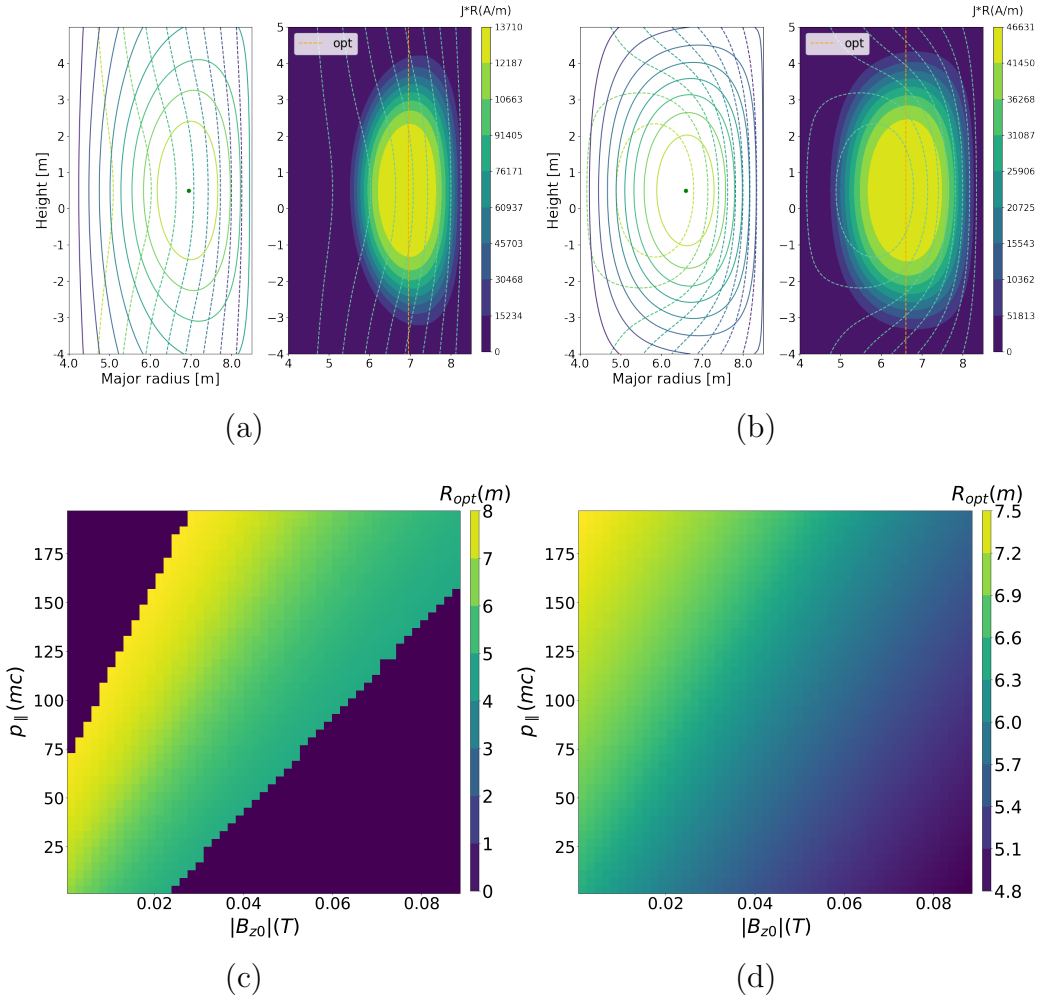

图 9. (a) $I_{RE} = 200kA$ 的平衡解和 (b) $I_{RE} = 1MA$的平衡解。两者均具有 $m = 2$、 $n = 2$ 单调电流剖面、$B_{z0} = -0.045T$和 $\gamma = 100$。两种情况下，电流中心大半径位置随 $p_\parallel$ 和 B_{z0} 的变化分别如 (c) 和 (d) 所示。这里，(c) 图取自图 6，对应于 $I_{RE} = 200kA$；(d) 对应于 $I_{RE} = 1MA$。请注意 (c) 和 (d) 中色标范围的差异。

采用 $p_\parallel = 200mc$ 和 $B_{z0} = -0.045T$的案例中可以看出， $I_{RE} = 1MA$ 案例的漂移面与磁通面之间的偏差较小，电流中心向外位移也较小，这证实了我们先前关于这种偏差取决于 $p_\parallel/qR$ 项相对强度的论述。不过，在平行动量较大的情况下，逃逸电子漂移仍可达到数十厘米，导致逃逸电流平衡显著偏离常规平衡。比较图 9(c) 和 (d)，注意两图的色标范围不同，可以看出，在给定 $p_\parallel$的情况下， $I_{RE} = 1MA$ 案例的电流中心位移敏感性较低，这与我们先前的论述一致。因此，我们预计，上文讨论的逃逸电子漂移及其相关电流位移，主要会在逃逸电流末期产生显著影响

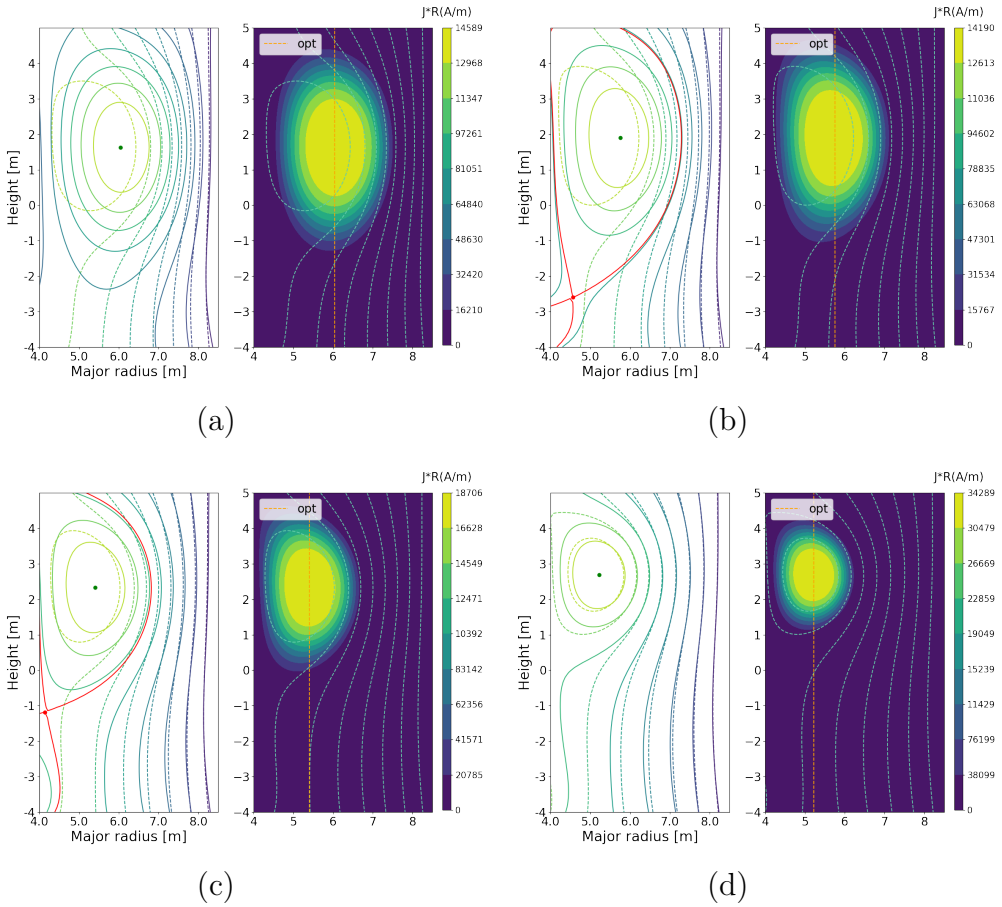

图10. 具有 $B_{z0} = -0.018T$的逃逸电流平衡，以及(a) $\gamma = 48$、(b)$\gamma = 36$、(c) $\gamma = 24$ 和(d) $\gamma = 12$。电流剖面在 $m = 2$ 和 $n = 2$ 处呈非单调，逃逸电子电流总量为 $I_{RE} = 200kA$。本例中添加的线圈位置为 $x_u = 5m$, $x_d = 6m$, $y_u = 7.75m$, $y_d = -7.75m$。本例中添加的线圈电流大小为 $I_u = 85.94kA$, $I_d = 77.35kA$。实线轮廓表示漂移面，虚线轮廓表示磁通面。红色虚线表示分离面。

总逃逸电流较小时的耗尽过程。

3.3. 非对称边界条件下导引中心的位移

最后，我们来看看上下非对称边界条件这一有趣情形，如第 3.1 节所述。我们将上部线圈电流设为$I_u = 85.94kA$，下部线圈电流设为 $I_d = 77.35kA$。两个线圈产生的极向磁场会反映在边界条件中。若干选定的 $p_{\|}$ 和 $B_{z0} = -0.018T$ 对应的此类边界条件下的平衡解如图 10 所示。同样，逃逸电子电流总量为 $I_{RE} = 200kA$ ，且电流剖面随 $m = 2$ 和 $n = 2$单调变化。

从图 10(a) 到 (d) 可以清楚地看到，随着 $p_{\|}$ 减小，和前面的情形一样，出现了向内的水平电流位移，同时还伴有

由于外部极向磁场不对称而产生的垂直位移。在实际托卡马克中，极向场线圈存在一定的上下不对称性相当常见，因此可以预期，实际逃逸电流中的动量变化也会在电流猝灭期间引发相应的垂直位移；这应被视为常规平衡解中垂直位移的额外贡献。在此，我们只需证明逃逸电子动量变化会导致这种垂直位移的存在即可。更详细地研究更真实的极向线圈和二维壁，将留待后续工作。

4. 结论与讨论

针对一种简单情形，即所有电流均由逃逸电子承载，且所有逃逸电子具有相同的平行动量，我们推导出一个 Grad-Shafranov 类方程。该方程直接求解逃逸电子的漂移面，而非磁面。根据逃逸电子的导引中心运动方程，我们得到了适用于逃逸电子的新力平衡方程，并将其与环向对称性结合，得出了上述逃逸电流平衡方程，其中右端项出现了逃逸电子平行动量带来的额外贡献。这一额外贡献会导致逃逸电子漂移面与磁通面之间产生相对漂移。由于逃逸电子是电流载流体，这种漂移自然会导致电流通道位移，进而使磁通面本身发生位移，而这又会进一步引起逃逸电子漂移。给定逃逸电流剖面形状和边界条件后，我们能够通过数值方法求解这一新的平衡方程。

数值研究采用简单的矩形几何，并使用 ITER 类和 MAST 类几何参数开展。研究测试了多种不同的电流剖面形状。总体而言，研究发现，在给定外部垂直磁场 B_{z0} 和给定逃逸电子总电流 I_{RE}的情况下，随着逃逸电子动量降低，电流中心会向内发生大半径方向位移；反之，随着其动量增加，电流中心则会向外位移。与峰值廓线相比，平坦电流剖面对这种位移表现出更高的敏感性，这可能是因为前者的电流刮削更显著。中空电流剖面则不会显著影响这种电流位移敏感性。如上所述，这种电流位移是由逃逸电子与磁通面之间的相对漂移造成的，其影响取决于平行动量相对于极向场的强度，以及大半径。事实上，研究发现，在较小的装置中，逃逸电子漂移更为明显，电流中心也更容易因平行动量的变化而发生位移。同时，如果总电流较大且极向场较强，这种漂移会较弱，电流位移也会较小。因此，我们得出结论：上述效应在逃逸电流耗减过程接近结束、总电流较小时更为显著，而

未来的紧凑型装置也存在这种情况。此外，研究发现，当边界条件存在上下不对称性时（例如真实托卡马克中由不对称极向场线圈造成的情况），水平电流位移会伴随垂直位移。因此，逃逸电子动量的变化也可能进一步促成垂直位移事件。

尽管得到了上述结果，这种新的平衡理论仍有很大的改进空间。例如，可以考虑这样一种情形：平行动量不再对所有逃逸电子都为常数，而是在位形空间中具有分布。这将产生一些与 $\nabla p_{\|}$有关的附加项，也是我们理论自然的后续发展方向。此外，还可以考虑逃逸电子分布在动量空间中并非 δ函数，而是具有分布的情形。要在这种情形下得到力平衡方程，必须从逃逸电子动理学方程构造矩方程，从而推导出逃逸电子流体的运动方程。随后，可以像本文所做的那样，将该力平衡方程与系统的对称性结合起来，得到逃逸电子流体的 Grad-Shafranov 类方程。这也是我们未来将继续开展的工作之一。目前工作的另一种可能扩展，是考虑更真实的二维壁及其相关的极向场，以反映真实托卡马克中的情况，而不是采用本文所用的均匀垂直场。当前简化模型另一种自然的后续扩展，是将研究范围拓展至 $p_{\|}/qBR \propto \epsilon$的更高平行动量区域，而非本文中的 $p_{\|}/qBR \propto \epsilon^2$ 。为此，需要纳入参考文献 [11] 中的曲率项。

尽管如此，本研究提出的逃逸电流平衡理论已能对一些重要的逃逸电流动态特性作出定性估算，例如逃逸电流相对于磁通面的漂移，以及平行动量变化导致的电流位移。基于本文提出的平衡理论及未来沿类似方向开展的研究，可以进一步对逃逸电子主导电流进行稳定性分析，并研究由此产生的逃逸电子输运或终止情景。这将有助于在破裂的电流猝灭阶段更好地控制和消减逃逸电流。

致谢

作者感谢 L.E. Zakharov 提供富有成效的讨论。作者感谢 Ben Dudson 提供原始开源平衡求解器，我们用于逃逸电流平衡的数值求解器正是在此基础上开发的。本研究得到国家磁约束核聚变能发展研究专项（项目编号：2019YFE03010001）和国家自然科学基金委员会（项目编号：11905004）的资助。

参考文献

[1] Lehnen M、Aleynikova K 和 Aleynikov P B 等，2015，《核材料杂志》**463** 39-4 8

[2] Nygren R、Lutz T、Walsh D、Martin G、Chatelier M、Loarer T 和 Guilhem D，1997，《核材料杂志》241 522-527[3] Gilligan J、Niemer K、Bourham M、Croessmann C、Hankins O、Tallavarjula S、Mohanti R 和 Orton N，1990，《核材料杂志》176 779-785[4] Mart´ín-Sol´ís J R、Loarte A 和 Lehnen M，2017，Nucl. Fusion 57 066025[5] Wei Y N，2020，《托卡马克 J-TEXT 等离子体破裂期间逃逸电流的抑制与耗散研究》（博士学位论文）（合肥：华中科技大学）（中文）[6] Paz-Soldan C、Eidietis N W、Liu Y Q、Shiraki D、Boozer A H、Hollmann E M、Kim C C 和 Lvovskiy A，2019，Plasma Phys. Control 61 054001[7] Papp G、Drevlak M、F¨ul¨op T、Helander P 和 Pokol G I，2011，Plasma Phys. Control 53 095004[8] Hollmann E M、Parks P B、Commaux N、Eidietis N W、Moyer R A、Shiraki D、Austin M E、Lasnier C J、Paz-Soldan C 和 Rudakov D L，2015，Phys. Plasmas 22 056108[9] Gobbin M、Li L、Liu Y Q、Marrelli L、Nocente M、Papp G、Pautasso G、Piovesan P、Valisa M、Carnevale D、Esposito B、Giacomelli L、Gospodarczyk M、McCarthy P J、Martin P、Suttrop W、Tardocchi M、Teschke M、ASDEX Upgrade 团队和 EUROfusion MST1 团队，2018，Plasma Phys. Control 60 014036[10] Cary, John R、Brizard 和 Alain J，2009，Rev. Mod. Phys 81 693-738[11] Liu C、Qin H、Eero Hirvijoki、Wang Y L 和 Liu J，2018，Nucl. Fusion 58 106018 [12]Zakharov L E 和 Shafranov V D，1986，《环形构型中载流等离子体的平衡》（纽约：Plenum Press，1986）第164页[13] Galeotti, ,Barnes L, D C、Ceccherini, F、Pegoraro 和 F，2011，Phys. Plasmas 18 082509-082509-6[14] Goedbloed J P，2005，Phys. Plasmas 12 064701-064701-2[15] Sudan R N 和 Rosenbluth M N，1979，Phys. Fluids 22 282[16] Hu D 和 Qin H，2016，Phys. Plasmas 23 032510[17] Chen F F.，2016，《等离子体物理与受控聚变导论》，第3版（瑞士：Springer International Publishing）第222页[18] Miller G 和 Turner L，1981，Phys. Fluids 24 363[19]Dudson B，2022，“FreeGS：自由边界 Grad-Shafranov 求解器”，https://github.com/ freegs-plasma/freegs[20] Gribov Y、Kavin A、Lukash V、Khayrutdinov R、Huijsmans G T A、Loarte A、Snipes J A 和 Zabeo L，2015，Nucl. Fusion 55 073021[21] Riemann J、Smith H M 和 Helander P，2012，Phys. Plasmas 19 012507[22] Zhou R J、Hu L Q、Li E Z、Xu M、Zhong G Q、Xu L Q、Lin S Y、Zhang J Z 和 EAST 团队，2013，Plasma Phys. Control. Fusion 55 055006[23] Istv´an Pusztai、Mathias Hoppe 和 Oskar Vallhagen，2022，J. Plasma Phys. 88 905880409[24] Wesson J，2011，《托卡马克》，第4版（剑桥：牛津大学出版社）第117-119页[25] Hesslow L、Embr´eus O、Stahl A、DuBois T C、Papp G、Newton S L 和 F¨ul¨op T，2017，Phys. Rev. Lett 118 255001[26] Mart´ín-Sol´ís J R 和 S´anchez R，2008，Phys.Plasmas 15 112505[27] Liu C、Eero Hirvijoki、Fu G Y、Brennan Dylan P、Bhattacharjee Amitava、Paz-Soldan Carlos，2018，Phys. Rev. Lett 120 265001