arXiv:2303.01164v1 [math.SG] 2 Mar 2023

b-触手双曲面上的接触结构

MICHAEL VOGEL 和 JAGNA WI´SNIEWSKA

Abstract. 本文将两种研究非紧能量超曲面上哈密顿动力学的不同方法联系起来：带有奇异辛形式的 b-辛几何，以及针对触手状哈密顿量的 Floer 技术。更具体地说，我们展示了如何在触手双曲面上赋予 b-接触结构。我们构造了一个 b^3-辛流形（X, Z, ω_b），使得 $X \setminus Z$ 的每个连通分支都与标准辛空间（$T^*\mathbb{R}^n, \omega_0$）辛同构。对于触手双曲面 $S \subseteq T^*\mathbb{R}^n$，我们考察它在 $X \setminus Z$ 中的副本，并证明它们在（X, Z, ω_b）中的完备化是一个 b-接触型光滑超曲面。

1. Introduction

从物理应用的角度看，给定能级集上是否存在周期轨道是一个自然的问题，也是哈密顿动力学和辛拓扑领域长期关注的核心问题。关于紧致超曲面的首批一般性存在性结果分别由 Rabinowitz [33, 34] 和 Weinstein [40] 给出，适用于超曲面分别为星形和凸的情形。Weinstein 引入了更一般的接触型超曲面定义，并以此提出著名的魏因斯坦猜想：若 S 是任意辛流形 M中的紧致接触型超曲面，则 S 上至少存在一条周期轨道。后来，Viterbo [39] 证明了 $M = \mathbb{R}^{2n}$情形下的猜想。另一方面，自从 Gromov 全纯曲线和 Floer 技术 [17] 被引入辛几何领域以来，这一问题的研究通常基于具有指定渐近条件的全纯曲线空间（或 Floer 轨线空间）的性质。例如，Hofer 对三维球面中魏因斯坦猜想的证明 [20] 以及 Taubes 对任意闭接触三维流形的证明 [38]，都是通过研究给定接触流形的辛化中的全纯曲线而得到的。然而，对于任意维数为 $2n \geq 4$的流形中的紧致接触型超曲面，该猜想仍未解决。

从应用的角度来看，非紧情形下周期轨道的存在问题更有意义，因为它出现在许多自然的动力系统中，例如天体力学，尤其是三体问题。然而，直到最近，人们对非紧能量超曲面上的周期轨道仍知之甚少：即便是 Floer 理论方法，在去掉紧致性假设后也会失效。要弥补紧致性的缺失，还需要额外的几何和拓扑假设。

Date：2023年3月3日。

尽管如此，近年来，非紧哈密顿量与 Reeb 动力学领域取得了新的进展。2009 年，标准辛空间和余切丛中的力学超曲面上的魏因斯坦猜想在 [3] 及其后续工作 [2]，和 [37] 中得到了证明。

2017年，第二作者在其博士论文 [41] 中首次展示了将 Floer 理论方法应用于非紧能量超曲面的成果。她在文中引入了一类定义在具有非紧等值集的 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的所谓触手状哈密顿量，对于这类哈密顿量，Rabinowitz Floer 同调是良定义的。触手状哈密顿量的非紧等值集包含一大类称为触手双曲面的双曲面。随后在 2020年，Fauck、Merry 和第二作者 [16] 计算了触手双曲面的 Rabinowitz Floer 同调，并用它证明了其扰动情形下的魏因斯坦猜想。

与此同时，2017年，Cieliebak、Eliashberg 和 Polterovich [9] 定义并计算了一类触手双曲面的辛同调；Del Pino 和 Presas[11] 则证明了一类特殊开接触流形的魏因斯坦猜想，即那些作为闭流形中接触叶状结构的过扭叶出现的开接触流形。2020年，Ganatra、Pardon 和 Shende [18] 通过引入一类带边界的 Liouville 流形——称为 Liouville 扇区——来处理非紧性问题，并为其定义了包裹 Fukaya 范畴和辛同调。

处理非紧性问题的另一种方法是研究带有奇点的流形。2014 年，Guillemin、Miranda 和 Pires [19] 引入了带有指定奇异超曲面的流形，并将其命名为 b-流形。通过将研究范围限制为与奇异超曲面相切的向量场，他们得以扩展微分形式的空间，使其容许某些类型的奇点。由此可以将辛形式和接触形式分别推广为 b-辛 [19] 形式和 b-接触形式 [27, 5], 。这些结构可用于分析具有非紧能量超曲面的哈密顿系统，其中奇异超曲面表示系统在“极限”状态下的行为。研究表明，这些结构会自然地出现在物理系统中，例如，在某种非引力势下，通过 McGehee 坐标变换 [12, 13, 27, 28], 正则化两个粒子碰撞时对受限三体问题的分析，或在流体动力学 [7, 26]中。最近，Miranda 和 Oms[28] 提出并分析了奇异 Weinstein 猜想，并在此过程中发现了受限性三体问题中非紧能级集上的新周期轨道。此外，Brugu´es、Miranda 和 Oms [6] 成功地为某些b-辛流形定义了 Floer 同调，并用其证明了这一情形下的阿诺德猜想。

显而易见，近年来，人们独立发展出了多种技术，以处理接触流形的非紧性问题。这引出了几个显而易见的问题：这些技术描述的是不同的对象吗？不同技术所适用的非紧超曲面类别是否严格不相交？这些技术之间是否存在关联？是否存在能够以不同方式应用这些技术的对象

？本文将聚焦于上述情形中的两种，即触手双曲面和 b-接触超曲面。我们证明，在这种情况下，最后一个问题的答案是肯定的。更具体地说，我们展示了若干可赋予 b-接触结构的触手双曲面实例。

首先介绍我们将要研究的哈密顿量类。设 (M,ω) 是一个辛流形，具有全局李维尔向量场 Y 以及哈密顿量 $H_0\colon M\to\mathbb{R}$，满足

$$dH_0(Y)(x)-H_0(x)>0 \qquad \forall\, x\in M. \tag{1.1}$$

我们将考虑定义在 $M\times\mathbb{R}^{2k}$ 上的哈密顿量

$$H(x,y):=H_0(x)+y^TAy, \tag{1.2}$$

其中 A 是一个对称的 J-双曲矩阵，也就是说，矩阵 $\mathbb{J}A$ 没有虚特征值。

为表述主定理，我们先引入一些新的术语。若每个 $X\setminus Z$ 的连通分支都与 M 辛同构，则称一个 b-辛流形 (X,Z,ω_b) 与辛流形 (M,ω) 在辛意义下 b-相容。对于给定的子集 $A\subseteq M$，我们可以通过 M 与 $X\setminus Z$ 的各连通分支之间的辛同胚，考察它在 $X\setminus Z$ 中的像。这些像之和在 X 中的闭包称为 A 的 b-像。现在，我们可以通过以下定理表述本文的主要结果：

定理 1.1. 设 $S\subseteq M\times\mathbb{R}^{2k}$ 是一个如 (1.2) 中所述的哈密顿量 H 的正则水平集。则存在一个 b^3-辛流形 (X,Z,ω_b)，使得 S 在 X 中的 b-像是一个 b-接触流形。

下述命题表明，该定理可应用于一大类触手双曲面（事实上，适用于所有已知的触手双曲面）。

命题 1.2. 设 A_0 是一个对称正定的 $2m\times 2m$ 矩阵，且 A_1 是一个对称的、J-全纯的 $2k\times 2k$ 矩阵。那么哈密顿量

$$H(x,y):=\frac{1}{2}x^TA_0x+\frac{1}{2}y^TA_1y-1, \tag{1.3}$$

满足 (1.2)，且其零水平集是一个触手双曲面。

要证明哈密顿量 $H_0(x):=\frac{1}{2}x^TA_0x-1$ 满足 (1.1)，只需取全局李维尔向量场 $Y:=\frac{1}{2}x\partial_x$，并验证 $dH_0(Y)-H_0\equiv 1$。证明 H 是触手型并非易事，相关证明见第 4 节。

若进一步介绍触手状哈密顿量这一类以及 Floer 技术在其中的应用背景，便能更好地理解最后一个结果对于非紧超曲面的魏因斯坦猜想所具有的重要意义。Rabinowitz Floer 同调是由 Cieliebak 和 Frauenfelder 在 [8] 中定义的一种辛不变量，与恰当凸辛流形中的恰当接触超曲面相关。其

生成元是对适当选取的定义哈密顿量所对应的所谓拉比诺维茨作用泛函的临界点。Rabinowitz 最初在 [34] 中使用这一作用泛函，证明了 $\mathbb{R}^{2n}$ 中星形超曲面上周期轨道的存在性。它与弗洛尔的原始辛作用泛函的区别在于多了一个拉格朗日乘子，后者迫使周期解位于指定的能量曲面上。事实上，若超曲面上不存在可缩周期轨道，则 Rabinowitz Floer 同调在紧扰动下保持不变，并且与奇异同调同构 [8, 31]。这些性质使 Rabinowitz Floer 同调成为研究魏因斯坦猜想的理想工具。

然而，在利用 Rabinowitz Floer 同调的性质回答魏因斯坦猜想之前，我们必须先计算它。非紧情形下 Rabinowitz Floer 同调的首次计算由第二作者与 Fauck 和 Merry 于 [16] 完成。在命题 1.2 中，我们扩展了触手双曲面的类别。结果表明，[16] 中的结果同样适用于 (1.3) 中定义的这一更广泛的触手双曲面类别，因此可用于回答其紧扰动的魏因斯坦猜想。

以下推论是将 [16, 定理 1.1] 应用于命题 1.2 中触手双曲面类别的直接结果：

推论 1.3. 设 $S := H^{-1}(0)$ 是如 1.3 中所述，由触手状哈密顿量 H 的零水平集定义的触手双曲面。那么，其 Rabinowitz Floer 同调为

$$RFH_*(S) := \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & *=1-m-k,-k, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

特别地，对于 $m>1$，我们有 $RFH_*(S) \neq H_{*+m+k-1}(S)$。

魏因斯坦猜想对于命题 1.2 中描述的触手双曲面显然成立。然而，弗洛尔理论计算的优势之一在于，它们在受控扰动下保持不变。因此，作为上述推论的直接结果，我们有：

推论 1.4。若 H 是 (1.3) 中的一个哈密顿量，且 $\{S_\sigma\}_{\sigma\in[0,1]}$ 是 S 的一族光滑的 1 参数紧扰动族：$= H^{-1}(0)$ 经过强触手状超曲面，则每个 S_σ 都携带一个闭特征。

定理 1.1 与 1.2 一起在触手状哈密顿量和b-接触几何这两个领域之间架起了桥梁。由 [31] 我们知道，如命题 1.2 所述的触手双曲面的 Rabinowitz Floer 同调是良定义的。特别地，由 [32] 我们知道，与如 1.3 所述二次哈密顿量的拉比诺维茨作用泛函相关联的 Floer 轨线包含于一个紧集中。另一方面，定理 1.1 给出了一个 b-辛流形（X，Z，ω_b）以及 $(X \setminus Z)$ 和 $T^*\mathbb{R}^{m+k}$ 的连通分支之间的一对辛同胚。现在考虑这些 Floer 轨线的像

，这些像通过那些辛同胚与 H 的拉比诺维茨作用泛函相关联。其像将包含在 X 的一个紧子集中，并且与 Z 保持有界距离。因此，可以利用这一结果将 Floer 技术推广到 b-辛情形，并在 b-辛流形中为触手双曲面的 b-接触型像构造 Rabinowitz Floer 同调。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾 [31] 中触手型哈密顿量、辛双曲面和触手双曲面的定义，并简要介绍 b-辛几何。第 3 节给出任意 Weinstein 流形中满足条件 (1.1) 的哈密顿量示例。第 4 节回顾 H¨ormander 关于二次型在辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下的分类，分析这些等价类的不同代表元，并证明命题 1.2。在第 5.3 节中，我们将 McGehee 坐标变换推广到任意维数，然后利用它构造一个与标准辛空间 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 辛 b-相容的 b-辛流形。最后，在第 6 节中证明定理 1.1。此外，在附录 A 中，我们回答关于辛 b-相容流形唯一性的问题；在附录 B 中，我们分析超曲面的 b-像。

致谢。我们感谢 Eva Miranda 通过她的多场讲座将我们带入 b-几何的世界，也感谢她对本文主题给予的鼓励和关注。我们还要感谢 Cedric Oms 与我们就这一主题进行了富有成效的讨论。第一作者感谢 Barney Bramham 就粘合空间进行的有益讨论。第二作者感谢 Will Merry 在她于苏黎世联邦理工学院（ETH）访学期间给予的支持和指导。

第一作者获得德国研究联合会（DFG）协同研究中心 SFB/TRR 191 - 281071066（几何、代数与动力学中的辛结构）的资助。第二作者部分获得瑞士国家科学基金会（SNF）项目 200021 182564“非紧超曲面上的周期轨道”的资助。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. Weinstein 流形中的例子 10 4. 辛双曲面 12 5. 辛兼容的 b 流形 19 6. b-接触结构 29 附录 A. b-辛结构的不唯一性 33 附录 B. 超曲面的 b-像的性质 35 参考文献 38

2. Preliminaries

触手状哈密顿量。本文旨在搭建触手状哈密顿量与 b-接触几何之间的桥梁。首先，让我们探索触手型世界，并回顾 [31] 中触手状哈密顿量的定义。

连续函数 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ 称为强制的，若其所有次水平集 $\phi^{-1}((-\infty, a])$,$a \in \mathbb{R}$ 都是紧的[1]。辛流形 (M,ω) 上两个函数 F 和 H 的泊松括号定义为 $\{F,H\} := \omega(X_F, X_H)$，其中 X_F, X_H 分别是与 H和 F对应的哈密顿向量场，即 $dH = \omega(\cdot, X_H)$ 和 $dF = \omega(\cdot\, X_F)$。回顾一下，李维尔向量场是辛流形 (M,ω) 上满足$d\iota_Y\omega = \omega$的向量场 Y。若存在一个横截于 S的李维尔向量场，则超曲面 $S \subseteq M$ 是接触型的。标准辛空间 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上的李维尔向量场 Y称为渐近正则的，若对于某个正常数 $c > 0$ 及所有$x \in \mathbb{R}^{2n}$，都有 $\|DY(x)\| < c$。

定义 2.1. 记 $\mathcal{H}$ 为一类满足以下公理的光滑哈密顿量 $H\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

（h1）存在一个渐近正则李维尔向量场 $Y^\dagger$ 和常数 c、$c' > 0$，使得 $dH(Y)(x) \geq c|x|^2 - c'$，对所有 $x \in \mathbb{R}^{2n}$均成立；（h2）（次二次增长）$\sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}} \|D^3H(x)\| \cdot |x| < \infty$；（h3）存在一个强制函数 F，其定义在 Σ的某个邻域内，使得对于紧集外的所有$x \in \Sigma$，$\{H,F\}(x) \neq 0$或 $\{H,\{H,F\}\}(x) > 0$。

定义 2.2. 如果存在一个渐近正则李维尔向量场 Y，使得对所有 $x \in H^{-1}(0)$均有 $dH(Y)(x) > 0$，我们称 $H^{-1}(0)$为受限接触型。注意，这意味着 $H^{-1}(0)$是一个光滑超曲面。如果一个哈密顿量$H \in \mathcal{H}$ 的零水平集是受限接触型的，则称其为强触手型。如果删去公理（h3）中要求 F 必须是强制函数这一条件，则称 H 为触手型。

注 2.3. 注意，$\mathcal{H}$ 在紧扰动下封闭。换言之，若 $H \in \mathcal{H}$且 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$，则 $H + h \in \mathcal{H}$。此外，$\mathcal{H}$ 在辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$的作用下保持不变。换言之，若 $H \in \mathcal{H}$ 且 $L \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$，则 $H \circ L \in \mathcal{H}$。

触手状哈密顿量最早由 [32] 和 [31] 研究，第二作者与 Pasquotto 和 Vandervorst 将 Rabinowitz Floer 同调推广到了这一类。

触手双曲面。设 A 为一个非退化的对称矩阵，并考虑定义在 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上的非退化二次哈密顿量 H

$$H(x) \coloneqq \frac{1}{2} x^T A x - 1. \tag{2.1}$$

[1]有时也被一些作者称为 *exhausting*。

超曲面 $S := H^{-1}(0)$ 与 $\mathbb{S}^{l-1} \times \mathbb{R}^{2n-l}$ 微分同胚，其中 $(l, 2n-l)$ 是 A 的惯性指数。双曲面是形如 (2.1) 中 H 且满足 $1 \leq l \leq 2n-1$ 的二次哈密顿量的零水平集。注意，每个双曲面都是接触型超曲面，因为径向李维尔向量场 $Y = \frac{1}{2}x\partial_x$ 满足 $dH_x(Y) = H(x) + 1 = 1\big|_S > 0$。

在 [31, 第 9] 节中，第二作者与 Pasquotto 和 Vandervorst 引入了辛双曲面的概念。辛双曲面是双曲面集合在线性辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下的等价类。若一个辛双曲面存在一个形如 (2.1) 的强触手型代表元，则称其为触手双曲面。

在 [16, 定理 1.1] 中，第二作者与 Fauck 和 Merry 计算了一类触手双曲面的拉比诺维茨-弗洛尔同调，并用其证明了该类双曲面的二次扰动满足魏因斯坦猜想。在命题 1.2 中，我们将触手双曲面的范围扩大到所有存在形如 (1.3) 的代表元的辛双曲面，从而能够将 [16, 定理 1.1] 应用于这一更广泛的类别。

b-流形。我们将首先解释 b-流形的概念。我们将采用 Guillemin、Miranda 和 Pires 在 [19] 中提出的定义。这些定义改编自 Melrose 在 [25] 中提出的类似定义。有关这一主题的良好介绍，另请参阅 [5]。

定义 2.4。如果 M 是一个定向光滑流形，且 Z 是 M 的一个定向超曲面，并称其为奇异超曲面，则称一对 (M, Z) 为 b-流形。与奇异超曲面相切的向量场称为 b-向量场。b-映射是 b-流形之间的映射 $f\colon (M_1, Z_1) \to (M_2, Z_2)$，满足 $f^{-1}(Z_2) = Z_1$，且 f 与 Z_2 横截。

请注意，b-向量场的集合是向量场空间的真子集。由于我们的最终目标是构造辛流形和接触流形的推广，限制向量场空间的做法似乎可能适得其反。但事实上，这使我们能够在后续过程中稍微扩大微分形式的空间。

在一个（连通的）b-流形（M，Z）上，我们可以找到局部坐标（x_1，.....，x_n），使得$Z = x_1^{-1}(0)$。在这些坐标下，b-向量场在局部由 $\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$生成。因此，$b$-向量场在局部构成一个有限生成的自由模。根据 Serre-Swan 定理 [29, 定理 11。32] 存在一个向量丛，其截面恰好是 b-向量场。我们称这个向量丛为 M 的 b-切丛，并记作 ${}^bTM$。其对偶是 b-余切丛，记作${}^bT^*M$。

在 b-流形 (M, Z) 上，k 次 b-微分形式是 $\bigwedge^k \left({}^bT^*M\right)$ 的一个截面。它们记作 ${}^b\Omega^k(M)$。注意，若 $Z \neq \emptyset$，则 b-微分形式包含光滑微分形式，且是其真超集。请注意，微分 d 以自然的方式延拓到这个更大的空间，因此我们也可以讨论闭的和恰当的 b-形式。

我们还可以对由任意自然数 m 对应的向量场 $\left(x_1^m \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 局部生成的模应用 Serre–Swan 定理。由此可得 b^m-切丛，记作 ${}^{b^m}TM$；进而，我们可以像上文那样定义它的对偶，即 b^m-余切丛，记作 ${}^{b^m}T^*M$；最后得到 b^m-微分形式 ${}^{b^m}\Omega(M)$。

注 2.5。注意，对于 $m > 1$， b^m-切丛的定义实际上取决于局部坐标的选择。对此，可以通过指定奇异超曲面的定义函数的某些喷射数据来解决。关于如何详细实现这一点，可参阅 [35]。幸运的是，这对于我们的目的并非必要，因为我们总是为所有示例指定超曲面周围的局部坐标，因此会隐式地使用相应的喷射数据。

b-辛流形。接下来，我们按照 [19,定义 8]，以自然的方式定义 b-辛流形：

定义 2.6。三元组 (M, Z, ω) 称为 b-辛流形，当且仅当 (M, Z) 是一个 b-流形，并且 ω 是 (M, Z) 上的一个闭 b-2-形式，且非退化，即其最高次幂作为最高次 b-形式的一个元素处处不为零。

这一定义（以及此后大多数定义）都可以按通常方式扩展：改用 b^k-2-形式，也可以定义 b^k-辛流形；不过，为避免内容繁杂，后文大多不会明确这样做。

定义 2.7. 在带有 b-辛形式 ω 的 b-辛流形上，若 X 满足 $\mathcal{L}_X \omega = \omega$，则称 b-向量场 X 为 Liouville b-向量场。

b-接触流形。与光滑情形一样， b-辛流形的维数总是偶数，但也存在奇维的对应物。它最初由 Miranda 和 Oms 在 [27, 定义 4.1] 中以下述方式定义：

定义 2.8. 设 (M, Z) 是一个 $(2n+1)$ 维 b-流形。 b-接触结构是由一个 1 次 b-形式的核给出的分布， $\xi = \ker \alpha \subseteq {}^bT^*M, \alpha \in {}^b\Omega^1(M)$，且满足 $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ 作为 ${}^b\Omega^{2n+1}(M)$ 中的一个元素。我们称 α 为 b-接触形式，并称有序对 (M, ξ) 为 b-接触流形。

本文只讨论一种特殊情形： b-接触流形，它们是某些 b-辛流形的超曲面。

定义 2.9. 设 (M^{2n}, Z, ω) 是一个 b-辛流形。若超曲面 S in M is of$b$-接触型，则称其为 b-接触型；如果它与 Z 横截，且存在一个 b-1-形式 α on S，使得 $d\alpha = \omega\big|_S$ and $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ 不处处为零。

若考虑一个 b-流形 (M, Z) 的子流形 $N \subseteq M$，且它与 Z 横截，则 $(N, N \cap Z)$ 是一个 b-流形，并且存在自然嵌入 ${}^bTN \hookrightarrow {}^bTM$ 和 ${}^bT^*N \hookrightarrow {}^bT^*M$。因此，横截条件保证 b-接触型

超曲面是一个 b-流形。特别地， b-接触型超曲面是一个 b-接触流形。一般而言，确定哪些超曲面属于 b-接触型并不显然，但与光滑情形一样，我们可以用 Liouville b-向量场来刻画它们。

引理 2.10。 S 上的 b-辛流形的超曲面是 b-接触型的，当且仅当在 S 的邻域内存在一个与该超曲面横截的李乌维尔 b-向量场。

证明。设 $S \subset M$ 是 b-辛流形（M， Z， ω）的超曲面。假设 V 是一个在 S 附近局部定义且与 S横截的李乌维尔 b-向量场。根据假设， V 与 Z 相切且与 S横截，因此 S 必定与 Z 横截。接下来，我们可以在 S 上定义一个 1-形式，令 $\alpha := (\iota_V \omega)|_S$。由于 V 是李乌维尔的，它满足

$$d(\iota_V \omega) = \omega \qquad \text{and} \qquad \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = \frac{1}{n} \iota_V \omega^n|_S \neq 0.$$

于是 α 满足定义 2.9 的要求，从而使 S 成为 b-接触型超曲面。反方向的证明与光滑情形 [40,引理 2]中的证明类似。

□

b-相容流形。本节将介绍 b-相容流形的概念。基本思路是考虑一个非紧辛流形，并以一种方式构造一个 b-辛流形，使得该 b-辛流形的奇异集对应于原辛流形的某种“紧化”[2]。我们希望这一构造能够帮助我们分析辛流形在无穷远处的行为。

定义 2.11。若每个 b-流形 (X, Z) 的连通分支都与 M 微分同胚，则称其与光滑流形M是 b-相容的。若每个 b-辛流形 (X, Z, ω_b) 的连通分支都与 M 辛同构，则称其与辛流形 (M, ω) 是辛 b-相容的。

注 2.12。 b-相容性与乘积相容：设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形。若 (X, Z, ω_b) 是一个 b- 辛流形，且与 (M_1, ω_1) 辛 b- 相容，则 $(X \times M_2, Z \times M_2, \omega_b \oplus \omega_2)$ 是一个 b- 辛流形，并与 $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ 辛 b-相容。

定义 2.13. 设 (X, Z) 是一个 b-流形，与光滑流形 M b-相容。设$\{C_i\}_{i \in I}$ 为 $X \setminus Z$ 的连通分支，并设 $\varphi_i : M \to C_i$ 为相应的微分同胚。则对于每个子集 $S \subseteq M$，我们将其在 X 中的 b-像定义为集合

$$S_b := \overline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i(S)}.$$

换言之， S_b 是集合 $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(S)$ 在 X 中的完备化。

[2]事实上，我们最终得到的流形并非紧致；不过，径向方向会与 0 一起“翻转”。详情参见第 5 节。

注 2.14。注意， b-像在很大程度上取决于相关的微分同胚 φ_i。此外，由于我们可以将任意 φ_i 与一个从 M 到其自身的任意微分同胚进行复合，因此通常不存在 φ_i 的规范选取。

假设一开始给定的是一个闭子集，那么定义 2.13 中的完备化实际上只会添加属于 Z 的点。采用相同的记号，我们可以将其表述如下：

注 2.15. 设 $S \subseteq M$ 是一个闭子集，则其 b-像在 $X \setminus Z$ 的每个连通分支上的限制，与它在相应微分同胚下的像相同，即：

$$S_b \cap C_j = \phi_j(S) \qquad \forall j \in I.$$

这直接源于这样一个事实：在 C_j 中取闭包，与将 X 中的闭包限制到 C_j 是一回事。

3. Examples in Weinstein manifolds

本节旨在构造满足 (1.1) 的哈密顿量示例，这些示例定义在 Weinstein 流形中。这些示例表明，定理 1.1 可应用于一大类超曲面，而不仅限于触手双曲面。不过，在构造 Weinstein 流形中的超曲面示例之前，我们将先分析由式 (1.2) 中所定义、将要研究的哈密顿量的零水平集给出的超曲面的一些基本几何性质。更确切地说，我们将证明它们是接触型的。

引理3.1. 设 H 是如(1.2)所示的哈密顿量。那么超曲面 $S := H^{-1}(0)$是接触型的。

证明. 考虑 $M \times T^*\mathbb{R}^k$上的李维尔向量场 $Y + \frac{1}{2}y\partial_y$。由(1.1)和(1.2)，对于每个$(x, y) \in S$，我们有

$$\begin{aligned} dH\left(Y + \frac{1}{2}y\partial_y\right)(x,y) &= dH_0(Y)(x) + \frac{1}{2}dH_1(y\partial_y) = dH_0(Y)(x) + H_1(y) \\ &= H(x,y) + (dH_0(Y) - H_0)(x) = (dH_0(Y) - H_0)(x) > 0. \end{aligned}$$

因此，李维尔向量场$Y + \frac{1}{2}y\partial_y$ 处处与 S横截。 □

注3.2. 由(1.1)可知， H_0 的零水平集也是(M, ω)中的接触型超曲面。

为了构造满足 (1.1) 的 Weinstein 流形上的哈密顿量实例，我们先回顾一些定义。若光滑函数 ϕ 的所有临界点都是非退化的，则称 ϕ 为 Morse 函数。若对于流形 M 上的每个黎曼度量 g，都存在 $\delta > 0$，使得流形 M 上的向量场 Y 对 C^1（M）函数 ϕ 是梯度型的，则称 Y 为梯度型向量场：

$$d\phi(Y) \geq \delta\left(\|Y\|^2 + \|\nabla\phi\|^2\right).$$

定义 3.3. Weinstein 流形 (M,ω,Y,ϕ) 是配备完备李维尔向量场 Y 的辛流形 (M,ω)，其中 Y 对强制 Morse 函数 $\phi\colon M\to\mathbb{R}$ 是梯度型的。若 Weinstein 流形 (M,ω,Y,ϕ) 上的 ϕ 只有有限个临界点，则称其为有限型。

引理 3.4. 设 (M,ω,Y,ϕ) 是一个有限型 Weinstein 流形。则存在一个哈密顿函数 $H_0: M\to\mathbb{R}$，满足 (1.1)。

在证明上述引理之前，我们还需要另一个引理，它说明有限型 Weinstein 流形是其某个紧子集的强形变收缩。

引理 3.5. 设 (M,ω,Y,ϕ) 是一个有限型 Weinstein 流形。则存在$a\in\mathbb{R}$，使得 $\phi^{-1}((-\infty,a])$ 是流形 M 的强形变收缩。

证明。记 Y 的流为 ψ^t。根据假设，ϕ 是强制的，且只有有限个临界点，因此存在 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Crit}\,\phi\subseteq\phi^{-1}((-\infty,a))$。我们要证明存在一个光滑函数 $\tau\colon \phi^{-1}([a,+\infty))\to[0,+\infty)$，使得$\phi\circ\psi^{-\tau(x)}(x)=a$ 对所有 $x\in\phi^{-1}([a,+\infty))$ 都成立。

令 $x_0\in\phi^{-1}([a,+\infty))$，并记 $a':=\phi(x_0)$。根据假设，ϕ 是一个强制函数，因此 $\phi^{-1}([a,a'])$是一个紧集。另一方面，Y 是关于 ϕ的梯度型，因此 $d\phi(Y)>0$ 在 $\phi^{-1}([a,\infty))$上。记

$$\delta:=\inf\left\{d\phi(Y)(x)\;\middle|\;a'\le\phi(x)\le a\right\}>0.$$

因此，对所有满足 $0\le\phi(\psi^{-t}(x_0))$ 的 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\phi\circ\psi^{-t}(x_0)=a'-\int_{-t}^{0}dH(Y)(\psi^s(x_0))ds\le a'-\delta t.$$

换言之，ϕ 沿着 $-Y$的流线线性递减。因此，存在$t_0\in\mathbb{R}_+$，使得 $\phi\circ\psi^{-t_0}(x_0)=a$。这保证了函数

$$\begin{aligned}&\tau:\phi^{-1}([a,+\infty))\to[0,+\infty),\\ &\text{such that}\qquad \phi\circ\psi^{-\tau(x)}(x)=a\qquad\forall\,x\in\phi^{-1}([a,+\infty)),\end{aligned}\tag{3.1}$$

有良好定义。注意，$\tau\big|_{\phi^{-1}(a)}\equiv 0$。

因此，映射 $r_0\colon M\times[0,1]\to M$定义为

$$r_0(x,t):=\begin{cases}\psi^{-t\tau(x)}(x) & \text{for}\quad x\in\phi^{-1}([a,+\infty)),\\ x & \text{for}\quad x\in\phi^{-1}((-\infty,a]),\end{cases}$$

是 M的强形变收缩。 □

现在我们可以证明引理 3.4:

引理 3.4 的证明：令 ψ^t 表示李维尔向量场的流。由于 Weinstein 流形是有限型的，存在一个常数 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Crit}\phi\subseteq\phi^{-1}((-\infty,a])$。

根据引理 3.5，存在一个光滑函数 $\tau\colon \phi^{-1}((a,\infty)) \to \mathbb{R}_+$，使得

$$\phi \circ \psi^{-\tau(x)}(x) = a \quad \text{and} \quad \tau \circ \psi^t(x) = t + \tau(x) \qquad \forall\, x \in \phi^{-1}((a,\infty)). \tag{3.2}$$

现在令 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 为一个光滑的非递减函数，使得 $\chi(t) \equiv 0$ 当 $t \le 0$ 时，$\chi(t) \equiv 1$ 当 $t \ge 1$ 时，且 $\chi'(t) > 0$ 在 $(0,1)$ 上。记 $a' := \max\{\phi \circ \psi^1(x) \mid x \in \phi^{-1}(a)\}$。我们定义哈密顿函数

$$H_0(x) := (\phi(x) - a')(1 - \chi \circ \tau(x)) + (\exp \circ \tau(x) - 1) \cdot \chi \circ \tau(x).$$

利用 (3.2)，对每个 $x \in \phi^{-1}([a,\infty))$，代入 $t := \tau(x)$ $y := \psi^{-\tau(x)}(x) \in \phi^{-1}(a)$，并计算

$$\begin{aligned}
H_0 \circ \psi^t(y) &= (\phi \circ \psi^t(y) - a')(1 - \chi(t)) + (\exp(t) - 1)\chi(t), \\
\frac{d}{dt}\left(H_0 \circ \psi^t\right) &= d\phi(Y)(1 - \chi(t)) + \exp(t)\chi(t) + \chi'(t)(\exp(t) - 1 + a' - \phi \circ \psi^t(y)), \\
(dH_0(Y) - H_0) \circ \psi^t(y) &= (d\phi(Y) + a' - \phi \circ \psi^t(y))(1 - \chi(t)) + \chi(t) \\
&\qquad + \chi'(t)(\exp(t) - 1 + a' - \phi \circ \psi^t(y)) \\
dH_0(Y) - H_0(x) &= (d\phi(Y) + a' - \phi(x))(1 - \chi \circ \tau(x)) + \chi \circ \tau(x) \\
&\qquad + \chi' \circ \tau(x)(\exp \circ \tau(x) - 1 + a' - \phi(x)).
\end{aligned}$$

利用最后一个方程，现在我们将证明 $dH_0(Y)$ 在 M 上处处 $- H_0 > 0$。

回想一下，根据构造，对所有 $x \in \phi^{-1}((-\infty,a]) \cup \tau^{-1}((0,1))$，$a' > \phi(x)$。另一方面，根据假设，$\phi$ 是 Y 的梯度型，因此在整个 M 上，$d\phi(Y) \ge 0$。因此，对于所有 $x \in \phi^{-1}((-\infty,a]) \cup \tau^{-1}((0,1))$，$(d\phi(Y) + a' - \phi(x))(1 - \chi \circ \tau(x)) > 0$，其他情况下为零。

根据构造，$\chi'(t)$ 和 $\exp(t) - 1$ 在 $(0,1)$ 上均为正。因此，最后一项 $\chi' \circ \tau(x)(\exp \circ \tau(x) - 1 + a' - \phi(x))$ 对所有 $x \in \tau^{-1}((0,1))$ 均为正，在其他情况下则为零。

最后，根据构造，$\chi(t)$ 对所有 $t > 0$ 均为正，并且对所有 t 均为非负。由此可知，所有项在整个 M 上均为非负，并且在覆盖 M 的两个集合 $\phi^{-1}((-\infty,a]) \cup \tau^{-1}((0,1))$ 和 $\tau^{-1}((0,+\infty))$ 中的任意一个上，至少有两项为正。因此，$dH_0(Y) - H_0 > 0$ 在 M 上处处成立。

□

4. Symplectic hyperboloids

本节的主要目标是证明命题 1.2，即证明形式为 (1.3) 的哈密顿量符合定义 2.1 中触手型的定义。回顾一下，若哈密顿量 H 是触手型的，那么对于所有线性辛同胚 $L \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$，哈密顿量 $H \circ L$ 也同样是触手型的。因此，在证明命题 1.2 之前，我们将先讨论二次哈密顿量集合在 线性辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下的等价类的不同代表元，以寻找一个最容易验证其满足定义 2.1 公理的代表元。

4.1. H¨ormander 分类。首先，我们回顾二次型的 H¨ormander 分类 [21, 定理 3.1]。设 A 为一个 $2n\times 2n$ 的非退化对称矩阵。注意，若 λ 是 $\mathbb{J}A$ 的一个特征值，且其对应的 Jordan 分解中有一个 $m\times m$ 块，那么它的加法逆元及其复共轭也都是$\mathbb{J}A$ 的特征值，且各自对应一个 $m\times m$ 块。

根据 H¨ormander 分类，存在一个辛坐标变换，变换后我们可以假设 $T^*\mathbb{R}^n$ 分解为辛子空间 S_i的直和，使得矩阵 A 是由矩阵 $A_i=A|_{S_i}$组成的对角分块矩阵。每个矩阵A_i 对应于 $\mathbb{J}A$的 Jordan 分解中具有特征值 λ 的一个 $m\times m$ 块，其具体形式如下:

(a) 若 $\Im(\lambda)=0$，则 $S_i:=T^*\mathbb{R}^m$ 且 $A_i:=\left(\begin{smallmatrix}0 & B\\ B^T & 0\end{smallmatrix}\right)$ 是一个 $2m\times 2m$ 分块矩阵，其中

$$B:=\begin{pmatrix}\mu & & & \\ 1 & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \mu\end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中 $\mu:=|\Re(\lambda)|$。换言之， B 是一个 $m\times m$ 矩阵，其对角线上为 μ，而对于 $m>1$，对角线下方为 1。 A_i 的惯性指数为 (m,m)，相应的哈密顿量 H_i: $T^*\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 定义为

$$H_i(q,p):=\mu\sum_{j=1}^{m}q_jp_j+\sum_{j=1}^{m-1}q_{j+1}p_j.$$

(b) 若 $\Re(\lambda)\neq 0$, $\Im(\lambda)\neq 0$，则 $S_i:=T^*\mathbb{R}^{2m}$ 和 $A_i:=\left(\begin{smallmatrix}0 & B\\ B^T & 0\end{smallmatrix}\right)$ 是一个 $4m\times 4m$ 分块矩阵，其中

$$B:=\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & 1 & & & & & \\ -\mu_2 & \mu_1 & & 1 & & & & \\ & & \mu_1 & \mu_2 & 1 & & & \\ & & -\mu_2 & \mu_1 & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & 1 & \\ & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \\ & & & & & -\mu_2 & \mu_1 & \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

其中 $\mu_1:=|\Re(\lambda)|,\mu_2:=|\Im(\lambda)|$。 A_i的惯性指数为 $(2m,2m)$，哈密顿量H_i: $T^*\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$ 为

$$H_i(q,p):=\sum_{j=1}^{2m-2}q_jp_{j+2}+\mu_1\sum_{j=1}^{2m}q_jp_j+\mu_2\sum_{j=1}^{m}\big(q_{2j}p_{2j-1}-q_{2j-1}p_{2j}\big).$$

(c) 若 $\Re(\lambda) = 0$，则 $S_i := T^*\mathbb{R}^m$ 和 $A_i := \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & B^P \end{smallmatrix}\right)$ 是一个 $2m \times 2m$ 分块矩阵，其中

$$B := \gamma \begin{pmatrix} & & & & & \mu \\ & & & & \mu & -1 \\ & & & & & \\ & & \mu & -1 & & \\ \mu & -1 & & & & \end{pmatrix}$$

对于 $\mu := |\Im(\lambda)|$，其中某些 $\gamma = \pm 1$ 和 B^P 是 B 关于反对角线的反射。也就是说，若 $B := \{b_{j,k}\}_{j,\ k=1}^{m}$，则 $B^P := \{b_{\delta(j,k)}\}_{j,\ k=1}^{m}$，其中$\delta(j,k) = (m+1-j, m+1-k)$。若 m 为偶数，则 A_i 的惯性指数为 (m,m)；若 m 为奇数，则为 $(m+\gamma, m-\gamma)$，相应的哈密顿量 $H_i\colon T^*\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 等于

$$H_i(q,p) := \frac{\gamma}{2}\left(\mu \sum_{j=1}^{m} \left(q_j q_{m+1-j} + p_j p_{m+1-j}\right) - \sum_{j=1}^{m-1} \left(q_{j+1} q_{m+1-j} + p_j p_{m-j}\right)\right).$$

H¨ormander 分类确定了在辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下，非退化矩阵等价类的唯一代表（除块的排列外）。特别地，经过线性辛坐标变换后，每个形如 $H(x) := x^T Ax - 1$ 的二次哈密顿量都可以表示为若干哈密顿量 $H_i\colon S_i \to \mathbb{R}$ 之和，

$$H(x) = \sum H_i(x_i) - 1, \qquad H_i(x_i) := \frac{1}{2} x_i^T A_i x_i, \qquad x_i \in S_i,$$

其中 A_i 属于类型 (a)、(b) 或 (c)。

4.2. J-双曲矩阵。本小节将讨论 J-双曲矩阵这一类。J-双曲条件和触手条件在辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 的作用下均保持不变。然而，无论选择哪个代表元，J-双曲条件都很容易验证；而要证明触手条件，使用其他代表元会更方便。因此，本小节将考察辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下 J-双曲矩阵集合的其他代表元。

命题 4.1。设 $2k \times 2k$ 为对称非退化矩阵 A。则下列条件等价：

i) 矩阵 A是 J-双曲的。ii) 存在一个 $k \times k$ 矩阵 B，使得 $B + B^T$ 为正定矩阵，且 A 与矩阵在辛意义下共轭

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

遗憾的是，我们不能仅仅通过应用 H¨ormander 分类来证明命题 4.1，因为类型 (4.1) 和 (4.2) 的矩阵 B 并不总是满足正定条件

即 $B+B^T$ 是正定的。因此，我们需要找到更合适的代表元，这将在下面的命题中完成:

命题 4.2. 设 A 为一个 $2n\times 2n$、非退化的对称矩阵，且 $\mathbb{J}A$没有虚特征值。那么，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个辛坐标变换，使得变换后可以假设 $T^*\mathbb{R}^n$ 分解为辛子空间 S_i的直和，并且矩阵 A 是由矩阵$A_i=A|_{S_i}$组成的对角分块矩阵。每个矩阵 A_i对应于 $\mathbb{J}A$ 的Jordan分解中一个特征值为 λ的 $m\times m$块，其形式如下:

(a) 若 $\Im(\lambda)=0$，则 $S_i\coloneqq T^*\mathbb{R}^m$，且 $A_i\coloneqq\left(\begin{smallmatrix}0 & B_\varepsilon\\ B_\varepsilon^T & 0\end{smallmatrix}\right)$是一个 $2m\times 2m$ 分块矩阵，其中

$$B_\varepsilon\coloneqq\begin{pmatrix}\mu & & & \\ \varepsilon & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon & \mu\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

其中 $\mu\coloneqq|\Re(\lambda)|$。换言之， B_ε 是一个 $m\times m$ 矩阵，对角线上为 μ，而当 $m>1$时，对角线下方为 ε。

(b) 若 $\Re(\lambda)\neq 0$ 且 $\Im(\lambda)\neq 0$，则 $S_i\coloneqq T^*\mathbb{R}^{2m}$ 且 $A_i\coloneqq\left(\begin{smallmatrix}0 & B_\varepsilon\\ B_\varepsilon^T & 0\end{smallmatrix}\right)$ 是一个 $4m\times 4m$ 分块矩阵，其中

$$B_\varepsilon\coloneqq\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \varepsilon & & & & & \\ -\mu_2 & \mu_1 & & \varepsilon & & & & \\ & & \mu_1 & \mu_2 & \varepsilon & & & \\ & & -\mu_2 & \mu_1 & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & \varepsilon & \\ & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \\ & & & & & -\mu_2 & \mu_1 & \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

其中 $\mu_1\coloneqq|\Re(\lambda)|$，$\mu_2\coloneqq|\Im(\lambda)|$。

上述命题的证明结合了 H¨ormander 分类结果 [21, 定理 3.1] 以及下面给出的两个引理:

引理 4.3. 如 (4.1) 中的矩阵 B，对于任意 $\varepsilon>0$，都与如 (4.3) 中的矩阵 B_ε 相似；而如 (4.2) 中的矩阵 B，对于任意 $\varepsilon>0$，都与如 (4.4) 中的矩阵 B_ε 相似。

证明。首先考虑 B 是 (4.1) 中的一个 $m\times m$ 矩阵。对于 $\varepsilon>0$，我们定义一个$m\times m$ 对角矩阵 D_ε，其对角线上为数值 $\{\varepsilon^m,\varepsilon^{m-1},\dots,1\}$。自然地，其逆矩阵 D_ε^{-1} 的对角线上将为 $\{\varepsilon^{-m},\varepsilon^{1-m},\dots,1\}$。我们来计算

$$D_\varepsilon^{-1}BD_\varepsilon\coloneqq\begin{pmatrix}\epsilon^{-m} & & & \\ & \epsilon^{1-m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & & & \\ 1 & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon^{m} & & & \\ & \epsilon^{m-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & & & \\ \varepsilon & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon & \mu\end{pmatrix}=B_\varepsilon,$$

这就证明了我们的结论。

现在考虑如 (4.2) 中的 B $2m \times 2m$ 矩阵。对于 $\varepsilon > 0$，我们定义一个 $2m \times 2m$对角矩阵 D_ε，其对角线上为数字 $\{\varepsilon^m, \varepsilon^m, \varepsilon^{m-1}, \varepsilon^{m-1}, \dots, 1, 1\}$。自然地，其逆矩阵 D_ε^{-1}的对角线上将为 $\{\varepsilon^{-m}, \varepsilon^{-m}, \varepsilon^{1-m}, \varepsilon^{1-m}, \dots, 1, 1\}$。与前一种情况类似，我们可以验证 $B_\varepsilon = D_\varepsilon B D_\varepsilon^{-1}$将具有 (4.4) 中的形式。□

Le命题 4.4。假设两个 $m \times m$矩阵 B和 C相似。那么这两个矩阵 s

$$\begin{pmatrix} & B \\ B^T & \end{pmatrix} \qquad and \qquad \begin{pmatrix} & C \\ C^T & \end{pmatrix},$$

在辛意义下共轭。

证明。首先注意，对于每个 $D \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^m)$，矩阵 $\begin{pmatrix} & \left(D^{-1}\right)^T \\ D & \end{pmatrix}$ 都是辛矩阵。事实上，我们可以计算

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(D^{-1}\right)^T & \\ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & D^{-1} \\ -D^T & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(D^{-1}\right)^T & \\ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & \end{pmatrix}.$$

根据假设，B 和 C 相似，因此存在一个矩阵 $D \in$**GL**$(\mathbb{R}^m)$，使得$C = D^{-1}BD$。接下来只需计算:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & B \\ B^T & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(D^{-1}\right)^T & \\ & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & BD \\ B^T \left(D^{-1}\right)^T & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & D^{-1}BD \\ D^T B^T \left(D^{-1}\right)^T & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & C \\ C^T & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

证明了命题 4.2 后，我们终于可以证明命题 4.1 了：命题 4.1 的证明:

i) $\Rightarrow$ ii):

根据假设，矩阵 $\mathbb{J}A$ 没有虚特征值，因此由命题 4.2 可知，矩阵 A 辛共轭于如下形式的矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其中 B 本身是一个分块矩阵，由矩阵 B_ε 构成，每个矩阵分别对应于一个特征值 $\lambda \in \sigma(\mathbb{J}A)$。在 $\Im(\lambda)$ 的情况下，$= 0$ 则 B_ε 具有式 (4.3) 中的形式；而在 $\Im(\lambda)$ 的情况下，$\neq 0$ 则 B_ε 具有式 (4.4) 中的形式。注意，如果 B_ε 具有式 (4.3) 或式 (4.4) 中的形式，那么

$$B_\varepsilon + B_\varepsilon^T = \begin{pmatrix} 2\mu & \varepsilon & & \\ \varepsilon & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \varepsilon \\ & & \varepsilon & 2\mu \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad B_\varepsilon + B_\varepsilon^T = \begin{pmatrix} 2\mu_1 & & \varepsilon & & \\ & 2\mu_1 & & \ddots & \\ \varepsilon & & \ddots & & \varepsilon \\ & \ddots & & 2\mu_1 & \\ & & \varepsilon & & 2\mu_1 \end{pmatrix},$$

分别地。特别地，在这两种情况下，只要 $\varepsilon < \mu, \mu_1$， $B_\varepsilon + B_\varepsilon^T$ 就是对角占优的。此外，只要 $\varepsilon < |\Re(\lambda)|$，那么根据 Levy-Desplanques定理， [22], [14] 相应的矩阵 $B_\varepsilon + B_\varepsilon^T$ 是正定的。

因此， $B + B^T$ 将是一个分块矩阵，其对角线上是矩阵 $B_\varepsilon + B_\varepsilon^T$，每个矩阵都对应一个特征值 $\lambda \in \sigma(\mathbb{J}A)$。现在，若取 $\varepsilon < \min_{\lambda\in\sigma(\mathbb{J}A)} |\Re(\lambda)|$，那么根据 Levy-Desplanques定理 [22], [14] ，我们可以得出结论： $B + B^T$ 本身是正定的。

ii) $\Rightarrow$i):
我们首先证明，若 $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 且 $B+B^T$正定，则 $\mathbb{J}A = \left(\begin{smallmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{smallmatrix}\right)$没有虚特征值。注意到 $\sigma(\mathbb{J}A) = \sigma(B^T) \cup \sigma(-B) = \sigma(B) \cup (-\sigma(B))$，因此只需证明 B 没有虚特征值。我们将用反证法证明这一点。

假设 B 有一个虚特征值，即存在 $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，使得$i\mu \in \sigma(B)$。换言之，存在一个复向量 v，使得 $Bv = i\mu v$。那么实向量 $v_1 := \Re(v)$ 和 $v_2 := \Im(v)$ 满足

$$Bv_1 = -\mu v_2 \qquad \text{and} \qquad Bv_2 = \mu v_1.$$

由 v 和 μ 均非零，我们可以推断 v_1 和 v_2 均非零。我们可以计算：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_1^T (B + B^T) v_1 &= v_1^T B v_1 = -\mu v_1^T v_2, \\ \frac{1}{2} v_2^T (B + B^T) v_2 &= v_2^T B v_2 = \mu v_2^T v_1. \end{aligned}$$

根据假设， $B + B^T$ 是正定的，但等式右侧的两个数不可能同时为正，因此我们得到了矛盾。

□

4.3. 触手双曲面。现在我们的目标是证明命题 1.2。换言之，我们要证明哈密顿量 (1.3) 的零水平集是一个触手双曲面。显然，所有二次哈密顿量都满足定义 2.1 的公理（h2）。然而，触手状哈密顿量的其他性质验证起来稍具挑战性。因此，我们将采用线性辛群 $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ 作用下各等价类的不同代表元来验证这些条件。

在证明命题 1.2 之前，我们先证明几个引理：

引理 4.5. 设 A 是一个 $2m\times 2m$ 的对称正定矩阵，并设 B 是一个 $k\times k$ 矩阵，使得 $B + B^T$ 是正定的。定义

$$H(x, q, p) := \frac{1}{2} x^T A x + p^T B q - 1 \qquad x \in T^*\mathbb{R}^m,\ (q, p) \in T^*\mathbb{R}^k.$$

那么， H 满足定义 2.1 的公理（h1），且其零水平集属于接触型。

证明。根据假设，矩阵 A 和 $B+B^T$ 均为正定矩阵，因此存在一个正常数 $c>0$，使得

$$x^TAx \geq c|x|^2 \quad \forall\, x \in T^*\mathbb{R}^m \qquad \text{and} \qquad v^T(B+B^T)v \geq c|y|^2 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^k.$$

对于常数 $a := \frac{\|B\|}{c} + 1$，我们定义一个李维尔向量场

$$Y(x,q,p) := \frac{1}{2}(x\partial_x + q\partial_q + p\partial_p) + a(q\partial_p + p\partial_q).$$

现在我们可以计算

$$\begin{aligned}
dH(x,q,p) &= x^TAdx + \frac{1}{2}\left(p^TBdq + q^TB^Tdp\right)\\
dH\left(Y\right) &= \frac{1}{2}x^TAx + p^TBq + a(q^TBq + p^TBp)\\
&= \frac{1}{2}x^TAx + p^TBq + \frac{a}{2}\left(q^T(B+B^T)q + p^T(B+B^T)p\right)\\
&\geq \frac{c}{2}|x|^2 - \|B\||q||p| + \frac{ac}{2}\left(|q|^2+|p|^2\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left(c|x|^2 + (ac-\|B\|)\left(|q|^2+|p|^2\right)\right)\\
&\geq \frac{c}{2}\left(|x|^2+|q|^2+|p|^2\right).
\end{aligned}$$

这证明 H 满足公理（h1）。此外，由于 $0 \notin H^{-1}(0)$，我们还得到 $H^{-1}(0)$ 满足接触型条件。□

引理 4.6。设 $r_1, \dots r_m > 0$ 是一个正数序列，且 B 是一个 $k\times k$ 矩阵，使得 $B+B^T$ 正定。对于 $(x,y) = (x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_m) \in T^*\mathbb{R}^m$，以及 $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^k$，定义

$$H(x,y,q,p) := \sum_{i=1}^m r_i\left(x_i^2+y_i^2\right) + p^TBq - 1$$

那么 H 满足定义 2.1 中的公理（h3）。

证明。定义一个强制函数

$$F(x,y,q,p) := \frac{1}{2}\left(|x|^2+|y|^2+|q|^2+|p|^2\right).$$

计算 $\{H,F\} = dF(X_H)$，其中 X_H是 H 的哈密顿向量场 .

$$\begin{aligned}
dF(x,y,q,p) &= xdx + ydy + qdq + pdp,\\
X_H(x,y,q,p) &= \sum_{i=1}^m r_i\left(y_i\partial_{x_i} - x_i\partial_{y_i}\right) + q^TB^T\partial_q - p^TB\partial_p,\\
\{H,F\}(x,y,q,p) &= dF(X_H) = q^TBq + p^TBp.
\end{aligned}$$

注意，哈密顿量的第一部分对 $\{H,F\}$ 没有贡献——它消失了！

根据假设，$B + B^T$ 是正定的，因此存在一个正数 $0 < c \leq \min_i r_i$，使得对于所有 $v \in \mathbb{R}^k$，都有 $v^T(B + B^T)v \geq c|v|^2$。令 $\delta := \frac{c}{c+\|B\|}$，并估计

$$\begin{aligned}(\{H, F\} + \delta H)(x, y, q, p) &= \frac{1}{2}\left(q^T(B + B^T)q + p^T(B + B^T)p\right) + \delta\sum_{i=1}^{m} r_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) + \delta p^T Bq - \delta \\ &\geq \frac{c}{2}\left(\delta\left(|x|^2 + |y|^2\right) + |q|^2 + |p|^2\right) - \delta\|B\||p||q| - \delta \\ &\geq \frac{c\delta}{2}\left(|x|^2 + |y|^2\right) + \frac{1}{2}(c - \delta\|B\|)\left(|q|^2 + |p|^2\right) - \delta \\ &= \frac{c\delta}{2}\left(|x|^2 + |y|^2 + |q|^2 + |p|^2\right) - \delta\end{aligned}$$

由上述不等式可推得，在紧集 $F^{-1}((-\infty, \frac{1}{c}])$之外，$\{H, F\} > 0$ on $H^{-1}(0)$。因此，H满足公理（h3）。□

命题 1.2 的证明：根据引理 4.1，对于任意形如 (1.3) 的哈密顿量 H，我们可以找到 $L \in$ 辛群$(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $H \circ L$ 满足引理 4.5 的假设。事实上，根据 H¨ormander 分类，我们知道正定矩阵可以进行辛对角化。因此，我们可以假设 $H \circ L$ 具有引理 4.6 中的形式。由此，根据引理 4.5 和引理 4.6，我们得到 $H \circ L$ 是定义 2.1 意义下的触手状哈密顿量。根据注 2.3，我们得到，任何形如 (1.3) 的哈密顿量 H 都是触手状哈密顿量，并且其零水平集是触手双曲面。

□

5. The symplectically b-compatible manifold

本节将考察带有标准辛形式 ω_0 的辛流形 $T^*\mathbb{R}^n$，并展示如何构造一个与 $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ 辛兼容的 b-辛流形 (X, Z)，使得奇异集 Z 对应于点 $\{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q\| = \infty\}$。我们希望这一构造能帮助我们了解原先定义在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上的辛结构在无穷远处的表现。这一构造适用于任意的 $n \in \mathbb{N}$。

我们先回顾粘合空间的定义。一般而言，粘合空间是通过一个同胚将两个拓扑空间粘合在一起而得到的拓扑空间。接下来，我们将引入 n 在 $\mathbb{R}^n$ 上的球坐标，以取代笛卡尔坐标。换言之，我们将证明 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 与 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ 微分同胚，其中 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$。这一微分同胚可提升为余切丛上的辛同胚。利用球坐标，我们定义 McGehee 变换。最后，我们将构造一个与 $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ 相容的适当的 b-辛流形，它是通过将两个 $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ 的副本粘合在一起而得到的粘合空间。

5.1. 粘合空间。粘合空间这一概念最早由 Borsuk 于 [4] 1935年提出，此后得到了广泛研究。一般而言，粘合空间是通过同胚将两个拓扑空间粘合而得到的空间。然而，在

文献中的大多数情况下（例如参见 [15, 定义 6.1]），用于粘合两个拓扑空间的同胚定义在一个闭集上，而就我们的目的而言，我们更希望在一个开集上将它们粘合起来。通过定义在闭集上的同胚粘合两个豪斯多夫空间，其优点在于所得的粘合空间自动成为豪斯多夫空间。遗憾的是，我们能够找到的仅有两个通过定义在开集上的同胚构造粘合空间的例子，是 Luc 和 Placek[23] 于2019年发表的论文，以及 O'Connell [30] 于2020年发表的论文；在这些论文中，他们研究的是非豪斯多夫空间。因此，为使论证完整，我们决定给出通过定义在开集上的同胚粘合而构造粘合空间的方法，并附上证明。

在此，我们给出本文将采用的粘合空间定义：

定义 5.1。设 X 和 Y 是两个拓扑空间。设 $A \subseteq X$ 是一个开子集，并设 $f\colon A \to Y$ 是一个开嵌入。我们定义

$$X \cup_f Y := X \sqcup Y/\sim,$$

通过对所有 $a \in A$ 识别 $a \sim f(a)$。此外，我们在 $X \cup_f Y$ 上定义拓扑，要求投影 $\pi\colon X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ 连续。

在上述定义的假设下，我们能够证明粘合空间的以下性质：

引理 5.2。设 X 和 Y 是两个拓扑空间。设 $A \subseteq X$ 是一个开子集，并设 $f\colon A \to Y$ 是一个开嵌入。则投影 $\pi|_X\colon X \to X \cup_f Y$ 和 $\pi|_Y\colon Y \to X \cup_f Y$ 是开拓扑嵌入。

证明。对于任意开子集 $O \subset X$，我们要证明其在投影 $\pi|_X$ 下的像在 $X \cup_f Y$中是开集。由于 $X \cup_f Y$ 带有商拓扑，这等价于证明其在投影 π 下的原像是 $X \sqcup Y$的一个开子集。但根据定义，我们有：

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = O \sqcup f(O \cap A).$$

显然，$O \cap A$ 在 X 中是开集，且 f 是开嵌入，因此 $f(O \cap A)$ 在 Y中是开集。于是，$\pi^{-1}(\pi(O))$ 确实是 $X \sqcup Y$的一个开子集，从而 $\pi(O)$ 是 $X \cup_f Y$的一个开子集。这证明了 $\pi|_X$ 实际上是一个开映射，因此是到其像上的同胚。通过类似的论证，$\pi|_Y$ 也具有同样的性质。□

引理 5.3。若 X 和 Y 是光滑流形，f 是一个光滑嵌入，且粘合空间 $X \cup_f Y$ 是豪斯多夫的，则 $X \cup_f Y$上存在唯一的光滑结构，使得 $X \cup_f Y$ 是一个光滑流形，并且投影 $\pi|_X$ 和 $\pi|_Y$ 是微分同胚。

证明。 我们将首先证明 $X \cup_f Y$ 是一个拓扑流形。由于根据假设 $X \cup_f Y$是豪斯多夫空间，因此我们只需证明它还是第二可数且局部欧几里得的。由引理 5.2 可知，两个投影 $\pi|_X$ 和 $\pi|_Y$ 都是开拓扑嵌入。因此，$\pi(X)$ 和 $\pi(Y)$ 作为局部欧几里得集合的

同胚像也是局部欧几里得的。因此， $X \cup_f Y$ 也是局部欧几里得的，因为它被局部欧几里得开集所覆盖。同样的证明也表明， $X \cup_f Y$ 是第二可数的。

现在我们将说明光滑嵌入 $\pi|_X$ 和 $\pi|_Y$ 如何在$X \cup_f Y$上定义光滑结构。更确切地说，如果我们在 X上有一个坐标图 (U, ϕ)，那么 $\left(\pi(U)\ \phi \circ (\pi|_X)^{-1}\right)$ 就在 $X \cup_f Y$上定义了一个坐标图。事实上， $\pi(U)$是开集以及 $\phi \circ (\pi|_X)^{-1}$是同胚，这两点都源于 $\pi|_X$ 是到 $X \cup_f Y$中某个开集上的同胚。此外，不难看出，这一构造保持坐标图相容性。

我们可以用相同的构造，将 Y 上的坐标图传递为 $X \cup_f Y$上的坐标图。它们合在一起便覆盖了整个 $X \cup_f Y$。事实上，来自 X 的坐标图也与来自 Y的坐标图相容，因为 $(\pi|_Y)^{-1} \circ \pi|_X = f$是微分同胚。因此，这就在 $X \cup_f Y$上定义了一个光滑图册。

根据构造可知， $\pi|_X$ 和 $\pi|_Y$ 相对于此光滑图册是微分同胚。最后，我们注意到，任何具有此性质的其他光滑图册必然定义相同的光滑结构。

□

最后一步，我们将展示如何用相同的构造将（b-）辛流形粘合在一起:

引理 5.4. 设(M, ω)是一个辛流形，(X, Z, ω_b)是一个维数相同的 b-辛流形。设 $Y \subseteq X$ 是一个与 Z 不相交的开子集，并设$f : Y \to M$ 是一个辛嵌入。若 $M \cup_f X$ 是豪斯多夫空间，则存在唯一的 b-辛结构Ω_b ，定义在$(M \cup_f X, \pi(Z))$上，使得 $\pi^*(\Omega_b\big|_{\pi(X)}) = \omega_b$ 且$\pi^*(\Omega_b\big|_{\pi(M)}) = \omega$。

证明。由于辛嵌入特别是光滑的， f 是到其像上的微分同胚。根据假设，流形 M 和 X 维数相同，因此由反函数定理可知， f 的像在 M 中是开集。由此，我们可以应用引理 5.2 和 5.3，得到 $M \cup_f X$ 是一个光滑流形。此外，由于 $\pi|_X$ 是光滑（且开）的嵌入，因此 $\pi(Z)$是 $M \cup_f X$的一个超曲面。因此，我们可以将 $(M \cup_f X, \pi(Z))$ 视为一个 b-流形。

我们可以利用方程 $\pi^*(\Omega_b\big|_{\pi(X)}) = \omega_b$ 和 $\pi^*(\Omega_b\big|_{\pi(M)}) = \omega$ ，在 $(M \cup_f X, \pi(Z))$ 上定义一个 b-2-形式 Ω_b 。由于根据假设， f 是到其像上的辛同胚，因此该定义良好。最后，由于 ω 和 ω_b 都是非退化的，它作为一个 b-2-形式也是非退化的。□

5.2. 球坐标。本节将定义余切丛 $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 上的 n-球坐标变换。首先，假设我们在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上工作，其笛卡尔坐标为 (q, p)，且配备标准辛形式$\omega_0 := dq \wedge dp$。现在，我们将 $\mathbb{S}^{n-1}$ 视为由下式定义的 $\mathbb{R}^n$ 的子流形

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\psi \in \mathbb{R}^n \mid \psi^T \psi = 1\},$$

并记 $Q := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$。于是可以定义光滑映射：

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to Q, \\ q &\mapsto \left(\|q\|, \tfrac{q}{\|q\|} \right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

这是一个具有如下光滑逆映射的光滑映射：

$$\begin{aligned} F^{-1} : Q &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ (r, \psi) &\mapsto r \cdot \psi. \end{aligned} \tag{5.2}$$

因此它是一个微分同胚。现在我们可以提升 F，从而如 [36, 推论 2.2]所示，得到余切丛上的典范辛形式之间的一个辛同胚：

$$\begin{aligned} F^{\#} : T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\to T^*Q, \\ (q, p) &\mapsto \left(F(q), p \circ DF^{-1} \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

在本论文的后半部分，我们将进行一些显式计算，因此确实需要在 Q 上固定一些坐标。幸运的是，我们只需在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上任取一个图册。通过与 $\mathbb{R}_+$ 上的平凡图取乘积，我们可以对此加以修改，从而得到 Q 上的一个图册。现在设 (O, ϕ) 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上任意图册中的一个坐标图，即 $\phi : O \to U$ 是一个微分同胚，而 $O \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 是一些开子集。我们将 ϕ 的逆映射记为 ψ。一般而言，我们将 ψ 视为依赖于 ϕ 的 Q 中的一个元素。

从现在起，我们用 (r, P_r) 表示 $T^*\mathbb{R}_+$ 上的坐标，用 (ϕ, η) 表示 $T^*\mathbb{S}^{n-1}$上的坐标。通常不失一般性地假设我们在 $\mathbb{R}_+ \times O$内工作，即坐标图 $Id \times \phi$的定义域。用这些新坐标可写出 T^*Q 上的典范辛形式，并且由辛同胚 $F^{\#}$，它满足：

$$\left(F^{\#}\right)^* (dr \wedge dP_r + d\phi \wedge d\eta) = dq \wedge dp. \tag{5.4}$$

基底坐标的坐标变换由下式给出：

$$q = F^{-1} \circ (Id \times \psi)(r, \phi) = r \cdot \psi(\phi).$$

对于余切纤维坐标，有如下引理：

引理 5.5。余切纤维坐标的坐标变换由下式给出：

$$p = \left(P_r \frac{\partial r}{\partial q}^T + \frac{\partial \phi}{\partial q}^T \cdot \eta \right), \tag{5.5}$$

$$(P_r, \eta) = \left(\frac{\partial q}{\partial r}^T \cdot p, \frac{\partial q}{\partial \phi}^T \cdot p \right). \tag{5.6}$$

证明。为了更好地理解映射 $F^{\#}$，我们先来考察映射 $DF^{-1} \colon TQ \to T(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$。它自然是逐纤维线性的，因此可以用一个矩阵表示。事实上，根据 [10, 命题 4.2.13]，相对于基∂_q 和 $\{\partial_r, \partial_\phi\}$，映射 DF^{-1} 由以下矩阵给出：

$$D((Id \times \phi) \circ F)^{-1}.$$

现在注意，如果将 $F^{\#}$ 限制在一个纤维上，那么这恰好对应于 DF^{-1}的对偶映射。根据 [1, 第 3 页，114] 我们知道，相对于对偶基，对偶映射恰好由原矩阵的转置给出。因此，相对于基$\{dq\}$和 $\{dr, d\phi\}$，映射 $F^{\#}$ 在一个纤维上的限制由以下矩阵给出：

$$\left(D((Id \times \phi) \circ F)^{-1}\right)^T.$$

在适当的坐标下，映射 $(Id \times \phi) \circ F$可表示为：

$$(Id \times \phi) \circ F(q) = (r, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

利用这些坐标，我们得到余切纤维坐标的如下表达式：

$$\begin{pmatrix} P_r \\ \eta \end{pmatrix} = \left(D((Id \times \phi) \circ F)^{-1}\right)^T \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r} & \frac{\partial q}{\partial \phi} \end{pmatrix}^T \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r}^T \cdot p \\ \frac{\partial q}{\partial \phi}^T \cdot p \end{pmatrix},$$

这恰好就是等式 (5.6)。对于 (5.5)，我们只需使用逆矩阵：

$$\begin{aligned} p &= \left(D((Id \times \phi) \circ F)\right)^T \cdot \begin{pmatrix} P_r \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} P_r \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial q}^T & \frac{\partial \phi}{\partial q}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_r \\ \eta \end{pmatrix} = P_r \frac{\partial r}{\partial q}^T + \frac{\partial \phi}{\partial q}^T \cdot \eta. \end{aligned}$$

□

引理 5.6。涉及 r 的两个偏导数满足以下关系：

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial q_i} = \psi_i, \tag{5.7}$$

其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$。因此，它们都与 r 无关。

证明。我们可以使用公式 $q = r \cdot \psi$ 以及 ψ 仅依赖于 ϕ 这一事实来计算第一个偏导数：

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial (r \cdot \psi_i)}{\partial r} = \psi_i.$$

对于第二个偏导数，我们改用公式 $r = \|q\| = \sqrt{\sum_i q_i^2}$：

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} = \frac{2q_i}{2\sqrt{\sum_i q_i^2}} = \frac{q_i}{r} = \psi_i.$$

□

涉及 ϕ 的偏导数当然很难计算，因为我们没有 ϕ 的显式公式。相反，我们将引入以下记号：

$$\begin{aligned} \text{We write} \quad \Psi \quad \text{for the matrix} \quad \Psi_{ij} &:= r \tfrac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \\ \text{and} \quad \Phi \quad \text{for the matrix} \quad \Phi_{ij} &:= \tfrac{1}{r} \tfrac{\partial q_j}{\partial \phi_i}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

以下引理将使我们能够推导出这些性质，并在后续计算中加以运用：

引理 5.7。矩阵 Φ 和 Ψ 独立于 r。

证明。首先，我们可以利用公式 $q = r \cdot \psi$证明 Φ 与 r 无关：

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{r}\frac{\partial q_j}{\partial \phi_i} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot \psi_j)}{\partial \phi_i} = \frac{r}{r}\frac{\partial \psi_j}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \phi_i}.$$

由于 ψ 只是 ϕ 的函数，因此它与 r 无关。接下来，我们将证明：

$$\begin{pmatrix} \psi^T \\ \Psi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi & \Phi^T \end{pmatrix}^{-1}. \tag{5.9}$$

由此可知， Ψ 也与 r 无关。根据上文的讨论，我们已经知道矩阵 (ψ, Φ^T) 完全独立于 r。因此可以得出结论：它的逆矩阵（其中包含子矩阵 Ψ^T ）也独立于 r。

因此，现在剩下要证明的就是等式 (5.9)。首先注意，逆映射的雅可比矩阵互为逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r} & \frac{\partial q}{\partial \phi} \end{pmatrix}^{-1}.$$

现在，利用上面的方程、(5.8) 中的记号以及引理 5.6 的结果，我们可以计算：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi^T \\ \Psi^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial q} \\ r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \cdot Id \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r} & \frac{\partial q}{\partial \phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \cdot Id \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial q}{\partial \phi} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \psi & \Phi^T \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

这证明了等式 (5.9)。由于 ψ 和 Φ 都与 r无关，因此由 (5.9) 可知，Ψ也与之无关。□

引理 5.8。此外，以下等式成立：

$$\Psi^T \psi = 0, \tag{5.10}$$

$$\Phi \psi = 0, \tag{5.11}$$

$$\Phi \Psi = Id, \tag{5.12}$$

$$\Psi \Phi + \psi \psi^T = Id. \tag{5.13}$$

证明。由 (5.9) 可得：

$$Id = \begin{pmatrix} \psi^T \\ \Psi^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi & \Phi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^T \psi & \psi^T \Phi^T \\ \Psi^T \psi & \Psi^T \Phi^T \end{pmatrix}.$$

这立即得到等式 (5.10)、(5.11) 和 (5.12)。对于最后一个等式 (5.13)，我们可以反向应用 (5.9)，得到：

$$Id = \begin{pmatrix} \psi & \Phi^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^T \\ \Psi^T \end{pmatrix} = \psi\psi^T + \Phi^T\Psi^T,$$

这当然正好是（5.13）的转置。 □

S将定义 5.8 中 Ψ 和 Φ 的定义代入（5.5）和（5.6），得到 ：

$$p = P_r\psi + \frac{1}{r}\Psi \cdot \eta, \tag{5.14}$$

$$(P_r, \eta) = (\psi^T p, r\Phi p). \tag{5.15}$$

根据引理 5.7，我们知道 ψ、Φ 和 Ψ 都与 r 无关。

5.3. McGehee 变换。本小节旨在构造一个 b-辛流形，使其在辛意义下与（T^*（$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$） ω_0） b-相容。该构造本身并非首次提出，先前已被用于研究 [12,13, 28] 中 $n = 2$ 的限制性三体问题。下面我们将其推广到任意维数 $n > 1$。

为简洁起见，我们引入以下记号：

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &:= \mathbb{R}^2 \times T^*\mathbb{S}^{n-1}, \\ \widetilde{Y} &:= \{0\} \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1}, \\ W^+ &:= (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1}, \\ W^- &:= (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

这样，Y是 W中的一个超曲面，从而使 (W, Y) 成为一个 b-流形。此外，我们有分解 $W = W^- \sqcup Y \sqcup W^+$。注意到 W^+和 W^-都微分同胚于 T^*Q。因此，b-流形 (W, Y) 与 T^*Q是 b-相容的。事实上，通过微分同胚 $F^\#$：由 (5.3) 得到的 $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to T^*Q$，$b$-流形 $(\widetilde{W}, \widetilde{Y})$ 与$T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是 b-相容的。

我们现在的目标是要在 (W, Y) 上构造一个 b-辛结构，使其与 $(T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\ \omega_0)$ 在辛意义下 b-相容。随后，在下一小节中，我们将把缺失的点粘接进去，从而构造一个 b-辛流形 (W, Y, ω_b)，使其与整个 $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ 在辛意义下 b-相容。

接下来，我们想要应用常用于研究受限三体问题的 McGehee 变换 [28]。McGehee 最初引入这一变换是为了研究抛物轨道 [24]。我们可以将这一变换推广到当前情形，定义如下映射：

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{McG}} : \widetilde{W} = \mathbb{R}^2 \times T^*\mathbb{S}^{n-1} &\to T^*\mathbb{R}_+ \times T^*\mathbb{S}^{n-1} = Q, \\ (z, P_r, \phi, \eta) &\mapsto \left(\tfrac{2}{z^2}, P_r, \phi, \eta\right). \end{aligned} \tag{5.17}$$

我们将其在 W^-和 W^+上的限制分别记为 ${\tau^-}_{\mathrm{McG}}$和 ${\tau^+}_{\mathrm{McG}}$。注意，${\tau^-}_{\mathrm{McG}}$和 ${\tau^+}_{\mathrm{McG}}$分别是 W^-、W^+与 T^*Q之间的微分同胚。现在我们将利用这些微分同胚，将标准辛形式 ω_0 从 T^*Q拉回到 $W \setminus Y$。

我们可以计算出这个拉回为:

$$\left(\tau^{\pm}_{\mathrm{McG}}\right)^{*}(\omega) = -\frac{4}{z^3}dz\wedge dP_r + d\phi\wedge d\eta. \tag{5.18}$$

注意，(5.18) 中的辛形式可光滑延拓为 W 上的 b^3-2-形式。因此我们作如下显然的定义:

$$\omega_{\mathrm{McG}} := -\frac{4}{z^3}dz\wedge dP_r + d\phi\wedge d\eta. \tag{5.19}$$

引理 5.9. b-流形 (W,Y) 与 b^3-形式 ω_{McG} 共同定义了一个 b^3-辛流形。此外，$(W,Y,\omega_{\mathrm{McG}})$ 与带有标准辛形式的 $T^*(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 在辛意义下 b-相容。

证明。 b^3-形式 ω_{McG} 显然是闭的，并且作为 b^3-形式是非退化的，因此 $(W,Y,\omega_{\mathrm{McG}})$ 实际上是一个 b^3- 辛流形。

由于我们使用拉回定义了 ω_{McG}， τ^{+}_{McG} 显然是$\sim W+$与 T^*Q之间的辛同胚。对于 τ^{-}_{McG}和 W^-，情况也分别相同。因此， W 与 T^*Q 在辛意义下 b-相容。但我们已在第 5.2 节中看到， $F^{\#}$ 是 $T^*(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 与 T^*Q 之间的辛同胚。因此， W 也与带有标准辛形式的 $T^*(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 在辛意义下b-相容。□

5.4. 辛 b-相容流形。本小节旨在以某种方式修改 $(W,Y,\omega_{\mathrm{McG}})$，使其与所有 $(T^*\mathbb{R}^n,\omega_0)$ 辛 b- 相容。为此，我们定义

$$W := ((\mathbb{R}^{2n}\times\{-1,1\})\sqcup\widetilde{W})/_{\sim},$$

其中关系 $\sim$ 定义如下:

$$\forall\,(x,y)\in W^{\pm}\times\mathbb{R}^{2n}\qquad x\sim(y,\pm1)\quad\Leftrightarrow\quad\tau^{\pm}_{\mathrm{McG}}(x)=F^{\#}(y), \tag{5.20}$$

其中 $F^{\#}$ 是 (5.3) 中的辛同胚。若记 π 为投影$\sim\pi$: $(\mathbb{R}^{2n}\times\{-1,1\})\sqcup W\to W$，则可通过要求 π连续来定义 W的拓扑。

等价地，我们可以使用定义 5.1 将 W 定义为

$$W := (\mathbb{R}^{2n}\times\{-1,1\})\cup_f\widetilde{W},\qquad\text{where}\qquad f:\widetilde{W}\setminus\widetilde{Y}\to T^*\mathbb{R}^n\times\{-1,1\}, \tag{5.21}$$

是由下式定义的开嵌入

$$f(x) := \begin{cases}\left(\left(F^{\#}\right)^{-1}\circ\tau^{-}_{\mathrm{McG}}(x),-1\right) & \text{for } x\in W^-,\\ \left(\left(F^{\#}\right)^{-1}\circ\tau^{+}_{\mathrm{McG}}(x),1\right) & \text{for } x\in W^+.\end{cases} \tag{5.22}$$

f的像是 $T^*(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\{-1,1\}$，且 f是一个辛嵌入，即 $f^*\omega_0=\omega_{\mathrm{McG}}$。记 $Y:=\pi(Y)$。现在我们的目标是利用引理 5.4证明(W,Y)是一个光滑的b-流形，且可赋予唯一的 b-辛结构 ω_b，使得

$$\pi^*(\omega_b\big|_{\pi(\mathbb{R}^{2n}\times\{-1,1\})})=\omega_0\qquad\text{and}\qquad\pi^*(\omega_b\big|_{\pi(\widetilde{W})})=\omega_{\mathrm{McG}}.$$

要应用引理 5.4，我们首先需要证明由 π 在 W 上诱导的拓扑是豪斯多夫的。

引理 5.10. 拓扑空间 W 是豪斯多夫的。

证明。由引理 5.2 可知，投影 $\pi : (\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) \sqcup W \to W$ 是一个开映射。由于 $(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) \sqcup W$ 是豪斯多夫的，因此两个集合 $\pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\})$ 和 $\pi(W)$ 是 W 的开豪斯多夫子集。它们覆盖了 W，因此只需证明它们的补集可以用开邻域分离。

注意到

$$\pi(\widetilde{W}) = W \setminus \pi(T_0^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}), \qquad \text{and} \qquad \pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) = W \setminus Y.$$

现在定义开集

$$\mathcal{O} := \left\{(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|q\| < 1\right\} \times \{-1,1\}, \qquad \mathcal{V} := (-1,1) \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \widetilde{W}.$$

由于 π 是开映射，因此 $\pi(\mathcal{O})$ 和 $\pi(\mathcal{V})$ 是 W 的开子集。此外，我们有以下包含关系

$$W \setminus \pi(\widetilde{W}) = \pi(T_0^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}) \subseteq \pi(\mathcal{O}) \subseteq \pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) = W \setminus Y,$$
$$W \setminus \pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) = Y \subseteq \pi(\mathcal{V}) \subseteq \pi(\widetilde{W}) = W \setminus \pi(T_0^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}).$$

另一方面，由 (5.3)、(5.17) 和 (5.22)，我们有

$$\begin{aligned} f(\mathcal{V} \setminus \widetilde{Y}) &= \left(F^{\#}\right)^{-1} \circ \tau_{\mathrm{McG}} \left((0,1) \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1}\right) \times \{-1,1\} \\ &= \left(F^{\#}\right)^{-1} \left((2,+\infty) \times \mathbb{R} \times T^*\mathbb{S}^{n-1}\right) \times \{-1,1\} \\ &= \left\{(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|q\| > 2\right\} \times \{-1,1\} \end{aligned}$$

因此，集合 $f(\mathcal{V} \setminus Y)$ 与 $\mathcal{O}$ 在 $T^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}$ 中不相交，故由 (5.21)，集合 $\pi(\mathcal{O})$ 与 $\pi(\mathcal{V})$ 在 W 中不相交。

现在我们终于可以证明 W 是豪斯多夫的。取两个不同的点 x、$y \in X$。如果 $\widetilde{}$ 它们都包含在 $\pi(W)$ 中，那么结论成立，因为我们知道 $\pi(W)$ 是豪斯多夫的。若它们都包含在 $\pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\})$ 中，结论也同样成立。最后一种可能是 $x \in W \setminus \pi(W)$ 和 $y \in W \setminus \pi(\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\})$（或反过来）。在这种情况下，它们可由互不相交的开邻域 $\pi(\mathcal{O})$ 和 $\pi(\mathcal{V})$ 分离。□

命题 5.11. 数对 (W,Y) 是一个 b^3-流形，并且它具有一个 b^3-2-形式 ω_b，使得 (W,Y,ω_b) 是一个 b^3-辛流形，并且在辛意义上与携带标准辛结构的 $T^*\mathbb{R}^n$ b-相容。

证明。由引理 5.10 可知，$W = (\mathbb{R}^{2n} \times \{-1,1\}) \cup_f W$ 是豪斯多夫的。因此，W 满足引理 5.4 的所有假设。于是我们立即得到，(W,Y) 实际上是一个 b-流形。此外，由于函数 f 是从 $W \setminus Y$ 到 $T^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}$ 的辛-嵌入，根据引理 5.10，我们可以推知 (W,Y)

具有唯一的 b^3-辛形式 ω_b，使得映射 $\pi|_{T^*\mathbb{R}^n\times\{-1,1\}}$ 和 $\pi|_{\widetilde{W}}$ 是b^3-辛同胚，且映至各自的像。

注意，$\pi(T^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}) = W \setminus Y$。事实上，根据构造，我们有：带有标准辛结构的$T^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\}$与 $W \setminus Y$辛同构。自然地，平凡双重覆盖 $T^*\mathbb{R}^n \times \{-1,1\} \to T^*\mathbb{R}^n$ 限制在任一连通分支上都是辛同胚。因此可得，$W \setminus Y$的每个连通分支都与$(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$辛同构，这正是我们想要证明的。□

注记 5.12。请注意，一般而言，在(W, Y)上可能不止存在一种 b^3-辛结构，使其与 $T^*\mathbb{R}^n$ b-辛相容。在附录 A 中，我们给出一个例子：两种非b-辛同构的 b^m-辛结构，在去掉奇异超曲面后便变得辛同构。因此，相应的b^m-辛流形与相同的辛流形辛 b-相容。

5.5. 李维尔 b向量场。我们的目标是证明定理 1.1。证明给定超曲面上存在接触结构的一种方法，是寻找一个处处与该超曲面横截的李维尔向量场。本小节将构造一个定义在（W, Y, ω_b）上的李维尔 b^3向量场，并在下一节中用它建立接触结构。

令 $h\colon\ \mathbb{R}_+ \to (0,2]$ 是一个光滑的正函数，使得

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{for } t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{t} & \text{for } t \ge 1. \end{cases}$$

按如下方式在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上定义向量场 V：

$$\widehat{V}(q,p) := (p + h(\|q\|)q)\partial_p \qquad (q,p) \in T^*\mathbb{R}^n. \tag{5.23}$$

注意，由于 h 在集合 $\{\|q\| = 0\}$ 的某个邻域内为常数，因此 V 是光滑的。此外，V 满足 $d\iota_{\widehat{V}}\omega_0 = \omega_0$。换言之，$V$ 是（$T^*\mathbb{R}^n, \omega_0$）上的李维尔向量场。

注记 5.13。$p\partial_p$ 当然是指 $\sum_{i=1}^n p_i\partial_{p_i}$。因此，若要将其解释为矩阵乘法，应将其写作 $p^T\partial_p$。为简便起见，只要合适，我们就沿用前一种记法。

^引理 5.14。在（$T^*\mathbb{R}^n$，ω_0）上的李维尔向量场 V唯一延拓为（W，Y，ω_b）上的李维尔b^3-向量场。

证明。式（5.22）中的函数 f 是到其像上的微分同胚。稍微滥用一下记号，我们将其从像上的逆映射记为 $f^{-1}\colon\ T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \{-1,1\} \to W \setminus Y$。由于 V 是 $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ 上的李维尔向量场，要证明它能唯一延拓为 (W, Y, ω_b) 上的李维尔 b^3-向量场，只需证明 $df^{-1}(\widehat{V})$ 能延拓为 $(\widetilde{W}, \widetilde{Y}, \omega_{\mathrm{McG}})$ 上的 b^3-向量场。为此，我们先计算 $dF_{\#}(\widehat{V})$。

注意， r 和 ψ 是 q 的函数，且与 p 无关。因此，由（5.15）可得

$$\partial_p = \frac{\partial P_r}{\partial p}\partial_{P_r} + \frac{\partial \eta}{\partial p}\partial_\eta = \psi^T \partial_{P_r} + r\Phi\partial_\eta.$$

将其代入 (5.24)，并利用 (5.10)、(5.11)、(5.12)、(5.14)、(5.15) 以及$\psi^T\psi = 1$ 这一事实，我们得到

$$dF^{\#}(\widehat{V}) = \left(P_r\psi^T + \frac{1}{r}\eta^T\Psi^T + h(r)r\psi^T\right)\left(\psi\partial_{P_r} + r\Phi^T\partial_\eta\right) = \left(P_r + rh(r)\right)\partial_{P_r} + \eta\partial_\eta.$$

因此,

$$df^{-1}(\widehat{V}) = \left(P_r + \frac{2}{z^2}h\left(\frac{2}{z^2}\right)\right)\partial_{P_r} + \eta\partial_\eta,$$

其中 $\frac{2}{z^2}h(\frac{2}{z^2})$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的光滑正函数，满足

$$\frac{2}{z^2}h\left(\frac{2}{z^2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{for } |z| \le \sqrt{2}, \\ \frac{2}{z^2} & \text{for } |z| \ge 2. \end{cases}$$

由于 $df^{-1}(\widehat{V})$ 在 $\widetilde{Y} = \{0\}\times\mathbb{R}\times T^*\mathbb{S}^{n-1}$的某个邻域内不依赖于 ∂_z或 z，因此它可以唯一地延拓为 $(\widetilde{W},\widetilde{Y})$ 上的一个 b^3-向量场 $\widetilde{V}$。直接计算可得 $d\iota_{\widetilde{V}}\omega_{\mathrm{McG}} = \omega_{\mathrm{McG}}$，这证明了 $\widetilde{V}$是 $(W,Y,\omega_{\mathrm{McG}})$ 上的一个 Liouville b^3-向量场$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。

我们通过如下定义在 (W,Y) 上的向量场 V:

$$V(w) := \begin{cases} d\pi(\widehat{V}) & \text{for } w \in \pi(T^*\mathbb{R}^n\times\{-1,1\}), \\ d\pi(\widetilde{V}) & \text{for } w \in \pi(\widetilde{W}). \end{cases} \tag{5.24}$$

由于 $\widehat{V}$是 $T^*\mathbb{R}^n$上的李维尔向量场，而 $\widetilde{V}$是 $(\widetilde{W},\widetilde{Y},\omega_{\mathrm{McG}})$ 上满足 $df^{-1}(\widehat{V}) = \widetilde{V}$ 的李维尔 b^3-向量场，因此由 (5.22) 可知， V是 (W,Y) 上定义良好的 b^3-向量场。另一方面，根据构造， $\pi\colon (T^*\mathbb{R}^n\times\{-1,1\})\sqcup W \to W$分别限制在 $T^*\mathbb{R}^n\times\{-1,1\}\widetilde{\ }$和 W 上时，都是辛同胚。因此， V是 (W,Y,ω_b) 上的李维尔 b^3-向量场。□

6. The b-contact structure

本节的目标是证明定理 1.1。不过，我们将不采用 (1.2) 中那种形式的哈密顿量，而是考虑一个定义为 $H\colon M\times T^*\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$的哈密顿量

$$H(x,q,p) := H_0(x) + p^TBq, \qquad x\in M,\ (q,p)\in T^*\mathbb{R}^k, \tag{6.1}$$

其中函数 $H_0\colon M\to\mathbb{R}$满足 (1.1)，然而 B是一个非退化的 $k\times k$矩阵，使得 $B+B^T$正定。根据命题 4.1，形式如 (1.2) 和 (6.1) 的哈密顿量在辛坐标变换下等价。特别地，它们的零水平集定义了同一个辛双曲面。因此，不失一般性，从现在起我们将考虑形式如 (6.1) 的哈密顿量。我们记

$S \subseteq M \times T^*\mathbb{R}^k$ H的零水平集。另一方面，我们定义一个 b-辛流形 $(X, Z, \omega \oplus \omega_b)$，其中

$$X := M \times W, \qquad \text{and} \qquad Z := M \times Y, \tag{6.2}$$

且 (W, Y, ω_b) 是上一节定义的 b-辛流形，与 $(T^*\mathbb{R}^k, \omega_0)$ b-相容。记 $\Pi := id \oplus \pi$，其中 π 是投影$\pi\colon T^*\mathbb{R}^k \times \{-1,1\} \sqcup \widetilde{W} \to W$。根据注 2.12 和命题 5.11，$b$-流形 $(X, Z, \omega \oplus \omega_b)$ 与 $(M \times T^*\mathbb{R}^k, \omega \oplus \omega_0)$ b-相容。

注意，我们有以下包含关系

$$\begin{aligned} S \times \{-1,1\} &\subseteq M \times T^*\mathbb{R}^k \times \{-1,1\}, \\ \Pi(S \times \{-1,1\}) &\subseteq X \setminus Z. \end{aligned} \tag{6.3}$$

根据定义 2.13，$(X, Z, \omega \oplus \omega_b)$ 中 S 的 b-像等于

$$S_b := \overline{\Pi(S \times \{-1,1\})}. \tag{6.4}$$

我们的首要目标是证明 S_b 是 X 中的光滑超曲面。

引理 6.1。设 $S \subseteq M \times T^*\mathbb{R}^k$ 是由 (6.1) 中定义的哈密顿量的零水平集定义的超曲面。设 $(X, Z, \omega \oplus \omega_b)$ 是 (6.2) 中定义的 b-辛流形。则按 (6.4) 定义的 X 中 S 的 b-像是一个光滑超曲面。

证明。记 $\widetilde{X} := M \times W$。注意到 $\{X \setminus Z, \Pi(\widetilde{X})\}$ 是 X的一个开覆盖。要证明 S_b 是 X中的光滑超曲面，只需证明它在集合$X \setminus Z$ 和 $\Pi(\widetilde{X})$上的限制都是光滑的。根据构造，投影 Π 在集合$M \times T^*\mathbb{R}^k \times \{-1,1\}$ 上的限制是到其像上的一个微分同胚，因此集合 $\Pi(S \times \{-1,1\})$是 $X \setminus Z$中的光滑超曲面。由 (6.4) 以及 S 是一个闭集这一事实可得 $S_b \cap (X \setminus Z) = \Pi(S \times \{-1,1\})$，因此它也是光滑的。因此，尚待证明的是 S_b 在 $\Pi(\widetilde{X})$上的限制是一个光滑超曲面。

我们先用 $\Pi(\widetilde{X})$的坐标图表示 S_b。由 (6.3) 可知，$S_b \cap (X \setminus Z) = \Pi(S \times \{-1,1\})$，因此其边界是临界集 Z的子集。另一方面，由引理 5.10 可知，$\pi(T_0^*\mathbb{R}^k \times \{-1,1\})$和 Y在 W 中被开集分隔。因此，要确定 $S_b \cap Z$，只需分析 S_b在Z附近的坐标。换言之，我们将范围限制在 $S_b \setminus \Pi\left(M \times T_0^*\mathbb{R}^k \times \{-1,1\}\right) = S_b \cap \Pi(\widetilde{X})$内。由 (5.20) 得到

$$\begin{aligned} \Pi(S \times \{-1,1\}) \cap \Pi(\widetilde{X}) &= \Pi((S \cap (M \times T^*(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})) \times \{-1,1\})) \\ &= \Pi\left((id \oplus \tau_{\mathrm{McG}})^{-1}(id \oplus F^{\#}(S \cap (M \times T^*(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))))\right) \\ &= \Pi\left((id \oplus \tau_{\mathrm{McG}})^{-1}(id \oplus F^{\#}(H^{-1}(0) \cap (M \times T^*(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}))))\right) \\ &= \Pi\left(\left(H \circ (id \oplus (F^{\#})^{-1} \circ \tau_{\mathrm{McG}})\right)^{-1}(0)\right) \\ &= \Pi(S_{\mathrm{McG}}), \end{aligned}$$

其中我们记 $S_{\mathrm{McG}} := \left(H \circ (id \oplus (F^{\#})^{-1} \circ \tau_{\mathrm{McG}})\right)^{-1}(0) \subseteq M \times Q$。

根据构造，投影 $\Pi|_{M\times T^*\mathbb{R}^k\times\{-1,1\}}$ 和 $\Pi|_{\widetilde{X}}$ 在其像上的限制是同胚，因此我们有

$$S_b = \Pi\left(S\times\{-1,1\}\sqcup\overline{S_{\mathrm{McG}}}\right).$$

为分析 S_{McG}，我们首先利用式（5.5）将 H 表示为球坐标（r， P_r， ϕ， η）：$\in T^*\mathbb{R}_+\times T^*\mathbb{S}^{k-1}$

$$\begin{aligned} H\circ\left(id\oplus(F^{\#})^{-1}\right)(x,r,P_r,\phi,\eta) &= H_0(x)+(r\psi)^T B\left(P_r\psi+\frac{1}{r}\Psi\eta\right)\\ &= H_0(x)+rP_r\psi^T B\psi+\psi^T B\Psi\eta, \end{aligned}$$

这里请记住，根据引理 5.7 ψ， Ψ 是 $\phi\in\mathbb{S}^{k-1}$的函数。因此，零水平集由下列方程给出：

$$\left(H\circ\left(id\oplus(F^{\#})^{-1}\right)\right)^{-1}(0)=\left\{H_0(x)+rP_r\psi^T B\psi+\psi^T B\Psi\eta=0\right\}\subseteq M\times Q.$$

~ ~现在我们可以应用 McGehee 变换，并考察 $X\setminus Z$中的原像，其中$\widetilde{Z}:=M\times Y$。将 $r=\frac{2}{z^2}$代入上式，可得

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{McG}} &= \left\{H_0(x)+\frac{2}{z^2}P_r\psi^T B\psi+\psi^T B\Psi\eta=0\right\}\\ &= \left\{2P_r\psi^T B\psi+z^2\left(H_0(x)+\psi^T B\Psi\eta\right)=0\right\}\subseteq\widetilde{X}\setminus\widetilde{Z} \end{aligned} \tag{6.5}$$

~为了更简洁地表达，我们在 X上定义如下光滑映射：

$$H_{\mathrm{McG}}(x,z,P_r,\phi,\eta):=2P_r\psi^T B\psi+z^2\left(H_0(x)+\psi^T B\Psi\eta\right). \tag{6.6}$$

由此，我们可以改写（6.5），得到：

$$S_{\mathrm{McG}}=H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0)\cap(\widetilde{X}\setminus\widetilde{Z}). \tag{6.7}$$

现在我们断言， S_{McG} 在 $\widetilde{X}$ 中的闭包恰好是 $H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)$，由此可得：

$$\overline{S_{\mathrm{McG}}}=H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0). \tag{6.8}$$

首先我们证明：

$$\overline{S_{\mathrm{McG}}}\subseteq H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0). \tag{6.9}$$

由于 $H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)$ 在 $\widetilde{X}$ 中是闭集，并且根据 (6.7) 它包含 S_{McG}，因此可立即推出它也包含其闭包，从而证明了 (6.9)。

接下来，我们希望证明：

$$H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0)\subseteq\overline{S_{\mathrm{McG}}}. \tag{6.10}$$

~ ~根据定义， S_{McG} 是一个零水平集，因此它是 $X\setminus Z$中的闭集。由于在 $X\setminus Z$ 中取~ ~ ~ ~闭包与将 X 中的闭包限制到 $X\setminus Z$是同一回事，因此可推出~ ~$S_{\mathrm{McG}}=\overline{S_{\mathrm{McG}}}\cap(X\setminus Z)$。再结合 (6.7)，我们得到：

$$S_{\mathrm{McG}}\cap(\widetilde{X}\setminus\widetilde{Z})=H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0)\cap(\widetilde{X}\setminus\widetilde{Z}). \tag{6.11}$$

因此，只需证明：

$$H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0)\cap\widetilde{Z}\subseteq\overline{S_{\mathrm{McG}}}. \tag{6.12}$$

等价地，我们需要证明，借助 S_{McG} 中的序列，我们可以到达 $H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\widetilde{Z}$ 中的所有点。为了确定 $H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\widetilde{Z}$ 是什么，我们将 $z=0$ 代入方程 $H_{\mathrm{McG}}(x,z,P_r,\phi,\eta)=0$。由此得到：

$$H^{-1}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\widetilde{Z}=\{2P_r\psi^TB\psi=0,z=0\}.$$

我们可以改写 $2\psi^TB\psi=\psi^T\left(B+B^T\right)\psi$。由于我们知道 $B+B^T$ 是正定的，且 ψ 是一个单位向量，因此它始终为正。因此，我们有

$$H^{-1}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\widetilde{Z}=\{P_r=0,z=0\}.$$

现在取定一点 $w_0:=(x_0,z_0,P_0,\psi_0,\eta_0)\in H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\widetilde{Z}$。当然，这立即给出 $z_0=P_0=0$。我们可以通过令 $x_n:=x_0,z_n:=\frac{1}{n},\psi_n:=\psi_0$ 且 $\eta_n:=\eta_0$，定义一个点列 $w_n:=(x_n,z_n,P_n,\psi_n,\eta_n)\in W$。接着，我们可以选取 P_n，使得 w_n 属于 S_{McG}。根据 (6.7)，我们知道这等价于：

$$0=H_{\mathrm{McG}}(x_n,z_n,P_n,\psi_n,\eta_n)=2P_n\psi_0^TB\psi_0+\frac{1}{n^2}\left(H_0(x_0)+\psi_0^TB\Psi\eta_0\right),$$

$$P_n=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{H_0(x_0)+\psi_0^TB\Psi\eta_0}{2\psi_0^TB\psi_0}.$$

由于如上所述，$2\psi_0^TB\psi_0$ 为正，因此这只是一个常数乘以 $\frac{1}{n^2}$。所以，当 $n\to\infty$ 时，z_n 和 P_n都趋于 0（因而 z_0 和 P_0 分别也趋于 0），于是我们有：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,z_n,P_n,\psi_n,\eta_n)=(x_0,z_0,P_0,\psi_0,\eta_0).$$

这意味着 w_0 确实是 $\overline{S_{\mathrm{McG}}}$的一部分。由于 w_0 是 $H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)\cap\tilde{Z}$中的任意一点，我们得到（6.12）。结合（6.11），可得（6.10）；再将其与（6.9）结合，最终得到（6.8），即 $\overline{S_{\mathrm{McG}}}=H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)$。

现在我们已经得到了 $\overline{S_{\mathrm{McG}}}$的一个简洁公式，可以证明它是 X中的一个超曲面。为此，我们先计算 H_{McG} 关于 P_r的偏导数：

$$\frac{\partial H_{\mathrm{McG}}}{\partial P_r}=2\psi^TB\psi.$$

我们再次利用 $2\psi^TB\psi$ 始终为正这一点。因此，H_{McG} 没有奇点，特别是 0 是一个正则值。由此可知，$\overline{S_{\mathrm{McG}}}=H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)$是 $\widetilde{X}$中的一个（光滑）超曲面。由于 $\Pi|_{\widetilde{X}}$ 是到其像上的一个微分同胚，因此 $\Pi(H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0))=S_b\cap\Pi(\widetilde{X})$是 $\Pi(X)$中的一个光滑超曲面，从而完成证明。□

现在，我们终于可以证明本文的主定理了：

定理 1.1 的证明：由引理 6.1 可知，b-image S in (X,Z) 是一个光滑超曲面 S_b，它可表示为两个不同哈密顿量的零水平集：$S_b\cap\Pi(M\times T^*\mathbb{R}^m\times\{-1,1\}=\Pi(H^{-1}(0)\times\{-1,1\})$，而 $S_b\cap\Pi(\widetilde{X})=\Pi\left(H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0)\right)$。由引理 2.10，要证明 S_b 是 $(X,Z,\omega\oplus\omega_b)$ 中的接触型超曲面，只需找到一个横截于 S_b 的李维尔向量场。

令 Y 为公理 (1.1) 中 (M,ω) 上的全局李维尔向量场，并令 V 为 (5.24) 中定义的李维尔向量场。我们将证明 $Y+V$ 与 S_b 横截。

注意， $\{M\times\pi(T^*\mathbb{R}^k\times\{-1,1\})\ M\times\pi(\{|z|<\sqrt{2}\})\}$ 是 X 的一个开覆盖。因此，只需证明

$$dH\left(Y+\widehat{V}\right)\neq 0 \quad \text{on} \quad S\subseteq M\times T^*\mathbb{R}^k, \tag{6.13}$$

$$dH_{\mathrm{McG}}\left(Y+\widetilde{V}\right)\neq 0 \quad \text{on} \quad H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0)\cap\left(M\times\{|z|<\sqrt{2}\}\right)\subseteq\widetilde{X}, \tag{6.14}$$

其中，最后一个等式是由以下事实得到的： $\Pi(H^{-1}{}_{\mathrm{McG}}(0))=S_b\cap\Pi(\widetilde{X})$.

利用 (5.24)，我们可以计算：

$$\begin{aligned} dH\left(Y+\widehat{V}\right) &= \left(dH_0+p^TBdq+qB^Tdp\right)\left(Y+(p+h(|q|)q)\partial_p\right)\\ &= dH_0(Y)(x)+p^TBq+h(|q|)q^TBq\\ &= H(x,q,p)+(dH_0(Y)-H_0)(x)+\frac{1}{2}h(|q|)q^T(B+B^T)q. \end{aligned}$$

根据定义， H 在 S 上消失，因此第一项为零。另一方面，由 (1.1) 可知，第二项严格为正。最后，根据假设，矩阵$B+B^T$ 是正定的，且 h 非负，因此第三项非负。因此，该和在 $S:=H^{-1}(0)$上为正，这就证明了 (6.13)。

为证明 (6.14)，首先注意到

$$\widetilde{V}(z,P_r,\phi,\eta)=(P_r+1)\partial_{P_r}+\eta\partial_\eta \quad \text{on} \quad \left\{|z|<\sqrt{2}\right\}\subseteq\widetilde{W}.$$

因此，利用 (6.6)，我们得到

$$\begin{aligned} dH_{\mathrm{McG}}\left(Y+\widetilde{V}\right) &= \left(z^2dH_0+2\psi^TB\psi dP_r+z^2\psi B\Psi d\eta\right)\left(Y+(P_r+1)\partial_{P_r}+\eta\partial_\eta\right)\\ &= z^2dH_0(Y)+2(P_r+1)\psi^TB\psi+z^2\psi B\Psi\eta\\ &= H_{\mathrm{McG}}+z^2(dH_0(Y)-H_0)+\psi^T(B+B^T)\psi. \end{aligned}$$

回顾一下，根据假设 (1.1)， $dH_0(Y)-H_0$ 严格为正。另一方面，根据假设， $B+B^T$ 是正定的，并且 $|\psi|=1$，因此

$$dH_{\mathrm{McG}}\left(Y+\widetilde{V}\right)\geq\psi^T(B+B^T)\psi>0 \quad \text{on} \quad H_{\mathrm{McG}}^{-1}(0),$$

这证明了 (6.14)。结合 (6.13) 和 (6.14)，我们得出李维尔向量场$Y+V$横截于 S_b，这意味着限制在 TS_b 上的 1-形式 $\iota_Y\omega+\iota_V\omega_b$ 定义了一个 b接触结构。

□

Appendix A. Non-uniqueness of b-symplectic structures

在这些附录中，我们将给出一些反例，以帮助理解在 b-相容流形的情形下可能出现的问题。首先，我们将考察 b^m-辛结构的唯一性。具体而言，一个自然的问题是：这些结构是否完全由它们在临界集之外的表现所决定？这个问题可以更精确地表述如下：

问题 1. 设 ω_1 和 ω_2 是 b-流形 (M, Z) 上的两个 b^m-辛形式，并且辛流形 $(M \setminus Z, \omega_1)$ 与 $(M \setminus Z, \omega_2)$ 辛同构。那么，这两个b^m-辛流形 (M, Z, ω_1) 和 (M, Z, ω_2) 是否必然 b-辛同构?

事实证明，这个问题的答案是否定的。考虑流形

$$M := T^*\mathbb{T}^2 = \left\{((\phi, \theta, s, t) \,\middle|\, \phi, \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}; s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

以及超曲面 $Z := \{\phi = 0\} \subset M$。于是我们可以在 b-流形 (M, Z) 上定义以下两个 b^2-辛形式:

$$\omega_1 := \frac{1}{\sin\phi^2} d\phi \wedge d\theta + ds \wedge dt, \qquad \omega_2 := \frac{1}{\sin\phi^2} d\phi \wedge ds + d\theta \wedge dt.$$

容易看出， ω_1 和 ω_2 是定义良好、闭且非退化的 b^2-2-形式，定义在 (M, Z) 上。因此，(M, Z, ω_1) 和 (M, Z, ω_2) 确实是定义良好的 b^2-辛流形。此外，可以证明它们并不 b-辛同构。为此，只需注意到 ω_2 是恰当的，而 ω_1 不是（见引理 A.2）。这直接说明它们并不 b-辛同构，因为任何 b-辛同胚都会在b^2-上同调上诱导一个同构。就我们的目的而言，只需知道 b^2-上同调是定义良好的；有关细节，请参见 [35] 的原始构造。最后，在引理 A.3 中，我们证明移除奇异集 Z 后，得到的两个流形 $(M \setminus Z, \omega_1)$ 和 $(M \setminus Z, \omega_2)$ 辛同构。

注 A.1. 注意， ω_1 和 ω_2 是用相同的坐标定义的，因此它们自动属于同一个 b^2-形式空间，我们无需担心指定注 2.5 中提到的喷射数据。

引理 A.2. b^2-2-形式 ω_2 是恰当的，而 ω_1 不是。

证明。事实上，我们有

$$\omega_2 = d\left(-\frac{s}{\sin\phi^2} d\phi - t d\theta\right).$$

现在假设 ω_1 也是恰当的，即存在一个 b^2-1-形式 α ，使得 $\omega_1 = d\alpha$。于是我们得到两个函数，分别定义为 $\gamma := \alpha(\partial_\phi)$ 和 $\xi := \alpha(\partial_\theta)$。由于 ∂_θ 是一个 b^2-向量场，而 ∂_ϕ 不是，因此 ξ 是在整个 M 上良定义的光滑函数，而 γ仅在限制到 $M \setminus Z$时才有定义。对于这两个函数，我们得到方程:

$$\frac{1}{\sin\phi^2} = \omega_1(\partial_\phi, \partial_\theta) = d\alpha(\partial_\phi, \partial_\theta) = \mathcal{L}_{\partial_\phi}(\alpha(\partial_\theta)) - \mathcal{L}_{\partial_\theta}(\alpha(\partial_\phi)) - \alpha([\partial_\phi, \partial_\theta]) = \frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta},$$

这里我们用到了 $[\partial_\phi, \partial_\theta] = 0$ 这一事实。若固定某个 $\phi \neq 0$ 和 $s = t = 0$ ，就可以在 $\theta \in [0, \pi]$ 上积分，得到:

$$\frac{\pi}{\sin\phi^2} = \int_0^\pi \frac{\partial \xi}{\partial \phi} d\theta - \int_0^\pi \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{\partial \xi}{\partial \phi} d\theta,$$

这里我们用到了 γ 必须关于 θ是 π-周期的。但由于 ξ 是定义在整个M上的光滑函数，我们可以对它在紧集 $\{s = t = 0\}$上的所有偏导数进行有界估计。因此，当 ϕ 趋近于 0 时，这个等式不可能成立，于是我们得出矛盾。□

然而，现在我们可以证明，去掉奇异超曲面后，所得的两个辛流形是辛同构的。因此我们得出，一般而言，b^m-辛结构并不能由奇异集之外的辛结构唯一确定。

引理 A.3。这两个辛流形 $(M \setminus Z, \omega_1)$ 和 $(M \setminus Z, \omega_2)$ 是辛同胚的。

证明。回顾一下，余切函数 $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ 是一个微分同胚。因此，我们可以在整个 $M \setminus Z$ 上定义一个新的微分同胚：

$$f : M \setminus Z = (0, \pi) \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to M \setminus Z,$$
$$f(\phi, \theta, s, t) := \left(\cot^{-1}(t), \theta, s, \cot(\phi)\right).$$

接着我们计算 $f^*(dt) = \frac{-1}{\sin^2 \phi} d\phi$，类似地，$f^*\left(\frac{1}{\sin^2 \phi} d\phi\right) = -dt$，由此可得：

$$f^*(\omega_1) = f^*\left(\frac{1}{\sin \phi^2} d\phi \wedge d\theta + ds \wedge dt\right) = -dt \wedge d\theta + ds \wedge \frac{-1}{\sin \phi^2} d\phi = \omega_2.$$

因此，f 是 $(M \setminus Z, \omega_1)$ 与 $(M \setminus Z, \omega_2)$ 之间的辛同胚，正如所要求的。 □

Appendix B. Properties of b-images of hypersurfaces

在本附录中，我们将探讨定义 2.13 中所定义的 b-像这一概念。首先，人们可能会想知道，b-像是否保留子流形结构，或者更具体地说：

问题 2. 设 S 是 M 中的一个超曲面。对于任意 b-相容流形，其 b-像 S_b 是否总是一个超曲面？

遗憾的是，这通常并不成立。事实上，对于 $M = T^*\mathbb{R}^n$，我们可以通过取第 5.4 节中定义的 b-流形（W，Z）作为我们的 b-相容流形，写出一个明确的反例。为避免混淆，我们将沿用相同的记号。

引理 B.1. 超曲面 $U := \{q_1 + \sum_{i=2}^n q_i^2 = \frac{1}{4}\}$ 是 $T^*\mathbb{R}^n$ 中的一个超曲面，但 U_b 不是 W 中的超曲面。

证明。根据构造，U 由光滑函数的 $H^{-1}(\frac{1}{4})$ 给出：

$$H = q_1 + \sum_{i=2}^n q_i^2,$$

其中 $\frac{1}{4}$ 是一个正则值。接下来回顾式 (5.1) 中定义的球坐标变换 F：$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1} =: Q$。利用该映射，通过定义 $\psi_i := q_i/r = \frac{q_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}}$，我们可以用 n-球坐标写出 U 的方程：

$$\sum_{i=2}^n q_i^2 = r^2 - q_1^2 = r^2(1 - \psi_1^2).$$

由此可得， U 作为 T^*Q 的子集可表示为：

$$U = \left\{ r\psi_1 + r^2(1-\psi_1^2) = \frac{1}{4} \right\}. \tag{B.1}$$

现在我们可以开始研究 U_b。回顾 (5.17) 中 McGehee 变换 τ_{McG} 的定义。将 $r = 2/z^2$ 代入 (B.1)，得到：

$$\tau_{\mathrm{McG}}^{-1}(U) = \left\{ 2z^2\psi_1 + 4(1-\psi_1^2) = \frac{1}{4}z^4, z \neq 0 \right\}.$$

解出 z，得到 $\{z = \pm 2\sqrt{\psi_1 \pm 1}, z \neq 0\}$。由于 ψ_1 是球坐标，因此有 $\psi_1 \in [-1,1]$。因此，方程 $z = \pm 2\sqrt{\psi_1 - 1}$ 对于 z 没有非零解，所以实际上有：

$$\tau_{\mathrm{McG}}^{-1}(U) = \{z = \pm 2\sqrt{\psi_1 + 1}, z \neq 0\}.$$

由于在此集合上 $z \to 0$ 等价于 $\psi_1 \to -1$，其闭包就是：

$$U_b = \{z = \pm 2\sqrt{\psi_1 + 1}\}.$$

该集合在 $\{\psi_1 = -1, z = 0\}$ 处有一个奇点，我们将通过计算其切空间来验证这一点，从而证明 U_b 不是超曲面。

现在来证明 U_b 在 $\{\psi_1 = -1, z = 0\}$ 处有一个奇点。我们将通过反证法证明这一点，假设 U_b 是 W 中的一个超曲面。由于 U 与集合 $\{r = 0\}$ 不相交，其 b-像 U_b 完全包含在 Z 的一个开邻域中，该邻域可与 $\mathbb{R}^2 \times T^*\mathbb{S}^{n-1}$ 等同。空间 $T^*\mathbb{S}^{n-1}$ 本身可视为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中由方程 $\sum_{i=1}^n \psi_i^2 = 1$ 和 $\sum_{i=1}^n \psi_i\zeta_i = 0$ 定义的余维 2 子流形（其中我们用 $(\psi_1, \dots, \psi_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 作为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的坐标）。因此，我们可以将 U_b 看作欧几里得空间 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 中的余维 3 子流形（其中 z 和 P_r 是另外两个坐标）。此外，我们知道它由以下三个方程给出：

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i\zeta_i = 0 \quad \text{and} \quad \frac{z^2}{4} = \psi_1 + 1.$$

由此可得， U_b 的切空间满足：

$$TU_b \subseteq \ker\left(\sum_{i=1}^n \psi_i d\psi_i\right) \cap \ker\left(\sum_{i=1}^n \zeta_i d\psi_i + \sum_{i=1}^n \psi_i d\zeta_i\right) \cap \ker\left(\frac{z}{2}dz - d\psi_1\right).$$

注意，这些 1-形式关于 U_b 线性相关，当且仅当 $z = 0$。因此，只要 $z \neq 0$，这里就成立等式。要计算 $T^*U_b\big|_{\{z=0\}}$，我们需要使用连续性论证。

如果我们将范围限制在集合

$$A^+ := \{\psi_1 < 0 < \psi_2, z,\ \psi_3 = \cdots = \psi_n = \zeta_3 = \cdots = \zeta_n = 0\}$$

我们可以用上述两个方程解出 ψ_1：

$$\psi_2 = \sqrt{1-\psi_1^2} \quad \text{and} \quad z = 2\sqrt{\psi_1 + 1}.$$

将其代入上述关于 TU_b 的公式，可得：

$$TU_b\big|_{A^+} = \ker\left(\psi_1 d\psi_1 + \sqrt{1-\psi_1^2}d\psi_2\right) \cap \ker\left(\zeta_1 d\psi_1 + \zeta_2 d\psi_2 + \psi_1 d\zeta_1 + \sqrt{1-\psi_1^2}d\zeta_2\right) \cap \ker\left(\sqrt{\psi_1+1}dz - d\psi_1\right).$$

因此， A^+上的切空间包含向量场 ∂_{P_r}、 ∂_{ψ_i}、 ∂_{ζ_i}（对于 $i>2$）以及以下两个向量场

$$X_1^+ := \sqrt{1-\psi_1^2}\partial_{\zeta_1} - \psi_1\partial_{\zeta_2},$$
$$X_2^+ := \partial_z + \sqrt{\psi_1+1}\partial_{\psi_1} - \frac{\psi_1}{\sqrt{1-\psi_1}}\partial_{\psi_2} + \left(\frac{-\zeta_1\sqrt{\psi_1+1}}{\psi_1} + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\psi_1}}\right)\partial_{\zeta_1}.$$

在极限情况下，我们有

$$\lim_{\psi_1\to-1} X_1^+ = \partial_{\zeta_2} \qquad \text{and} \qquad \lim_{\psi_1\to-1} X_2^+ = \partial_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\psi_2} + \frac{\zeta_2}{\sqrt{2}}\partial_{\zeta_1}.$$

接下来，我们可以对集合

$$A^- := \{\psi_1, \psi_2 < 0 < z,\ \psi_3 = \cdots = \psi_n = \zeta_3 = \cdots = \zeta_n = 0\}.$$

类似地，这表明 $TU_b\big|_{A^-}$包含向量场 ∂_{P_r}、 ∂_{ψ_i}、 ∂_{ζ_i}（对于 $i>2$）以及以下两个向量场

$$X_1^- := \sqrt{1-\psi_1^2}\partial_{\zeta_1} + \psi_1\partial_{\zeta_2},$$
$$X_2^- := \partial_z + \sqrt{\psi_1+1}\partial_{\psi_1} + \frac{\psi_1}{\sqrt{1-\psi_1}}\partial_{\psi_2} - \left(\frac{\zeta_1\sqrt{\psi_1+1}}{\psi_1} + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\psi_1}}\right)\partial_{\zeta_1},$$

它们与上面计算得到的向量场仅在符号上有所不同。在极限情况下，我们有

$$\lim_{\psi_1\to-1} X_1^- = \partial_{\zeta_2} \qquad \text{and} \qquad \lim_{\psi_1\to-1} X_2^- = \partial_z - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_{\psi_2} - \frac{\zeta_2}{\sqrt{2}}\partial_{\zeta_1}.$$

根据连续性， U_b在 $\{\psi_1=-1, \psi_2=\cdots=\psi_n=z=0\}$处的切空间必须包含所有 $2n-2$向量场 $\{\partial_{\psi_3},\ldots,\partial_{\psi_n},\partial_{P_r},\partial_{\zeta_2},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}$以及$X_2^+$和$X_2^-$的极限。然而，显然这些向量场彼此线性无关，因此不可能全部属于同一个 $2n-1$维子空间。因此，由矛盾可知， U_b不可能是 W中的超曲面。□

接下来，一个自然的问题是， b-像的定义是否取决于用于定义 b-相容性的微分同胚。或者，等价地，我们可以提出以下问题：

问题 3. 给定流形 M中的两个微分同胚超曲面 S 和 U ，在任意 b-相容流形中，它们的b-像 S_b 和 U_b 是否也微分同胚?

答案仍然是否定的。此外，我们还可以找到定义在 (W,Z) 中的反例。

引理 B.2。 $S\colon=\{q_1=\frac{1}{4}\}$中的超曲面和 $U\colon=\{q_1+\sum_{i=2}^n q_i^2=\frac{1}{4}\}$中的超曲面在 $T^*\mathbb{R}^n$中是微分同胚的，但它们的 b-像 S_b 和 U_b 在 (W,Z) 中并非微分同胚。

证明。$\{q_1 = \frac{1}{4}\}$ 和 $\{q_1 + \sum_{i=2}^{n} q_i^2 = \frac{1}{4}\}$ 中的两个超曲面在 $\mathbb{R}^n$ 中通过以下映射微分同胚:

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto \left(q_1 - \sum_{i=2}^{n} q_i^2, q_2, \ldots, q_n \right).$$

接下来，我们可以考察余切丛上的诱导映射，将其提升，从而得到 S 与 U 之间的微分同胚。由引理 B.1 可知， U_b 不是 (W, Z)中的超曲面。不过，我们将证明， S_b 是 (W, Z)中的超曲面。

与 U类似，超曲面 S 也不与集合 $\{r = 0\}$相交，因此我们也可以将其视为 T^*Q中的超曲面。像上面那样代入 $q_1 = r\psi_1$ ，可得 S 在T^*Q 中由 $S = \{r\psi_1 = 1\}$给出。应用 McGehee 变换并将$r = 2/z^2$ 代入其中后，我们得到 $\{2\psi_1 = z^2\}$。我们将证明，这实际上恰好就是 S_b ，并且它确实定义了 W中的一个超曲面。

更准确地说，与前一个引理的证明类似，我们可以将 S_b 视为由以下三个方程定义的 $\mathbb{R}^{2+2n}$ 的子集:

$$f := \sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 - 1 = 0, \quad g := \sum_{i=1}^{n} \psi_i \zeta_i = 0 \quad \text{and} \quad h := 2\psi_1 - z^2 = 0.$$

于是我们注意到，1-形式 df、 dg 和 dh 仅在以下集合上线性相关

$$B := \{\psi_1 = \cdots = \psi_n = 0\} \qquad \text{and} \qquad C := \{\psi_2 = \cdots = \psi_n = z = 0\}.$$

然而， $f\big|_B$总是等于 -1。因此，交集 $f^{-1}(0) \cap B$为空。同理，$h\big|_C$ 恰好等于 $2\psi_1$ ，所以交集 $h^{-1}(0) \cap C$ 包含于 B。因此，如上所述，交集 $f^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap C$为空。综上可知， df、 dg和dh 在 $S_b = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$上线性无关。这意味着 S_b是 $f^{-1}(0)$中的光滑超曲面，因而也是 W中的光滑超曲面。

最后，由于 S_b 是 W 中的超曲面，而 U_b 不是，因此它们显然不可能微分同胚。□

注 B.3. 注意，根据余切丛上典范辛结构的性质， S 与 U 之间的提升微分同胚实际上是一个辛同胚。因此我们也立即得出，在与 b辛相容的流形中， b-像的性质在很大程度上取决于所选的辛同胚。

References

[1] S. Axler。《Linear Algebra Done Right》。高等数学本科教材。纽约：Springer，1997年。[2] J. B. v. d. Berg、F. Pasquotto、T. Rot 和 R. Vandervorst。《关于非紧流形余切丛上的周期轨道》。载于：《J. Symplectic Geom.》4（2016年），第 1145–1173 页。[3] J. B. v. d. Berg、F. Pasquotto 和 R. C. Vandervorst。《 $\mathbb{R}^{2n}$上的非紧超曲面闭特征》。载于：《Math. Ann.》343（2009年），第 247–284 页。

[4] K. Borsuk。《Quelques r´etractes singuliers》。载于：《Fund. Math.》24（1935），第 249–258 页。[5] R. Braddell、A. Delshams、E. Miranda、C. Oms 和 A. Planas。《奇异辛几何导论》。载于：《Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.》16（2019年）。[6] J. Brugu´es、E. Miranda 和 C. Oms。《奇异辛流形上的阿诺德猜想》。2022年。[7] R. Cardona、E. Miranda 和 D. Peralta-Salas。《欧拉流与奇异几何结构》。载于：《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》377.2158（2019），第 20190034 页。[8] K. Cieliebak 和 U. Frauenfelder。《恰当接触嵌入的 Floer 同调》。载于：《Pac. J. Math.》239.2（2009），第 251–316 页。[9] K. Cieliebak、Y. Eliashberg 和 L. Polterovich。《共轭意义下的接触可排序性》。载于：《Regul. Chaotic Dyn.》22.6（2017），第 585–602 页。[10] B. Csik´os。《微分几何》。布达佩斯：Typotex 出版社，2014年。[11] A. Del Pino 和 F. Presas。《叶状魏因斯坦猜想》。载于：《Int. Math. Res. Not. IMRN》（2017）。[12] A. Delshams、V. Kaloshin、A. de la Rosa 和 T. M. Seara。《受限平面椭圆三体问题中的全局不稳定性》。载于：《数学物理通讯》366.3（2019年），第 1173–1228 页。[13] A. Delshams、A. Kiesenhofer 和 E. Miranda。《奇异辛流形上可积与不可积系统的例子》。载于：《几何与物理学杂志》115（2017）。FDIS 2015：几何与数学物理中的有限维可积系统，第 89–97 页。[14] J. Desplanques。《Th´eor`eme d'alg´ebre》。载于：《J. Math. Sp´ec》1.3（1887），第 12–13 页。[15] J. Dugundji。《拓扑》。高等数学丛书。波士顿：Allyn and Bacon 公司，1966年。[16] A. Fauck、W. J. Merry 和 J. Wi´sniewska。《计算触手双曲面的 Rabinowitz Floer 同调》。载于：《J. Mod. Dyn.》17.0（2021），第 353–399 页。[17] A. Floer。《辛不动点与全纯球》。载于：《Comm. Math. Phys.》120.4（1989），第 575–611 页。[18] S. Ganatra、J. Pardon 和 V. Shende。《Liouville 扇区上具有协变函子性的缠绕 Floer 理论》。载于：《Publications math´ematiques de l'IH´ES》131.1（2020年），第 73–200 页。[19] V. Guillemin、E. Miranda 和 A. R. Pires。《b-流形上的辛几何与泊松几何》。载于：《Adv. Math.》264（2014），第 864–896 页。[20] H. Hofer。《辛化中的伪全纯曲线及其在三维魏因斯坦猜想中的应用》。载于：《Invent. Math.》114（1993），第 515–563 页。[21] L. H¨ormander。《二次型的辛分类与一般 Mehler 公式》。英。载于：《Math. Z.》219.3（1995），第 413–450 页。[22] L. Levy。《Sur la possibilit´e de l'´equilibre´electrique》。载于：《巴黎科学院院报》93（1881），第 706–708 页。

[23] J. Luc 和 T. Placek。《在广义相对论中诠释非豪斯多夫（广义）流形》。载于：Philos. Sci. 87（2019年）。[24] R. McGehee。《退化不动点的稳定流形定理及其在天体力学中的应用》。载于：J. Differential Equations 14.1（1973年），第 70–88 页。[25] R. Melrose。《Atiyah-Patodi-Singer 指标定理》。A K Peters/CRC Press，1993 年。[26] E. Miranda、C. Oms 和 D. Peralta-Salas。《关于奇异 Weinstein 猜想以及 b-Beltrami 场中逃逸轨道的存在性》。载于：Commun. Contemp. Math. 24.07（2022 年），第 2150076 页。[27] E. Miranda 和 C. Oms。《带奇点的接触结构：从局部到整体》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1806.05638（2018年）。[28] E. Miranda 和 C. Oms。《奇异 Weinstein 猜想》。载于：Adv. Math. 389 （ 2021 年），第 107925 页。[29] J. Nestruev。《光滑流形与可观测量》。英文版。数学研究生教材；218。纽约：Springer，2002 年。[30] D. O'Connell。《通过粘合空间构造非豪斯多夫流形》。载于：Topology Appl. 326（2023年），第 108388 页。[31] F. Pasquotto、R. C. Vandervorst 和 J. Wi´sniewska。《触手状哈密顿量的 Rabinowitz Floer 同调》。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 2022.3（2020年），第 2027–2085 页。[32] F. Pasquotto 和 J. Wi´sniewska。《触手状哈密顿量的界》。载于：J. Topol. Anal. 12.01（2020年），第 209–265 页。[33] P. H. Rabinowitz。《预先给定能量曲面上的哈密顿系统周期解》。载于：J. Diff. Eq. 33.3（1979年），第 336–352 页。[34] P. H. Rabinowitz。《哈密顿系统的周期解》。载于：Comm. Pure Appl. Math. 31.2（1978年），第 157–184 页。[35] G. Scott。《b^k-流形的几何》。载于：《J. Symplectic Geom.》14（2016年），第 71–95 页。[36] A. C. Silva。《辛几何讲义》。柏林：Springer，2001 年。[37] S. Suhr 和 K. Zehmisch。《链接与闭轨道》。载于：Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 86（2016年），第 133–150 页。[38] C. H. Taubes。《Seiberg-Witten 方程与 Weinstein 猜想》。载于：Geom. Topol. 11（2007年），第 2117–2202 页。[39] C. Viterbo。《在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中证明 Weinstein 猜想》。载于：Annales de l'Institut Henri Poincar´e C, Analyse non lin´eaire。第 4 卷，第 4 期。Elsevier。1987 年，第 337–356 页。[40] A. Weinstein。《关于 Rabinowitz 周期轨道定理的假设》。载于：J. Differential Equations 33.3（1979年），第 353–358 页。[41] J. Wi´sniewska。《触手状哈密顿量的 Rabinowitz Floer 同调》。博士论文。阿姆斯特丹自由大学，2017 年。

Michael Vogel, Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Germany
Email address: michael.vogel-j6m@rub.de