arXiv:2303.01168v1 [math.NT] 2 Mar 2023

强幂数上的乘性函数的谱

Tsz Ho Chan

摘要

粗略地说，乘性函数的谱是所有可能平均值的集合。本文研究以强幂数为支撑集的乘性函数的谱。我们证明，其实对数谱取值范围为 $-\sqrt{2}/(4+\sqrt{2}) = -0.26160...$ 至 1；而众所周知，全体自然数上的实乘性函数的对数谱取值范围为 0 至 1。在本研究过程中，我们修正了 Granville and Soundararajan 关于研究乘性函数平均值时小素数贡献的一项证明。

1 引言与主要结果

若对于所有互素整数 a 和 b，函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 满足 $f(ab)=f(a)f(b)$，则称其为乘法函数。若对于所有整数 a 和 b，函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 满足 $f(ab)=f(a)f(b)$，则称其为完全乘性函数。设 S 为 $\hat{}$ 单位圆盘 $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$的一个子集。令 $\mathcal{F}(S)$ 和 $\mathcal{F}(S)$ 分别表示完全乘性函数类和满足对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $f(n)\in S$ 的乘法函数类。理解乘法函数的平均行为是数论中的一个核心主题。例如，Delange [2], Wirsing[13] 和 Hal´asz [9] 先后为乘法函数平均值的研究作出了贡献。

定理1（Delange、Wirsing 与 Hal´asz）。设 $f\in\hat{}\mathcal{F}(\mathbb{U})$ 是一个乘法函数。若存在某个实数 τ 使得级数

$$\sum_p \frac{1-\Re(f(p)p^{-i\tau})}{p} \tag{1}$$

收敛，则

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = \frac{x^{i\tau}}{1+i\tau}\prod_{p\le x}(1-p^{-1})\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu(1+i\tau)} + o(1)$$

当 $x\to\infty$ 时。若不存在使级数 (1) 收敛的实数 τ，则

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = o(1).$$

证明定理1中发散情形的一种方法，是借助一个有效的 Hal´asz 定理 [10]；Montgomery [12] 对该定理作了进一步完善。最近，Granville、Harper 和 Soundararajan 在 [4] 和 [5] 中给出了更直观、适用性更广的 Hal´asz 定理论证，并介绍了一些有趣的应用。

人们也 对（完全）乘法函数所取的平均值集合感兴趣 s.

定义

$$\Gamma_N(S) := \Big\{\frac{1}{N}\sum_{n\le N} f(n) : f\in\mathcal{F}(S)\Big\},\ \hat{\Gamma}_N(S) := \Big\{\frac{1}{N}\sum_{n\le N} f(n) : f\in\hat{\mathcal{F}}(S)\Big\},$$

$$\Gamma(S) = \lim_{N\to\infty}\Gamma_N(S),\quad \text{and}\quad \hat{\Gamma}(S) = \lim_{N\to\infty}\hat{\Gamma}_N(S)$$

其中，对于子集序列 $J_N\subset\mathbb{U}$，$\lim_{N\to\infty} J_N = J$ 表示：当且仅当存在点序列 $z_N\in J_N$，使得 $z_N\to z$ 满足 $N\to\infty$ 时，$z\in J$。这里，S(Γ) 称为集合 S 的谱。Granville and

Soundararajan [6] 对谱的性质和几何结构进行了系统研究。他们的一个主要结果涉及区间 $[-1,1]$ 的谱：

$$\Gamma([-1,1]) = [\delta_1, 1] \quad \text{where} \quad \delta_1 = 1 - 2\log(1+\sqrt{e}) + 4\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log t}{t+1} dt = -0.656999\ldots. \tag{2}$$

这意味着

$$\sum_{n\le x} f(n) \ge (\delta_1 + o(1))x$$

对于所有满足 $-1 \le f(n) \le 1$ 的实值完全积性函数。(2) 的证明部分基于如下优美的结构定理。

定理 2（Granville & Soundararajan）。对于任意满足 $1 \in S$ 的 $\mathbb{U}$ 的闭子集 S，我们有

$$\Gamma(S) = \Gamma_\Theta(S) \times \Lambda(S) \quad \textit{and} \quad \hat{\Gamma}(S) = \hat{\Gamma}_\Theta(S) \times \Lambda(S) \tag{3}$$

其中

$$\Gamma_\Theta(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \prod_{p\le x} \Big(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) : f \in \mathcal{F}(S) \Big\}$$

and

$$\hat{\Gamma}_\Theta(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \prod_{p\le x} \Big(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) : f \in \hat{\mathcal{F}}(S) \Big\}$$

称为欧拉乘积谱，而 $\Lambda(S)$ 是函数 $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{U}$ 的取值集合，这些函数满足某个积分方程（详见方程 (12) 或 *[6]* ）。

Granville and Soundararajan [6] 还研究了其他谱的概念，例如

$$\lim_{x\to\infty} \Big\{ \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n^\sigma} \Big/ \sum_{n\le x} \frac{1}{n^\sigma} : f \in \mathcal{F}(S)(\text{ or } \hat{\mathcal{F}}(S)) \Big\}$$

对于任意固定的 $\sigma > 0$。这些新概念比 $\Gamma(S)$ 和 $\hat{\Gamma}(S)$ 更容易研究，其中最有趣的情形是 $\sigma = 1$，即对数谱：

$$\Gamma_0(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n} \Big/ \sum_{n\le x} \frac{1}{n} : f \in \mathcal{F}(S) \Big\} \text{ and } \hat{\Gamma}_0(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n} \Big/ \sum_{n\le x} \frac{1}{n} : f \in \hat{\mathcal{F}}(S) \Big\}.$$

根据 [6, 定理 8.4 & 推论 4], ，对数谱有如下类似的结构结果 .

定理 3（Granville & Soundararajan）。对于 S 中满足 $1 \in S$ 的任意闭子集 $\mathbb{U}$，

$$\Gamma_0(S) = \Gamma_\Theta(S) \times \Lambda_0(S).$$

此外，当 $S = [-1,1]$ 时，

$$\Gamma_0([-1,1]) = [0,1]. \tag{4}$$

随后，Granville and Soundararajan [8] 对 $\Gamma_0([-1,1])$ 和 $\Gamma_0([-1,1])$ 的下端点 ˆ 给出了更精细的描述：当 x 足够大时，

$$\sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n} \ge -\frac{1}{(\log\log x)^{3/5}} \tag{5}$$

对所有

$$f \in \mathcal{F}([-1,1]) \quad \text{or} \quad f \in \hat{\mathcal{F}}([-1,1]) \text{ satisfying } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+f(2^k)}{2^k} \gg (\log x)^{-1/20};$$

and

$$\sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n} \ge \delta_1 \log 2 + o(1) = -0.4553... + o(1) \quad \text{for all} \quad f \in \hat{\mathcal{F}}([-1,1]) \tag{6}$$

当且仅当.....时，可以达到这个下界

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+f(2^k)}{2^k}\Big) \log x + \sum_{3\le p\le x^{1/(1+\sqrt{e})}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-f(p^k)}{p^k} + \sum_{x^{1/(1+\sqrt{e})}\le p\le x} \frac{1+f(p)}{p} = o(1).$$

特别地，显然的集合包含关系 $\Gamma_0([-1,1]) \subset \hat{\Gamma}_0([-1,1])$，结合 (4)、(5) 和 (6)，可得

$$\hat{\Gamma}_0([-1,1]) = [0,1]$$

因为 $\sum_{n\le x} 1/n = \log x + O(1)$。还值得一提的是，Kerr 和 Klurman [11] 最近改进了不等式 (5)，得到

$$\sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n} \ge -\frac{1}{(\log\log x)^{1-\epsilon}} \tag{7}$$

对于 $f \in \mathcal{F}([-1,1])$ 以及任意 $\epsilon > 0$。

本文研究以强幂数为支撑集的积性函数的谱。若一个数 n 的素因数分解 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ 满足 $a_i \ge 2$ 对所有 $1 \le i \le r$ 都成立，则称其为强幂数或完全平方数因子数。类似地，若一个数 n 满足 k- 满条件，则称其为 k-满数；也就是说，指数 $a_i \ge k$ 对所有 $1 \le i \le r$ 都成立。例如，$72 = 2^3 \cdot 3^2$ 是完全平方数因子数，而 $243 = 3^5$ 是 5-满数。设 $\mathcal{Q}_k$ 为所有正 k-满数构成的集合，$Q_k(x)$ 为其计数函数。众所周知，

$$Q_k(x) := \sum_{\substack{n\le x \\ n\in\mathcal{Q}_k}} 1 = \prod_p \Big(1 + \sum_{m=k+1}^{2k-1} \frac{1}{p^{m/k}}\Big) x^{1/k} + O(x^{1/(k+1)}) \tag{8}$$

其中乘积遍历所有素数（例如，参见 [3] 或 [1] ）。

令 $\hat{\mathcal{F}}_k(S)$ 表示一类满足 $f(n) \in S \subset \mathbb{U}$、且支撑在$k$-满数上的乘法函数（即，当 $n \notin \mathcal{Q}_k$ 时，$f(n) = 0$ ）。定义强幂数上积性函数的常规谱和“对数”谱如下:

$$\hat{\Gamma}_{\mathcal{Q}_2}(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \sum_{n\le x} f(n) \Big/ \sum_{n\le x, n\in\mathcal{Q}_2} 1 : f \in \hat{\mathcal{F}}_2(S) \Big\}$$

and

$$\hat{\Gamma}_{0,\mathcal{Q}_2}(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n^{1/2}} \Big/ \sum_{n\le x, n\in\mathcal{Q}_2} \frac{1}{n^{1/2}} : f \in \hat{\mathcal{F}}_2(S) \Big\}$$

分别如此。指数 $1/2$ 的原因在于，$Q_2(x) = \prod_p (1 + \frac{1}{p^{3/2}}) \sqrt{x} + O(x^{1/3})$ 意味着

$$\sum_{n\le x, n\in\mathcal{Q}_2} \frac{1}{n^{1/2}} = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^{3/2}}\Big) \log\sqrt{x} + O(1) \tag{9}$$

通过分部求和。此外，我们不考虑定义在强幂数上的完全积性函数，因为这样的函数只有一个，即对于所有 $n > 1$，$f(1) = 1$ 且 $f(n) = 0$，因为对于所有素数 p，$f(p) = 0$。现在，我们准备陈述主要结果。

定理 4. 对于 $\mathbb{U}$ 的任意闭子集 S，其中 $1 \in S$,

$$\hat{\Gamma}_{\mathcal{Q}_2}(S) = \hat{\Gamma}_{\Theta}(S) \times \Lambda(S) \quad and \quad \hat{\Gamma}_{0,\mathcal{Q}_2}(S) = \hat{\Gamma}_{\Theta}(S) \times \Lambda_0(S)$$

其中

$$\hat{\Gamma}_{\Theta}(S) := \lim_{x\to\infty} \Big\{ \prod_{p\le x} \Big(1 + \frac{f(p^3)}{p^{3/2}} + \frac{f(p^4) - f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}} + \frac{f(p^5) - f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}} + \cdots\Big)\Big(\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{f(p^2)}{p}}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) : f \in \hat{\mathcal{F}}_2(S) \Big\}$$

是某种修正的欧拉乘积谱。

定理 5. 当 $S = [-1, 1]$时，我们有

$$\hat{\Gamma}_{\mathcal{Q}_2}([-1,1]) = [\delta_1, 1] \quad and \quad \hat{\Gamma}_{0,\mathcal{Q}_2}([-1,1]) = [\delta_2, 1] = [-0.26120..., 1]$$

其中 $\delta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$。

(5) 和 (6) 中的条件以及定理 5 的证明表明，对数谱深受乘法函数在 2 的幂上的取值影响。因此，对于支撑于奇强幂数上的积性函数，我们有以下与 (7) 类似的结果。该结果可将 Kerr 和 Klurman [11] 的论证应用于 (30)，并结合观察 (36) 轻易得出。

推论 1. 假设 $f \in \hat{\mathcal{F}}([-1,1])$，且对所有整数 $k \ge 2$, $f(2^k) = 0$。对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n\le x} \frac{f(n)}{\sqrt{n}} \ge -\frac{1}{(\log\log x)^{1-\epsilon}}$$

当 x足够大时。

定理 5 的一种解读如下。强幂数集合 $\mathcal{Q}_2$ 由素数幂通过乘法生成

$$2^2,\ 3^2,\ 5^2\ \ldots;\ 2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ \ldots;\ 2^4,\ 3^4,\ 5^4,\ \ldots;\ \ldots$$

。在“对数”谱中，我们取 n的平方根。因此，可以将支撑于强幂数上的积性函数视为定义在以下新乘法构件上的函数

$$2,\ 3,\ 5\ \ldots;\ 2^{3/2},\ 3^{3/2},\ 5^{3/2},\ \ldots;\ 2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots;\ \ldots \tag{10}$$

，而通常的乘法函数则以通常的素数幂作为构件

$$2,\ 3,\ 5\ \ldots;\ 2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots;\ 2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ \ldots;\ \ldots$$

。因此，定理 5 大致表明，将素数幂集合扰动为 (10) 后，其对数谱的行为从 $[0,1]$ 变为 $[-0.26120..., 1]$，而其常规谱保持不变。

本文组织如下。首先，我们收集关于各种谱的若干详细结构结果，以及关于积性函数的几个缓慢变化结果。随后，我们给出 Granville and Soundararajan 在 [6] 关于将小素数的贡献与积性函数的平均值分离这一结果的修正证明。该证明与后来关于支撑于强幂数上的积性函数的构造有关。最后，我们利用这些结果以及来自 [6] 和 [8] 的思想，证明定理 4 和定理 5。

记号。本文中， p 表示一个素数。符号 $f(x) = O(g(x))$、 $f(x) \ll g(x)$和 $g(x) \gg f(x)$等价于某个常数 $C > 0$下的 $|f(x)| \le Cg(x)$。符号 $f(x) = o(g(x))$表示$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$。

2 更详细的结构与缓慢变化结果

首先，我们回顾欧拉乘积谱 $\Gamma_\Theta(S)$的一些结构结果。定义

$$\mathcal{E}(S) := \left\{ e^{-k(1-\alpha)} : \ k \geq 0, \ \alpha \text{ is in the convex hull of } S \right\}.$$

定理 6（Granville & Soundararajan）。对于所有满足 $1 \in S$ 的 S 的 $\mathbb{U}$ 闭子集,

$$\mathcal{E}(S) \subset \Gamma_\Theta(S) \times \mathcal{E}(S) = \Gamma_\Theta(S) \subset \mathcal{E}(S) \times [0,1].$$

此外，如果 S 的凸包包含一个不等于 1 的实点，则有

$$\Gamma_\Theta(S) = \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S) \times [0,1].$$

这源自 m [6, 定理 4]，并意味着 $\Gamma_\Theta(S)$ 是星形的。特别是当 $S = [-1,1]$ 时，we 有 $\mathcal{E}([-1,1]) = [0,1]$ 和

$$\Gamma_\Theta([-1,1]) = [0,1]. \tag{11}$$

我们还需要关于对数谱 $\Gamma_0(S)$ 的一些结构结果。对于满足 $1 \in S$ 的 $\mathbb{U}$ 的闭子集 S，记 S^* 为 S 的凸包。令 $K(S)$ 表示可测函数χ 的类： $[0,\infty) \to S^*$，且对于 $0 \leq t \leq 1$ 有 $\chi(t) = 1$。根据 [6, 定理 3.3], ，对每个 χ，存在唯一的函数 σ： $[0,\infty) \to \mathbb{U}$，满足以下积分方程:

$$u\sigma(u) = \int_0^u \sigma(u-t)\chi(t)dt \tag{12}$$

对于 $u > 1$，并满足初始条件 $\sigma(u) = 1$ （ $0 \leq u \leq 1$）。

定义 $\Lambda_0(S)$ 为以下取值集合

$$\left\{ \frac{1}{u}\int_0^u \sigma(t)dt : u > 0 \text{ and } \sigma \text{ satisfies (12) for some } \chi \in K(S) \right\}$$

定义 $\mathcal{R}$ 为所有 $n \geq 1$ 以及所有取自 S^* 的点 s_1、.....、 s_n 所对应点的凸包的闭包。此外，除了定理 3 外，还有以下结果。

定理 7（Granville & Soundararajan）。对于 $\mathbb{U}$ 的任意闭子集 S，若 $1 \in S$,

$$\Lambda_0(S) = \Lambda_0(S) \times \mathcal{E}(S), \ \ \Lambda_0(S) \subset \Gamma_0(S) \subset \Lambda_0(S) \times [0,1], \quad \textit{and} \quad \Lambda_0(S) \subset \mathcal{R}.$$

这来自 [6] 中定理 8 的证明。可以验证 $1 \in \Lambda_0(S)$。因此，当 $S = [-1,1]$ 时，我们有 $\mathcal{R} = [0,1]$ 以及

$$[0,1] = \mathcal{E}([-1,1]) \subset \Lambda_0([-1,1]) \times \mathcal{E}([-1,1]) = \Lambda_0([-1,1]) \subset \mathcal{R} = [0,1].$$

特别地,

$$\Lambda_0([-1,1]) = [0,1]. \tag{13}$$

最后，我们回顾关于乘法函数的以下缓慢变化结果。

命题 1。设 f 是一个乘法函数，对于所有 n 都有 $|f(n)| \leq 1$。令 x 足够大，并设 $1 \leq y \leq x$。则

$$\Big|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) - \frac{1}{x/y}\sum_{n\leq x/y} f(n)\Big| \ll \frac{\log 2y}{\log x}\exp\Big(\sum_{p\leq x}\frac{|1-f(p)|}{p}\Big).$$

命题 2。设 f 是一个乘法函数，对于所有 n 都有 $|f(n)| \leq 1$。则对于 $1 \leq w \leq x/10$，有

$$\frac{1}{x}\Big|\sum_{n\leq x} f(n)\Big| - \frac{w}{x}\Big|\sum_{n\leq x/w} f(n)\Big| \ll \Big(\frac{\log 2w}{\log x}\Big)^{1-2/\pi}\log\Big(\frac{\log x}{\log 2w}\Big) + \frac{\log\log x}{(\log x)^{2-\sqrt{3}}}.$$

上述命题分别出自 [6] 中的命题 4.1 和 [7] 中的推论 3。

3 对 Granville and Soundararajan 证明的一个修正

为了获得积性函数的谱结果，Granville and Soundararajan [6] 推导出了以下命题，用于分离小素数的贡献。

命题 3. 对任意满足以下条件的乘法函数 f $|f(p^k)| \le 1$ （对每个素数幂 p^k），令

$$s(f,x) := \sum_{p \le x} \frac{|1-f(p)|}{p}.$$

对任意 $1 > \epsilon \ge \log 2/\log x$，令 g 为满足以下条件的完全积性函数

$$g(p) := \begin{cases} 1, & \text{if } p \le x^\epsilon; \\ f(p), & \text{if } p > x^\epsilon. \end{cases} \tag{14}$$

Then

$$\frac{1}{x}\sum_{n \le x} f(n) = \Theta(f,x^\epsilon)\frac{1}{x}\sum_{m \le x} g(m) + O\big(\epsilon \exp(s(f,x))\big),$$

其中隐含常数为绝对常数。

在 [6], 中，Granville and Soundararajan 定义了一个乘法函数 h，规定 $h(p^k) = f(p^k) - f(p^{k-1})$，若$p \le x^\epsilon$; 否则， $h(p^k) = 0$。他们声称 $f(n) = \sum_{m|n} h(n/m)g(m)$。然而，这仅在 f 是完全乘性时成立，一般情况下并不成立。例如，设

$$f(p) = 1, \ \ f(p^2) = -1 \text{ for some prime } p > x^\epsilon.$$

于是，

$$\sum_{m|p^2} h\Big(\frac{p^2}{m}\Big)g(m) = h(p^2)g(1) + h(p)g(p) + h(1)g(p^2) = 0\cdot g(1) + 0\cdot g(p) + 1\cdot f(p)^2 = 1 \ne -1 = f(p^2).$$

因此，需要更仔细地处理其证明。值得一提的是， [6] 中的大多数结果都涉及完全积性函数，并未受到上述错误的影响。不过，对于式 (3) 中的结构结果 $\Gamma(S) = \Gamma_\Theta(S) \times \Lambda(S)$，则需要采用下面修正后的证明。此外，后续工作（例如 [7,定理 2] ）要求命题 3 对所有乘法函数都成立。因此，我们将给出命题 3 的完全严谨证明。

˜命题 3 的证明。我们定义一个乘法函数 h 和一个完全积性函数 $\tilde{g}$ 如下:

$$\tilde{h}(p^k) := f(p^k) - f(p^{k-1})f(p), \ \text{ and } \ \tilde{f}(p^k) = f(p)^k$$

˜ ˜分别对所有素数 p和正整数 k成立。于是可以验证， $f(n) = \sum_{m|n} h(n/m)f(m)$为

$$\begin{aligned}\sum_{m|p^k} \tilde{h}\Big(\frac{p^k}{m}\Big)\tilde{f}(m) &= \tilde{h}(p^k)\tilde{f}(1) + \tilde{h}(p^{k-1})\tilde{f}(p) + \cdots + \tilde{h}(p)\tilde{f}(p^{k-1}) + \tilde{h}(1)\tilde{f}(p^k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(f(p^{k-i}) - f(p^{k-i-1})f(p))f(p)^i + f(p)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} f(p^{k-i})f(p)^i - \sum_{j=1}^{k} f(p^{k-j})f(p)^j + f(p)^k = f(p^k)\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{n\le x}\frac{\tilde{h}(n)}{n}\cdot\frac{n}{x}\sum_{m\le x/n}\tilde{f}(m).$$

现在，利用这个 由（14）定义的完全乘法函数 g 和新的乘法函数 n

$$h(p^k) = \begin{cases} f(p)^k - f(p)^{k-1}, & \text{if } p \le x^\epsilon; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

˜可以验证， $f(n) = \sum_{m|n} h(n/m)g(m)$，因为

$$\sum_{m|p^k} h\Big(\frac{p^k}{m}\Big)g(m) = \begin{cases} (f(p)^k - f(p)^{k-1}) + (f(p)^{k-1} - f(p)^{k-2}) + \cdots + (f(p) - f(1)) + 1, & \text{if } p \le x^\epsilon; \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + f(p)^k, & \text{otherwise} \end{cases}$$

这在所有情况下都等于 $f(p)^k = \tilde{f}(p^k)$。因此，根据命题 1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) &= \sum_{n\le x}\frac{\tilde{h}(n)}{n}\sum_{m\le x/n}\frac{h(m)}{m}\cdot\frac{1}{x/(mn)}\sum_{k\le x/(mn)} g(k) \\ &= \sum_{n\le x}\frac{\tilde{h}(n)}{n}\sum_{m\le x/n}\frac{h(m)}{m}\cdot\Big[\frac{1}{x}\sum_{k\le x} g(k) + O\Big(\frac{\log mn}{\log x}\exp(s(g,x))\Big)\Big] \\ &= \sum_{n\le x}\frac{h_0(n)}{n}\cdot\frac{1}{x}\sum_{k\le x} g(k) + O\Big(\sum_{n\le x}\frac{|\tilde{h}(n)|}{n}\sum_{m\le x/n}\frac{|h(m)|}{m}\frac{\log m + \log n}{\log x}\exp(s(g,x))\Big) \end{aligned} \tag{15}$$

˜ ˜其中 $h_0(n) = h * h(n) = \sum_{m|n} h(n/m)h(m)$。由（14）可知,

$$s(g,x) = \sum_{x^\epsilon < p \le x}\frac{|1-f(p)|}{p} \quad \text{and} \quad s(f,x^\epsilon) + s(g,x) = \sum_{p\le x}\frac{|1-f(p)|}{p}. \tag{16}$$

由于 $|h(p^k)| \le \begin{cases} |f(p) - 1|, & \text{当 } p \le x^\epsilon \text{ 时；当} \\ 0, & \end{cases}$

$p > x^\epsilon$ 时，我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m} \le \prod_{p\le x^\epsilon}\Big(1 + \frac{|f(p)-1|}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} + \cdots\Big) \ll \exp(s(f,x^\epsilon)). \tag{17}$$

根据 $|h(p^k)| \le 2$ （适用于 $p \le x^\epsilon$ ）以及 $|h(p^k)| = 0$ （适用于 $p > x^\epsilon$），我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m}\log m &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m}\sum_{d|m}\Lambda(d) \\ &= \sum_{p\le x^\epsilon}\log p\sum_{\substack{m=1 \\ p|n}}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m} + \sum_{\substack{p^k\le x \\ k\ge 2}}\log p\sum_{\substack{m=1 \\ p^k|m}}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m} \\ &\le \sum_{p\le x^\epsilon}\log p\Big(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} + \cdots\Big)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m} + \sum_{p}\log p\Big(\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} + \cdots\Big)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|h(m)|}{m} \\ &\ll (\epsilon\log x + 1)\exp(s(f,x^\epsilon)) \end{aligned} \tag{18}$$

由式（17）和梅滕斯估计可得。因此，式（15）中的误差项为

$$\ll \sum_{n\le x}\frac{|\tilde{h}(n)|}{n}\Big(\epsilon+\frac{1}{\log x}\Big)\exp(s(f,x))+\sum_{n\le x}\frac{|\tilde{h}(n)|\log n}{n\log x}\exp(s(f,x))\ll\Big(\epsilon+\frac{1}{\log x}\Big)\exp(s(f,x)) \tag{19}$$

˜由 (16)、(17)、(18) 以及 h 仅在强幂数上有支撑这一事实可得。

当 $p\le x^{\epsilon}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}h_0(p^k)=&(f(p^k)-f(p^{k-1})f(p))(1)+\sum_{i=1}^{k-1}(f(p^{k-i})-f(p^{k-i-1})f(p))(f(p)^i-f(p)^{i-1})+(1)(f(p)^k-f(p)^{k-1})\\ =&f(p^k)-f(p^{k-1})f(p)+\sum_{i=1}^{k-1}f(p^{k-i})f(p)^i-\sum_{i=1}^{k-1}f(p^{k-i-1})f(p)^{i+1}-\sum_{i=1}^{k-1}f(p^{k-i})f(p)^{i-1}\\ &+\sum_{i=1}^{k-1}f(p^{k-i-1})f(p)^i+f(p)^k-f(p)^{k-1}\\ =&f(p^k)-f(p^{k-1}).\end{aligned}$$

当 $p>x^{\epsilon}$ 时，我们有

$$h_0(p^k)=(f(p^k)-f(p^{k-1})f(p))(1)+0+\cdots+0=\begin{cases}0, & \text{if } k=1;\\ f(p^k)-f(p^{k-1})f(p), & \text{if } k>1.\end{cases}$$

因此，对于所有素数幂 p^k，若 $p\le x^{\epsilon}$，则 $|h_0(p^k)|\le 2$；若 $p>x^{\epsilon}$，则 $h_0(p)=\begin{cases}f(p)-1。\end{cases}$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h_0(n)|}{n}\le\prod_{p\le x^{\epsilon}}\Big(1+\frac{|f(p)-1|}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots\Big)\prod_{p>x^{\epsilon}}\Big(1+\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots\Big)\ll\exp(s(f,x^{\epsilon})).$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_0(n)}{n}$ 绝对收敛至

$$\begin{aligned}&\prod_{p\le x^{\epsilon}}\Big(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\cdots\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{p>x^{\epsilon}}\Big(1+\frac{f(p^2)-f(p)f(p)}{p^2}+\frac{f(p^3)-f(p^2)f(p)}{p^3}+\cdots\Big)\\ &\quad=\Theta(f,x^{\epsilon})\exp\Big(O\big(\sum_{p>x^{\epsilon}}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\big)\Big)=\Theta(f,x^{\epsilon})\Big(1+O\big(x^{-\epsilon}\big)\Big)\end{aligned} \tag{20}$$

因此，

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}f(n)=\Theta(f,x^{\epsilon})\Big(1+O\big(x^{-\epsilon}\big)\Big)\cdot\frac{1}{x}\sum_{k\le x}g(k)+O\big(\epsilon\exp(s(f,x))\big)$$

由（15）、（19）和（20）可得。这给出了命题 3，其中主项略有调整。 □

类似于命题 3，有如下对数版本。

命题 4. 设 f 为任意满足 $|f(n)|\le 1$ 的乘法函数。设 g 为由 $g(p)=1$（当 $p\le y$ 时）以及 $g(p)=f(p)$（当 $p>y$ 时）定义的完全积性函数。那么，对于 $2\le y\le x/2$,

$$\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n}=\Theta(f,y)(1+O(y^{-1}))\cdot\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{g(n)}{n}+O\Big(\frac{\log y}{\log x}\exp(s(f,y))\Big), \tag{21}$$

其中 $s(f,y)=\sum_{p\le y}|1-f(p)|/p$。上述余项为 $\ll(\log y)^3/\log x$。

证明。这基本上就是 [6] 中的命题 8.2。由于其证明与命题 3 的证明几乎完全相同，我们将只给出一个概述。可以使用下面这个平凡估计来代替命题 1

$$\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n}-\frac{1}{\log(x/z)}\sum_{n\le x/z}\frac{f(n)}{n}\ll\frac{\log 2z}{\log x} \tag{22}$$

which 对所有满足 $|f(n)|\le 1$ 的函数 f 以及所有 $1\le z\le \frac{x}{2y}$ 均有效。利用 (22)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n}=&\sum_{n\le x}\frac{\tilde h(n)}{n}\sum_{m\le x/n}\frac{h(m)}{m}\cdot\frac{\log x-\log(mn)}{\log x}\cdot\frac{1}{\log\frac{x}{mn}}\sum_{k\le x/(mn)}\frac{g(k)}{k}\\ =&\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{\tilde h(n)}{n}\sum_{\substack{m\le x/n\\ mn\le x/(2y)}}\frac{h(m)}{m}\cdot\Big[\sum_{k\le x}\frac{g(k)}{k}+O\Big(\frac{\log mn}{\log x}\Big)\Big]\\ &+O\Big(\sum_{n\le x}\frac{|\tilde h(n)|}{n}\sum_{\substack{m\le x/n\\ mn\le x/(2y)}}\frac{|h(m)|}{m}\frac{\log m+\log n}{\log x}\cdot\frac{1}{\log\frac{x}{mn}}\sum_{k\le x/(mn)}\frac{|g(k)|}{k}\Big)\\ &+\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{\tilde h(n)}{n}\sum_{\substack{m\le x/n\\ mn>x/(2y)}}\frac{h(m)}{m}\sum_{k\le x/(mn)}\frac{g(k)}{k}=:S_1+S_2+S_3\end{aligned} \tag{23}$$

与 (15) 类似。由于 $x/(mn)<2y$ 和 $|g|\le 1$，可通过 (17) 证明，S_3 由 (21) 中的误差项控制。同样，也可证明误差 S_2 和来自 S_1 的误差项均由 (21) 中的误差项控制。S_1 中的主项给出了 (21) 中的主项。注意，不等式 (22) 给出的范围是 [6] 中的 $1\le z\le\sqrt{x}$。然而，正如我们的证明所示，这还不够。 □

4 Au强幂数上的辅助乘法函数 s

设 $f\in\hat{\mathcal{F}}_2(S)$ 是一个以强幂数为支撑集的乘法函数。我们仿照修正后的命题 3 证明中构造的辅助˜函数。定义一个以完全平方数为支撑集的完全乘性函数 f:

$$\tilde f(p^2):=f(p^2),\ \ \tilde f(p^{2k}):=f(p^2)^k,\ \text{ and }\ \tilde f(p^{2k+1}):=0.$$

此外，定义乘法函数

$$\tilde h(p^k):=\begin{cases}0, & \text{if } k=1;\\ f(p^k)-f(p^{k-2})f(p^2), & \text{if } k\ge 2.\end{cases} \tag{24}$$

然后，可以验证

$$f(n)=\sum_{m|n}\tilde h\Big(\frac{n}{m}\Big)\tilde f(m)$$

as

$$f(p^k)=\begin{cases}\sum_{0\le i<k/2}\big(f(p^{k-2i})-f(p^{k-2i-2})f(p^2)\big)f(p^2)^i+f(p^2)^k, & \text{if } k \text{ is even;}\\ \sum_{0\le i<k/2}\big(f(p^{k-2i})-f(p^{k-2i-2})f(p^2)\big)f(p^2)^i, & \text{if } k \text{ is odd.}\end{cases}$$

现在，我们定义一个在所有自然数上取值的完全积性函数:

$$\tilde g(m):=\tilde f(m^2)\ \text{ with }\ \tilde g(p^k):=\tilde f(p^{2k})=f(p^2)^k.$$

于是,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{n\le x}\frac{\tilde{h}(n)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x/n}}\sum_{m\le\sqrt{x/n}}\tilde{g}(m) \tag{25}$$

and

$$\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n\le x}\frac{\tilde{h}(n)}{\sqrt{n}}\sum_{m\le\sqrt{x/n}}\frac{\tilde{g}(m)}{m}. \tag{26}$$

˜注意，由于式 (24)， h 的支撑集位于 3-立方幂满数（或立方幂满数）上。

5 定理4的证明

证明。这里我们将详细证明对数谱的结构。利用恒等式 (25)，关于 ˆ $\Gamma_{\mathcal{Q}_2}(S)$ 的证明可直接且容易地由 [6] 中定理 3 的证明得出。我们借鉴了[8] 和 [6]中的思路。由恒等式 (26) 和 $|\tilde{g}(n)|\le 1$，可得

$$\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n\le(\log x)^{12}}\frac{\tilde{h}(n)}{\sqrt{n}}\sum_{m\le\sqrt{x/n}}\frac{\tilde{g}(m)}{m} + O\Big(\log x\sum_{n>(\log x)^{12}}\frac{|h(n)|}{\sqrt{n}}\Big). \tag{27}$$

由于 $\tilde{h}$ 的支撑集位于立方幂满数上，且 $|\tilde{h}(n)|\le d(n)\ll n^{0.01}$，上述误差项为

$$\ll \log x\int_{(\log x)^{12}}^{\infty}\frac{dF_3(u)}{u^{0.49}} \ll \log x\int_{(\log x)^{12}}^{\infty}\frac{F_3(u)}{u^{1.49}}du \ll \frac{\log x}{(\log x)^{12\times 0.15}} = \frac{1}{(\log x)^{0.8}} \tag{28}$$

由分部求和及 $Q_3(x) = \sum_{n\le x,\ n\text{ 立方幂满数}}1 \ll x^{1/3}$可得。令 $\tilde{G}(x) := \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\tilde{g}(n)$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x/n}<m\le\sqrt{x}}\frac{\tilde{g}(m)}{m} &= \int_{\sqrt{x/n}}^{\sqrt{x}}\frac{d\,t\tilde{G}(t)}{t} = \tilde{G}(\sqrt{x}) - \tilde{G}\Big(\sqrt{\frac{x}{n}}\Big) + \int_{\sqrt{x/n}}^{\sqrt{x}}\frac{\tilde{G}(t)}{t}dt\\ &= \tilde{G}(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x/n}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{t}dt + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{0.2}}\Big) = \tilde{G}(\sqrt{x})\log\sqrt{n} + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{0.2}}\Big)\end{aligned} \tag{29}$$

由分部　　求和以及命题 2 表明为 $n\le(\log x)^{12}$。将 (28) 和 (29) 代入 (27)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\sqrt{n}} &= \sum_{n\le(\log x)^{12}}\frac{\tilde{h}(n)}{\sqrt{n}}\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{\tilde{g}(m)}{m} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{m\le\sqrt{x}}\tilde{g}(m)\sum_{n\le(\log x)^{12}}\frac{\tilde{h}(n)\log\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{0.2}}\Big)\\ &= H_0\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{\tilde{g}(m)}{m} + H_1\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{m\le\sqrt{x}}\tilde{g}(m) + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{0.2}}\Big)\end{aligned} \tag{30}$$

with

$$H_0 := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{h}(n)}{\sqrt{n}} = \prod_p\Big(1+\frac{f(p^3)}{p^{3/2}} + \frac{f(p^4)-f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}} + \frac{f(p^5)-f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}} + \cdots\Big)$$

and

$$H_1 := -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{h}(n)\log n}{\sqrt{n}}$$

由 $|\tilde{h}(n)\log n| \le d(n)\log n \ll n^{0.01}$、估计式 (28) 以及 $\sum_{m\le x}\frac{|\tilde{g}(m)|}{m} \le \sum_{m\le x}\frac{1}{m} \ll \log x$，对 (30) 中的第一项应用命题 4（取 $f=\tilde{g}$），并对 (30) 中的第二项作平凡估计，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\sqrt{n}} &= \prod_{p\le y}\Big(1+\frac{f(p^3)}{p^{3/2}}+\frac{f(p^4)-f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}}+\frac{f(p^5)-f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}}+\cdots\Big)\Big(\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{f(p^2)}{p}}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big)\\ &\quad\times\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{g(n)}{n}+O(\log^3 y)\\ &= \prod_{p\le y}\Big(1+\frac{f(p^3)}{p^{3/2}}+\frac{f(p^4)-f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}}+\frac{f(p^5)-f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}}+\cdots\Big)\Big(\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{f(p^2)}{p}}\Big)\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{g(n)}{n}\\ &\quad+O\Big(\frac{\log x}{y}+\log^3 y\Big)\end{aligned}\tag{31}$$

其中，g 是由下式定义的完全积性函数：$g(p)=1$（当 $p\le y$ 时），且 $g(p)=f(p^2)$（当 $p>y$时）。最后，只需按照 [6] 中定理 3 或定理 8.4 的证明，将 $y=$ 替换为 $\exp((\log x)^{1/4})$，即可得到以下结构结果

$$\hat{\Gamma}_{0,\mathcal{Q}_2}(S)=\hat{\Gamma}_{\Theta}(S)\times\Lambda_0(S)\tag{32}$$

其中

$$\hat{\Gamma}_{\Theta}(S):=\lim_{x\to\infty}\Big\{\prod_{p\le x}\Big(1+\frac{f(p^3)}{p^{3/2}}+\frac{f(p^4)-f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}}+\frac{f(p^5)-f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}}+\cdots\Big)\Big(\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{f(p^2)}{p}}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big)\\ :f\in\hat{\mathcal{F}}_2(S)\Big\}$$

由（9）可得。定理 4 的证明至此完成。 □

6 定理 5 的证明

证明。设 $S=[-1,1]$。不同于 [8], 中的情形，（30）中的 H_0 可能为负，这是由欧拉乘积中的 $p=2$项所导致的。将（13）应用于（32），得到

$$\hat{\Gamma}_{0,\mathcal{Q}_2}([-1,1])=\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1])\times[0,1].\tag{33}$$

仿照 [6], 中定理 6 的证明，可以证明

$$\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1])\subset\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1])\times\mathcal{E}([-1,1])\subset\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1]).$$

作为 $1\in\mathcal{E}([-1,1])=[0,1]$。特别是，

$$\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1])=\hat{\Gamma}_{\Theta}([-1,1])\times[0,1].\tag{34}$$

因此，要理解修正的欧拉乘积谱，只需找出 $\Gamma_{\Theta}([-1,1])$ 中最大的正值和最大的负值，因为由 (34) 可知，$\Gamma_{\Theta}([-1,1])$ 就是这两个极值之间的区间。

现在，注意到

$$\begin{aligned}I_p &:= 1+\frac{f(p^3)}{p^{3/2}}+\frac{f(p^4)-f(p^2)f(p^2)}{p^{4/2}}+\frac{f(p^5)-f(p^3)f(p^2)}{p^{5/2}}+\frac{f(p^6)-f(p^4)f(p^2)}{p^{6/2}}\cdots\\ &= 1-\frac{f(p^2)^2}{p^{4/2}}+\frac{f(p^3)(p-f(p^2))}{p^{5/2}}+\frac{f(p^4)(p-f(p^2))}{p^{6/2}}+\cdots\end{aligned}\tag{35}$$

当 $p \ge 3$ 时，我们有 $\frac{1-1/p}{1-f(p^2)/p} > 0$ 且

$$\begin{aligned} I_p &\ge 1 - \frac{1}{p^{4/2}} - \frac{p+1}{p^{5/2}} - \frac{p+1}{p^{6/2}} - \cdots = 1 - \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2(p^{1/2}-1)} \\ &= 1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p^{1/2}-1)} - \frac{1}{p^2(p^{1/2}-1)} \ge 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3(3^{1/2}-1)} - \frac{1}{3^2(3^{1/2}-1)} > 0. \end{aligned} \tag{36}$$

记 $\alpha_p := f(p^2)$。那么

$$\begin{aligned} I_p \cdot \Big(\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{f(p^2)}{p}}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) &\le \Big(1 - \frac{\alpha_p^2}{p^2} + \frac{p-\alpha_p}{p^{5/2}} + \frac{p-\alpha_p}{p^{6/2}} + \cdots\Big)\Big(\frac{p-1}{p-\alpha_p}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) \\ &= \Big(\frac{p-1}{p-\alpha_p}\Big)\Big(\frac{p^2-\alpha_p^2}{p^2} + \frac{p-\alpha_p}{p^{5/2}(1-p^{-1/2})}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) \\ &= (p-1)\Big(\frac{p+\alpha_p}{p^2} + \frac{1}{p^{5/2}-p^2}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) \\ &\le (p-1)\Big(\frac{p+1}{p^2} + \frac{1}{p^{5/2}-p^2}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{p^{3/2}}}\Big) = 1 \end{aligned} \tag{37}$$

其中上界 当对所有 $k \ge 2$ 都有 $f(p^k) = 1$ 时，可以取到该界。当 $p = 2$ 时，等式 (35) 给出 s

$$\begin{aligned} I_2 \cdot \Big(\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{\alpha_2}{2}}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{3/2}}}\Big) &\ge \frac{2-1}{2-\alpha_2} \cdot \Big(1 - \frac{\alpha_2^2}{2^2} - \frac{2-\alpha_2}{2^{5/2}} - \frac{2-\alpha_2}{2^{6/2}} + \cdots\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{3/2}}}\Big) \\ &= \frac{1}{2-\alpha_2} \cdot \Big(\frac{2^2-\alpha_2^2}{2^2} - \frac{2-\alpha_2}{2^{5/2}(1-2^{-1/2})}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{3/2}}}\Big) \\ &= \Big(\frac{2+\alpha_2}{2^2} - \frac{1}{2^{5/2}-2^2}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{3/2}}}\Big) \\ &\ge \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{5/2}-4}\Big)\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{3/2}}}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{38}$$

当对所有 $k \ge 2$ 都有 $f(2^k) = -1$ 时，可以取到下界。结合 (37) 和 (38)，$\hat{}\,\Gamma_\Theta([-1,1])$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$，最大值为 1。再结合 (33) 和 (34)，便得到定理 5 的对数谱部分。

现在，对于常规谱，我们利用定理 4 中的 $\hat{}\,\Gamma_{\mathcal{Q}_2}([-1,1]) = \hat{}\,\Gamma_\Theta([-1,1]) \times \Lambda([-1,1])$。文献 [6] $\Lambda\,[-1,1] = [\delta_1,1] = [-0.656999\ldots,1]$ $\Gamma_\Theta\,[-1,1] = [\delta_2,1] =$ 中证明了 ( )。结合 $\hat{}$ ( )，可推出 $\hat{}$ $[-0.26120\ldots,1]$ $\Gamma_{\mathcal{Q}_2}\,[-1,1] = [\delta_1,1]$ ( )。

□

参考文献

[1] P.T. Bateman 和 E. Grosswald，关于 Erd˝os 和 Szekeres 的一个定理，《Illinois J. Math.》2 (1958)，88–98。

[2] H. Delange，关于乘法性算术函数，《Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.》，3° s´erie 78 (1961)，273–304。

[3] P. Erd˝os 和 G. Szekeres，关于给定阶数的阿贝尔群的数量及一个相关的数论问题，《Acta Univ. Szeged》7 (1934-1935), 95–102。

[4] A. Granville、A.J. Harper 和 K. Soundararajan，Hal´asz 定理一个尖锐版本的更直观证明。《美国数学学会会刊》146 (2018), no. 10, 4099–4104。[5] A. Granville、A.J. Harper 和 K. Soundararajan，Hal´asz 定理的新证明及其推论。《组合数学》155 (2019), no. 1, 126–163。[6] A. Granville 和 K. Soundararajan，乘性函数的谱，《数学年刊》153 (2001), 407–470。[7] A. Granville 和 K. Soundararajan，乘法函数均值的衰减，《加拿大数学杂志》55 (2003), 1191–1230。[8] A. Granville 和 K. Soundararajan，截断到 $L(1,\chi)$ 的负值，Clay Mathematics Pro- ceedings 7, 2007。.[9] G. Hal´asz，关于乘法数论函数的平均值，《Acta Math. Acad. Sci. Hung.》19 (1968), 141–168。[10] G. Hal´asz，关于加性函数的分布及乘法算术函数的平均值，《Studia Sci. Math. Hungar.》6 (1971), 211–233。[11] B. Kerr 和 O. Klurman，$\sum_{n\leq x} {}^{f(n)}\, n$ 能有多负？预印本（2022），arXiv:2211.05540。[12] H.L. Montgomery，关于乘法函数平均值的注记，Institut Mittag Leffler Report No. 17, 1978。[13] E. Wirsing，乘法函数求和的渐近行为 II，《Acta Math. Acad. Sci. Hung.》18 (1967), 411–467。

肯尼索州立大学数学系，玛
丽埃塔，佐治亚州 30060
tchan4@kennesaw.edu