arXiv:2303.01180v1 [math.AC] 2 Mar 2023

关于超曲面环上极大 Cohen-Macaulay 模的伴随分次模-II

ANKIT MISHRA 和 TONY J. PUTHENPURAKAL

Abstract. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d、且满足 $e(A)=3$ 的超曲面环。令 M 为一个 MCM A-模，且满足 $\mu(M)=4$，则我们证明 $\operatorname{depth} G(M)\geq d-3$。

1. Introduction

设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的诺特局部环，M 是一个维数为 r 的有限 Cohen-Macaulay A-模。令 $G(A)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 为 A 关于 $\mathfrak{m}$ 的伴随分次环，$G(M)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^nM/\mathfrak{m}^{n+1}M$ 为 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的伴随分次模。现在，$\mathcal{M}=\bigoplus_{n\geq 1}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 是 $G(A)$ 的无关极大理想，我们定义 $\operatorname{depth} G(M)=\operatorname{grade}(\mathcal{M},G(M))$。若 L 是一个 A-模，则 L 的最小生成元个数记为 $\mu(L)$，其长度记为 $\ell(L)$。

关于 $\mathfrak{m}$，M 的希尔伯特-塞缪尔函数为

$$H^1(M,n)=\ell(M/\mathfrak{m}^{n+1}M) \text{ for all } n\geq 0.$$

存在一个次数为 r 的多项式 $P_M(z)$，使得

$$H^1(M,n)=P_M(n) \text{ for } n\gg 0.$$

该多项式可写为

$$P_M(X)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i e_i(M)\binom{X+r-i}{r-i}$$

这些系数 $e_i(M)'$ 都是整数，称为 M 的希尔伯特系数。注意，$e_0(M)$ 称为 M 的重数，我们将其记为 $e(M)$。

我们知道，M 的希尔伯特级数是形式幂级数

$$H_M(z)=\sum_{n\geq 0}\ell(\mathfrak{m}^nM/\mathfrak{m}^{n+1}M)z^n$$

Date：2023年3月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13A30；次要分类：13D40、13C15、13H10。*Key words and phrases.* 极大 Cohen-Macaulay 模、约化数、Ratliff-Rush滤子、伴随分次模、超曲面环。

我们可以写成

$$H_M(z) = \frac{h_M(z)}{(1-z)^r}, \text{ where } r = dim M$$

这里， $h_M(z) = h_0(M) + h_1(M)z + \ldots + h_s(M)z^s \in \mathbb{Z}[z]$和 $h_M(1) \neq 0$。这个多项式称为 M 的 h-多项式。

若令 $f^{(i)}$ 表示多项式 f 的第 i 阶形式导数，那么容易看出，对于 $i = 0, \ldots, r$， $e_i(M) = h_M^{(i)}(1)/i!$。对于所有 $i \geq 0.$，令 $e_i(M) = h_M^{(i)}(1)/i!$ 也很方便。

现在我们知道，若 $(A, \mathfrak{m})$ 是 Cohen-Macaulay，且 $\text{red}(A) \leq 2$ （定义见 2.10），则 $G(A)$ 是 Cohen-Macaulay（见[16, 定理 2.1]）。

若 M 是一个 Cohen-Macaulay A-模，且 $\text{red}(M) \leq 1$，则 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay（见 [7, 定理 16]）；但若 $\text{red}(M) = 2$，则 $G(M)$ 未必是 Cohen-Macaulay（见 [8, 例 3.3]）。

这里我们考虑 Cohen-Macaulay 局部环 $(A, \mathfrak{m})$ 上的极大 Cohen–Macaulay（MCM）模。我们知道，如果 A 是正则局部环，那么 M 是自由模，记作 $M \cong A^s$。这意味着 $G(M) \cong G(A)^s$ 是 Cohen-Macaulay。

接下来考虑 A 是超曲面环的情形。为方便起见，在引言中我们假设 $A = Q/(f)$，其中 $(Q, \mathfrak{n})$ 是剩余域无限的正则局部环，且 $f \in \mathfrak{n}^2$。

如果 $f \in \mathfrak{n}^2 \setminus \mathfrak{n}^3$，那么 A 的重数极小。因此， A 上任意 MCM 模M 的重数都极小。所以 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay。

我们关注 $f \in \mathfrak{n}^3 \setminus \mathfrak{n}^4$ 的情形。注意在这种情况下，$\text{red}(A) = 2$。因此，如果 M 是任意一个 MCM A-模，那么 $\text{red}(M) \leq 2$。在这种情况下， $G(M)$ 未必是 Cohen-Macaulay（见 [8, 例 3.3]）。

注意，若 M 是 A 上的最大 Cohen–Macaulay 模，则 $\text{projdim}_Q(M) = 1$。因此， M 在 Q上有一个极小表示

$$0 \to Q^{\mu(M)} \xrightarrow{\phi} Q^{\mu(M)} \to M \to 0.$$

我们根据 M 在Q上的极小表示的不变量来研究 $G(M)$。

对于 $\mu(M) = 2$， 3，我们已证明 $\text{depth } G(M) \geq d - \mu(M) + 1$（见 [5]）。这里我们考虑下一个情形，即 $\mu(M) = 4$，并证明:

定理 1.1. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的超曲面环，且 $e(A) = 3$。设 M是一个最大 Cohen–Macaulay A-模。若 $\mu(M) = 4$，则 $\text{depth } G(M) \geq d - 3$。

下面概述本文的内容。第 2 节介绍本文中用到的一些预备知识。第 3 节证明定理 1.1。最后一节给出一些例子，以说明我们的结果。

2. Priliminaries

设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的诺特局部环，且 M 是一个维数为 r 的 A-模。

2.1. 若存在一个整数 $n_0 > 0$，使得 $x \in \mathfrak{m}$ 是 M 的表面元，则称 $x \in \mathfrak{m}$ 为 M 的表面元。

$$(\mathfrak{m}^n M :_M x) \cap \mathfrak{m}^{n_0} M = \mathfrak{m}^{n-1} M \text{ for all } n > n_0$$

我们知道，如果剩余域 $k = A/\mathfrak{m}$ 是无限的，那么表面元总是存在（见 [15, 第 7] 页）。若元素序列 $x_1, \ldots, x_m$ 满足 x_1 是 M- 表面元，且对于 i =2, . . ., m., x_i 是 $(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-表面元，则称其为表面序列。

注 2.2. (1) 如果 x 是 M–表面元且为正则元，那么对于所有 $n \gg 0$., 都有 ($\mathfrak{m}^n M :_M x) = \mathfrak{m}^{n-1} M$。(2) 如果深度 $M > 0$，则容易证明，每个 M-表面元也是 $M-$ 正则元。

2.3. 设 f: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ 是一个平坦局部环同态，且满足 $\mathfrak{m}B = \mathfrak{n}$。如果 M 是一个 A-模，令 $M' = M \otimes_A B$，则以下事实众所周知

(1) $H(M, n) = H(M', n)$ 对所有 $n \geq 0$ 均
成立。(2) $\text{depth}_{G(A)} G(M) = \text{depth}_{G(A')} G$
(M')。(3) $\text{projdim}_A(M) = \text{projdim}_{A'}(M')$。

我们将在以下两种情况下使用这一结果:

(a) 通过取 $B = \hat{A}$，我们可以假设 A 是完备的。(b) 我们可以假设 A 的剩余域是无限的，因为若剩余域 ($k = A/\mathfrak{m}$) 是有限的，我们可以取 $B = A[X]_S$，其中 $S = A[x] \setminus \mathfrak{m}A[X]$。显然， $B = k(X)$ 的剩余域是无限的。

2.4. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个超曲面环。我们可以假设 A 是完备的（见 2.3(a)）。因此 $A \cong Q/(f)$，其中 $(Q, \mathfrak{n})$ 是一个正则局部环，且 $f \in \mathfrak{n}^2$。若 A 的剩余域是有限的，则取 $B = A[X]_S$，其中 $S = A[x] \setminus \mathfrak{m}A[X]$。注意， B 是一个正则局部环对某个主理想取商所得的环，且 B 的剩余域是无限的。

本文讨论的所有性质在从 A 到 A' 时均保持不变。因此，我们可以假设 A 的剩余域是无限的。

2.5. 若 a 是 M 的非零元素，且 i 是满足 $a \in \mathfrak{m}^i M$ 的最大整数，则将 a 在 $\mathfrak{m}^i\ M/\mathfrak{m}^{i+1}\ M$ 中的像记为 a^*。若 N 是 M 的一个子模，则 N^* 表示由所有满足 $b \in N$ 的 b^* 生成的 $G(M)$ 的分次子模。

定义 2.6. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $M \neq 0$ 是一个有限 A-模，则称 M 为 Cohen-Macaulay A-模，若深度 $M = \dim\ M$；若深度 $M = \dim\ A$，则称其为极大 Cohen–Macaulay（MCM）模。

2.7. 若 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ an M–是一个表浅正则元。令 $N = M/xM$ and$K = \mathfrak{m}/(x)$, 则有 Singh 等式（关于 $M = A$，参见 [17, 定理 1],，以及

关于模情形，参见 [7, 定理 9])

$$H(M,n)=\ell(N/K^{n+1}N)-\ell\left(\frac{\mathfrak{m}^{n+1}M:x}{\mathfrak{m}^nM}\right) \text{ for all } n\geq 0.$$

令 $b_n(x,M)=\ell(\mathfrak{m}^{n+1}M:x/\mathfrak{m}^nM)$，并令 $b_{x,M}(z)=\sum_{n\geq 0}b_n(x,M)z^n$。注意，$b_0(x,M)=0$。现在我们有

$$h_M(z)=h_N(z)-(1-z)^rb_{x,M}(z)$$

2.8.（参见 [7, 推论 10]）设 $x\in\mathfrak{m}$ 是一个 $M-$表面元和正则元。令 $B=A/(x)$，$N=M/xM$ 和 $K=\mathfrak{m}/(x)$，则有

(1) $\dim M-1=\dim N$ 且 $h_0(N)=h_0(M)$。(2) $b_{x,M}$ 是一个多项式。(3) $h_1(M)=h_1(N)$ 当且仅当 $\mathfrak{m}^2M\cap xM=x\mathfrak{m}M$.(4) $e_i(M)=e_i(N)$ 对于 $i=0,\ldots,r-1$.(5) $e_r(M)=e_r(N)-(-1)^r\sum_{n\geq 0}b_n(x,M)$。(6) x^* 是 $G(M)$-正则的，当且仅当对所有 $n\geq 0$.，$b_n(x,M)=0$。(7) $e_r(M)=e_r(N)$ 当且仅当 x^* 是 $G(M)$-正则的。(8) 深度 $G(M)\geq 1$ 当且仅当 $h_M(z)=h_N(z)$。

2.9. Sally 下降（见 [7, 定理 8]）：设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 M 是一个维数为 r 的 Cohen-Macaulay 模。设 $x_1,\ldots,x_c$ 是一个 M-浅表序列，满足 $c\leq r-1$。令 $M_c=M/(x_1,\ldots,x_c)M$，则深度 $G(M)\geq c+1$ 当且仅当深度 $G(M_c)\geq 1$。

2.10. M 的约化数（记作 $\mathrm{red}(M)$）定义为满足以下条件的最小整数 ℓ：存在一个由极大表面序列生成的理想 J，使得 $\mathfrak{m}^{\ell+1}M=J\mathfrak{m}^\ell M$。

定义 2.11. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 M 是一个极大 Cohen-Macaulay 模，则若 M 满足 $e(M)=\mu(M)$，称其为 Ulrich 模。

注 2.12. 当 M 是一个最大 Cohen–Macaulay 模，且 $\mathfrak{m}$ 有一个由参数系生成的极小约化 J 时，M 是 Ulrich 模当且仅当 $\mathfrak{m}M=JM$。

2.13.（参见 [3, 第 6] 节）对于任意 $n\geq 1$，我们可以定义与 $\mathfrak{m}^n$ 相关联的 M 的 Ratliff-Rush 子模：

$$\widetilde{\mathfrak{m}^nM}=\bigcup_{i\geq 0}(\mathfrak{m}^{n+i}M:_M\mathfrak{m}^i)$$

滤子 $\{\mathfrak{m}^nM\}_{n\geq 1}$ 称为 M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 Ratliff-Rush 滤子。

关于环情形中以下性质的证明，参见 [12]。该证明也可以很容易地推广到模。另见 [6, 2。2]。

2.14. 如果深度 $M>0$ 且 $x\in\mathfrak{m}$ 是一个 $M-$表面元，那么我们有

(1) $\mathfrak{m}^nM=\mathfrak{m}^nM$ 对所有 $n\gg 0$.

(2) $(\mathfrak{m}^{n+1}M:x)=\mathfrak{m}^nM$ 对所有 $n\geq 1$.

2.15. 设 $G(M)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^nM/\mathfrak{m}^{n+1}M$ 是 M 关于 Ratliff-Rush滤子的伴随分次模。那么它的希尔伯特级数

$$\sum_{n\geq 0}\ell(\widetilde{\mathfrak{m}^nM}/\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1}M})z^n=\frac{\widetilde{h_M(z)}}{(1-z)^r}$$

其中 $h_M(z)\in\mathbb{Z}[z]$。令 $r_M(z)=\sum_{n\geq 0}\ell(\mathfrak{m}^{n+1}M/\mathfrak{m}^{n+1}M)z^n$；显然， $r_M(z)$ 是一个系数为非负整数的多项式（因为深度 $M>0$）。现在我们有（见 [11, 1.5]）

$$h_M(z)=\widetilde{h_M}(z)+(1-z)^{r+1}r_M(z);\ \text{where}\ \ r=\dim M$$

我们知道，深度 $G(M)>0$ 当且仅当 $r_M(z)=0$。

2.16.（见 [11, 2.1]）设 x 是一个 $M-$表面元，且深度$M\geq 2$。令$N=M/xM$，则我们有一个自然映射 $\rho^x:M\to N$，并且称 M 上的 Ratliff-Rush 滤子在表面元 x 模下表现良好，若对所有 $n\geq 1$ 都有 $\rho^x(\mathfrak{m}^nM)=\mathfrak{m}^nN$。现在 ρ^x 诱导出映射

$$\rho_n^x:\frac{\widetilde{\mathfrak{m}^nM}}{\mathfrak{m}^nM}\to\frac{\widetilde{\mathfrak{m}^nN}}{\mathfrak{m}^nN}$$

容易证明，Ratliff-Rush滤子在模 x 下表现良好，当且仅当对所有 $n\geq 1$， ρ_n^x 都是满射。

定义 2.17. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环， M 是一个有限的 A-模，且 $\dim M=d$。若满足以下条件，则称 $G(M)$ 是一个广义 Cohen-Macaulay $G(A)$-模：

$$\ell(H^i_{\mathcal{M}}(G(M)))<\infty\ \ \text{for}\ \ i=0,\dots,d-1$$

其中， $H^i_{\mathcal{M}}(G(M))$ 是 $G(M)$ 关于 $G(A)$ 的极大齐次理想 $\mathcal{M}$ 的第 i 个局部上同调模。

注 2.18. $G(A)$ 是一个有限生成的 $k(=A/\mathfrak{m})$-代数。 $G(A)$-模 E 是广义 Cohen-Macaulay 模，当且仅当对所有素理想 $P\neq\mathcal{M}$， E_P 都是 Cohen-Macaulay。

命题 2.19. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d\geq 1$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 M 是一个有限的 A-模，满足 $\dim M=d$。若 $G(M)$ 是一个 Cohen-Macaulay$G(A)$-模，则

(1) $G(M)$ 是广义 Cohen-Macaulay 模。(2) 对 $G(M)$ 的所有极小素理想 P， $\dim\ G(A)/P=d$。

证明。与 [4, 命题 2.20]的证明类似。 □

定义 2.20. 设（$A, \mathfrak{m}$）是一个诺特局部环，则如果 A 的完备化可以表示为一个正则局部环模去一个主理想所得的商环，就称 A 为超曲面环。

2.21. 设 $(Q, \mathfrak{n})$ 是一个正则局部环， $f \in \mathfrak{n}^e \setminus \mathfrak{n}^{e+1}$ and $A = Q/(f)$。如果 M 是一个 MCM $A-$模，则 $\text{projdim}_Q(M) = 1$ ，并且 M 有一个极小表示:

$$0 \to Q^{\mu(M)} \to Q^{\mu(M)} \to M \to 0$$

2.22. 设 $(Q, \mathfrak{n})$ 是一个正则局部环，且 $\phi :\ Q^t \to Q^t$ 是一个线性映射，令

$$i_\phi = \max\{i|\text{ all entries of } \phi \text{ are in } \mathfrak{n}^i\}$$

如果 M 有极小表示： $0 \to Q^t \xrightarrow{\phi} Q^t \to M \to 0$ 和 $0 \to Q^t \xrightarrow{\phi'} Q^t \to M \to 0$ ，那么众所周知， $i_\phi = i_{\phi'}$ 且 $\det(\phi) = u\det(\phi')$，其中 u 是一个单位元。我们令 $i(M) = i_\phi$ ，且 $\det M = \det(\phi)$。对于 Q 中的任意非零元素 a ，我们令 $v_Q(a) = max\{i|a \in \mathfrak{n}^i\}$。我们采用了来自 [8] 的这一设置。

定义 2.23。（参见 [8, 定义 4.4]）设 $(Q, \mathfrak{n})$ 是一个正则局部环， $A = Q/(f)$，其中 $f \in \mathfrak{n}^e \setminus \mathfrak{n}^{e+1}, e \geq 2$，且 M 是一个具有极小表示的 MCM $A-$模:

$$0 \to Q^t \xrightarrow{\phi} Q^t \to M \to 0$$

则称 x 的一个元素为 $\mathfrak{n}$ 的 $\phi-$ 表面元，若满足

(1) x 是 $Q \oplus A \oplus M$ 表面元。(2) 若 $\phi = (\phi_{ij})$，则 $v_Q(\phi_{ij}) = v_{Q/xQ}(\overline{\phi_{ij}})$。(3) $v_Q(det(\phi)) = v_{Q/xQ}(det(\overline{\phi}))$

注 2.24。若 x 是 $Q \oplus A \oplus M \oplus (\oplus_{ij} Q/(\phi_{ij})) \oplus Q/(det(\phi))-$表面元，则它是 $\phi-$表面元。因此，若 Q 的剩余域是无限的，则总存在 $\phi-$表面元。

定义 2.25.（参见 [8, 定义 4.5]）设 $(Q, \mathfrak{n})$ 为正则局部环， $A = Q/(f)$，其中 $f \in \mathfrak{n}^e \setminus \mathfrak{n}^{e+1}, e \geq 2$，且 M 为一个具有如下极小表示的 MCM $A-$模:

$$0 \to Q^t \xrightarrow{\phi} Q^t \to M \to 0.$$

如果对于 $n = 1, \ldots, c$， $\overline{x_n}$ 是 $(\phi \otimes_Q Q/(x_1, \ldots, x_{n-1}))$-浅表的，则称 $x_1, \ldots, x_c$ 为 ϕ-浅表序列。

2.26. 在上述设定下，我们有

(1) ([8, 引理 4.7]) 若 $\dim M = 1$ 则

$$h_M(z) = \mu(M)(1 + z + \ldots + z^{i(M)-1}) + \sum_{i \geq i(M)} h_i(M) z^i$$

$$\text{with } h_i(M) \geq 0 \ \forall\ i.$$

(2) ([8, Theorem 2]) $e(M) \geq \mu(M)i(M)$ and if $e(M) = \mu(M)i(M)$ then $G(M)$ is Cohen-Macaulay and $h_M(z) = \mu(M)(1 + z + \ldots + z^{i(M)-1})$.

2.27. ([7, 命题 13]) 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个 Cohen-Macaulay 局部环， M 是一个维数为一的 Cohen-Macaulay 模。设 x 是一个 M-表面元。对所有 $n \geq 0$，令$\rho_n(M) = \ell(\mathfrak{m}^{n+1}M/x\mathfrak{m}^n M)$。若 $\deg\ h_M(z) = s$，则对所有$n \geq s$， $\rho_n(M) = 0$，并且

$$h_M(z) = \mu(M) + \sum_{i=1}^{s}(\rho_{i-1}(M) - \rho_i(M))z^i.$$

2.28. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个 Cohen-Macaulay 局部环，且 M 是一个维数为 2 的 Cohen-Macaulay A-模。设 x, y 是一个极大 M-浅表序列。

令 $J = (x, y)$，且 $\overline{M} = M/xM$，则有正合列（关于 $M = A$，参见 [13, 引理 2.2]）

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^n M : J}{\mathfrak{m}^{n-1}M} \xrightarrow{f_1} \frac{\mathfrak{m}^n M : x}{\mathfrak{m}^{n-1}M} \xrightarrow{f_2} \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M : x}{\mathfrak{m}^n M} \xrightarrow{f_3} \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M}{J\mathfrak{m}^n M} \xrightarrow{f_4} \frac{\mathfrak{m}^{n+1}\overline{M}}{y\mathfrak{m}^n\overline{M}} \to 0$$

这里， f_1 是包含映射， $f_2(a+\mathfrak{m}^{n-1}M) = ay+\mathfrak{m}^n M$， $f_3(b+\mathfrak{m}^n M) = bx+J\mathfrak{m}^n M$，而 f_4 是模 x 约化。

2.29. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 M 是一个极大 Cohen-Macaulay A-模。设 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ 是一个极大 M-浅表序列。令 $N = M/x_1M$, $J = (x_1, \ldots, x_d)$，且 $\overline{J}$ 是 J 在 $A/(x_1)$ 中的像。则有

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^2 M : x_1}{\mathfrak{m}M} \xrightarrow{f} \frac{\mathfrak{m}^2 M}{J\mathfrak{m}M} \xrightarrow{g} \frac{\mathfrak{m}^2 N}{\overline{J}\mathfrak{m}N} \to 0.$$

此处， $f(a + \mathfrak{m}M) = ax_1 + J\mathfrak{m}M$和 g是模 x_1 的约化。

2.30. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个 1 维 Cohen-Macaulay 局部环， M 是一个极大 Cohen-Macaulay A-模。设 x 是 M 的表面元。置 $N = M/xM$。则有

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^2 M : x}{\mathfrak{m}^2 M} \xrightarrow{f} \frac{\mathfrak{m}^2 M}{x\mathfrak{m}^2 M} \xrightarrow{g} \frac{\mathfrak{m}^2 N}{0} \to 0.$$

此处， $f(a + \mathfrak{m}^2 M) = ax + x\mathfrak{m}^2 M$和 g是模 x 的约化。

下面的结果是众所周知的，但我们将多次使用它。为方便读者，现陈述如下

2.31. 设 $(A, \mathfrak{m}) = (Q/(f)\ \mathfrak{n}/(f))$，其中 $(Q, \mathfrak{n})$ 是一个维数为 $d + 1$ 的正则局部环，且 $f \in \mathfrak{n}^i \setminus \mathfrak{n}^{i+1}$。现在，若 M 是一个极大 Cohen-Macaulay A-模，且 $\operatorname{red}(M) \leq 2$。设 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ 是 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ 中充分一般的线性形式。置 $S = G_{\mathfrak{n}}(Q)$, $R = S/(\underline{x^*})S$，则对于某个 $s \geq 2$， $R \cong k[T]$ 且 $G(A)/(\underline{x})G(A) \cong R/(T^s)$。

现在考虑 $G(\overline{M}) = \overline{G(M)}/(\underline{x^*})G(M)$。那么

$$\overline{G(M)} = M/\mathfrak{m}M \oplus \mathfrak{m}M/(\mathfrak{m}^2 M + (\underline{x})M) \oplus \mathfrak{m}^2 M/(\mathfrak{m}^3 M + (\underline{x})\mathfrak{m}M)$$

其希尔伯特级数为 $\mu(M) + \alpha z + \beta z^2$，其中 $\beta \leq \alpha \leq \mu(M)$，因为它是一个$R$-模，同时也是 $R/(T^s)$-模，并且由零次齐次元素生成。

2.32. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 的 Cohen-Macaulay 局部环，且 M 是一个有限生成的 A-模，深度为 $M \geq 2$。设 x 是一个 M-表面元。令 $N = M/xM$。那么，对于 $n \geq 0$，我们有如下正合列（见 [11, 2.2]）

$$0 \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+1}M : x)}{\mathfrak{m}^n M} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}^n M}{\mathfrak{m}^n M}} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}^{n+1}M}{\mathfrak{m}^{n+1}M}} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}^{n+1}N}{\mathfrak{m}^{n+1}N}}. \tag{1}$$

特别地，我们有如下正合列

$$0 \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}M}{\mathfrak{m}M}} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}N}{\mathfrak{m}N}}. \tag{2}$$

如果深度 $M = 1$，那么对于所有 $n \geq 0$，我们都有如下正合列

$$0 \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+1}M : x)}{\mathfrak{m}^n M} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}^n M}{\mathfrak{m}^n M}} \to \widetilde{\frac{\mathfrak{m}^{n+1}M}{\mathfrak{m}^{n+1}M}}. \tag{3}$$

下一个结果是线性代数中的一个基本事实。

命题 2.33. 设 V 是一个在无限域 k 上维数为 $d \geq 2$ 的向量空间。设 V_1、$\ldots V_n$ 是 V 的有限多个真子空间。若 $\dim_k(V_i) \leq \dim_k V - 2$，则存在一个子空间 $H = ka \oplus kb$，其中 a、$b \in V$，使得 $H \cap V_i = 0$ 对于$i = 0$、.....、n。

以下结果是众所周知的（例如参见 [5, 引理 2.33]）

引理 2.34. 设（A，$\mathfrak{m}$）是一个维数为 d 、具有无限剩余域且重数为 e（A）$= e$ 的完备超曲面环。设 M 是一个最大 Cohen–Macaulay 模。设 $\underline{x} = x_1$，...，x_d 是一个极大 A-浅表序列。若 M 没有自由直和项，则 $M_d = M/$（x_1，...，x_d）M 也没有自由直和项。

约定：设 M 是一个维数为 d 的极大 Cohen-Macaulay 模，且 $\underline{x} = x_1$，...，x_d 是一个极大 ϕ-浅表序列，则
$M_0 = M$ 以及 $M_t = M/$（x_1，...，x_t）M 对于 $t = 1$，...，d。

3. 主要结果

我们首先考虑 MCM 模 M 没有自由直和项的情形。

定理 3.1. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 且满足 $e(A)$ =3 的超曲面环。设 M 是一个不含自由直和项的最大 Cohen–Macaulay 模。现在，如果 $\mu(M) = 4$，则深度 $G(M) \geq d - 3$。

证明。我们可以假设 A 是带有无限剩余域的完备环（见 2.4）。由于 $e(A) = 3$，我们可以取 $(A, \mathfrak{m}) = (Q/(g)\ \mathfrak{n}/(g))$，其中 $(Q, \mathfrak{n})$ 是维数为 $d + 1$ 且 $g \in \mathfrak{n}^3 \setminus \mathfrak{n}^4$ 的正则局部环。这意味着 $h_A(z) = 1 + z + z^2$ 且 $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2$，其中 J 是 A 的极小约化。

令 $\dim M \geq 1$，并令 $0 \to Q^4 \xrightarrow{\phi} Q^4 \to M \to 0$ 为 M 的极小表示。令 $\underline{x} = x_1, .., x_d$ 为一个极大 ϕ-浅表序列（见 2.23）。设 $M_d = M/\underline{x}M$ 且 $(Q', (y)) = (Q/(\underline{x}), \mathfrak{n}/(\underline{x}))$。注意 $A/(\underline{x})A = Q'/(y^3)$。

显然，Q' 是离散赋值环，因此 $M_d \cong Q'/(y^{a_1}) \oplus Q'/(y^{a_2}) \oplus Q'/(y^{a_3}) \oplus Q'/(y^{a_4})$。

由引理 2.34，M_d 没有自由直和项。因此，我们可以假设 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 2$。

这意味着 $4 \leq e(M) \leq 8$。我们分别考虑所有情形：

情形（1）：$e(M) = 4$。

在这种情形下，$M_d \cong Q'/(y) \oplus Q'/(y) \oplus Q'/(y) \oplus Q'/(y)$。这意味着 $h_{M_d} = 4$，因此$e(M_d) = \mu(M_d) = 4$。

对于 $\dim M \geq 1$, $e(M) = \mu(M) = 4$。此外，注意到 $i(M) = i(M_d) = 1$。由于$e(M) = \mu(M) = 4$，M是一个 Ulrich 模（见 2.11）。这意味着 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay 的，且 $h_M(z) = 4$（见 $[8,$ 定理 $2]$）。

情形（2）：$e(M) = 5$。

在这种情形下，$M_d \cong Q'/(y) \oplus Q'/(y) \oplus Q'/(y) \oplus Q'/(y^2)$，且 $h_{M_d}(z) = 4 + z$。

这意味着 $i(M) = i(M_d) = 1$，$\mu(M) = 4$且 $e(M) = e(M_d) = 5$。现在，对于 $\dim M \geq 1$，我们有深度 $G(M) \geq d - 1$（见 $[5,$ 定理 1.1$]$）。此外，我们有两种情形：

当 $h_M(z) = 4 + z$ 时的第一种情形。在这种情形下，$G(M)$ 是 Cohen-Macaulay。

当 $h_M(z) = 4 + z^2$ 时的第二种情形。在这种情形下，$\operatorname{depth} G(M) = d - 1$。

情形（3）：$e(M) = 6$。

在这种情形下，$M_d \cong Q'/(y) \oplus Q'/(y) \oplus Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2)$，这意味着 $h_{M_d}(z) = 4 + 2z$。

我们先考虑 $\dim M = 4$ 的情形，因为如果 $\dim M \leq 3$，则无事可证。

设 $\underline{x} = x_1, x_2, x_3, x_4$ 是一个极大 ϕ-浅表序列。令 $M_1 = M/x_1M$,$M_2 = M/(x_1, x_2)M$, $M_3 = M/(x_1, x_2, x_3)M$, $J_1 = (x_2, x_3, x_4)$ 和 $J_2 = (x_3, x_4)$。由于 $\dim M_3 = 1$，我们可以将 M_3 的 h-多项式写成 $h_{M_3}(z) = 4 + (\rho_0(M_3) - \rho_1(M_3))z + \rho_1(M_3)z^2$，其中 $\rho_n(M_3) = \ell(\mathfrak{m}^{n+1}M_3/x_4\mathfrak{m}^n M_3)$（见 2.27）。因此我们有$\rho_0(M_3) = 2$；又由于 h_M 的所有系数均非负（见 2.26(1)），所以 $\rho_1(M_3)$ 的可能取值为 0、1 和 2。

子情形（i）：$\rho_1(M_3) = 0$。

在此情形下，M_3具有极小重数，且 $h_{M_3}(z) = 4 + 2z$。这意味着 $G(M_3)$是 Cohen-Macaulay。根据Sally 下降，$G(M)$是Cohen-Macaulay。

子情形（ii）：$\rho_1(M_3) = 1$。

在此情形下，$h_{M_3}(z) = 4 + z + z^2$。这意味着$\operatorname{depth} G(M_3) = 0$，因为 $h_{M_3}(z) \neq h_{M_4}(z)$（见2.8）。

由于 $\dim M_2 = 2$，我们有（见 2.8）

$$e_2(M_2) = e_2(M_3) - \sum b_i(x_3, M_2),$$

其中 $b_i(x_3, M_2) = \ell(\mathfrak{m}^{i+1}M_2 : x_3/\mathfrak{m}^i M_2)$。我们知道 $e_2(M_2)$ 和 $\sum b_i(x_3, M_2)$ 是非负整数。注意，我们有 $e_2(M_3) = 1$。这意味着 $\sum b_i(x_3, M_2) \leq 1$。

由于约化数$(M) \leq 2$，由正合列

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^n M_2 : J_2}{\mathfrak{m}^{n-1}M_2} \to \frac{\mathfrak{m}^n M_2 : x_3}{\mathfrak{m}^{n-1}M_2} \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M_2 : x_3}{\mathfrak{m}^n M_2} \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M_2}{J_2\mathfrak{m}^n M_2} \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M_3}{x_4\mathfrak{m}^n M_3} \to 0$$

我们得到，若 $b_1(x_3, M_2) = 0$，则对所有 $i \geq 2$，$b_i(x_3, M_2) = 0$。因此，$\sum b_i(x_3, M_2) \neq 0$意味着 $b_1(x_3, M_2) = 1$。

现在有两种情形。
子情形 (ii).(a)：当 $b_1(x_3, M_2) = 0$ 时。
这意味着 depth $G(M_2) \geq 1$（见 2.8）。事实上，若 depth $G(M_2) = 1$，否则 $G(M_2)$ 是 Cohen-Macaulay。这不可能，因为 depth $G(M_3) = 0$。现在由 Sally-descent，depth$G(M) = 3$ 且 $h_M(z) = 4 + z + z^2$。
子情形 (ii).(b)：当 $b_1(x_3, M_2) = 1$ 时。
因此，深度 $G(M_2) = 0$（见 2.8）。在此情形下，$h_{M_2}(z) = h_{M_3}(z) - (1 - z)^2 z = 4 + 3z^2 - z^3$（见 2.7）。

由上述正合列可得

$$0 \to \mathfrak{m}^2 M_2 : x_3/\mathfrak{m}M_2 \to \mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2 \to \mathfrak{m}^2 M_3/x_4\mathfrak{m}M_3 \to 0. \tag{4}$$

So, $\ell(\mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2) = \rho_1(M_3) + b_1(x_3, M_2) = 2.$
由于 dim$M_1 = 3$，由短正合列（见 2.29）

$$0 \to \mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1 \to \mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1 \to \mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2 \to 0$$

我们有 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1) = 2 + \ell(\mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1)$。此外，我们还有

$$G(M_1)/(x_2^*, x_3^*, x_4^*,)G(M_1) = M_1/\mathfrak{m}M_1 \oplus \mathfrak{m}M_1/J_1M_1 \oplus \mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1.$$

考察其希尔伯特级数可得 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1) \leq 2$，因为在此情形下$\ell(\mathfrak{m}M_1/J_1M_1) = 2$（见 2.31）。因此我们有 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1) = 2$。
我们还知道 $\mathfrak{m}^2 M_1 \subseteq J_1 M_1$。
因此在这种情形下

$$\delta = \sum \ell(\mathfrak{m}^{n+1}M_1 \cap J_1M_1/J_1\mathfrak{m}^n M_1) = 2$$

我们知道，如果 $\delta \leq 2$，那么 depth $G(M) \geq d - \delta$（见 $[10,$ 定理 5.1$]$）。因此我们有 depth $G(M_1) \geq 1$。另请注意，depth $G(M_1) = 1$，因为 depth $G(M_2) = 0$。

根据 Sally 下降，depth $G(M) = 2$ 且 $h_M(z) = 4 + 3z^2 - z^3$。
子情形(iii)：$\rho_1(M_3) = 2$。
在这种情形下，$h_{M_3}(z) = 4 + 2z^2$。这意味着 depth$G(M_3) = 0$，因为 $h_{M_3}(z) \neq h_{M_4}(z)$（见 2.8）。
由于 dim$M_2 = 2$，我们有（见 2.8）

$$e_2(M_2) = e_2(M_3) - \sum b_i(x_3, M_2).$$

我们知道 $e_2(M_2)$ 和 $\sum b_i(x_3, M_2)$ 是非负整数。在这种情况下，我们还有 $e_2(M_3) = 2$。这意味着 $\sum b_i(x_3, M_2) \leq 2$。

根据子情形 (ii) 中给出的论证，我们知道 $b_1(x_3, M_2) = 0$ 蕴含所有$b_i(x_3, M_2) = 0$。

现在分为两种情形。
子情形 (iii).(a)：当 $b_1(x_3, M_2) = 0$ 时。
因此，在此情形下，深度 $G(M_2) = 1$（见 2.8）。还要注意，深度 $G(M_2) \neq 2$，因为深度 $G(M_3) = 0$。由 Sally 下降可得，深度 $G(M) = 3$ 且 $h_M(z) = 4 + 2z^2$。
子情形 (iii).(b)：当 $b_1(x_3, M_2) \neq 0$ 时。
现在由正合列 (4)，我们得到 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2) = \rho_1(M_3) + b_1(x_3, M_2) \geq 3$。

现在考虑 $G(\overline{M_2}) = G(M_2)/(x_3^*, x_4^*)G(M_2)$。于是我们得到

$$\overline{G(M_2)} = M_2/\mathfrak{m}M_2 \oplus \mathfrak{m}M_2/J_2M_2 \oplus \mathfrak{m}^2M_2/J_2\mathfrak{m}M_2$$

其希尔伯特级数为 $4+2z+(\rho_1(M_3)+b_1(x_3, M_2))$，因为 $\ell(\mathfrak{m}M_2/J_2M_2) = 2$。但这不是一个可能的希尔伯特级数（见 2.31）。因此， $b_1(x_3, M_2) \neq 0$ 的情形是不可能的。

现在假设 $\dim M \geq 5$ 且 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ 是一个极大 ϕ-浅表序列。令 $M_{d-4} = M/(x_1, \ldots, x_{d-4})M$。现在分为三种情形。
第一种情形： $G(M_{d-4})$ 是 Cohen-Macaulay。由 Sally 下降， $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，且 $h_M(z) = 4 + 2z$。
当深度 $G(M_{d-4}) = 3$ 时的第二种情形。由 Sally 下降，深度 $G(M) = d - 1$，且 $h_M(z) = 4 + z + z^2$ 或 $h_M(z) = 4 + 2z^2$。
当深度 $G(M_{d-4}) = 2$ 时的第三种情况。由 Sally 下降，深度 $G(M) = d - 2$，且 $h_M(z) = 4 + 3z^2 - z^3$。
情况（4）： $e(M) = 7$。
在这种情形下， $M_d \cong Q'/(y) \oplus Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2)$，且 $h_{M_d}(z) = 4 + 3z$。
我们首先考虑 $\dim M = 4$ 的情形，因为若 $\dim M \leq 3$，则无需证明。

设 $\underline{x} = x_1$、x_2、x_3、x_4 为一个极大 ϕ-浅表序列。令 $M_1 = M/x_1M$、$M_2 = M/(x_1, x_2)M$、 $M_3 = M/(x_1, x_2, x_3)M$、 $J_1 = (x_2, x_3, x_4)$、 $J_2 = (x_3, x_4)$ 以及$J = (x_1, x_2, x_3, x_4)$。
我们首先证明两个断言：
Claim(1): $\widetilde{\mathfrak{m}^i M_3} = \mathfrak{m}^i M_3$ for all $i \geq 2$.
断言的证明：由于对于所有 $n \geq 2$，我们都有 $\mathfrak{m}^{n+1}M_3 = x_4\mathfrak{m}^n M_3$。因此，对于所有 $n \geq 2$，有 $(\mathfrak{m}^{n+1}M_3 : x_4) = \mathfrak{m}^n M_3$。我们有正合列（见 2.32）

$$0 \to \mathfrak{m}^{n+1}M_3 : x_4/\mathfrak{m}^n M_3 \to \widetilde{\mathfrak{m}^n M_3}/\mathfrak{m}^n M_3 \to \widetilde{\mathfrak{m}^{n+1}M_3}/\mathfrak{m}^{n+1}M_3.$$

我们还知道，对于 $n \gg\gg 0$, $\mathfrak{m}^n M_3 = \mathfrak{m}^n M_3$。利用这些事实，显然有 $\mathfrak{m}^i M_3 = \mathfrak{m}^i M_3$ 对所有 $i \geq 2$.

断言(2)： $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) \leq 1$。

断言的证明：由于 $\mu(M_3) = 4$，我们有 $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) \leq 4$。
如果 $\ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_3}/\mathfrak{m}M_3) = 4$，那么 $\widetilde{\mathfrak{m}M_3} = M_3$。因此 $\mathfrak{m}^3M_3 = \mathfrak{m}^2M_3$，因为我们知道对于所有 $i \geq 2$， $\mathfrak{m}^iM_3 = \mathfrak{m}^iM_3$。所以，由此我们得到 $\mathfrak{m}^2M_3 = 0$，这与矛盾。因此 $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) \leq 3$。

若可能，假设 $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) > 1$，于是我们有 $M_3 = \langle m_1, m_2, l_1, l_2\rangle$，其中$l_1, l_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}M_3} \setminus \mathfrak{m}M_3$。这意味着对于 $i = 1$，有 $l_i\mathfrak{m} \subseteq \widetilde{\mathfrak{m}^2M_3} = \mathfrak{m}^2M_3$，2。现在若令 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/(x_1, x_2, x_3, x_4)$，那么 $\mathfrak{m}'$ 是一个主理想。我们还知道$\ell(\mathfrak{m}M_4) = \ell(\mathfrak{m}'M_4)$ 且 $\mathfrak{m}^2M_4 = \mathfrak{m}'^2M_4 = 0$。由此得到 $\ell(\mathfrak{m}M_4) \leq 2$。这是矛盾的，因为我们知道 $\ell(\mathfrak{m}M_4) = 3$。所以， $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) \leq 1$。
现在分为两种情形。

子情形 (i)：当 $\mathfrak{m}M_3 = \mathfrak{m}M_3$ 时。
因此，我们得$\widetilde{\mathfrak{m}^iM_3} = \mathfrak{m}^iM_3$ 对所有 i 都成立，因为我们知道 $\mathfrak{m}^iM_3 = \mathfrak{m}^iM_3$ 对所有$i \geq 2$ 都成立（由断言 (1)）。因此，在这种情形下， $G(M_3)$ 的深度为 $= 1$，也就是说， $G(M_3)$ 是 Cohen-Macaulay 的。根据 Sally 下降， $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay 的，并且 $h_M(z) = 4 + 3z$。

子情形 (ii)：当 $\ell(\mathfrak{m}M_3/\mathfrak{m}M_3) = 1$ 时。在此子情形下，由 2.32(3) 以及事实$\mathfrak{m}^2M_3 = \mathfrak{m}^2M_3$，我们得到 $\ell(\mathfrak{m}^2M_3 : x_4/\mathfrak{m}M_3) = 1$。
由于 $\dim M_3 = 1$，我们可以将 M_3 的 h-多项式写成 $h_{M_3}(z) = 4 + (\rho_0(M_3) - \rho_1(M_3))z + \rho_1(M_3)z^2$，其中 $\rho_n(M_3) = \ell(\mathfrak{m}^{n+1}M_3/x_4\mathfrak{m}^nM_3)$（见 2.27）。我们有 $\rho_0(M_3) = \ell(\mathfrak{m}M_2/x_3M_2) = 3$，并且 h_{M_3} 的系数非负（见 2.26(1)）。
由短正合列（见 2.29）

$$0 \to \mathfrak{m}^2M_3 : x_4/\mathfrak{m}M_3 \to \mathfrak{m}^2M_3/x_4\mathfrak{m}M_3 \to \mathfrak{m}^2M_4/0 \to 0$$

我们有 $\rho_1(M_3) = b_1(x_4, M_3)$，因为 $\mathfrak{m}^2M_4 = 0$。
因此我们有 $\rho_1(M_3) = b_1(x_4, M_3) = \ell(\mathfrak{m}^2M_3 : x_4/\mathfrak{m}M_3) = 1$。这意味着深度 $G(M_3) = 0$，因为 $h_{M_3}(z) \neq h_{M_4}(z)$（见 2.8）。我们有 $h_{M_3}(z) = 4 + 2z + z^2$.

我们还有 $\mathfrak{m}^2M_3 = x_4\mathfrak{m}M_3$。事实上，如果 $a \in \mathfrak{m}^2M_3$，那么我们可以写成 $a = xp$，因为 $\widetilde{\mathfrak{m}^2M_3} = \mathfrak{m}^2M_3 \subseteq (x_4)M_3$。这意味着 $p \in \widetilde{\mathfrak{m}M_3}$，因为 $(\widetilde{\mathfrak{m}^2M_3} : x_4) = \widetilde{\mathfrak{m}M_3}$。因此，对于所有 $i \geq 1$，我们有 $\widetilde{\mathfrak{m}^{i+1}M_3} = x_4\widetilde{\mathfrak{m}^iM_3}$，因为对于 $i \geq 2$， $\mathfrak{m}^{i+1}M_3 = x_4\mathfrak{m}^iM_3$。这意味着 $G(M_3)$ 具有极小重数，并且 $h_{M_3}(z) = 3 + 4z$。
这里有两种情形。
子情形 (ii).(a)：当深度 $G(M_2) \neq 0$时。
于是我们有深度 $G(M_2) = 1$，因为深度 $G(M_3) = 0$。根据 Sally 下降，深度 $G(M) = 3$ 以及 $h_M(z) = 4 + 2z + z^2$。
子情形 (ii).(b)：当深度 $G(M_2) = 0$时。
由 $e_2(M_3) = 1$，我们得到 $\sum b_i(x_3, M_2) \leq 1$。因此，我们有 $b_1(x_3, M_2) = \ell(\mathfrak{m}^2M_2 : x_3/\mathfrak{m}M_2) \neq 0$ (见 2.8)。由于 $b_1(x_3, M_2) = 0$ 意味着所有 $b_i(x_3, M_2) = 0$，因此深度 $G(M) \neq 0$，矛盾（与情形（3）的子情形（ii）中的论证相同）。

由正合列（见 2.32）

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M_2 : x_3}{\mathfrak{m}^n M_2} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^n M_2}}{\mathfrak{m}^n M_2} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M_2}}{\mathfrak{m}^{n+1} M_2} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M_3}}{\mathfrak{m}^{n+1} M_3}$$

and

$$0 \to \widetilde{\mathfrak{m}M_2}/\mathfrak{m}M_2 \to \widetilde{\mathfrak{m}M_3}/\mathfrak{m}M_3$$

我们有

$$1 \le b_1(x_3, M_2) \le \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_2}/\mathfrak{m}M_2) \le \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_3}/\mathfrak{m}M_3) = 1.$$

这意味着 $\ell(\mathfrak{m}M_2/\mathfrak{m}M_2) = 1$ 以及 $b_1(x_3, M_2) = 1$。由此，对于所有 $n \ge 2$，我们还得到 $\widetilde{\mathfrak{m}^n M_2} = \mathfrak{m}^n M_2$，因为根据断言(1)，我们知道对于所有 $n \ge 2$ 都有 $\mathfrak{m}^n M_3 = \mathfrak{m}^n M_3$（见 2.32(1)）。

由正合列（见 2.29）

$$0 \to \mathfrak{m}^2 M_2 : x_3/\mathfrak{m}M_2 \to \mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2 \to \mathfrak{m}^2 M_3/x_4\mathfrak{m}M_3 \to 0$$

我们得到 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2) = \rho_1 + b_1(x_3, M_2) = 2$。
在这种情况下，我们还有 $h_{M_2}(z) = h_{M_3}(z) - (1-z)^2 z = 4 + z + 3z^2 - z^3$（见 2.7）。由于我们有 $\ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_2}/\mathfrak{m}M_2) = \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_3}/\mathfrak{m}M_3)$，并且对于所有 $i \ge 2$都有 $\widetilde{\mathfrak{m}^i M_3} = \mathfrak{m}^i M_3$，根据[11, 2.1]我们得到

$$\widetilde{\mathfrak{m}^i M_2} = \widetilde{\mathfrak{m}^i M_3} \quad \text{for all } i \ge 1.$$

So $G(M_2)$ is Cohen-Macaulay, 这意味着 $h_{M_2}(z) = 3 + 4z$。

由正合列（见 2.29）

$$0 \to \mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1 \to \mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1 \to \mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2 \to 0 \tag{5}$$

我们有，若 $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1) = 0$ 则
$\ell(\mathfrak{m}^2 M_1/J_1\mathfrak{m}M_1) = 2$, because $\ell(\mathfrak{m}^2 M_2/J_2\mathfrak{m}M_2) = 2$.
子情形 (ii).(b).(1)： $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1) = 0$。
考虑

$$\delta = \sum \ell(\mathfrak{m}^{n+1}M_1 \cap J_1 M_1/J_1\mathfrak{m}^n M_1).$$

我们知道，如果 $\delta \le 2$，那么深度 $G(M_1) \ge d - \delta$（见 [10,定理 5.1]）。由于 $\delta = 2$，深度 $G(M_1) \ge 1$。注意，这里深度 $G(M_1) = 1$，因为深度 $G(M_2) = 0$。根据 Sally 下降，深度 $G(M) = 2$ 以及 $h_M(z) = 4 + z + 3z^2 - z^3$。
子情形 (ii).(b).(2)： $\ell(\mathfrak{m}^2 M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1) \neq 0$。
这意味着深度 $G(M_1) = 0$（见 2.8）。

现在由正合列（见 2.32）

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}M_1 : x_2}{\mathfrak{m}^n M_1} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^n M_1}}{\mathfrak{m}^n M_1} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M_1}}{\mathfrak{m}^{n+1} M_1} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M_2}}{\mathfrak{m}^{n+1} M_2}$$

and

$$0 \to \widetilde{\mathfrak{m}M_1}/\mathfrak{m}M_1 \to \widetilde{\mathfrak{m}M_2}/\mathfrak{m}M_2$$

我们得到

$$1 \leq \ell(\mathfrak{m}^2M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1) \leq \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_1}/\mathfrak{m}M_1) \leq \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_2}/\mathfrak{m}M_2) = 1.$$

这意味着 $\ell(\mathfrak{m}^2M_1 : x_2/\mathfrak{m}M_1) = \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_1}/\mathfrak{m}M_1) = 1$。由此我们还可得到 $\widetilde{\mathfrak{m}^iM_1} = \mathfrak{m}^iM_1$ 对所有 $i \geq 2$均成立，因为对所有 $i \geq 2$ 都有 $\mathfrak{m}^iM_2 = \mathfrak{m}^iM_2$（见 2.32(1)）。

由短正合列 (5)，我们有 $\ell(\mathfrak{m}^2M_1/J_1\mathfrak{m}M_1) = 3$。现在，由于 $\ell(\mathfrak{m}M_1/\mathfrak{m}M_1) = \ell(\mathfrak{m}M_2/\mathfrak{m}M_2)$，并且 $\mathfrak{m}^iM_1 = \mathfrak{m}^iM_1$ 对所有 $i \geq 2$，由[11, 2.1]我们得到

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{m}^iM_1}} = \widetilde{\mathfrak{m}^iM_2} \text{ for all } i \geq 1.$$

因此 $G(M_1)/x_2^*G(M_1) = G(M_2)$，这意味着 $G(M_1)$ 是 Cohen-Macaulay 的，并且 $h_{M_1}(z) = 3 + 4z$。我们可以将 M_1 的 h 多项式写为 $h_{M_1}(z) = h_{M_1}(z) + (1-z)^4$。

考虑

$$G(M)/(x_1^*x_2^*, x_3^*, x_4^*)G(M) = M/\mathfrak{m}M \oplus \mathfrak{m}M/JM \oplus \mathfrak{m}^2M/J\mathfrak{m}M.$$

考察其希尔伯特级数后，我们得到 $\ell(\mathfrak{m}^2M/J\mathfrak{m}M) \leq 3$，因为 $\ell(\mathfrak{m}M/JM) = 3$（见 2.31）。

我们有短正合列（见 2.29）

$$0 \to \mathfrak{m}^2M : x_1/\mathfrak{m}M \to \mathfrak{m}^2M/J\mathfrak{m}M \to \mathfrak{m}^2M_1/J_1\mathfrak{m}M_1 \to 0.$$

这意味着 $\ell(\mathfrak{m}^2M/J\mathfrak{m}M) \geq 3$。

因此我们有

$$(\mathfrak{m}^2M : x_1) = \mathfrak{m}M \text{ and } \ell(\mathfrak{m}^2M/J\mathfrak{m}M) = 3.$$

现在我们先证明一个断言。

断言：$\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}M$。

断言的证明：如果 $\mathfrak{m}M \neq \mathfrak{m}M$。由正合列（见 2.32）

$$0 \to \widetilde{\mathfrak{m}M}/\mathfrak{m}M \to \widetilde{\mathfrak{m}M_1}/\mathfrak{m}M_1$$

我们得到 $\ell(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M) = 1$，因为 $\ell(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M) \leq \ell(\mathfrak{m}M_1/\mathfrak{m}M_1) = 1$。由于在这种情况下 $\ell(\widetilde{\mathfrak{m}M}/\mathfrak{m}M) = \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M_1}/\mathfrak{m}M_1)$，且对所有 $i \geq 2$都有 $\widetilde{\mathfrak{m}^iM_1} = \mathfrak{m}^iM_1$，由 [11, 2.1]我们得到

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{m}^iM}} = \widetilde{\mathfrak{m}^iM_1} \text{ for all } i \geq 1.$$

这意味着 $G(M)/x_1^*G(M) = G(M_1)$。因此我们得到 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay 的，进而 $G(M)$ 是广义 Cohen-Macaulay 的。

令 $\mathrm{Ass}_{G(A)}G(M) = \{\mathcal{M}, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s\}$，其中 $\mathcal{M}$ 是$G(A)$的极大齐次理想，而 $\mathcal{P}_i$ 是 $G(A)$ 中的极小素理想（见 2.19）。设 $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$。我们知道 $\mathcal{P}_i \cap V \neq V$。现在若 $\dim\mathcal{P}_i \cap V = \dim V - 1$，则 $\dim G(A)/\mathcal{P}_i \leq 1$，这与 $\mathcal{P}_i$ 是 $G(A)$ 中的极小素理想相矛盾。

因此，$\dim\mathcal{P}_i \cap V \leq \dim V - 2$。所以存在 $u^*, v^* \in V$，使得 $H = ku^* + kv^*$且 $H \cap \mathcal{P}_i = 0$，其中 $i = 1, \ldots, s$（见 2.33）。因此，若 $\xi \in \mathfrak{m}$ 使得 $\xi^* \in H$非

零，则 ξ 是 M 的表面元（见 [14, 定理 1.2.3]）。现在由于$\ell(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M) = 1$,

$$\widetilde{\mathfrak{m}M} = \mathfrak{m}M + Aa \text{ for some } a \notin \mathfrak{m}M$$

如果 $x_1 a \in \mathfrak{m}^2 M$ 那么 $a \in (\mathfrak{m}^2 M : x_1) = \mathfrak{m}M$，这就产生了矛盾。
因此 $\overline{x_1 a} \neq 0$ 属于 $\widetilde{\mathfrak{m}^2 M/\mathfrak{m}^2 M}$。
现在由正合列（见 2.32）

$$0 \to \mathfrak{m}^2 M : x_1/\mathfrak{m}M \to \widetilde{\mathfrak{m}M}/\mathfrak{m}M \to \widetilde{\mathfrak{m}^2 M}/\mathfrak{m}^2 M \to \widetilde{\mathfrak{m}^2 M_1}/\mathfrak{m}^2 M_1. \tag{6}$$

我们得到 $\ell(\widetilde{\mathfrak{m}^2 M}/\mathfrak{m}^2 M) = \ell(\widetilde{\mathfrak{m}M}/\mathfrak{m}M) = 1$。因此我们有 $\overline{ua} = \beta\overline{va}$，其中 β是单位元，u、v是 M-表面元。现在我们有 $(u - \theta v)\, a \in \mathfrak{m}^2 M$，其中 $\theta \in A$, 且$\overline{\theta} = \beta$是单位元。由于 $(u - \theta v)^* = u^* - \beta v^*$ 是 H中的非零元素，因此 $u - \theta v$ 是 M-表面元。这意味着

$$a \in (\mathfrak{m}^2 M : (u - \theta v)) = \mathfrak{m}M$$

$\widetilde{\ }$这与假设矛盾。因此 $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}M$。
$\widetilde{\ }$由于 $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}M$，现在由正合列（见 2.32）

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1} M : x_1}{\mathfrak{m}^n M} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^n M}}{\mathfrak{m}^n M} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M}}{\mathfrak{m}^{n+1} M} \to \frac{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1} M_1}}{\mathfrak{m}^{n+1} M_1}, \tag{7}$$

$\widetilde{\ }$我们得到 $\mathfrak{m}^i M = \mathfrak{m}^i M$，对所有 i 都成立，因为 $\mathfrak{m}^i M_1 = \mathfrak{m}^i M_1$ 对所有 $i \geq 2$ 都成立。这意味着 depth$G(M) \geq 1$.。注意，此处 depth $G(M) = 1$，因为 depth $G(M_1) = 0$。在这种情况下，$h_M(z) = 3 + 4z + (1 - z)^4$。

现在假设 dim$M \geq 5$，且 $\underline{x} = x_1$，....., x_d 是一个极大 ϕ-浅表序列。令 $M_{d-4} = M/(x_1$，....., $x_{d-2})M$。于是有以下几种情形。
第一种情形：$G(M_{d-4})$ 是 Cohen-Macaulay。由 Sally 下降，$G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，且 $h_M(z) = 4 + 3z$。
第二种情形下，当深度 $G(M_{d-4}) = 3$。由 Sally 下降可得，深度$G(M) = d - 1$ 且 $h_M(z) = 4 + 2z + z^2$。
第三种情况下，当深度 $G(M_{d-4}) = 2$。由 Sally 下降可得，深度 $G(M) = d - 2$ 且$h_M(z) = 4 + z + 3z^2 - z^3$。
第四种情况下，当深度 $G(M_{d-4}) = 1$。由 Sally 下降可得，深度 $G(M) = d - 3$ 且$h_M(z) = 3 + 4z + (1 - z)^4$。
情形(5)：$e(M) = 8$。
在此情形下，$M_d \cong Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2) \oplus Q'/(y^2)$ 且 $h_{M_d}(z) = 4 + 4z$。因此$e(M_d) = \mu(M_d)i(M_d)$。对于 dim$M \geq 1$，此等式模任意 ϕ-浅表序列仍成立。这意味着 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay（见 [8, 定理2]）。□

由上述定理可得：

(1) 若 $e(M) = 4$，则 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$。在此情形下，$M$ 是一个 Ulrich 模，因此 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，且 $h_M(z) = 4$.

(2) 若 $e(M) = 5$，则 $a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = 2$。在此情形下有两种情况：(a) $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，当且仅当 $h_M(z) = 4 + z$。(b) 深度 $G(M) = d - 1$，当且仅当 $h_M(z) = 4 + z^2$。(3) 若 $e(M) = 6$，则 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 2$。在此情形下有三种情况：(a) $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，当且仅当 $h_M(z) = 4 + 2z$。(b) 深度 $G(M) = d-1$，当且仅当 $h_M(z) = 4+z+z^2$ 或 $h_M(z) = 4+2z^2$。(c) 深度 $G(M) = d - 2$，当且仅当 $h_M(z) = 4 + 3z^2 - z^3$。(4) 若 $e(M) = 7$，则 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 2$。在此情形下有四种情况：(a) $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，当且仅当 $h_M(z) = 4 + 3z$。(b) 深度 $G(M) = d - 1$，当且仅当 $h_M(z) = 4 + 2z + z^2$。(c) 深度 $G(M) = d - 2$，当且仅当 $h_M(z) = 4 + z + 3z^2 - z^4$。(d) 深度 $G(M) = d - 3$，当且仅当 $h_M(z) = 3 + 4z + (1 - z)^4$。(5) 若 $e(M) = 8$，则 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$。在此情形下，$G(M)$ 是 Cohen-Macaulay，且 $h_M(z) = 4 + 4z$.

推论 3.2. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 d 、满足 $e(A) = 3$ 的超曲面环。设 M 是一个最大 Cohen–Macaulay 模。现在，若 $\mu(M) = 4$，则 depth $G(M) \geq d - 3$。

证明。我们可以假设 A 是完备的，且剩余域无限（见 2.4）。由于 $e(A) = 3$，我们可以取 $(A, \mathfrak{m}) = (Q/(g)\ \mathfrak{n}/(g))$，其中 $(Q, \mathfrak{n})$ 是维数为 $d+1$ 的正则局部环，且 $g \in \mathfrak{n}^3 \setminus \mathfrak{n}^4$。
现在我们有两种情形。
第一种情形是 M 没有自由直和项。在这种情形下，由上述定理可得 depth $G(M) \geq d - 3$。
下一种情形是 M 有自由直和项。在这种情形下，我们可以将 $M \cong N \oplus A^s$ 写成某个 $s \geq 1$，且 N 没有自由直和项。我们假设 $N \neq 0$，否则 M 是自由模，且 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay。
显然，N 是一个 MCM A-模（见 [1, 命题 1.2.9]）。注意，$\mathrm{red}(N) \leq 2$,
因为 $\mathrm{red}(M) \leq 2$。此外，$\mu(M) > \mu(N)$，因此 $\mu(N) \leq 3$。
如果 $\mu(N) = 1$，那么我们可以将 N 的极小表示写成 $0 \to Q \xrightarrow{a} Q \to N \to 0$,
其中 $a \in \mathfrak{n}$。这意味着 $N \cong Q/(a)Q$。因此，$G(N)$是 Cohen-Macaulay 的。
如果 $\mu(N) = 2$，那么深度 $G(N) \geq d - 1$（根据 [5, 定理 1.4]）。
如果 $\mu(N) = 3$，那么深度 $G(N) \geq d - 2$（根据 [5, 定理 1.5]）。
我们知道（见 [1, 命题 1.2.9]）
深度$G(M) \geq \min\{$深度 $G(N)$，深度 $G(A)\}=$深度 $G(N)$。
因此在这种情况下，深度 $G(M) \geq d - 2$。

□

4. Examples

我们给出一些极大 Cohen-Macaulay 模的例子：它们 M 没有自由直和项，并满足$\mu(M) = 4$，维数为 $M = 3$，且深度为 $G(M) = 0$，1，2，3。

取 $Q = k[[x, y, z, t]]$, $\mathfrak{n} = (x, y, z, t)$ (1) $\phi = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$，则深度 $G($

$M) = 0$，因为 $\overline{e_1}$，其中 $e_1 = \widetilde{(1, 0, 0, 0)^T}$是 $\mathfrak{n}M \setminus \mathfrak{n}M$的一个元素。我们有 $x\overline{e_1} = -x^2\overline{e_2}$, $y\overline{e_1} = -x^2\overline{e_2}$,$z\overline{e_1} = -x^2\overline{e_3}$和 $t\overline{e_1} = -x^2\overline{e_4}$。这些关系表明，对于 $i = 1, 2, 3, 4$, $x^2(x - y)\overline{e_i} = 0$。因此， M是一个 $Q/(x^2(x - y))$-模。(2) $\phi = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$，则深度 $G(M) = 1$。由于 t^*是 $G(M)-$正则的，模

去 t^*后，我们得到深度 $G(N) = \widetilde{0}$，其中 $N = M/tM$。注意，$\overline{e_1} \in \mathfrak{n}N \setminus \mathfrak{n}N$。由于对于$i = 1, 2, 3, 4$, $\begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}(x - y)\overline{e_i} = 0$，这意味着 M是一个 $Q/(x^2(x - y))$-模。(3) $\phi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$，那么显然 z^*, t^*是极大 $G(M)$-正则序列。

因此，深度 $G(M) = 2$。事实上，若令 $N = M/(z, t)\widetilde{M}$，则 $\overline{e_1} \in \mathfrak{n}N \setminus \mathfrak{n}N$。另请注意， M是一个 $Q/(x^2(x - y))$-模，因为对于 $i = 1, 2, 3, 4$, $x^2(x - y)\overline{e_i} = 0$。(4) $\phi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$，则 $G(M)$ 是 Cohen-Macaulay。

References

[1] W. Bruns 和 J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, 第 39 卷, 《剑桥高等数学研究丛书》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993年。

[2] D. Eisenbud, *Homological algebra on complete intersections with an application to group representations*, 美国数学会汇刊, 260 (1980年), 35-64.[3] W. Heinzer, B. Johnston, D. Lantz, K. Shah, *The Ratliff -Rush ideals in a Noetherian ring:a survey, in: Methods in Module Theory*(科罗拉多斯普林斯, CO, 1991年), 收录于: 《纯粹与应用数学讲义》, 第 140 卷, Dekker, 纽约, 1993年, 第 149–159 页.[4] A. Mishra, T. J. Puthenpurakal,

Cohen-Macaulay local rings with $e_2 = e_1 - e + 1$, 代数杂志 611 (2022年), 94-109.[5] ,

On associated graded modules of maximal Cohen-Macaulay modules over hypersur-face rings, 预印本 arXiv:2208.02667v1(2022年).[6] R. Naghipour,

Ratliff-Rush closures of ideals with respect to a Noetherian module,纯粹与应用代数杂志 195 (2) (2005年) 167–172.[7] T. J. Puthenpurakal, *Hilbert coefficients of a Cohen–Macaulay module*, 代数杂志 264 (2003), no. 1, 82–97.

[8] , *The Hilbert function of a maximal Cohen-Macaulay module*, Math. Z. 251 (2005年), no. 3, 551–573.[9] , *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules. I*, 纯粹与应用代数杂志 208 (2007), no. 1, 159–176.[10] , *Complete intersection approximation, dual filtrations and applications* arXiv 预印本 arXiv:0807.0471,(2008).[11] , *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules. II*, 纯粹与应用代数杂志 221 (2017), no. 3, 611–631.[12] L. J. Ratliff, D. Rush, *Two notes on reductions of ideals*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 929–934.[13] M. E. Rossi and G. Valla, *A conjecture of J. Sally*, Comm. Algebra 24 (1996), no. 13, 4249— 4261.[14] MariaEvelina Rossi and Giuseppe Valla, *Hilbert functions of filtered modules*, vol.9, Springer Science & Business Media,2010[15] J. D. Sally *Number of generators of ideals in local rings*, 纯粹与应用数学讲义，第 35 卷，M. Dekker, 1978.[16] , *Tangent cones at Gorenstein singularities*, Compositio Math. 40 (1980年) 167—175.[17] B. Singh, *Effect of a permissible blowing-up on the local Hilbert functions*, Invent. Math. 26(1974), 201-212.*Email address*: ankitmishra@math.iitb.ac.in*Email address*: tputhen@math.iitb.ac.inDepartment of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai 400 076