arXiv:2303.01182v1 [math.FA] 2 Mar 2023

# GENERAL：更强可线性化概念的判据

VINÍCIUS V. FÁVARO、DANIEL PELLEGRINO、ANSELMO RAPOSO JR. 和 GEIVISON RIBEIRO

摘要。若向量空间 $X$ 的子集 $A$ 包含一个维数为 $\alpha$ 的子空间（除零向量外），则称 $A$ 是 $\alpha$-可线性化的。若 $X$ 具有拓扑，则当这样的子空间可以取为闭子空间时，称 $A$ 是 $\alpha$-可空间化的。关于这些主题的大量现有文献表明，可线性化性和可空间化性方面的正面结果相当常见。最近，人们引入了更严格的 $(\alpha, \beta)$-可线性化性/可空间化性概念，试图阐明一些更微妙的问题。本文除其他结果外，证明了关于 $(\alpha, \beta)$-可空间化性的一些一般判据，并以此为应用推广了不同作者近期得到的结果。

## 1. 引言

可线性化性与可空间化性的概念最早见于这篇开创性论文 [2]，作者为 Aron、Gurariy 和 Seoane-Sepúlveda；其核心思想是在奇异的背景下研究线性结构。更确切地说，若 $A \subset V$ 在向量空间 $\alpha$ 中是 $V$-可线性化的，则 $A \cup \{0\}$ 包含一个 $\alpha$维子空间，该子空间$V$属于 $V$。此外，若 $A$ 赋有拓扑，我们称 $\alpha$在 $V$ 中是$\alpha$-可空间化的，若存在一个 $V$维闭子空间 $A \cup \{0\}$包含于其中。

事实证明，关于这一主题的大量文献表明，可线性化性与可空间化性的正面结果相当常见；请读者参阅 [1]。最近， [9] 中引入了 $(\alpha, \beta)$-可线性化性和 $(\alpha, \beta)$-可空间化性的概念，旨在考察在更严格的假设下，可线性化性与可空间化性的正面结果在多大程度上仍然成立。

从现在起， $\mathbb{N}$ 表示所有正整数构成的集合， $\mathbb{K}$ 表示实标量域 $\mathbb{R}$ 或复标量域 $\mathbb{C}$。所有向量空间均视为定义在 $\mathbb{K}$ 上。

设 $V$ 是一个向量空间， $A$ 是 $V$ 的一个非空子集。

- 若 $\alpha, \beta$ 是基数， $\alpha \leq \beta$，且 $V$ 是一个向量空间，则称 $A$ 是 $(\alpha, \beta)$-可线性化的，如果它是 $\alpha$-可线性化的，并且对于每个 $\alpha$ 维子空间 $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$，都存在一个 $\beta$ 维子空间 $W_\beta$，使得

$$W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}. \tag{1.1}$$

- 当 $V$ 赋予拓扑，且满足 (1.1) 的子空间 $W_\beta$ 总可以选为闭子空间时，我们称 $A$ 是 $(\alpha, \beta)$-可空间化的。

请注意，特别是，$(\alpha, \beta)$-可线性化性/可空间化性蕴含 $\beta$-可线性化性/可空间化性。另一方面，尽管 $(\alpha, \alpha)$-可线性化性与 $\alpha$-可线性化性是同一概念，但 $(\alpha, \alpha)$-可空间化性并不等同于 $\alpha$-可空间化性。

沿着同一思路， [17] 点态 $\beta$-可线性化性/可空间化性的概念被引入如下：

2020 数学主题分类。 15A03, 47B37, 47L05, 46B86。关键词和短语。 可线性化性；可空间化性。V.V. Fávaro 获 FAPEMIG 项目 PPM-00217-18 资助，并部分获 FAPEMIG 项目 RED-00133-21 资助。D. Pellegrino 获 CNPq 项目 307327/2017-5 及 2019/0014 Paraíba 州研究基金会（FAPESQ）项目资助。

- 向量空间 $V$ 的子集 $A$ 称为点态 $\beta$-可线性化的（可空间化的），如果对每个 $x \in A$，都存在一个（闭） $\beta$维子空间 $W_x$，使得

$$x \in W_x \subset A \cup \{0\}.$$

显然，逐点 $\beta$-可线性化性（可空间化性）意味着$(1, \beta)$-可线性化性（可空间化性）。然而，一般而言，反过来并不成立（参见 [17, 例 2。2]）。

迄今为止，关于（$\alpha$，$\beta$）可线性化性和可空间化性的研究成果寥寥（参见 [6, 7, 8, 9, 17]）。迄今取得的大多数成果证明了某些集合具有 $(1, \mathfrak{c})$-可线性化性和 $(1, \mathfrak{c})$-可空间化性，似乎尚无将可线性化性/可空间化性与（$\alpha$，$\beta$）-可线性化性/可空间化性联系起来的一般性方法。本文的主要目标是阐明可线性化性/可空间化性与（$\alpha$，$\beta$）-可线性化性/可空间化性之间的相互关系，并提供可应用于多种不同情形的一般性方法。

字母 $\alpha$、$\beta$、$\lambda$ 始终表示基数，card（$A$）表示集合 $A$ 的势，其中 $\aleph_0 := \text{card}(\mathbb{N})$ 和 $\mathfrak{c} := \text{card}(\mathbb{R})$。

本文的组织如下。在第 2 节中，我们证明了关于（$\alpha$、$\beta$）-可空间化性的一般结果，并由此得出：当 $\alpha \geq \aleph_0$ 时，从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有连续处处不可导函数的集合 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q \in (p, \infty)} L_q[0,1]$ 和 $\mathcal{ND}[0,1]$ 都不是（$\alpha$、$\beta$）-可空间化的。这些结果补充了 Botelho 等人 [5] 和 Gurariy [10] 之前的研究成果。在第 3 节中，我们发展了一种一般技术，例如可以据此得出：当且仅当 $\alpha < \aleph_0$ 时，$\ell_\infty \setminus c_0$ 和 $\ell_\infty \setminus c$ 是（$\alpha$、$\mathfrak{c}$）- 可空间化的。第 4 节和第 5 节致力于研究稠密可线性化性。我们证明了一些一般结果，其中尤其得到，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q \in (p, \infty)} L_q[0,1]$ 是逐点极大稠密线性可生成的，并且是（$n$、$\aleph_0$）-稠密可线性化的。

## 2. ($\alpha$，$\beta$)-可空间化集合：否定结果

我们先回顾一下（见 [3, 定义 2.1]）：若 $A$、$B$ 是向量空间 $V$的子集，那么当 $A+B \subset A$时，称 $A$ 强于 $B$。我们还回顾一下，$F$-空间是这样一种拓扑向量空间，其拓扑可由完备平移不变度量定义。

本节的主要结果如下：

**定理 2.1**。设 $\alpha \geq \aleph_0$ 和 $V$ 是一个 $F$-空间。设 $A$、$B$ 是 $V$ 的子集，其中 $A$ 是 $\alpha$-可线性的，而 $B$ 是1-可线性的。若 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A$ 强于 $B$，则无论基数 $\beta$为何，$A$ 都不是$(\alpha, \beta)$-可空间化的。

证明。考虑 $V$ 上的一个完备平移不变度量 $d$，其拓扑与 $V$的拓扑相同。由于$B$ 是 1-可线性的，取满足下式的 $v \in V \setminus \{0\}$

$$\mathbb{K}v \setminus \{0\} \subset B.$$

由于 $A$ 是 $\alpha$-可线性化的，设 $\Gamma$ 是一个势为 $\alpha$ 的集合，且 $\{v_a : a \in \Gamma\} \subset V$ 是一个线性无关向量集，使得

$$E \setminus \{0\} \subset A,$$

其中 $E =$ 张成 $\{v_a : a \in \Gamma\}$。设 $\{a_m : m \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ 是一个无限可数集。给定 $n \in \mathbb{N}$，由 $s \mapsto s v_{a_n}$ 上数乘的连续性可知，存在 $\delta_n > 0$ 使得

$$d(s v_{a_n}, 0 v_{a_n}) < n^{-1}, \text{ for all } s \in (0, \delta_n).$$

特别地，对于 $s = 2^{-1}\delta_n$，我们有

$$d\left(2^{-1}\delta_n v_{a_n}, 0\right) < n^{-1}.$$

给定 $b\in\Gamma$，定义 $u_b:=t_bv_b+v$，其中

$$t_b=\begin{cases}2^{-1}\delta_n, & \text{if } b=a_n\in\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ for some } n,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 $A+B\subset A$，可知对于每个 $b\in\Gamma$，$u_b\in A$。由于 $A\cap B=\varnothing$，显然有 $\{u_b:\ b\in\Gamma\}$线性无关。定义

$$M:=\operatorname{span}\{u_b:b\in\Gamma\},$$

我们来证明 $M\setminus\{0\}\subset A$。对于 $f\in M\setminus\{0\}$，存在 $N\in\mathbb{N}$和（$c_1$，……，$c_N$）$\neq$（0，……，0）属于$\mathbb{K}^N$，使得

$$f=\sum_{j=1}^{N}c_jt_{b_j}v_{b_j}+\sum_{j=1}^{N}c_jv.$$

由于 $\{v_b:\ b\in\Gamma\}$线性无关，且（$c_1$，……，$c_N$）$\neq$（0，……，0），我们有 e

$$\sum_{j=1}^{N}c_jt_{b_j}v_{b_j}\in E\setminus\{0\}\subset A,$$

并且由于

$$\sum_{j=1}^{N}c_jv\in\mathbb{K}v\subset B\cup\{0\},$$

我们得到

$$f\in A+(B\cup\{0\})\subset A.$$

因此 $M\setminus\{0\}\subset A$。给定 $\varepsilon>0$，令 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n^{-1}<\varepsilon$。由于 $d$ 是平移不变度量，我们得出

$$d(u_{a_n},v)=d\left(2^{-1}\delta_nv_{a_n},0\right)<n^{-1}<\varepsilon.$$

这意味着 $v\in M$。由于$\overline{\ }v\notin A$，可得

$$\overline{M}\not\subset A\cup\{0\}$$

这意味着，无论 $\beta\geq\alpha$ 如何，$A$ 都不是 $(\alpha,\beta)$-可空间化的。 □

由 [10] 可知，集合 $\mathcal{ND}[0,1]$ 连续处处不可导函数 $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{c}$-可空间化的，且属于 $C[0,1]$。前述结果的以下推论表明，无论 $(\alpha,\mathfrak{c})$ 如何，它都不是-可空间化的 $\alpha\geq\aleph_0$:

**推论 2.2**。令 令 $\alpha\geq\aleph_0$ 和 $\beta$ 为基数。集合 $\mathcal{ND}[0,1]$ 不是 $(\alpha,\beta)$-可空间化的。

证明。考虑 $A=\mathcal{ND}[0,1]$和 $B=\{f\in C[0,1]:\ f可微\}$。注意到

$$A\cap B=\varnothing \text{ and } A+B\subset A.$$

如果 $\aleph_0\leq\alpha\leq\mathfrak{c}$，由于 $A$ 是 $\alpha$-可线性化的，根据定理 2.1可得结论。如果 $\alpha>\mathfrak{c}$ 则结论显然成立。□

**推论 2.3**。设 $\alpha\geq\aleph_0$ 和 $\beta$ 为基数。设 $X$ 为巴拿赫空间或 $p$-巴拿赫空间$(p>0)$，且 $Y$为 $X$的非平凡子空间。如果 $X\setminus Y$是 $\alpha$-可线性化的，则 $X\setminus Y$不是$(\alpha,\ \beta)$-可空间化的。

证明。考虑 $A=X\setminus Y$和 $B=Y$，我们有 $A+B\subset A$和 $A\cap B=\varnothing$，根据定理 2.1即可得到结论。□

众所周知（见 [5]），对于 $p>0$，$L_p[0,1]\setminus\bigcup_{q\in(p,\ \infty)}L_q[0,1]$在 $L_p[0,1]$中是 $\mathfrak{c}$-可空间化的。考虑推论 2.3 中的 $X=L_p[0,1]$和$Y=\bigcup_{q\in(p,\ \infty)}L_q[0,1]$，由于 $X\setminus Y$ 对所有$\aleph_0\leq\alpha\leq\mathfrak{c}$ 都是 $\alpha$-可线性化的，且 $\dim X=\mathfrak{c}$，我们有:

**推论 2.4**。设 $\alpha \geq \aleph_0$ 和 $\beta$ 为基数。对于 $p > 0$，集合 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q \in (p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 不是 $(\alpha,\ \beta)$-可空间化的。

**注 2.5.** 观察定理 *2.1* 的证明，我们认为，对$(\alpha、\ \beta)$-可空间化性的定义作一种（自然的）变体，要求 $W_\alpha$ 为闭集，可能会带来截然不同的结果。我们认为，这值得在未来进一步研究。

## 3. $(\alpha, \beta)$-可空间化集：正向结果

Wilansky 和 Kalton 的经典结果（见 [13, 定理 2.2]）表明，若 $W$ 是 Fréchet 空间 $V$的闭子空间，则 $V \setminus W$是可空间化的，当且仅当 维数 $V/W = \infty$:

**定理 3.1.** ([13, 定理 2.2]) 若 $W$ 是 *Fréchet* 空间 $V$的闭向量子空间，则 $V \setminus W$可空间化，当且仅当 $W$ 具有无限余维。

在本节中，从某种意义上说，我们通过证明以下事实来补充这一结果：若 $W$ 是巴拿赫空间 $V$的一个闭子空间，且 $W$ 含有一个正则基序列并且 $V \setminus W$ 是 $\aleph_0$-线性可生成的，那么

$$V \setminus W \text{ is } (\alpha, \mathfrak{c})\text{-spaceable if, and only if, } \alpha < \aleph_0.$$

特别地，这保证了当且仅当 $\alpha < \aleph_0$时， $\ell_\infty \setminus c_0$ 和 $\ell_\infty \setminus c$ 是（$\alpha$， $\mathfrak{c}$）-可空间化的。我们首先回顾一些关于 Schauder 基和基本序列的结果。

**定义 3.2**。巴拿赫空间 $V$ 中的序列 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为基序列，若它是 张成 $\{e_n :\ n \in \mathbb{N}\}$的一个 *Schauder* 基。此外，如 [12] 和 [19], 所述，若一个基序列远离零有界，即它完全位于零的某个邻域之外，则称其为正则的。

下述引理或许是众所周知的，但为完整起见，我们给出其证明。

**引理 3.3.** 设 $V$ 是一个无限维巴拿赫空间， $W$ 是 $V$的一个有限维子空间。那么，对于给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $v \in V$使得 $\|v\| = 1$ 并且

$$\|w + \lambda v\| \geq (1 - \varepsilon)\|w\|$$

对于所有$(\lambda, w) \in \mathbb{K} \times W$。

证明。 设 $\mathbb{S}_W$是 $W$的单位球面。由于 $\mathbb{S}_W$是紧的，我们可以找到$\mathbb{S}_W$中的有限集 $\{w_1, \ldots, w_r\}$，使得 $\{B_\varepsilon(w_k):\ k = 1, \ldots, r\}$覆盖$\mathbb{S}_W$，其中 $B_\varepsilon(w_k)$是以 $w_k$为中心、半径为 $\varepsilon$的开球。令 $V^*$为 $V$的拓扑对偶，并考虑 $w_1^*, \ldots, w_r^* \in V^*$，使得对于每个$k = 1, \ldots, r$， $\|w_k^*\| = 1$且 $w_k^*(w_k) = 1$。由于 $V$ 是无限维的，$\bigcap_{k=1}^{r} \ker\ w_k^*$是 $V$的非平凡子空间。

我们固定一个单位向量 $v \in \bigcap_{k=1}^{r} \ker\ w_k^*$。给定 $w \in W \setminus \{0\}$，存在 $k \in \{1, \ldots, r\}$ 使得

$$\left\| \frac{w}{\|w\|} - w_k \right\| < \varepsilon.$$

对于任意 $\lambda \in \mathbb{K}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\|w+\lambda v\|}{\|w\|} &\geq \left\|w_k+\frac{\lambda v}{\|w\|}\right\|-\left\|\frac{w}{\|w\|}-w_k\right\| \\ &> \left\|w_k+\frac{\lambda v}{\|w\|}\right\|-\varepsilon \\ &\geq \left|w_k^*\left(w_k+\frac{\lambda v}{\|w\|}\right)\right|-\varepsilon \\ &= |w_k^*(w_k)|-\varepsilon \\ &= 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\|w+\lambda v\| \geq (1-\varepsilon)\|w\|,$$

对所有 $w \in W \setminus \{0\}$ 以及所有标量 $\lambda$。由于情形 $w=0$ 显然成立，证明完成。 . □

**引理 3.4**。设 $V$是一个无限维巴拿赫空间。若 $v_1, \ldots, v_n \in V$线性无关且满足 $\|v_i\|=1$，则对每个 $i=1, \ldots, n$，$V$都包含一个基序列 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$，其中$u_k=v_k$对每个 $k=1, \ldots, n$均成立。

证明。设 $W_1=$张成 $\{v_1,\ldots,v_n\}$。考虑由下式定义的序列 $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$

$$\varepsilon_k=\left(\frac{10^k}{9}+\sum_{j=0}^{k-1}10^j\right)^{-1},$$

注意到

$$\left(\prod_{k=1}^{m}(1-\varepsilon_k)\right)^{-1} \leq \prod_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon_k)^{-1}=2$$

对所有 $m$。

对每个 $k=1$定义 $u_k=v_k,\ldots,n$。由引理 3.3 可知，存在 $u_{n+1}\in V$使得 $\|u_{n+1}\|=1$并且

$$\|w+\lambda u_{n+1}\| \geq (1-\varepsilon_1)\|w\|$$

对所有 $w \in W_1$和 $\lambda \in \mathbb{K}$，也就是说

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k+\lambda u_{n+1}\right\| \geq (1-\varepsilon_1)\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k\right\|$$

只要 $\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$。定义 $W_2=$张成 $\{u_1,\ldots,u_n,u_{n+1}\}$，由引理 3.3 可知，存在 $u_{n+2}\in V$使得 $\|u_{n+2}\|=1$ 并且

$$\|w+\lambda u_{n+2}\| \geq (1-\varepsilon_2)\|w\|$$

对所有 $w \in W_2$和 $\lambda \in \mathbb{K}$，也就是说，

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k u_k\right\| \geq (1-\varepsilon_2)\left\|\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k u_k\right\|$$

每当 $\lambda_1, \ldots..., \lambda_{n+2}\in\mathbb{K}$。重复这一过程，我们得到一个序列 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$，它属于 $V$，且对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $\|u_k\|=1$；并且对每个 $N\geq 1$ 及任意标量 $(\lambda_k)_{k=1}^{n+N}$，

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+N}\lambda_k u_k\right\| \geq (1-\varepsilon_N)\left\|\sum_{k=1}^{n+N-1}\lambda_k u_k\right\|.$$

因此，

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+N-1}\lambda_k u_k\right\| \leq \prod_{k=1}^{m+1}\left(1-\varepsilon_{N+k-1}\right)^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n+N+m}\lambda_k u_k\right\| \leq 2\left\|\sum_{k=1}^{n+N+m}\lambda_k u_k\right\|$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$。特别地，

$$\left\|\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k\right\| \leq 2\left\|\sum_{k=1}^{t}\lambda_k u_k\right\| \tag{3.1}$$

对每个 $t \geq s \geq n$。

现在假设 $s \leq r \leq n$。由于对应关系

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k \mapsto \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$$

在 $W_1$ 上定义了一个范数，而有限维空间上的两个范数总是等价的，因此存在正常数 $L$ 和 $M$，使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k\right\| \leq L\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k\right\|.$$

因此，

$$\left\|\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k\right\| \leq L\sum_{k=1}^{s}|\lambda_k| \leq L\sum_{k=1}^{r}|\lambda_k| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{r}\lambda_k u_k\right\|. \tag{3.2}$$

将前面的不等式与 (3.1) 结合，我们得到

$$\left\|\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k\right\| \leq 2M\left\|\sum_{k=1}^{t}\lambda_k u_k\right\|, \tag{3.3}$$

对每个 $t \geq n$。

最后，由 (3.1)、(3.2) 和 (3.3)，我们得出，一般而言，若 $r$， $s \in \mathbb{N}$ 满足 $s \leq r$，则有

$$\left\|\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k\right\| \leq C\left\|\sum_{k=1}^{r}\lambda_k u_k\right\|$$

对某个常数 $C$。众所周知，这意味着 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个基序列。 □

**引理 3.5**。 [12, 引理 4。3] 设 $W$ 是一个巴拿赫空间，且 $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个正则基序列。设$\infty(u_k)_{n=1}^{\infty}$ 是 $W$ 中的一个序列，满足 $\sum\|u_k\| < \infty$。若$_{n=1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_k\left(w_k+u_k\right)=0 \Rightarrow a_k=0,$$

则 $(w_k+u_k)_{n=1}^{\infty}$ 是一个基序列。

现在我们可以陈述本节的主要结果。

**定理 3.6**。 设 $\lambda \geq \mathfrak{c}$, $V$ 是一个 $\lambda$ 维巴拿赫空间，且 $W$ 是 $V$ 的闭向量子空间。如果 $V \setminus W$ 是 $\aleph_0$-可线性化的，并且 $W$ 具有一个正则基序列，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $V \setminus W$ 都是 $(n, \mathfrak{c})$-可空间化的。

证明。设 $Z$ 是 $V$ 的一个 $n$ 维子空间，使得

$$Z \setminus \{0\} \subset V \setminus W.$$

设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 $Z$ 的一组基。由于 $W$ 是闭的，商空间 $V/W$ 在赋予由 $\|v\|_{V/W} =$ 给出的范数 $\|\cdot\|_{V/W}$ 后是巴拿赫空间，其中 $\{\|\overline{v} - w\| : \ w \in W\}$ 表示 $v \in V$ 的等价类。设 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $W$ 中的正则基序列。对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，令

$$x_i = \frac{(v_i - y_i)}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}}. \tag{3.4}$$

因此，$\overline{x}_1, \ldots\ldots, \overline{x}_n$ 线性无关。事实上，如果

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_i = \overline{0},$$

then

$$\overline{0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} \overline{v}_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} v_i}.$$

这意味着

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\|\overline{v}_i\|_{V/W}} v_i \in W \cap Z = \{0\}.$$

由于 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 $Z$ 的一组基，我们得出

$$\lambda_i = 0, \text{ for each } i = 1, \ldots, n.$$

由引理 3.4，我们得到实数集 $V/W$ 上的一个规范化基本序列 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$，其 $x_1, \ldots, x_n$ 如 (3.4) 所示。由于 $\|x_k\|_{V/W} := \inf \{\|x_k - w\| : \ w \in W\}$，对每个 $k > n$，都存在 $w_k \in W$ 使得

$$\|x_k - w_k\| \leq \|\overline{x}_k\|_{V/W} + 2^{-k} = 1 + 2^{-k}.$$

Let

$$u_k := \begin{cases} \|\overline{v}_k\|_{V/W} \, x_k, & \text{if } k \leq n, \\ 2^{-k} \left(x_k - w_k\right), & \text{if } k > n, \end{cases}$$

并设 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 是实数集 $\mathbb{K}$ 中的一个序列，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(y_k + u_k\right) = 0. \tag{3.5}$$

那么，特别地，

$$\lim_{k \to \infty} \|a_k\| \, \|y_k + u_k\| = 0. \tag{3.6}$$

由于 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个正则基序列，存在 $L > 0$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\|y_k\| \geq L$。因此，若 $k > n$，则

$$\|y_k + u_k\| \geq \|y_k\| - \|u_k\| \geq L - 2^{-k} \left(1 + 2^{-k}\right) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} L > 0. \tag{3.7}$$

由 (3.6) 和 (3.7) 可得

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0. \tag{3.8}$$

不等式

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\| 2^{-k} \left(x_k - w_k\right) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \left(1 + 2^{-k}\right) < \infty, \tag{3.9}$$

$\infty$结合式 (3.8)，我们可以得出 $\sum a_k u_k$ 绝对收敛，因此也收敛。$k=1$因此，由式 (3.5) 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k.$$

$\infty$因此，$\sum a_k u_k \in W$。于是，

$k=1$

$$\overline{0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{u}_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{u}_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \overline{u}_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left\|\overline{v}_k\right\|_{V/W} \overline{x}_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 2^{-k} \overline{x}_k$$

并且，由于$^{-}\{x_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ 是 $V/W$ 中的一个基序列，因此可得

$$a_k = 0 \tag{3.10}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。由 (3.9) 和 (3.10)，我们可以应用引理 3.5，得出序列 $(y_k + u_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $V$ 中的一个基序列。将张成 $\{y_k + u_k$ 的（范数）闭包记为 $k \in \mathbb{N}\}$，其中 $F$，下面证明 $F \setminus \{0\} \subset V \setminus W$。若 $v \in W \cap F$，则存在标量 $c_k$ 使得

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(y_k + u_k\right)$$

and

$$\overline{0} = \overline{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k \left(y_k + u_k\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \overline{x}_k,$$

其中

$$d_k = \begin{cases} c_k \left\|\overline{v}_k\right\|_{V/W}, & \text{if } k \leq n, \\ c_k 2^{-k}, & \text{if } k > n. \end{cases}$$

由于 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $V/W$ 中的一个基序列，因此对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $d_k = c_k = 0$，从而 $v = 0$。于是 $W \cap F = \{0\}$，也就是说，

$$F \setminus \{0\} \subset V \setminus W.$$

由于

$$y_k + u_k = y_k + \left\|\overline{v}_k\right\|_{V/W} x_k = y_k + \left\|\overline{v}_k\right\|_{V/W} \frac{v_k - y_k}{\left\|\overline{v}_k\right\|_{V/W}} = v_k,$$

对所有 $k = 1, \ldots\ldots, n$，我们有 $Z \subset F$，且由于 dim $F = \mathfrak{c}$，结论得证。 □

下一个结果是推论 2.3 和定理 3.6 的直接推论。

**推论 3.7**。若 $W$ 是巴拿赫空间 $V$ 的闭真子空间，且 $W$ 具有正则基序列，$V \setminus W$ 是 $\aleph_0$-可线性化的，则

$$V \setminus W \text{ is } (\alpha, \mathfrak{c})\text{-spaceable if, and only if, } \alpha < \aleph_0.$$

证明。定理 3.6 保证，对每个 $\alpha < \aleph_0$，$V \setminus W$ 都是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的。反过来，推论 2.3 保证，若 $\aleph_0 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$，则 $V \setminus W$ 不是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的。□

回顾一下，巴拿赫空间 $X$ 的子空间 $Y$ 若为闭子空间，且存在 $X$ 的闭线性子空间 $Z$，使得 $Y \cap Z = \{0\}$ 且 $Y + Z$ 在 $X$ 中稠密（见[18, 11, 14]），则称 $Y$ 在 $X$ 中拟补。在 [14], 中，Lindenstrauss 提出 $c_0$ 是否在 $\ell_\infty$中拟补的问题，而在[18, 定理 1.7], 中，Rosenthal 证明答案是肯定的。此外，$\ell_\infty$ 的每个可分子空间都在 $\ell_\infty$中拟补。特别地，如果 $Y = c_0$ 或 $c$，则集合 $\ell_\infty \setminus Y$ 是 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

下一个推论刻画了集合 $\ell_\infty \setminus c$ 和 $\ell_\infty \setminus c_0$ 的（$\alpha$，$\mathfrak{c}$）-可空间化性，为 Rosenthal 的结果赋予了更为具体的几何轮廓：

**推论 3.8**。 $\ell_\infty \setminus c$ 和 $\ell_\infty \setminus c_0$ 是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的，当且仅当 $\alpha < \aleph_0$。

证明。 规范序列 $(e_n)_{n=1}^\infty \subset \ell_\infty$ 是 $c_0$ 的 Schauder 基。因此，$(e_n)_{n=1}^\infty$ 是 $c$ 的基序列。由于对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\|e_n\| = 1$，序列 $(e_n)_{n=1}^\infty$ 是 $c_0$ 和 $c$ 的正则基序列。此外，$c_0$ 和 $c$ 在 $\ell_\infty$ 中均为闭集。因此，若在推论 3.7 中取 $V = \ell_\infty$ 和 $W = c_0$或 $c$，则可得 $\ell_\infty \setminus c$ 和 $\ell_\infty \setminus c_0$ 均为 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化，当且仅当$\alpha < \aleph_0$。 □

以下结果是定理 3.6 证明的推论。

**定理 3.9**。 设 $\lambda \geq \mathfrak{c}$, $V$ 是一个 $\lambda$ 维巴拿赫空间，且 $W$ 是 $V$ 的闭向量子空间。若 $V \setminus W$ 是 $\mathfrak{c}$ 线性可行的，且 $W$ 有一个正则基序列 $(y_k)_{k=1}^\infty$，则 $V \setminus W$ 是逐点 $\mathfrak{c}$ 可空间化的。

## 4. Dense lineability

以下结果由 Bernal 等人证明： [4]:

**定理 4.1**。 ([4, 定理 2。5]) 设 $V$ 是一个可度量可分拓扑向量空间，且 $W$ 是 $V$ 的向量子空间。若 $W$ 的余维无限，则 $V \setminus W$ 是 $\aleph_0$ 稠密线性可行的。

在本节中，我们将在某种意义上补充这一结果。我们将首先引入 $(\alpha, \beta)$-稠密可线性化性的概念:

**定义 4.2**。 设 $V$ 是一个赋有拓扑的 $\lambda$ 维向量空间，且 $A$ 是 $V$ 的非空子集。若 $A$ 是 $(\alpha, \beta)$-稠密可线性化的，即它是 $\alpha$-可线性化的，并且对每个 $\alpha$ 维子空间 $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$，都存在 $V$ 的一个 $\beta$ 维稠密子空间 $W_\beta$，使得$W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$，则称 $A$ 为 $(\alpha, \beta)$-稠密可线性化的。

本节的主要结果是定理 4.1 的一种变体:

**定理 4.3**。 设 $V$ 是一个可度量可分拓扑向量空间， $W$ 是$V$的一个子空间。若 $W$ 具有无限余维，则对每个 $k \in \mathbb{N}$， $V \setminus W$ 都是$(k, \aleph_0)$-稠密线性可列的。

证明。 固定 $k \in \mathbb{N}$，令 $g_1, \ldots, g_k$ 为线性无关向量，使得

$$G \setminus \{0\} \subset V \setminus W,$$

其中 $G :=$ 张成 $\{g_1, \ldots, g_k\}$。定义 $M_0 := W \oplus G$。令 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 $V$的拓扑的一个可数开基。由于 $\operatorname{codim} W = \infty$，我们有 $M_0 \subsetneq V$。这保证了 $\operatorname{int}(M_0) = \varnothing$，因此 $V \setminus M_0$ 在 $V$中稠密。令 $g_{k+1} \in U_1 \cap (V \setminus M_0)$，并定义 $G_1 =$ 张成 $\{g_1, \ldots, g_k, g_{k+1}\}$。由于 $\operatorname{codim} W = \infty$，我们有 $M_1 := W \oplus G_1 \subsetneq V$，从而 $\operatorname{int}(M_1) = \varnothing$。因此存在$g_{k+2} \in U_2 \cap (V \setminus M_1)$。递归地，我们得到一个向量的可数集 $\{g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}, \ldots\}$，使得，

$$g_{k+n+1} \in U_{n+1} \cap (V \setminus M_n),$$

其中

$$M_n := W \oplus G_n \text{ and } G_n := \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_{k+n}\}.$$

显然， $\{g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}, \ldots\}$ 线性无关且在 $V$中稠密，因此，张成（$\{g_1, \ldots, g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}, \ldots\}$）是 $\aleph_0$维的，并且在 $V$中稠密。

$k+N$如果 $v \in \operatorname{span}(\{g_1, \ldots, g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}, \ldots\}) \setminus \{0\}$，那么 $v = \sum a_i g_{i\circ}$ 因此 $v \in G_N$，并且由于$_{i=1}W \cap G_N = \{0\}$，我们得出结论： $v \notin W$。因此

$$G \subset \operatorname{span}(\{g_1, \ldots, g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}, \ldots\}) \subset (V \setminus W) \cup \{0\}.$$

□

众所周知（见 [4, 定理 4.2]），集合 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 对每个 $p>0$ 都是极大稠密可线性化的。将 $V = L_p[0,1]$ 和 $W = \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 代入定理 4.3，我们得到：

**推论 4.4.** 设 $0<p<\infty$。集合 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都是$(n,\aleph_0)$-稠密可直线化的。

在 [15, 第 2], 节，Nestoridis 提出了以下问题：

集合 $\ell_\infty \setminus c_0$ 是否包含一个稠密线性子空间?

在 [16, 定理 1.2] 中，Papathanasiou 对这个问题给出了肯定的回答。更确切地说，他证明了集合 $\ell_\infty \setminus c_0$ 是极大稠密可直线化的。不过，根据以下结果，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，$\ell_\infty \setminus c_0$ 都不是 $(n,\ \aleph_0)$-稠密可直线化的：

**定理 4.5.** 设 $F = c_0$ 或 $c$ 和 $n$ 为正整数。集合 $\ell_\infty \setminus F$ 是 $(n,\aleph_0)$-可线性化的，但不是 $(n,\aleph_0)$-稠密可线性化的。

证明. 根据 [16, 命题 1.5]，$\ell_\infty$ 的每个稠密线性子空间的维数都是 $\mathfrak{c}$。这保证了

$$\ell_\infty \setminus F \text{ is not } (n,\aleph_0)\text{-dense lineable.}$$

另一方面，由定理 3.6 可知

$$\ell_\infty \setminus F \text{ is } (n,\aleph_0)\text{-lineable.}$$

□

## 5. 稠密逐点可直线化

本节将介绍并探讨逐点稠密可直线化这一概念。这个新概念与逐点可直线化和稠密可直线化的概念密切相关（见 [2, 3]），但其要求更为严格。

**定义 5.1.** 设 $\alpha\le\lambda$ 为基数，且 $V$ 是一个赋有拓扑的 $\lambda$ 维向量空间。设 $A$ 是 $V$ 的非空子集。若对每个 $x\in A$，都存在 $V$ 的一个 $\alpha$ 维稠密子空间 $W_x$，使得

$$x\in W_x\subset A\cup\{0\}\,.$$

当 $\alpha=\lambda$ 时，我们称 $A$ 是逐点极大稠密线性可生成的。

**注5.2**。 设 $V$ 是一个无限维可度量可分拓扑向量空间，且 $W$ 是 $V$ 的一个非平凡真子空间。在这种情况下，对于每个 $v\in V\setminus W$，都有 $\mathbb{K}v\subset(V\setminus W)\cup\{0\}$。因此，若 $W$ 的余维无限，应用定理 *4.3* 并取 $k=1$，我们便可得出结论：$V\setminus W$ 是逐点 $\aleph_0$- 稠密线性可行的。

在 [4, 定理 2.5] 中，作者证明了：若 $V$ 是一个可分可度量拓扑向量空间，且 $W$ 是 $V$ 的一个无限余维子空间，那么 $V\setminus W$ 是 $\aleph_0$-稠密线性可行的。本节的主要结果是上述结果的一种补充：

**定理 5.3.** 设 $V$ 是一个无限维可分可度量拓扑向量空间，且$W$是 $V$的一个子空间。若 $W$在 $V$中稠密，且对于某个 $m\in\mathbb{N}$，$V\setminus W$是($m$,维数 $V$)-线性可行的，则$V\setminus W$ 是逐点极大稠密线性可生成的。

证明。考虑 $v \in V \setminus W$，并取 $m \in \mathbb{N}$使得 $V \setminus W$是$(m,$维数$V)$-线性可行的。由注5.2可知，存在 $\aleph_0$维的稠密向量子空间 $M$，它是 $V$ 的子空间，且$v \in M \subset (V \setminus W) \cup \{0\}$。考虑一个维数为 $m$ 且包含 $v$的向量子空间 $E \subset M$。由于 $V \setminus W$是$(m,$维数 $V)$-线性可行的，因此存在一个向量子空间 $Y \subset V$，其维数为$Y =$维数$V$，并且满足

$$E \subset Y \subset (V \setminus W) \cup \{0\}.$$

由于 $v \in Y$，我们得出 $V \setminus W$ 是逐点 dim $(V)$-可线性化的。现在我们需要证明 $V \setminus W$ 是逐点极大稠密可线性化的。固定 $x_0 \in W \setminus \{0\}$，并用 $d$ 表示定义 $V$ 拓扑的平移不变度量。由于 $V$ 可分且 $W$ 在 $V$ 中稠密，我们可以在 $V$ 中选取一个稠密可数集 $\{p_1, p_2, \ldots\}$，以及一个可数集 $\{w_n \colon n \in \mathbb{N}\}$，使其满足 $W$，从而

$$d(p_n, w_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.1}$$

N注意到 (5.1) 推出 $n \in \mathbb{N}\} \colon n \in \mathbb{N}\}$ 在 $V$ 中稠密。定义 $x_n := n^{-1}x_0$ 并

$$u_n := \begin{cases} 0, & \text{if } n = 1, \\ w_n + x_n, & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

因此，若 $n \geq 2$，则

$$d(u_n, w_n) = d(w_n + x_n, w_n) = d(x_n, 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.2}$$

考虑 $Y$ 的一个基 $\{y_a \colon a \in \Lambda\}$。由于 $\Lambda$ 是无限集，我们可以将其写为 $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$（两两不相交的无限集之并）。不失一般性，我们可以假设对于某个 $b \in \Lambda_1$，有 $v = y_b$。再次利用数乘的连续性，给定 $n \geq 2$，对于每个 $a \in \Lambda_n$，都存在 $\lambda_a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，使得 $d(\lambda_a y_a,$ 0) $\leq n^{-1}$。定义

$$z_a := \begin{cases} y_a, & \text{if } a \in \Lambda_1, \\ \lambda_a y_a, & \text{if } a \in \Lambda \setminus \Lambda_1. \end{cases}$$

因此，显然，$\{z_a \colon a \in \Lambda\}$ 也是 $Y$的一组基。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\Gamma_n = \{z_a + u_n \colon a \in \Lambda_n\}$。现在，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，取 $z_{a_n} + u_n \in \Gamma_n$。注意，如果 $n \geq 2$，那么由（5.1）和（5.2）可得

$$\begin{aligned} d(z_{a_n} + u_n, p_n) &\leq d(z_{a_n} + u_n, u_n) + d(u_n, w_n) + d(w_n, p_n) \\ &= d(z_{a_n}, 0) + d(u_n, w_n) + d(w_n, p_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

这尤其意味着，$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ 是 $V$的稠密子集，因此 span（$\Gamma$）在 $V$中稠密。

现在我们将证明 $\Gamma$ 是线性无关的。假设存在 $m \in \mathbb{N}$、$a_1 \in \Lambda_{n_1}, \ldots, a_m \in \Lambda_{n_m}$（当 $i \neq j$时 $a_i \neq a_j$）以及（$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$）$\in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z_{a_i} + u_{n_i}) = 0.$$

注意

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_{a_i} \in Y \subset V \setminus W \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{n_i} \in W.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_{a_i} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{n_i}$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_{a_i} \in Y \cap W = \{0\}$$

因此 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$。

同样的论证使我们能够证明

$$\operatorname{span}(\Gamma) \subset (V \setminus W) \cup \{0\}.$$

由于 $v = z_b + u_1$，我们得出 $v \in$ 张成（Γ）。 □

在 [9, 定理 3.2] 中，作者证明了集合 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 是 (1， c)-可空间化的。考虑定理 5.3 中的 $V = L_p[0,1]$ 和 $W = \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$，由于 $W$在 $V$中稠密，我们有：

**推论 5.4**。 $L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q\in(p,\ \infty)} L_q[0,1]$ 对于每个 $p > 0$都是逐点极大稠密线性可生成的。

## 参考文献

[1] R.M. Aron、L. Bernal-González、D. Pellegrino 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，《可线性化性：数学中对线性的探索》，数学专著与研究札记。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2016年。xix+308 页。[2] R.M. Aron、V.I. Gurariy 和 J.B. Seoane-Sepúlveda， $\mathbb{R}$上函数集的可线性化性与可空间化性，《美国数学学会会刊》133（2004），795–803。[3] R. Aron、F.J. García-Pacheco、D. Pérez-García 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，关于 $\mathbb{R}$上函数集的稠密可直线化，《Topology》48（2009），149–156。[4] L. Bernal-González 和 M.O. Cabrera，《可线性化判据及其应用》，《泛函分析杂志》266（2014），3997–4025。[5] G. Botelho、V.V. Fávaro、D. Pellegrino 和 J.B. Seoane-Sepúlveda，$L_p[0,1] - \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ 对每个$p > 0$都是可空间化的，《线性代数及其应用》436（2012），2963–2965。[6] D. Diniz 和 A. Raposo Jr，某些线性算子类的几何注记。（英文摘要）《巴西数学学会通报》（新系列） 52 （ 2021 ），1073–1080。[7] D. Diniz、V.V. Fávaro、D. Pellegrino 和 A. Raposo Jr，序列空间之间满射算子和单射算子集合的可空间化性。《皇家科学、精确科学与自然科学学院杂志》A辑：数学（RACSAM）114（2020），第4期，论文194，11页。[8] V.V. Fávaro、D. Pellegrino 和 P. Rueda，关于巴拿赫空间之间无界多重线性算子集合的大小。《线性代数及其应用》606（2020），144–158。[9] V.V. Fávaro、D. Pellegrino 和 D. Tomáz，可线性化性与可空间化性：一种新方法，《巴西数学学会通报》新系列51（2019），27–46。[10] V. Fonf、V.I. Gurariy 和 V. Kadec，由处处不可导函数组成的 $C[0,1]$ 的一个无限维子空间。《保加利亚科学院学报》52（1999），13–16。[11] R.C. James，拟补空间，《逼近理论杂志》6（1972），147–160。[12] N.J. Kalton， $F$-空间中的基本序列及其应用，《爱丁堡数学学会会刊》（第2辑）19（1974/1975），151–167。[13] D. Kitson 和 R.M. Timoney，算子值域与可空间化性。《数学分析及其应用杂志》378（2011），680–686。[14] J. Lindenstrauss，关于 Murray 和 Mackey 的一个定理。《巴西科学院学报》39（1967），1–6。[15] V. Nestoridis，关于拓扑和代数泛性以及可空间化性的空间链项目，arXiv:2005.01023，2020。[16] D. Papathanasiou， $\ell_\infty \setminus c_0$的稠密可线性化性与可代数化性，《美国数学学会会刊》150（2022），991–996。[17] D. Pellegrino 和 A. Raposo Jr，序列空间中的逐点可直线化。《数学研究》新系列32（2021），536–546。[18] H.P. Rosenthal，巴拿赫空间的拟补子空间。《美国国家科学院院刊》59（1968），361–364。[19] J.H. Shapiro，$F$ 空间中的弱基定理，《加拿大数学杂志》26（1974），1294–1300。[20] A. Wilansky，FK空间的半弗雷德霍姆映射。《数学杂志》144（1975），9–12。

数学学院，乌贝兰迪亚联邦大学，38400-902 - 乌贝兰迪亚，巴西。电子邮箱：vvfavaro@ufu.br 数学系，帕拉伊巴联邦大学，58.051-900 - 若昂佩索阿，巴西。电子邮箱：daniel.pellegrino@academico.ufpb.br 数学系，马拉尼昂联邦大学，65085-580 - 圣路易斯，巴西。电子邮箱：anselmo.junior@ufma.br 数学系，帕拉伊巴联邦大学，58.051-900 - 若昂佩索阿，巴西。电子邮箱：geivison.ribeiro@academico.ufpb.br