arXiv:2303.01199v2 [math.DS] 3 Feb 2024

常微分方程公理化理论中的动力学性质

Tomoharu Suda[1]

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, JAPAN

摘要

常微分方程公理化理论因其简洁性，可为描述动力系统的各种推广提供有用的框架。本研究探讨如何将动力学性质推广到这一框架中。首先，我们研究不变性和极限集等动力学性质的推广，并表明，紧弱不变集可以用函数空间中相应的平移不变集来刻画。这一结果使我们能够通过平移不变集来考察弱不变集。接着，我们将常微分方程公理化理论与广义动力系统的其他形式体系进行比较，即广义半流和多值半群。最后，我们引入不变测度的概念，并表明可以推广经典结果，例如 Poincar´ 复现定理。

关键词：常微分方程公理化理论、广义动力系统、弱不变性、广义半流、多值半群、不变测度

1. 引言

在无限维动力系统背景下考察演化方程，以及研究控制系统、微分包含和分段光滑向量场等应用时，动力系统的推广形式十分有用，因为这些情况缺乏时间演化的唯一性 [3, 15, 7, 5]。尽管连续时间动力系统通常用流的概念来描述，但无法将这一概念直接应用于此类情况。因此，需要一个推广框架。人们已提出多种理论，例如广义半流[3] 和多值半流 [15] （更全面的介绍见 [3]的引言）。

Email address: tomoharu.suda@riken.jp (Tomoharu Suda)[1]现地址：日本和光理化学研究所理化学研究所可持续资源科学中心

在考虑由广义常微分方程（常微分方程）产生的广义动力系统时，常微分方程的公理化理论是一个尤为有趣的框架，因为它将适定常微分方程的解所满足的条件形式化为公理，并考察函数空间的子空间在这些公理下的行为。此外，这种方法可以从必要条件出发，而非依赖那些足以构造常规动力系统类比的良好性质。这一特点使我们能够获得在一般情形下成立的结果。

常微分方程有两种主要的公理化理论：Filippov 理论和 Yorke 理论 [10, 11, 24]。与 Yorke 的框架相比，Filippov 理论已得到广泛研究。例如，Filippov 理论的已知成果包括对 Poincare-Bendixon定理的推广 [11], 、与局部动力系统概念的联系 [17], ，以及关于渐近自治系统的结果 [13]。然而，就动力系统理论而言，采用 Yorke 理论似乎更为容易。事实上，Yorke 的首篇论文讨论了动力学性质；此外，函数空间中的平移动力系统构成了该理论的基础。进一步说，使用 Yorke 的框架推广动力系统的概念后，可以对动力系统进行拓扑分类 [22]。

因此，本研究探讨 Yorke 的常微分方程公理化理论如何推广动力系统的性质，尤其是与不变性和极限集相关的性质。此外，我们还讨论 Yorke 理论与其他推广动力系统的框架（如广义半流和多值半群）之间的关系。随后，作为对所得结果的一项应用，我们在常微分方程公理化理论中定义不变测度的概念，并证明经典结果的一种推广形式仍然成立。

在陈述本文的主要结果之前，我们先简要概述 Yorke 理论如何描述广义动力系统。由于常微分方程的解通常只能在局部定义，我们将不可延拓部分映射 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 所成空间的子空间 S （定义 2.4）视为解空间。若 S 在自然定义于 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 上的平移 σ 下保持不变，则空间 S 可解释为描述 X 上的广义动力系统。在这种情况下， σ 是 S 上的流，因此我们考察由求值映射 π : $S \to X$ （定义为 $\pi(\phi) = \phi(0)$）所诱导的动力学。例如，若对于所有 $x \in A$, 都有相应的映射 $\phi \in S$, 使得 $\pi(\phi) = x$ 且 $\pi(\sigma(t, \phi)) \in A$, 则可将子集 $A \subset X$ 定义为弱不变。

下一个定理所陈述的基本原理是：相空间中的紧弱不变集对应于解空间中性质良好的平移不变子集。这是对贝布托夫动力系统中已知经典结果的推广（ [19] 中的定理 1.20 和 2.20）。这里的关键假设是紧致性公理（定义 2.5）成立。粗略地说，这一条件表示，所有经过某个紧集的“解”所组成的集合是紧的。

主定理 A. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是满足紧致性公理的平移不变集。那么，以下集合之间存在一一对应：

$$\{S' \subset S \mid \text{平移不变，关于相空间是极大的，且 } \pi(S') \text{ 是紧的}\}$$

and

$$\{A \subset X \mid A \text{ is weakly invariant and compact}\}.$$

根据定理 A，解空间 S 中的一个极限集会导出一个弱不变集。我们利用这一性质，为相空间中的点 x 定义一个极限集 $\omega_S(x)$。在此定义下，经典结果可以推广。

主定理 B. 设 S 是满足紧致性公理的平移不变集。那么，对于所有 $x \in X$，极限集 $\omega_S(x)$ 和 $\alpha_S(x)$ 都是闭的且弱不变的。

下一个定理阐述了常微分方程的公理化理论、广义半流与多值半群之间的联系。该结果表明，Yorke 理论可以应用于所有连续的完全轨道所构成的集合；这一理论在 Moussa [16] 引入的多值半群的不变测度理论中发挥着重要作用。

主定理 C. 设 $V(t)$ 是由紧致度量空间 X 上的广义半流 $G \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, X)$ 决定的多值半群。那么，所有连续完全轨道的集合 $\mathcal{K}$ 非空且平移不变。作为 $\pi(\mathcal{K})$ 上的解空间，$\mathcal{K}$ 满足存在性、紧性和切换公理。

利用定理 C 的观察结果，我们可以将不变测度的定义推广到常微分方程的公理化理论。对于满足紧致性公理的紧致度量空间中的解集，我们可以推广关于流的不变测度的经典定理。特别是，下面对拓扑庞加莱复现定理的推广成立。这将被视为对我们关于极限集和不变测度的定义的论证。

主定理 D. 设 μ 是平移不变子集$S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 的一个不变测度。那么，S 的所有回归点所成集合的闭包是一个满测度集。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍预备定义和结果，特别是概述 Yorke 的常微分方程公理化理论。第 3 节讨论解空间的拓扑性质，以及相空间中的动力学如何对应于解空间中的动力学。本节给出定理 A 的证明。在第 4 节中，我们考察由解空间诱导的动力学的渐近性质，特别是引入极限集的概念。第 5 节说明常微分方程公理化理论与其他现有形式体系（即广义半流和多值半群）之间的关系。最后，第 6 节引入不变测度的概念，并给出经典结果的一些推广。第 7 节为总结。

2. 预备知识

本节介绍讨论中用到的一些定义和基本结果。

2.1. 部分映射的一般拓扑

为介绍 Yorke 的常微分方程公理化理论，我们首先给出部分映射的基本定义和性质。我们考虑定义域为开的部分映射，正如 Abd-Allah 和 Brown [1]所研究的那样。

定义 2.1（部分映射）。设 X 和 Y 为拓扑空间。部分映射是子集 D和 f以及映射 $f\colon D \to Y.$ 组成的有序对（ $D \subset X$）。对于部分映射（D， f），集合 D 称为其定义域，记作 dom f。滥用记号地，我们将部分映射（ D， f ）记作 $f\colon X \to Y.$。部分映射的像是集合 im $f := f$(dom f)。

部分映射 $f\colon X \to Y$ 具有开定义域，是指 $\operatorname{dom} f$ 为开集且$f\colon \operatorname{dom} f \to Y$是连续的。

如果空间 Y是可分度量空间，则所有部分映射空间 $C_p(X,Y)$的拓扑可以由紧集上一致收敛定义。换言之，部分映射序列 $\phi_n \in C_p(X,Y)$在$n \to \infty$ 条件下收敛到 $\phi \in C_p(X,Y)$，是指对于每个紧集 $K \subset$，当 n 充分大时，$\operatorname{dom}\phi$、$K \subset \operatorname{dom}\phi_n$，且 $\sup_{x\in K} d(\phi(x)\ \phi_n(x))$在 $n \to \infty$趋于 0。该拓扑与由子基 $W(K,V) := \{\phi \in C_p(X,Y)\ \ |K \subset \operatorname{dom}\phi$和 im $\phi \subset V\}$定义的紧开拓扑一致，其中 $K \subset X$为紧集， $V \subset Y$为开集（ [22]中的引理 2.3）。

部分映射的原像可定义如下。这里，对所有 $\phi \in C_p(X,Y)$ 和 $A \subset Y$，我们定义：

$$\phi^{-1}(A) := \{x \in X \mid x \in \operatorname{dom}\phi \text{ and } \phi(x) \in A\}.$$

按照这一约定，开集的原像是开集。

在下文中，我们假设 $X = \mathbb{R}$ 和 Y是可分度量空间。由于我们只考虑实变量的部分映射，因此用字母X 表示相空间，而不用 Y。例如，所有部分映射空间记作 $C_p(\mathbb{R},X)$。这里需要指出的是，如果 X是可分度量空间，那么 $C_p(\mathbb{R},X)$是第二可数的（ [14]中的命题 2.1），这也说明了在讨论拓扑性质时使用序列是合理的。

定义域为开集的部分映射的一个重要例子是求值映射，后文将会用到它。

定义 2.2。我们将 $e\colon \mathbb{R} \times C_p(\mathbb{R},X) \to \mathbb{R} \times X$ 定义为

$$e(t,\phi) := (t,\phi(t))$$

若 $t \in$ 定义域ϕ.

引理 2.3。映射 e是一个定义域为开集的部分映射。

证明。设 $(t,\phi) \in$ 定义域 e. 根据定义，我们有 $t \in$ 定义域 ϕ。因此，我们可以找到 t 的一个紧邻域 K，使得 $K \subset$ 定义域 ϕ。这等价于 $\phi \in W(K,X)$。由于 $t \in K$，int $K \times W(K,X) \subset$ 定义域 e. 因此，e 的定义域是开集。

关于 e 的连续性，我们证明：$(t_n,\phi_n) \to (t,\phi)$ 蕴含 $(t_n,\phi_n(t_n)) \to (t,\phi(t))$。令 $\delta > 0$ 充分小以满足 $[t-\delta,t+\delta] \subset$ 定义域 ϕ. 对于充分大的 n，我们有 $[t-\delta,t+\delta] \subset$ 定义域 ϕ_n. 因此，由于 $t_n \to t$，存在 N 使得 $[t-\delta,t+\delta] \subset$ 定义域 ϕ_n 且对所有 $n \geq N$. 都有 $t_n \in [t-\delta,t+\delta]$。因此，我们有

$$\begin{aligned} d(\phi_n(t_n),\phi(t)) &\leq d(\phi_n(t_n),\phi(t_n)) + d(\phi(t_n),\phi(t)) \\ &\leq \sup_{s\in[t-\delta,t+\delta]} d(\phi_n(s),\phi(s)) + d(\phi(t_n),\phi(t)) \end{aligned}$$

若 $n \geq N$. 右端的第一项随着 $n \to \infty$ 趋于0，因为 $\phi_n \to \phi$. 右端的第二项由于 ϕ. 的连续性而趋于0 □

类比常微分方程的解，一个自然的研究对象是与不可延拓解相对应的所有极大定义的部分映射所组成的集合。

定义 2.4. 若部分映射 $\phi \in C_p(\mathbb{R},X)$ 的定义域非空且连通，则称其为极大定义的；如果对任意定义域非空且连通的 $\psi \in C_p(\mathbb{R},X)$，条件 dom $\phi \subset$ dom ψ 且 $\phi = \psi$ 在 dom ϕ 上成立蕴含 $\phi = \psi$.

所有极大定义的部分映射构成的集合记为 $C_s(\mathbb{R},X)$。

空间 $C_s(\mathbb{R},X)$ 具有比 $C_p(\mathbb{R},X)$ [23] 更好的性质。例如，$C_s(\mathbb{R},X)$ 是一个 T_1 空间。

2.2. 常微分方程公理化理论

如引言中所述，常微分方程公理化理论有两种主要的形式体系。这里，我们介绍基于开定义域部分映射概念的 Yorke 理论。该理论的详细内容可见于 [24, 22]。

Yorke 常微分方程公理化理论的基本思想是，部分映射空间 $C_p(\mathbb{R},X)$ 中一个性质足够良好的子空间，可以视为定义在 X 上某个初值问题的解空间。

例如，考虑形如 $\dot{x} = f(x)$ 的常微分方程初值问题。若初始条件为 $x(0) = x_0$，这里的问题是，对于所有 $t \in$ 定义域 $\psi\}$，求一个映射 ϕ，使其属于所有可能解构成的空间 $S = \{\psi \mid \psi(t) = f(\psi(t))$，且满足 $\phi(0) = x_0.$。用前述求值映射 e 来表述，这等价于求 $\phi \in (e|_S)^{-1}(\{(0,x_0)\})$，其中 $e|_S$：$\mathbb{R}\times S \to \mathbb{R}\times X$ 是 e 在 $\mathbb{R}\times S.$ 上的限制。若该初值问题适定，则解空间 S 具有良好的性质，例如紧性。

在公理化处理中，对解空间施加公理。这些公理用求值映射表述如下：

定义 2.5. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R},X)$ 和 e_S：$\mathbb{R}\times S \to \mathbb{R}\times X$ 是 e 到 $\mathbb{R}\times S.$ 的限制

1. 如果 e_S 是一个真映射，则子空间 S 满足紧致性公理。2. 如果 $e_S : e_S^{-1}(W) \to W$是满射，则子空间 S 在 W 上满足存在公理。3. 如果 $e_S : e_S^{-1}(W) \to W$是单射，则子空间 S 在 W 上满足唯一性公理。4. 如果 e_S 定义在 $D \times S$.上，则子空间 S 的定义域为 D

注 2.6。这里给出的公理陈述不同于 [24] 中的原始陈述。在 Yorke 的公理表述中，使用星构造 $S^*W := \{(t, \phi) \mid t \in$ 定义域 ϕ 和 $(t, \phi(t)) \in W\}$ 来代替求值映射。然而，我们有 $S^*W = e_S^{-1}(W)$，因此很容易看出二者是等价的。

紧致性公理在理论的发展中发挥着核心作用，因为它对应于连续依赖性。

定理 2.7（ [22] 中的定理 2.13）。子集 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 满足紧致性公理，当且仅当满足以下性质：若 $(t_n, x_n) \to (t, x)$ 是 $n \to \infty$ 在 $\mathbb{R} \times X$ 中，并且存在一个映射序列 $\phi_n \in S$ 满足$\phi_n(t_n) = x_n$，则存在一个映射 $\psi \in S$ 满足 $\psi(t) = x$，以及一个子序列 $\{(t_{n_i}, \phi_{n_i})\}$，使得 $(t_{n_i}, \phi_{n_i}) \to (t, \psi)$ 如 $i \to \infty$.

在将这些公理应用于动力学研究时，我们使用$C_p(\mathbb{R}, X)$上的移位映射来描述动力学。

定义 2.8. 移位映射 $\sigma : \mathbb{R} \times C_p(\mathbb{R}, X) \to C_p(\mathbb{R}, X)$ 定义为

$$\sigma(t, \phi)(x) := \phi(x + t),$$

其中 $x \in \mathrm{dom}(\phi) - t$。

定理 2.9. 移位映射是连续的，并满足以下条件：

1. 对每个 $\phi \in C_p(\mathbb{R}, X)$，都有 $\sigma(0, \phi) = \phi$.2. 对所有 $s, t \in \mathbb{R}$ 和 $\phi \in C_p(\mathbb{R}, X)$，都有 $\sigma(s, \sigma(t, \phi)) = \sigma(s + t, \phi)$。

也就是说， σ 是 $C_p(\mathbb{R}, X)$上的连续流。

下面的结果说明了 $C_p(\mathbb{R}, X)$ 的子基如何通过移位映射进行变换。

引理 2.10. 对任意紧子集 $K \subset \mathbb{R}$、开子集 $V \subset X$ 和 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\sigma(t, W(K, V)) = W(K - t, V).$$

证明。这一结果可由直接计算得到。 □

对于 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 的平移不变子集，只需较弱的条件即可验证公理在整体上成立。

定理 2.11。设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是平移不变的。那么，

1. S 满足在 $\mathbb{R} \times X$ 上的存在公理，当且仅当 S 满足在 $\{0\} \times X$. 上的存在公理。2. S 满足在 $\mathbb{R} \times X$ 上的唯一性公理，当且仅当 S 满足在 $\{0\} \times X$. 上的唯一性公理。3. S 的定义域为 $\mathbb{R}$，当且仅当 S 的定义域为 $\{0\}$.

证明。首先，我们证明陈述 (1)。设 S 满足在 $\{0\} \times X$ 上的存在公理，且 $(s, x) \in \mathbb{R} \times X$. 那么，我们可以找到 $\phi \in S$，使得 $\phi(0) = x$. 由于根据平移不变性有 $\sigma(-s, \phi) \in S$，且 $\sigma(-s, \phi)(s) = \phi(0) = x$，因此 S 满足在 $\mathbb{R} \times X$ 上的存在公理。反向结论显然。

陈述 (2) 的证明类似。

最后，我们证明陈述 (3)。设 S 的定义域为 $\{0\}$，且 $s \in \mathbb{R}$. 根据平移不变性，$\sigma(s, \phi) \in S$。因此，$0 \in \operatorname{dom} \sigma(s, \phi)$。然而，这等价于 $s \in \operatorname{dom} \phi$. 因此，$S$ 的定义域为 $\mathbb{R}$。 □

特别是，只要我们讨论定义域为 $\{0\}$ 的平移不变集，就不需要考虑部分映射。

推论 2.12. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是平移不变的，且定义域为 $\{0\}$。那么，$S \subset C(\mathbb{R}, X)$。

根据上述结果，对于 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 的一个平移不变子集，我们可以说：如果 S 在 $\{0\} \times X$. 上满足存在公理，那么 S 在 X 上满足存在公理。下文中，我们用这一简写来表示 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 的平移不变子集。

流可以与 $C(\mathbb{R}, X)$ 的良性子空间相对应。

定义 2.13. 如果子集 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 中的 S 是一个平移不变集，并且在 X 上满足紧性、唯一性和存在公理，那么该子集就是一个适定集。

定理 2.14 (Yorke). 如果 X 是局部紧的，且 S 是一个适定集，那么 (σ, S) 与 (Φ, X) 拓扑共轭，其中流 $\Phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ 定义为

$$\Phi(t, x) := \phi(t),$$

其中 $\phi \in S$ 满足 $\phi(0) = x$. 反之，若 Φ 是一个连续流，则集合$S = \{\phi(-) := \Phi(-, x) \mid x \in X\}$ 是一个适定集。

在 Yorke 形式体系中，轨迹并不总是能够拼接起来，因此这一条件被表述为一条附加公理。

定义 2.15. 若子集 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 满足切换公理，则 S包含由下式定义的映射 ψ

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & (t \le \tau) \\ \phi_2(t) & (t \ge \tau) \end{cases}$$

每当 $\phi_1, \phi_2 \in S$ 满足

$$\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$$

对于某个 $\tau \in$ 定义域 $\phi_1 \cap$ 定义域ϕ_2.

例 1. 对于形式为 $\dot{x} = f(x)$ 的常微分方程，其中 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是全局利普希茨的，所有解构成一个适定集。对于微分包含$\dot{x} \in F(x)$，如果 F 具有足够良好的性质，则其解集满足紧致性公理和存在公理。这是解集紧性的结果（参见 [20] 中的推论 4.4 和 4.5）。

例 2. 我们考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、由分段光滑向量场定义的 Filippov系统（详情参见 [9]）

$$Z(x,y) = \begin{cases} (0,-1) & y > 0 \\ (0,0) & y = 0 \\ (0,1) & y < 0 \end{cases}$$

利用定理 2.7可以证明，所有解的集合满足紧致性公理。

3. 解空间的拓扑性质及其与动力学的对应关系

本节将考察 Yorke 公理如何诱导解空间的拓扑性质，以及由移位映射诱导的解空间动力学如何与相空间中的动力学相关。

3.1. 解空间的拓扑性质

Yorke 公理描述了初值问题的适定性，同时也对解空间的拓扑性质产生影响。以下关于动力学的讨论将用到这些结果。

定理3.1. 若子集 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 满足紧致性公理，则 S 是闭的。

证明. 假设 S 不是闭的。于是，我们可以取一个序列 $\{\phi_n\}_n$属于 S，使得 ϕ_n 收敛到 $\phi \notin S$. 对于固定的 $t \in$ 定义域ϕ，当 n 充分大时，有 $t \in$ 定义域ϕ_n，且 $\phi_n(t) \to \phi(t)$ 属于 X. 因此，集合 $\{(t, \phi_n(t))\}_n \subset \mathbb{R} \times X$ 是紧的，并且

$$(t, \phi_n) \in (e_S)^{-1}\left(\overline{\{(t, \phi_n(t))\}_n}\right).$$

根据紧致性公理，对于某个子序列，我们有 $\phi_{n_i} \to \psi$ 和 $\psi \in S$。根据构造，我们有 $t \in$ 定义域$\psi \cap$ 定义域ϕ。此外，对于所有 $s \in$ 定义域ψ. ，我们有 $\phi_{n_i}(s) \to \psi(s)$。由于 X 是豪斯多夫的，因此 ϕ 和 ψ 在定义域$\psi \cap$定义域$\phi \neq \emptyset$. 上重合。根据 ϕ 和 ψ 的极大性，我们有 $\phi = \psi$，这与假设 $\phi \notin S$. 矛盾。 □

对于解空间的紧性，我们有如下 Barbashin 定理的类似结果，它涉及集值过程的解集的紧性（例如，参见 [4] 中的命题 2.3 和 [6] 中的定理 3）：

定理 3.2. 设 X 为紧集，且 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 满足紧致性公理，其定义域为 $\{0\}$.因此，S 是紧集。

证明。空间 $\{0\} \times S = (e_S)^{-1}(\{0\} \times X)$ 是紧的。注意，映射分量 $\mathrm{p}: \mathbb{R} \times C_s(\mathbb{R}, X) \to C_s(\mathbb{R}, X)$ 的投影是连续的。由于 $S = \mathrm{p}(\{0\} \times S)$ S 是紧集，因为它是紧集的连续像。 □

反之，解空间的紧性蕴含紧致性公理。

定理 3.3. 若子集 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是紧集，则 S 满足紧致性公理。

证明。设 $W \subset \mathbb{R} \times X$ 为紧集。为证明 $(e_S)^{-1}W$ 是紧的，考虑序列 $\{(t_n, \phi_n)\}_n \subset (e_S)^{-1}W$. 由于 $\{\phi_n\}_n \subset S$ 且 S 是紧的，我们可以取一个收敛子列 $\{\phi_{n_i}\}_i$. 由于 $\{(t_{n_i}, \phi_{n_i}(t_{n_i}))\}_i \subset W$， $\{t_{n_i}\}_i$存在一个收敛子列。因此， $\{(t_n, \phi_n)\}_n$ 具有一个收敛子列。 □

结合定理 3.2 和定理 3.3，我们得到相空间为紧空间时紧性的如下刻画。

推论 3.4. 若 X 是紧致度量空间，则子集 $S \subset C(X, \mathbb{R})$ 是紧的，当且仅当满足紧致性公理。

3.2. 解空间与动力学之间的对应关系

现在，我们考察由移位映射诱导的解空间中的动力学如何与相空间中的动力学相对应。

首先，我们考察基本的动力学性质。在常微分方程公理化理论中，我们有一个与别布托夫动力系统中的结果类似的结果（ [19] 中的定理 1.20 和 2.20）。

定理 3.5. 设 S 是一个适定集， Φ 是由 S 通过定理 2.14 诱导的流。那么，

1. $\phi \in S$ 是常值映射，当且仅当 $\phi(0)$ 是 Φ的平衡点。2. $\phi \in S$ 是周期映射，当且仅当 $\phi(0)$ 是 Φ的周期点。

因此，如果存在常值映射 $\phi \in S$，使得 $\phi(0) = x.$，我们就称 $x \in X$ 是平移不变集 S的平衡点。注意，在 $C_s(\mathbb{R}, X)$ 中的常值映射或周期映射，其定义域为 $\mathbb{R}$。

定理 3.6. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是一个平移不变闭集。那么， S 的平衡点集合是闭集。

证明. 设 $\{x_n\}_n$ 是 S 的一个平衡点序列，且收敛于 $x.$。若令 ϕ 为满足 $\phi(0) = x$ 的常值映射，则显然有 $\phi_n \to \phi$，其中 ϕ_n 是满足 $\phi_n(0) = x_n.$ 的常值映射。因此， $\phi \in S$，且 x 是 S 的一个平衡点。 □

现在，我们来考虑一般类型的不变集。对于轨迹不具唯一性的动力系统，不变性有两种类型。在常微分方程公理化理论的框架下，它们表述如下:

定义 3.7（弱不变性与强不变性）。设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是一个平移不变集。对于子集 $A \subset X$,

1. 若对所有 $x \in A$，都存在 $\phi \in S$ 使得 $\phi(0) = x$ 且 $\operatorname{im}\phi \subset A.$，则 A 弱不变。2. 若对所有满足 $\phi(0) \in A.$ 的 $\phi \in S$，都有 $\operatorname{im}\phi \subset A$，则 A 强不变。

备注 3.8。根据定义，强不变性蕴含弱不变性。若 A 弱不变，则存在公理在 $\{0\} \times A.$ 上成立。若唯一性公理成立，则这两个概念等价。

尽管我们用在 0 处的取值来定义不变性，但这并非本质，下一条结果将说明这一点。

引理 3.9. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是一个平移不变集。对于子集 $A \subset X$,

1. A 是弱不变的，当且仅当对于所有 $x \in A$，都存在 $\phi \in S$，使得 $x \in \operatorname{im}\phi \subset A$.2. A 是强不变的，当且仅当 $\operatorname{im}\phi \cap A \neq \emptyset$ 意味着对于所有 $\phi \in S$，$\operatorname{im}\phi \subset A$。

证明. (1): “仅当”部分显然。设 $A \subset X$ 满足：对于所有 $x \in A$，都存在 $\phi \in S$，使得 $x \in \operatorname{im}\phi \subset A.$。对于每个 $x \in A$，我们在假设中取 $\phi \in S$，并令 $t \in \operatorname{dom}\phi$，使得 $x = \phi(t)$。根据 S 的平移不变性，我们有 $\psi := \sigma(t, \phi) \in S.$。映射 ψ 满足 $\psi(0) = x$，且 $\operatorname{im}\psi \subset A$。

(2): “若”部分显然。设 A 强不变，且对于映射 $\phi \in S.$，有 $\operatorname{im}\phi \cap A \neq \emptyset$。考察 $\psi := \sigma(t, \phi)$，其中 $\psi(0) = \phi(t) \in \operatorname{im}\phi \cap A$，可得 $\operatorname{im}\psi \subset A$，这等价于 $\operatorname{im}\phi \subset A.$ □

弱不变性可用于证明全局定义的解的存在性。

定理 3.10. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是满足紧致性公理的平移不变集，且 $A \subset X$ 是弱不变子集。若 A 紧，则存在平移不变子集 $S' \subset S \cap C(\mathbb{R}, X)$，使得对所有 $\phi \in S'.$，都有 $\phi(0) \in A$

证明。对于每个 $x \in A$，存在满足 $\phi_x(0) = x$ 且 $\operatorname{im}\phi_x \subset A.$ 的 $\phi_x \in S$。根据 [22], 中的定理 2.17，我们有定义域 $\phi_x = \mathbb{R}.$

现在，我们考虑集合

$$S' := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{\sigma(t, \phi_x) \mid x \in A\}.$$

根据定义，对于所有 $\phi \in S'$.， S' 是 S 的平移不变子集，且 $\phi(0) \in A$ □

不变性的概念可以通过解空间中相应的集合来描述。特别地，对于满足紧致性公理的 S，给定一个平移不变的 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$，我们可以建立 S 的一类紧致不变子集与 X 的紧致弱不变子集之间的一一对应。

为陈述这一结果，我们引入若干概念和结果。定义在 0 处求值映射

$$\pi : C_s(\mathbb{R}, X) \to X$$

为 $\pi(\phi) = \phi(0)$。通过类似于引理 2.3 的论证，我们可以证明 π 是一个定义域为开集的部分映射。或者，我们可以注意到， π 是单射 $C_s(\mathbb{R}, X) \to \mathbb{R} \times C_s(\mathbb{R}, X)$ e 与投影 $\mathbb{R} \times X \to X$. 的复合，从而验证这一断言

定义 3.11. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 且 $A \subset X$。 S 的 A-截面定义为

$$S_A := \pi^{-1}(A) \cap S.$$

我们可以说， A-截面是空间 S 中与 A 相对应的集合，并有助于描述相空间中的动力学。

注 3.12. 根据定义， $\phi \in S_A$ 意味着 $0 \in$ 定义域 ϕ。这一观察带来如下推论。一般而言， $C_s(\mathbb{R}, X)$ 的不变子集 S 可能只由部分映射构成。然而，如果 S_A 包含不变集 S'，那么$S' \subset C(\mathbb{R}, X)$。

如果不变子集 $S' \subset S$ 满足以下条件：对于所有不变子集 $S'' \subset S$， $\pi(S') = \pi(S'')$ 都意味着 $S'' \subset S'$ ，那么我们称 $S' \subset S$ 在相空间意义下极大。如果一个不变子集在相空间意义下极大，那么它就是占据同一相空间的不变子集中最大的一个。

定理 3.13（主定理 A）。设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是满足紧致性公理的平移不变集。那么，集合之间存在一一对应关系

$$\{S' \subset S \mid \textit{shift invariant, maximal w.r.t. phase space and } \pi(S') \textit{ is compact}\}$$

and

$$\{A \subset X \mid A \textit{ is weakly invariant and compact}\}.$$

为了证明这个定理，我们先准备几个引理。

引理 3.14. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是一个平移不变集。若 $S' \subset S$ 是平移不变的，则 $\pi(S')$ 关于 S. 弱不变

证明. 设 $x \in \pi(S')$。那么，存在 $\phi \in S' \subset S$，使得 $\phi(0) = x.$。由于 S' 是平移不变的，我们有

$$\phi(t) = \pi(\sigma(t, \phi)) \in \pi(\sigma(t, S')) = \pi(S')$$

对于所有 $t \in$ 定义域ϕ. 因此， $\pi(S')$ 关于 S 是弱不变的。 □

如果 S 和 $S' \subset S$ 是平移不变的，则每个具有 $S' \subset A$ 的 $A \subset S$ 都拥有极大平移不变子集。我们将在下一个引理中使用这一性质。

引理 3.15. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是满足紧性公理的平移不变集。紧子集 $A \subset X$ 关于 S 是弱不变的，当且仅当 $\pi(\text{inv } S_A) = A$，其中 $\text{inv}\, S_A$ 是 S_A. 的极大平移不变子集。

证明. 设 $A \subset X$ 关于 S 是弱不变的。根据定理 3.10，存在平移不变子集 $S' \subset S \cap C(\mathbb{R}, X)$，使得 $\pi(S') = A$，这意味着 $S' \subset S_A$. 因此，我们有 $S' \subset \text{inv}\, S_A$ 和 $A = \pi(S') \subset \pi(\text{inv}\, S_A)$。反过来，根据定义，我们有 $\pi(\text{inv } S_A) \subset \pi(S_A) \subset A$。因此，我们得到 $A = \pi(\text{inv}\, S_A)$。

逆命题由引理 3.14 得出。 □

引理 3.16. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是一个满足紧性公理的平移不变集，且紧子集 $A \subset X$ 关于 $S.$ 弱不变。则， S_A 的极大平移不变子集在相空间意义下极大。

证明。设 $S' \subset S$ 是一个平移不变子集，且 $\pi(S') = A.$。那么，我们有 $S' \subset \pi^{-1}(A)$，这意味着 $S' \subset \text{inv}\, S_A$. □

定理 3.13 的证明。设 $\text{Inv}_c(S)$ 是所有满足以下条件的 $S' \subset S$ 的集合：它们是平移不变的、在相空间意义下极大，且 $\pi(S')$ 是紧集。于是，我们可以定义一个映射

$$\text{Inv}_c(S) \to \{A \subset X \mid A \text{ is weakly invariant and compact}\}$$

根据引理 3.14，由 $S' \mapsto \pi(S')$ 得到。根据引理3.15和3.16，该映射是满射。根据相空间意义下极大的定义，该映射也是单射。

□

事实上，如果弱不变集 A 是紧的，$\text{inv}\, S_A$ 也是紧的。这由以下结果以及不变集的闭包也是不变集这一事实得出。因此，定理 3.13 可以看作是 S 的一类紧致不变子集与紧致弱不变子集之间的对应关系。

引理 3.17。设 S 在 $\{0\} \times A$ 上满足紧致性公理和存在公理。那么，如果 A 是紧的，则 S_A 是紧的。

证明。由于 $e_S^{-1}(\{0\} \times A) = \{0\} \times S_A$和 $\{0\} \times A$是紧的， S_A是紧的。 □

例3。根据定理 3.5，对于平移不变集 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$，平衡点与 S 中的常值映射相对应。定理 3.13 可以通过以下观察视为这种对应关系的推广：显然，$S_{\{x\}}$ 的极大平移不变子集至多包含一个映射，即取值为 x 的常值映射。反过来，单点集 $\{x\}$ 弱不变，当且仅当 x 是 S的一个平衡点。

如果相空间 X 是紧的，且解是全局定义的，则定理 3.13 可以加强。

定理3.18。设 X 是紧的，且 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 是平移不变集。集合之间存在一一对应

$$\{S' \subset S \mid \textit{shift invariant and maximal w.r.t. phase space}\}$$

and

$$\{A \subset X \mid A \textit{ is weakly invariant}\}.$$

证明。令 $\mathrm{Inv}_c(S)$ 为所有 $S' \subset S$ 的集合，其中平移是不变的，且相对于相空间是极大的。利用引理 3.14，可以定义映射

$$\mathrm{Inv}_c(S) \to \{A \subset X \mid A \text{ is weakly invariant}\}$$

can be defined by $S' \mapsto \pi(S')$。如果 $A \subset X$ 是弱不变的，我们可以通过与定理 3.10 类似的论证，证明平移不变子集 $S' \subset S_A$ 的存在，从而得到与引理3.15和3.16类似的结果。 □

对于强不变性，有以下结果。

定理3.19。设 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 是满足紧致性公理的平移不变集。子集 $A \subset X$ 关于 S 强不变，当且仅当 S_A 不变；也就是说，$S_A = \mathrm{inv}\, S_A$。

证明。设 $A \subset X$ 是强不变的，且 $\phi \in S_A$. 根据引理 3.9，我们有 $\mathrm{im}\,\phi \subset A$，因为 $\phi(0) \in \mathrm{im}\ \phi \cap A$. 因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$\sigma(t, \phi) \in \pi^{-1}(A)$，这意味着 S_A 是平移不变的。

反过来，如果 S_A 是平移不变的，那么所有满足 $\phi(0) \in A$ 的 $\phi \in S$ 都满足 $\sigma(t, \phi) \in S_A$。因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}.$，$\phi(t) \in A$ □

4. 渐近性质

本节中，我们考察由解空间诱导的相空间动力学的渐近性质。特别是，我们讨论如何推广极限集的定义。

首先，我们回顾流的极限集定义。

定义 4.1. 对于 X 上的流 Φ 和 $A \subset X$，我们定义

$$\omega(A) := \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \Phi(s, A)}$$

$$\alpha(A) := \bigcap_{t<0} \overline{\bigcup_{s \leq t} \Phi(s, A)}.$$

注记 4.2. 对于 X 上的流 Φ 和 $A \subset X$，其中 X 是第一可数空间，我们有

$$\omega(A) = \{y \in X \mid \text{there exist } a_n \in A, t_n \text{ s.t. } \Phi(t_n, a_n) \to y, t_n \to \infty\},$$
$$\alpha(A) = \{y \in X \mid \text{there exist } a_n \in A, t_n \text{ s.t. } \Phi(t_n, a_n) \to y, t_n \to -\infty\}.$$

此外，我们注意到 $\omega(A)$ 和 $\alpha(A)$ 是闭不变集。

由于 (σ, S) 是一个流，极限集的概念便可自然定义。如果 S 是一个适定集，则 (σ, S) 的极限集可以用截面来描述。

定理 4.3. 设 X 是局部紧的， S 是一个适定集，且 Φ 是由 S 通过定理 2.14 诱导的流。则，

1. 对每个 $x \in X$， $S_{\omega(x)} = \omega(S_x)$。
2. 对每个 $x \in X$， $S_{\alpha(x)} = \alpha(S_x)$。

证明。我们证明 ω 极限集的结果。注意到我们有 $S_x = \{\phi\}$，其中 $\phi(t) = \Phi(t, x)$。

如果 $\psi \in S_{\omega(x)}$，则对于某个序列 $t_n \to \infty$，当 $n \to \infty$. 时，我们有 $\psi(0) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n, x)$。由于集合 $\{(0, \Phi(t_n, x)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的闭包 W 是紧的，我们可以从 $(0, \sigma(t_n, \phi)) \in e_S^{-1} W.$ 中找到一个收敛子列。结合唯一性公理，这表明 $\psi \in \omega(S_x)$。

反过来，令 $\psi \in \omega(S_x)$。于是，对于某个序列 $t_n \to \infty$ ，当 $n \to \infty$. 时，我们有 $\psi = \lim_{n\to\infty} \sigma(t_n, \phi)$。由求值在 0 处的连续性，得到$\psi(0) = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n)$，这意味着 $\psi(0) \in \omega(x)$。 □

前述定理表明，对于一个流， $\pi(\omega(S_x)) = \omega(x)$。这一观察引出了以下定义：

定义 4.4. 令 S 为满足紧致性公理的平移不变集。对于每个 $x \in X$，定义

$$\omega_S(x) := \pi\left(\omega(S_x)\right),$$
$$\alpha_S(x) := \pi\left(\alpha(S_x)\right).$$

我们考察这个极限集定义与 Yorke 原始论文中使用的极限集概念之间的关系。

定义 4.5（Strauss-Yorke 极限集定义， [21, 24]）。令 S 为满足紧致性公理的平移不变集。对于 $B \subset S$，定义

$\Lambda^+(B) := \{y \in X \mid$ 存在 $\phi_n \in B, t_n \in$ 定义域 ϕ_n，使得 $\phi_n(t_n) \to y, t_n \to \infty\}$ $\Lambda^-(B) := \{y \in X \mid$ 存在 $\phi_n \in B, t_n \in$ 定义域 ϕ_n，使得 $\phi_n(t_n) \to y, t_n \to -\infty\}$

引理 4.6. 设 S 是一个满足紧致性公理的平移不变集。对于 $B \subset S$，有

$$\Lambda^+(B) = \pi(\omega(B))$$
$$\Lambda^-(B) = \pi(\alpha(B)).$$

特别地，有

$$\omega_S(x) = \Lambda^+(S_x),$$
$$\alpha_S(x) = \Lambda^-(S_x).$$

证明。设 $x \in \Lambda^+(B)$。于是，我们可以找到 $\phi_n \in B$ 和 $t_n \in \operatorname{dom}\phi_n$，使得$\phi_n(t_n) \to x$ 且 $t_n \to \infty.$。由于 $\phi_n \in B \subset S$，我们有 $\psi_n := \sigma(t_n, \phi_n) \in S$，这是由不变性所致。因此，我们得到

$$(0, \psi_n) \in e_S^{-1}\overline{\{(0, \phi_n(t_n))\}_n}.$$

根据紧致性公理，我们可以找到一个收敛子列 $\{\psi_{n_i}\}_i$。对于其极限 ψ，我们看到 $\psi \in \omega(B)$。由 π 的连续性，我们有

$$x = \lim_{i\to\infty} \phi_{n_i}(t_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \pi(\psi_{n_i}) = \pi(\psi).$$

因此， $x \in \pi(\omega(B))$。

反过来，设 $x \in \pi(\omega(B))$。于是，我们可以找到 $\phi_n \in B$ 和 t_n，使得

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \sigma(t_n, \phi_n),$$

$t_n \to \infty$ 且 $\pi(\psi) = x.$。由于 $0 \in \operatorname{dom}\psi$，对于充分大的$n$，我们有 $t_n \in \operatorname{dom}\phi_n$，因此， $\phi_n(t_n) \to x.$ □

现在，我们推广关于流的极限集的经典结果。

定理4.7. 设 S 是一个满足紧致性公理的平移不变集。若紧子集 $K \subset X$ 是弱不变的，则对所有$x \in K.$， $\omega_S(x) \neq \emptyset$

证明. 设 $x \in K.$。由于 K 是弱不变的，我们可以应用定理 3.10，得到 $\emptyset \neq \Lambda^+(S_x) = \omega_S(x)$。 □

定理4.8（主定理 B）。设 S 是一个满足紧致性公理的平移不变集。那么，对所有 $x \in X$，极限集 $\omega_S(x)$和 $\alpha_S(x)$都是闭且弱不变的。

证明. 若 $\omega_S(x)$为空，则命题自然成立。我们假设$\omega_S(x) \neq \emptyset.$。根据 $\omega(S_x)$的不变性以及引理 3.14， $\omega_S(x)$是弱不变的。

我们证明 $\omega_S(x)$ 是闭的。设 $y_n \in \omega_S(x)$ 满足 $y = \lim_{n\to\infty} y_n$；那么，对于 $\phi_n \in \omega(S_x)$，有 $y_n = \phi_n(0) \subset S.$。由于 S 满足紧致性公理，通过考察 $\{(0, y_n)\}_n.$，我们可以找到一个收敛子列 $\phi_{n_i} \to \psi$。因为 $\omega(S_x)$ 是闭的，所以有 $\psi \in \omega(S_x)$。由 π的连续性可得 $y = \psi(0) \in \pi(\omega(S_x))$。 □

第 6 节中使用的复现概念可定义如下：

定义 4.9. 设 $S \subset C_s(\mathbb{R}, X)$ 是紧且平移不变的。若 S 满足以下条件，则点 $x \in X$ 是复现的：

$$x \in \omega_S(x).$$

最后，我们简要谈谈吸引子的概念。正如下一节将要讨论的，Yorke 理论与广义动力系统的其他形式体系相兼容。因此，我们可以引入吸引子的各种定义。

5. 与其他形式体系的比较

本节将常微分方程公理化理论与广义动力系统的其他形式体系进行比较，即广义半流和多值半群。

为简单起见，我们考虑 Yorke 形式体系中最简单的情形，即相空间 X 是一个紧致度量空间，且每个映射都在全局有定义。

注 5.1。在这种情况下，Yorke 理论中的解空间拓扑与 Filippov 理论中的解空间拓扑一致，因为两者都归结为 $C(\mathbb{R}, X)$ 上的紧开拓扑。

Ball 提出的广义半流是一种重要且广泛使用的形式体系。

定义 5.2（广义半流 [3]）。 X上的广义半流 G 是一族映射 $\phi\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$，满足以下条件：

1. 对每个 $z \in X$，至少存在一个 $\phi \in G$，使得 $\phi(0) = z$.2. 若 $\phi \in G$且 $\tau \geq 0$，则 $\phi^\tau \in G$，其中 $\phi^\tau(t) = \phi(t+\tau)$。3. 若 ϕ、$\psi \in G$ 且 $\phi(t) = \psi(0)$，则 $\theta \in G$，其中

$$\theta(s) = \begin{cases} \phi(s) & s \leq t \\ \psi(s-t) & s \geq t \end{cases}$$

4. 若 $\phi_j \in G$ 满足 $\phi_j(0) \to z$，则存在 $\{\phi_j\}$ 的一个子序列 $\{\phi_\mu\}$，且$\phi \in G$ 满足 $\phi(0) = z$ 并逐点 $\phi_\mu \to \phi$。

如前所述，广义半流的定义与 Yorke 理论相似。下一个结果将以精确的形式阐明这种联系：

定理 5.3. 如果平移不变集 S 满足 $\mathbb{R}_{\geq 0} \times X$上的紧性、存在性和切换公理，那么 S 是一个广义半流（如果将其视为形如 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to X$的映射集）。

证明。我们逐一验证广义半流的各项条件。

条件（1）和（2）分别由存在公理和平移不变性推出。

对于条件（3），设 $\phi,\psi \in S$ 满足 $\phi(t) = \psi(0)$，其中 $t > 0.$。然后，我们对 ϕ 和 $\sigma(-t,\psi)$应用切换公理，得到它们的拼接 θ。

为证明(4)，令 $\phi_j \in S$ 满足 $\phi_j(0) \to z.$。将紧致性公理应用于 $\{(0,\phi_j(0))\}_j$ 的闭包，可得 $\{\phi_j\}$的一个收敛子列，该子列也逐点收敛。 □

这一结果提供了一种从 $C(\mathbb{R},X)$中的良态平移不变子集构造广义半流的方法。随后，我们考虑逆问题：如何从广义半流构造 $C(\mathbb{R},X)$中的良态平移不变子集。

在集值动力系统的背景下，常使用多值半群。这里，我们用广义半流来引入这一概念。

定义5.4（[7, 16]）。由广义半流 G 确定的多值半群，是定义在 X 上的一族集值算子 $\{V(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$，其定义如下：

$$V(t)E := \{\phi(t) \mid \phi \in G \text{ and } \phi(0) \in E\}$$

对于 $E \subset X.$

对于由广义半流确定的多值半群，我们有

$$V(t+s)E = V(t)V(s)E$$

如果 t、$s \geq 0$ 和 $E \subset X.$

如果 V 是由广义半流 $G \subset C(\mathbb{R},X)$确定的多值半群，我们定义

$$V(-t)E := \{\phi(-t) \mid \phi \in G \text{ and } \phi(0) \in E\}$$

对于 $t > 0.$

引理5.5. 设多值半群 V 由广义半流 $G \subset C(\mathbb{R},X)$确定，其中 G 是平移不变的。那么有以下结论：

1. 对所有 $E \subset X$，我们有

$$E \subset V(t)V(-t)E$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。

2. 对所有 $E \subset X$，我们有

$$V(t)^{-1}E := \{x \in X \mid V(t)x \cap E \neq \emptyset\} = V(-t)E$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。

证明。(1)：设 $x \in E.$。根据条件 (1)，存在 $\phi \in G$，使得 $\phi(0) = x.$。由 G 的平移不变性，我们有 $\sigma(-t,\phi) \in G.$。于是，我们有 $\phi(-t) \in V(-t)E$；因此，$x = \sigma(-t,\phi)(t) \in V(t)V(-t)E.$

（2）：令 $x \in V(t)^{-1}E$。根据定义，存在 $\phi \in G$，使得 $\phi(0) = x$，且$\phi(t) \in E.$。由平移不变性可得 $\sigma(t,\phi) \in G.$。因此，$x = \sigma(t,\phi)(-t) \in V(-t)E.$。反过来，令 $x \in V(-t)E.$。那么，存在 $\phi \in G$，使得 $\phi(0) \in E$，且 $\phi(-t) = x.$。通过考察 $\sigma(-t,\phi)$，我们得到 $x \in V(t)^{-1}E$。 □

注 5.6。一般而言，第一个断言中的包含关系是严格的。

多值半群可以用截面来描述。

引理 5.7. 设多值半群 V 由广义半流 $G \subset C(\mathbb{R}, X)$确定，其中 G 是平移不变的。那么，对所有 $A \subset X$ 和$t \in \mathbb{R}$，有

$$V(t)A = \pi(\sigma(t, S_A)).$$

证明. 设 $x \in V(t)A$. 那么，存在 $\phi \in S$，使得 $\phi(t) = x$ 且 $\phi(0) \in A$. 因此，$\phi \in S_A$ 且 $x = \sigma(t, \phi)(0) \in \pi(\sigma(t, S_A))$. 反之，若 $x \in \pi(\sigma(t, S_A))$，则存在 $\phi \in \sigma(t, S_A)$，使得 $\phi(0) = x.$。由于 $\sigma(-t, \phi)(0) \in A$，可知 $x = \sigma(-t, \phi)(t) \in V(t)A$. □

下一个概念对于描述常微分方程公理化理论与多值半群之间的关系至关重要。

定义 5.8. 若映射 $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ 满足：对于所有 $t \geq 0$ 和 $s \in \mathbb{R}.$，$\xi(t+s) \in V(t)\xi(s)$，则称其为完整轨道

注意，完整轨道可以拼接：

引理 5.9. 设 ξ_1 和 ξ_2 是由广义半流确定的多值半群V的完整轨道。若对某个 $\tau \in \mathbb{R}$，有 $\xi_1(\tau) = \xi_2(\tau)$，则由下式定义的映射 ξ

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_1(t) & (t \leq \tau) \\ \xi_2(t) & (t \geq \tau) \end{cases}$$

是一个完整轨道。

证明. 唯一可能出现问题的情形是 $t > 0$和 $s < \tau$满足 $s + t \geq \tau$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} \xi_2(s+t) &\in V(s+t-\tau)\xi_2(\tau) \\ &= V(s+t-\tau)\xi_1(\tau) \\ &\subset V(s+t-\tau)V(\tau-s)\xi_1(s) \\ &= V(t)\xi_1(s), \end{aligned}$$

这意味着 $\xi(s+t) \in V(t)\xi(s)$。 □

下一个引理可由 [7] 中的引理 5 立即推出：

引理 5.10。设 $V(t)$ 是由广义半流 $G \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, X)$ 确定的多值半群。若 ξ 是 V 的连续完全轨道，则存在 $\phi \in G$，使得对所有 $t \geq 0$，$\xi(t) = \phi(t)$。

下一个结果可用于将常微分方程公理化理论应用于所有连续完全轨道的集合。

定理 5.11（主定理 C）。设 $V(t)$ 是由紧致度量空间 X 上的广义半流 $G \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, X)$ 所确定的多值半群。则，所有连续完全轨道的集合 $\mathcal{K}$ 非空且具有平移不变性。作为 $\pi(\mathcal{K})$ 上的解空间， $\mathcal{K}$ 满足存在性、紧性和切换公理。

证明。首先，我们证明 $\mathcal{K}$ 非空。对于一点 $x_0 \in X$，存在 $\phi \in G$，使得 $\phi(0) = x_0$.。集合

$$\omega(\phi) := \bigcap_{t>0} \overline{\{\phi(s) \mid s > t\}}$$

非空，因为它是紧集的交。我们固定一点 $y_0 \in \omega(\phi)$。根据 $\omega(\phi)$ 的定义，我们构造一个序列 $t_n > 0$，使得 $t_n \to \infty$ 且 $\phi(t_n) \to y_0$，当 $n \to \infty$ 时。从定义 5.2 中的条件 (4) 可知， $\{\phi^{t_n}\}$ 存在一个子序列逐点收敛到 $\psi \in G$，且 $\psi(0) = y_0$。我们假设 $\{\phi^{t_n}\}$ 逐点收敛到 ψ。

现在，我们将 ψ 连续延拓到 $[-1, \infty)$，使得该延拓 ψ_1 满- 足

$$\psi_1(s+t) \in V(t)\psi_1(s)$$

对所有 $s \in [-1, \infty)$ 和 $t \geq 0$.。当 n 足够大时，我们有 $t_n - 1 > 0$。因此，可以定义一个序列 $\{\phi(t_n - 1)\}_n$，并且它有一个收敛子列 $\{\phi(t_{n_i} - 1)\}_i$，因为 X 是紧的。若我们将 $\phi(t_{n_i} - 1) \to y_1$ 设为 $i \to \infty$，则可以找到一个子子列 $\{\phi^{t_{n_{i_j}}-1}\}_j$，使得 $\phi^{t_{n_{i_j}}-1} \to \tilde{\psi}_1$ 为 $i \to \infty$，~，其中 $\psi_1 \in G$ 且 $\psi_1(0) = y_1$。对于所有 $s \geq 1$，

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1(s) &= \lim_{j\to\infty} \phi\Big((t_{n_{i_j}} - 1) + s - 1 + 1\Big) \\
&= \lim_{j\to\infty} \phi\Big(t_{n_{i_j}} + s - 1\Big) \\
&= \lim_{j\to\infty} \phi^{t_{n_{i_j}}}(s-1) \\
&= \psi(s-1).
\end{aligned}$$

~因此，映射 $\psi_1(s) := \psi_1(s+1)$ 具有所需的性质。

如果我们分别用 $t_{n_{i_j}}$、 y_1 和 ψ_1 替换 t_n、 y_0 和 ψ，就可以将 ψ_1 连续延拓到 $[-2, \infty)$ 上。类似地，我们得到一列连续映射 ψ_n：$[-n, \infty)$，使得 $\psi_{n+1} = \psi_n$ 在 $[-n, \infty)$ 上成立。于是，可以定义连续映射 ξ：$\mathbb{R} \to X$ 如下

$$\xi(s) = \psi_n(s)$$

如果 $s \geq -n.$，则此 ξ 给出了 V 的一条连续完全轨道。

$\mathcal{K}$ 的平移不变性由定义立即得出。

如 [16] 中所述， $\mathcal{K}$ 是紧的。这里为完整起见，我们证明这一性质。设 $\xi_n \in \mathcal{K}$ 为该序列。由于 X 是紧的，必要时通过重新编号，我们可以假设 $\xi_n(-1)$ 收敛到点 $x_1 \in X$。根据引理 5.10，存在子序列 $\{\xi_{n_i^1}\}_i$ 和 $\phi_1 \in G$，使得 $\sigma(-1, \xi_{n_i^1})$ 在

$[0,\infty)$ 收敛到 ϕ_1。根据 [3] 中的定理 2.3，这种收敛是在紧一致收敛拓扑下进行的。若对 $\{\xi_{n_i^1}(-2)\}_i$应用相同的论证，我们便得到一个收敛子列 $\{\xi_{n_i^2}\}_i$ 和 $\phi_2 \in G$，使得 $\sigma(-2,\xi_{n_i^2})$ 在 $[0,\infty)$ 上收敛到 ϕ_2。对于 $-1 \le s$，我们有

$$\phi_2(s+2) = \lim_{i\to\infty} \xi_{n_i^2}(s) = \lim_{i\to\infty} \xi_{n_i^2}(s+1-1) = \phi_1(s+1).$$

类似地，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们可以构造子序列 $\{\xi_{n_i^k}\}_i$ 和 $\phi_k \in G$，使得将 $\sigma(-k,\xi_{n_i^k})$ 限制在 $[0,\infty)$ 上后收敛到 ϕ_k，并且对于所有 $m \le k$ 和 $s \in [-m,\infty)$，$\phi_k(s+k) = \phi_m(s+m)$。于是，可以定义一条连续完全轨道 $\xi\colon \mathbb{R} \to X$，如下:

$$\xi(s) = \phi_n(s+n)$$

若 $s \ge -n.$，由每个 $\{\sigma(-k,\xi_{n_i^k})\}_i$ 的紧一致收敛性，我们可以找到 i_k，使得

$$\sup_{s\in[-k,k]} d\Big(\xi_{n_{i_k}^k}(s), \xi(s)\Big) < \frac{1}{k}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，这表明 $\{\xi_n\}$ 的一个子序列在 $C(\mathbb{R},X)$ 的拓扑下收敛到一条连续完全轨道。

对于 $\mathcal{K}$，存在公理在 $\pi(\mathcal{K})$ 上显然成立。由于 $\mathcal{K}$ 的紧性，$\pi(\mathcal{K})$ 是紧的。因此，根据推论 3.4，它满足紧致性公理。根据引理 5.9，切换公理成立。 □

根据定理 5.3，$C(\mathbb{R},X)$ 的一个性质足够良好的平移不变子集可以视为一个广义半流，因而定义一个多值半群。根据定理 5.11，所有连续完全轨道的集合在 $\pi(\mathcal{K})$ 上满足相同的公理。事实上，在这种情况下它们是相同的。

定理 5.12. 设 X 是一个紧致度量空间。如果一个平移不变集S 在 $\mathbb{R}_{\ge 0} \times X$，$S$上满足紧性、存在性和切换公理，那么它就是由 S确定的多值半群的所有连续完全轨道的集合。

证明. 设 $\mathcal{K}$ 为由 S确定的多值半群的所有连续完全轨道的集合。根据定义，$S \subset \mathcal{K}$。反之，设$\xi \in \mathcal{K}$. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，根据引理 5.10，我们可以找到 $\phi_n \in S$，使其在 $[0,\infty)$ 上与 $\sigma(-n,\xi)$ 重合。对于 $s \in [-n,\infty)$，我们有

$$\xi(s) = \xi(s+n-n) = \sigma(-n,\xi)(s+n) = \phi_n(s+n).$$

由于根据推论 3.4，S是紧的，我们可以构造一个序列 $\{\sigma(n_i,\phi_{n_i})\}_i$，使其收敛到 $\psi \in S.$。于是，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \lim_{i\to\infty} \phi_{n_i}(t+n_i)\\ &= \xi(t).\end{aligned}$$

因此，我们有 $\xi = \psi \in S.$ □

6. 不变测度

鉴于定理 3.13，关于不变性的每一项性质都通过零点求值映射诱导出一个广义对应性质。此外，定理 5.11 意味着，所有连续完全轨道构成一个具有良好性质的解集。在本节中，我们利用这些结果作为定义不变测度的线索。

首先，我们回顾由广义半流确定的多值半群的不变测度定义，该定义在 [16] 中提出。这一概念可以用几种方式表述。这里，我们采用一种适合后续讨论的形式来介绍它。

定义 6.1（[16]）。设 $\{V(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ 是由广义半流 G 确定的多值半群，其轨迹为连续映射。设 $\{V(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ 具有一条连续完全轨道。那么，如果满足以下任一条件，博雷尔概率测度 μ 在 X 上是不变的：

1. 对每个博雷尔子集 $A \subset X$ 和 $t \geq 0$，$\mu(A) \leq \mu(V(t)^{-1}A)$。 2. 存在定义在 $C(\mathbb{R}, X)$ 上的博雷尔概率测度 ν，使得 ν 对 $C(\mathbb{R}, X)$ 上的平移是不变的，其支集包含于完全轨道集合中，并且 $\mu = (\pi_0)_*\nu$，其中 π_0 表示在 0 处的取值。

由于所有连续完全轨道构成的集合包含不变测度的支撑，并且作为解集，它在 Yorke 公理方面具有良好的性质，因此我们可以推广上述定义。考虑到 Yorke 形式体系默认并不假设拼接，我们将 $C(\mathbb{R}, X)$ 的平移不变子集的不变测度定义如下：

定义 6.2. 对于平移不变子集 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$，若存在 S 上的博雷尔概率测度 ν，使得 ν 对 S 上的平移不变，且 $\mu = (\pi)_*\nu$，则称 X 上的博雷尔概率测度 μ 为不变测度。

由定理 5.11 可知，该定义推广了 Moussa 的定义。换言之，由广义半流确定的多值半群的不变测度，按照定义 6.2 的意义，是 $\mathcal{K}$ 的不变测度。

例 4. 考虑由 S^1 定义的微分包含：

$$\dot{x} \in [1, 2].$$

在这种情况下，勒贝格测度是不变的，因为

$$A - t \subset V(t)^{-1}A$$

对于所有 $A \subset S^1$.

利用经典的 Krylov-Bogoliubov 定理，可以立即证明不变测度的存在性。

定理 6.3. 设 X 是一个紧致度量空间：若 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 满足紧致性公理且平移不变，则存在一个作用于 X.上的S 的不变测度

证明。由于 (S, σ) 是紧致空间上的连续流，因此存在一个不变测度 ν。于是，测度 $\mu := \pi_* \nu$ 满足定义 6.2 中的不变性。 □

下一个性质使我们能够将关于不变测度的结果推广到多值半群。

引理 6.4. 设 μ 是平移不变子集 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 的一个不变测度。对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和博雷尔集 $A \subset X$，有

$$\mu(A) \leq \mu(V(t)^{-1} A).$$

证明。设 ν 在 S 上对平移不变，并满足 $\mu = (\pi)_* \nu$。对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和博雷尔集 $A \subset X$，有

$$V(t)^{-1} A = V(-t)A = \pi(\sigma(-t, S_A)).$$

利用引理 5.5 和 5.7。于是，有

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \nu(S_A) \\ &= \nu(\sigma(-t, S_A)) \\ &\leq \nu\big(\pi^{-1}(\pi(\sigma(-t, S_A)))\big) \\ &= \mu\big(V(t)^{-1} A\big). \end{aligned}$$

由此得到所需的不等式。 □

现在，我们考虑不变测度经典结果的一些推广。引理 6.4 使我们能够重新利用已有的证明。

定理 6.5（Poincar´e 复现定理，参见 [2] 中的定理 2.2）。设 μ 是平移不变子集 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 上的不变测度。那么，对于所有 Borel 子集 $B \subset X$，有

$$\mu(B \cap B_\infty) = \mu(B),$$

其中

$$B_\infty := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} V(n)^{-1} B.$$

特别地， μ-几乎每个 B 中的点都会无穷多次返回 B。

证明。由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $V(n)^{-1} = V(-n) = V(1)^{-n}$，因此可以将 [2] 中的定理 2.2 应用于 $F = V(1)$。 □

定理 6.6（主定理 D，参见 [8] 中的定理 2.10）。设 μ 是平移不变子集 $S \subset C(\mathbb{R}, X)$ 上的不变测度。那么， S 的所有回归点构成的集合的闭包是一个满测度集。

证明。设 $A = \{x \in X \mid x \in \omega_S(x)\}$ 且 $R = \{\phi \in S \mid \phi \in \omega(\phi)\}$。一旦我们证明了 $\pi(\bar{R}) \subset \bar{A}$，证明的其余部分便可按照与 [8] 中定理 2.10 类似的方式进行。

设 $x \in \pi($。那么，我们可以找到一个收敛序列 $\phi_n \in R$，满足 $\phi_n(0) \to x$，当 $n \to \infty$ 时成立。由于 $\phi_n \in \omega(S_{\phi_n(0)})$，对于所有 n，都有 $\phi_n(0) \in \omega_S(\phi_n(0))$。因此，我们可以得出结论：$x \in A$。 □

最后，我们讨论一下与[18] 中针对分段光滑向量场提出的定义之间的差异。该研究中不变测度的定义要求，用我们的记号表示，对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和博雷尔集 $A \subset X$，都有 $\mu(A) = \mu(V(t)A)$，这比我们的定义限制更严格。例如，例 2 中考虑的系统在定义 6.2 的意义下存在一个支撑在 $y = 0$ 上的不变测度；而如果采用 [18] 中的定义，则不存在不变测度。

7. 总结

迄今为止获得的结果可以总结如下：就我们在假设解全局存在的紧空间上考察 Yorke 形式体系而言，通过零点求值映射，我们直接获得了关于不变性的广义概念，并证明了其具有类似于经典概念的性质。

特别是，我们可以利用解空间中的遍历不变测度自然地定义遍历不变测度；然而，目前尚不清楚它与相空间中的动力学有何关系。鉴于可以将遍历理论应用于微分包含或非光滑动力系统的研究，这是一个值得考虑的有趣问题。

另一个有趣的研究方向是将其应用于 Filippov 系统的研究。虽然我们将 Filippov 系统作为说明性示例，但这当然只是部分处理。最近，有人提出了一种轨道空间方法来考察其动力学 [12]。一旦我们了解本文所提出的框架与该方法之间的关系，便可能获得关于 Filippov 系统动力学的新视角。

致谢

本研究得到日本学术振兴会特别研究员资助项目（20J01101）的资助。作者谨向匿名审稿人致以谢意，感谢他们提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] A. M. Abd-Allah 和 R. Brown。具有开定义域的部分映射上的紧开拓扑。《伦敦数学会杂志》，2(3):480– 486，1980。

[2] Jean-Pierre Aubin、H´el`ene Frankowska 和 Andrzej Lasota。集值动力系统的 Poincar´e 复现定理。载于 Annales Polonici Mathematici，第 1 卷，第 85–91 页，1991。[3] JM Ball。广义半流的连续性性质与全局吸引子，以及纳维–斯托克斯方程。J. Nonlinear Sci，7:475–502，1997。[4] Michel Bena¨ım 和 Sebastian J Schreiber。半流的弱渐近伪轨道的遍历性质。Journal of Dynamics and Dif- ferential Equations，12:579–598，2000。[5] Mario Bernardo、Chris Budd、Alan Richard Champneys 和 Piotr Kowal- czyk。《分段光滑动力系统：理论与应用》，第 163 卷。Springer Science & Business Media，2008。[6] T. Caraballo、P.E. Kloeden 和 P. Marin-Rubio。集值过程的弱拉回吸引子。Journal of Mathematical Analysis and Applications，288(2):692–707，2003。[7] Tomas Caraballo、P Marin-Rubio 和 James C Robinson。多值半流的两种理论及其渐近行为的比较。Set-Valued Analysis，11:297–322，2003。[8] Mathieu Faure 和 Gregory Roth。集值动力系统的弱渐近伪轨道的遍历性质。Stochastics and Dy- namics，13(01):1250011，2013。[9] A. F. Filippov。《右端不连续微分方程：控制系统》，第 18 卷。Springer Science & Business Media，1988。[10] V. V. Filippov。常微分方程解空间的拓扑结构。Russian Mathematical Surveys，48(1):101，1993 年 2 月。[11] V. V. Filippov。《常微分方程的基本拓扑结构》。Mathematics and Its Applications。Springer Netherlands，1998。[12] Ot´avio M. L. Gomide、Pedro G. Mattos 和 R´egis Var˜ao。分段光滑向量场的轨道空间方法，2023。arXiv:2310.13804。[13] Boris S. Klebanov。关于非自治微分方程的 ω-极限集。Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae，35(2):267–281，1994。[14] J. lvarez L´opez 和 M. Moreira Galicia。拓扑 Molino 理论。Pacific Journal of Mathematics，280(2):257–314，2016。[15] Valery S Melnik 和 Jos´e Valero。关于多值半流和微分包含的吸引子。Set-Valued Anal，6(1):83–111，1998。

[16]Cl´audia B Gentile Moussa。多值半群的不变测度。《Journal of Mathematical Analysis and Applications》，455(2):1234–1248，2017。[17] E Yu Mychka。局部动力系统的空间 $\mathcal{L}(x)$ 与 Filippov 空间 $A_{\mathrm{ceu}}(X)$。《微分方程》，46(4):502，2010。[18] Douglas D. Novaes 和 R´egis Var˜ao。关于 Filippov 系统不变测度的注记。《Bulletin des Sciences Math´ematiques》，167:102954，2021。[19]Konstantin Sergeevi˘c Sibirskij。《拓扑动力学导论》。施普林格，1975。[20] Georgi V Smirnov。《微分包含理论导论》，第41卷。美国数学会，2022。[21] Aaron Strauss 和 James A Yorke。关于渐近自治微分方程。《数学系统理论》，1(2):175–182，1967。[22]Tomoharu Suda。无适定性条件下拓扑动力学的等价性。《拓扑学及其应用》，312:108045，2022。[23] Tomoharu Suda。不适定动力系统的等价性。《数学档案》，59(1):133–140，2023。[24] James A Yorke。解空间。载于《数学系统理论与经济学 I/II》，第383–403页。施普林格，1969。