arXiv:2303.01202v1 [math.FA] 2 Mar 2023

希尔伯特空间中的融合框架综述

L. Köhldorfer、P. Balazs、P. Casazza、S. Heineken、C. Hollomey、P. Morillas、M. Shamsabadi

摘要 融合框架如今是一个非常活跃的研究领域，因为它在纯数学、应用数学、工程学、医学、信号与图像处理等众多领域有着广泛的应用。融合框架为应用场景中的向量集设计提供了极大的灵活性，因此在这些领域都备受关注，例如减轻信号中的噪声影响，或增强系统对擦除的鲁棒性。本章将介绍融合框架理论的基础，并着重探讨它与框架理论之间微妙的联系。我们的目标是帮助研究人员和学生轻松入门这一主题。我们将给出完整自足的融合框架证明，并分析框架与融合框架之间的差异。我们尤其关注融合框架对偶性的微妙之处。此外，我们还提供可复现研究实现。

L. Köhldorfer 声学研究所，奥地利科学院，电子邮箱：lukas.koehldorfer@oeaw.ac.at P. Balazs 声学研究所，奥地利科学院，电子邮箱：peter.balazs@oeaw.ac.at P. Casazza 密苏里大学数学系，电子邮箱：casazzapeter40@gmail.com S. Heineken 路易斯·A·桑塔洛数学研究所（布宜诺斯艾利斯大学—国家科学与技术研究委员会），电子邮箱：sheinek@ dm.uba.ar C. Hollomey 声学研究所，奥地利科学院，电子邮箱：clara.hollomey@oeaw. ac.at P. Morillas 圣路易斯应用数学研究所（圣路易斯国立大学—国家科学与技术研究委员会），电子邮箱：morillas.unsl@gmail. com M. Shamsabadi 声学研究所，奥地利科学院，电子邮箱：mitra.shamsabadi@oeaw.ac.at

1 引言

希尔伯特空间框架（φ_i）$_{i\in I}$ 是希尔伯特空间中满足帕塞瓦尔不等式（见定义 1 ）的向量序列（可能冗余）。这是对正交展开的推广。该主题于 1952 年在非调和傅里叶级数的背景下首次提出，见 [51]。此后，这一主题沉寂了 30 年，直到 [48]在数据处理的背景下重新将其带回人们的视野。此后，该主题迅速发展，很快成为应用数学中最活跃的研究领域之一。框架最初用于信号与图像处理，随后应用于采样理论、数据压缩、时频分析、编码理论和傅里叶级数。如今，框架在纯数学与应用数学、计算机科学、工程学、医学和物理学中的应用日益增多，新的应用也不断涌现（见 [41, 43, 88] 和“进一步研究”部分）。冗余在框架理论的应用中发挥着基础性作用。首先，对于特定问题，它使向量族的设计具有更大的灵活性，而这对于线性无关的向量集是无法实现的。特别是，冗余的优势已在相位重建中得到证明：在相位重建中，我们需要根据框架系数的绝对值确定一个向量[7, 6]。其次，通过将信息分散到更广泛的向量范围中，我们可以减轻信号中的噪声影响，并增强系统对擦除的鲁棒性。关于框架理论的入门介绍，我们推荐阅读 [41, 43, 88]。

可以将框架理解为希尔伯特空间中带权一维子空间的族。因此，框架理论存在一定局限性。具体而言，在分布式处理中，当需要将信号投影到多维子空间上时，框架并不能很好地发挥作用。这就需要融合框架来支持包括无线传感器网络、 [60], 视觉和听觉系统、 [78], 地球物理学中的地球物理电话 [47], 分布式处理、 [42],分组编码、 [13, 16, 33],并行处理 [31],等在内的应用。融合框架还出现在各种理论应用中，包括 Kadison-Singer问题 [30],和最优子空间装填 [29, 28]。所有这些问题都要求处理带有正权重并满足某种帕塞瓦尔不等式（见定义 2）的希尔伯特空间中的可数子空间族。融合框架最早在 [40] 中引入，当时被称为“子空间框架”。在后续论文 [42]，中，为避免与“子空间中的框架”混淆，其名称改为“融合框架”。由于应用广泛，融合框架理论近年来发展迅速（另见 [41]）。本文将对这一主题作一篇新的综述。

1.1 研究动机

本章旨在介绍融合框架理论的基础，并着重讨论框架理论中的哪些结果适用于融合框架、哪些不适用。我们的想法是帮助未来的研究者准确把握框架与融合框架之间微妙的差异。因此，关于融合框架的证明将

尽可能做到自成一体。值得一提的是，有一些非常出色的文章[40, 42], 我们可以毫无保留地推荐，不过我们仍认为有必要撰写这篇综述。

有限框架和融合框架理论近来变得越来越重要。显然，有必要实现融合框架方法。当然，已经存在一些算法，但我们提供了一种可复现研究方法 – ，将代码整合到开源 Toolbox LTFAT [85, 76]中。

融合框架与区域分解方法有着天然的联系，并且可用于求解算子方程 [75]。在 [11] 中，对此采用了直接的融合框架公式。这里可以观察到，使用更一般的系数空间定义 – ，而不将其限制为给定子空间的希尔伯特直和 – ，具有一定优势，详见下文。本文采用这一方法，该方法也用于 [4]。

经典框架理论中的许多概念都已推广到融合框架的情形。拥有恰当的对偶融合框架概念，可以使我们采用不同的重构策略。此外，人们希望恰当的定义能够产生类似于经典框架中已知结果的对偶性结果。融合框架的对偶概念更加复杂，但因此也比标准框架情形更有趣。这就是我们决定重点关注这一问题，并总结 [57, 58, 59]中的结果的原因。

为此，我们还特意明确阐述了希尔伯特空间之间算子的性质，并给出了若干以往常被隐含处理的结果的证明。

总之，我们提供了一篇关于融合框架理论的新综述，旨在为数学家更轻松地了解这一理论开辟入口。

1.2 结构

本章结构如下：第 1 节介绍本章并阐述其研究动机。具体而言，我们将在下一小节列出框架理论与融合框架理论（本章将全程讨论后者）之间的若干差异。第 2 节介绍符号、一般预备结果，以及框架理论的一些基本事实；我们在本书中多次运用这些内容。第 3 节介绍融合框架、贝塞尔融合序列，以及与之自然关联的框架相关算子。熟悉框架理论的读者会发现，本节中的融合框架与框架之间有许多相似之处。我们还增加了一小节，讨论希尔伯特直和之间的算子；这为后续内容做了准备，也有助于更好地理解本章中出现的许多算子。第 4 节介绍融合框架理论中的其他概念，包括正交归一基、Riesz 基、精确框架和极小序列在融合框架情形下的推广。第 5 节研究有界算子作用下的融合框架，并介绍框架理论与融合框架理论之间的一些差异。第 6 节介绍对偶融合框架理论。

对偶理论或许最能体现框架与融合框架之间的差异。我们首先向读者介绍对偶融合框架这一概念的由来，然后研究其性质、给出相关结果和示例，并讨论一些特殊情形及其他处理方法。第 7 节聚焦于有限维希尔伯特空间中的融合框架。第 8 节介绍我们对 LTFAT工具箱中具体实现方式的想法 [85], ，并提供一个可复现研究页面的链接。最后，第 9 节列出一系列有待进一步研究的融合框架主题，这些内容未在本章中介绍。

1.3 “此处有龙”——从框架理论转向融合框架理论时应避免的陷阱

下面概述本章所述框架与融合框架在性质上的差异。

• 帕塞瓦尔融合框架的存在性：已知，对于每个 $m \geq n \in \mathbb{N}$，任意 n 维希尔伯特空间 [34] 都存在一个含 m 个元素的帕塞瓦尔框架（而且这些向量甚至可以具有相同范数）。但在融合框架情形下，这一结论并不成立（见注 1）。特别是，将 ${S^{-1}}_V{}^2$ 应用于融合框架，一般不会得到帕塞瓦尔融合框架（见第5节）。目前，对于子空间维数任意的情形，尚无已知的帕塞瓦尔融合框架存在的必要且充分条件。
• 系数空间：与框架理论不同，融合框架没有自然的系数空间。系数空间可以选为定义子空间的希尔伯特直和，这是融合框架理论中的标准做法。但这样一来，每个融合系统对应的系数空间都不同，因而无法再简单地组合分析与合成。另一种选择是将整个希尔伯特空间 – 的若干副本作希尔伯特直和，这是本综述采用的方法；但此时，与融合框架 V 相关联的分析算子将 H 双射映射到子空间 K_V^2，而非整个系数空间 $\mathrm{K}^2\,\mathcal{H}$（见定理 14）。

• 精确系统不一定是里斯，参见命题5或 [40]。
• 对融合框架应用有界满射算子并不一定能得到融合框架，即使对于正交归一融合基也是如此，参见第5节。

- 对偶性：

  – 若要使融合框架对偶性与框架对偶性相容（参见第6.9小节），就不能像框架情形那样通过 $D_W C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$ 来定义融合框架的对偶性。– 定义对偶融合框架时，必须在 C_W 和 D_V 之间插入一个额外的算子 Q，参见定义 5 及第 6 节中的详细讨论。– 融合 Riesz 基的对偶一般并不唯一，参见第 6.8 节。

– 典范对偶的融合框架算子可能不同于融合框架算子的逆，参见第 6.8 节。– 融合框架 V 的典范对偶的典范对偶一般并非 V，参见第 6.8 节。

关于融合框架对偶性的完整论述，请参见第6节。

• 正交归一融合基的框架算子 $(V_i)_{i\in I}$ 不一定是恒等算子。只有当相应权重都为 1 时，才是如此。事实上，正交归一融合基的定义与权重无关，而根据定理 15，有 $S_{V^1} = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$对应于 $V^1 = (V_i, 1)_{i\in I}$。

2 预备知识

在本笔记中，H 始终表示可分希尔伯特空间，所考虑的指标集均为可数集。对于 H 的闭子空间 V， π_V 表示到 V 上的正交投影。正整数集 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 记作 $\mathbb{N}$，而 δ_{ij} 表示克罗内克 δ。集合 J 的基数记作 $|J|$。算子 T 的定义域、核和值域分别记作 $\mathrm{dom}(T)$、$\mathrm{N}(T)$ 和 $\mathrm{R}(T)$。I_X 表示给定空间 X 上的恒等算子。两个赋范空间 X 和 Y 之间的有界算子集记作 $\mathrm{B}(X, Y)$，并令 $\mathrm{B}(X) := \mathrm{B}(X, X)$。对于一个值域 $\mathrm{R}(U) = \mathrm{R}(U)$ 为闭集的算子 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$（$\mathrm{H}_1$，$\mathrm{H}_2$ 为希尔伯特空间），其广义逆 [45] 记作 $U^\dagger$。U 的广义逆是唯一的算子 $U^\dagger \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_1)$，满足以下三个关系：

$$\mathcal{N}(U^\dagger) = \mathcal{R}(U)^\perp, \quad \mathcal{R}(U^\dagger) = \mathcal{N}(U)^\perp, \quad UU^\dagger x = x \quad (x \in \mathcal{R}(U)). \tag{1}$$

此外，$UU^\dagger = \pi_{\mathcal{R}(U)}$和$U^\dagger U = \pi_{\mathcal{R}(U^\dagger)}$。我们还注意到，如果 U具有闭值域，那么 U^* 也具有闭值域，且有 $(U^*)^\dagger = (U^\dagger)^*$。在 $\mathrm{R}(U)$ 上，我们明确有 $U^\dagger = U^*(UU^*)^{-1}$。若 U 有界且可逆，则有 $U^\dagger = U^{-1}$。关于希尔伯特空间之间闭值域算子的广义逆的更多细节，请参阅 [45]。

以下重要的预备结果将在本文中反复使用，恕不另行引用：

定理1（稠密性原理 [54]）设 X和 Y为巴拿赫空间，且 V是 X的稠密子空间。若 $T: V \longrightarrow Y$ 有界，则存在唯一的有界 $\tilde{}$ $\tilde{}$扩张 $T: X \longrightarrow Y$，使得 T满足 $\|T\| = \|T\|$。

定理 2（诺伊曼定理 [45]）设 X 是一个巴拿赫空间。若 $T \in \mathrm{B}(X)$ 满足 $\|I_X - T\| < 1$，则 T可逆。

定理 3（有界逆定理 [45]）两个巴拿赫空间之间的任意有界双射算子都有有界逆。

定理4（一致有界原理 [45]） 设 X 是一个巴拿赫空间，Y 是一个赋范空间。假设 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一族有界算子$T_n:\ X \longrightarrow Y$，并假设 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛（当 $n \longrightarrow \infty$ 时）到某个算子 $T:\ X \longrightarrow Y$，$Tx := \text{极限}_{n\longrightarrow\infty} T_n x$。那么 T 定义了一个有界线性算子，并且有

$$\|T\| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

2.1 框架理论

我们首先回顾框架理论，并介绍本文最重要的一些定义和结果。在后续章节中，我们将主要直接应用这些结果，不再进一步引用。缺失的证明以及有关框架理论的更多细节，请参见[45]。

定义 1 设 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ 是 H 中的一个可数向量族。那么，φ 称为

• H 的一个框架，如果存在正常数 $A_\varphi \leq B_\varphi < \infty$，称为框架界，使得

$$A_\varphi \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 \leq B_\varphi \|f\|^2 \qquad (\forall f \in \mathcal{H}). \tag{2}$$

• 一个框架序列，如果它是 $\text{span}(\varphi_i)_{i\in I}$的一个框架。

• 一个 A_φ-紧框架（序列），或简称紧框架（序列），是指这样一个框架（序列）：其框架界 A_φ 和 B_φ 在（2）中可以取为相等。

• 如果一个框架（序列）是 1-紧框架（序列），则称其为帕塞瓦尔框架（序列）。

• 如果移除其中任意一个框架向量 φ_i 后便不再是框架，则称其为精确框架。

• 若 H 中的一个*Bessel* 序列满足（2）中的右不等式（但不一定满足左不等式），其中 $B_\varphi > 0$ 为某个给定值，则称其为 H 中的*Bessel* 序列。在这种情况下，我们称 B_φ 为*Bessel*界。

• 如果 $\text{span}(\varphi_i)_{i\in I} = \text{H}$，则称其为完备序列。

• 如果一个*Riesz* 基是完备序列，并且存在常数 $0 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < \infty$，称为*Riesz*常数，使得

$$\alpha_\varphi \sum_{i\in I} |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I} c_i \varphi_i \right\|^2 \leq \beta_\varphi \sum_{i\in I} |c_i|^2 \tag{3}$$

对于所有有限标量序列 $(c_i)_{i\in I} \in l^{00}(I)$。

•一个极小序列，若对于每个 $i \in I, \varphi_i \notin \overline{\text{span}(\varphi_k)_{k\in I,\ k\neq i}}$。

对于 H 中的任意向量序列 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$，我们可以关联以下规范框架相关算子 [12]:

•合成算子 $D_\varphi \quad D_\varphi \subseteq I \longrightarrow D_\varphi =: \text{dom}(\,)\, l(\,)\, \text{H},$
$\{ c_i\ _{i\in I} \in {}^2 I \quad \sum_{i\in I} c_i\varphi_i \in \} \quad D_\varphi\ c_i\ _{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i\varphi_i$
其中 $\text{dom}(\,)\,(\,)l(\,)$: H，且 $(\,)$。

• 分析算子 C_φ：$\mathrm{dom}(C_\varphi) \subseteq \mathrm{H} \longrightarrow l^2(I)$，其中 $\mathrm{dom}(C_\varphi) = \{ f \in \mathrm{H}: (\langle f, \varphi_i \rangle)_{i\in I} \in l^2(I)\}$，且 $C_\varphi f = (\langle f, \varphi_i \rangle)_{i\in I}$。

• 框架算子 S_φ：$\mathrm{dom}(S_\varphi) \subseteq \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$，其中 $\mathrm{dom}(S_\varphi) = \left\{ f \in \mathrm{H} : \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \in \mathrm{H} \right\}$ 且 $S_\varphi f = \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$。

可以证明，φ 是 Bessel 序列，其 Bessel界为 B_φ，当且仅当 $\mathrm{dom}(D_\varphi) = l^2(I)$ 且 $\|D_\varphi\| \leq \sqrt{B_\varphi}$。在这种情况下，$D_\varphi^* = C_\varphi \in \mathrm{B}(\mathrm{H}, l^2(I))$。若 φ是框架，则 S_φ 是一个有界、自伴、正且可逆的算子，从而可以通过 $\mathrm{I}_\mathcal{H} = S_\varphi S_\varphi^{-1} = S_\varphi^{-1} S_\varphi$进行框架重构，即

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, S_\varphi^{-1}\varphi_i \rangle \varphi_i = \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle S_\varphi^{-1}\varphi_i \qquad (\forall f \in \mathcal{H}). \tag{4}$$

族 $(\widetilde{\varphi_i})_{i\in I} := (S_\varphi^{-1}\varphi_i)_{i\in I}$ 中的 (4) 仍然是一个框架（称为典范对偶框架）。更一般地，满足以下条件的框架 $(\psi_i)_{i\in I}$：

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \psi_i = \sum_{i\in I} \langle f, \psi_i \rangle \varphi_i \qquad (\forall f \in \mathcal{H}), \tag{5}$$

称为 φ 的对偶框架 。这意味着，框架能够像正交归一基一样，为可分希尔伯特空间中的元素提供（可能不唯一且冗余的）级数展开；但与正交归一基截然不同的是，框架向量不一定正交，也可能线性相关。此外，框架和 Bessel 序列通常可以通过框架相关算子的性质来刻画。例如，当且仅当 $S_\varphi = A_\varphi \cdot \mathrm{I}_\mathcal{H}$ 时，框架是 A_φ-紧框架。在这种情形下，框架重构可简化为 $f = A_\varphi^{-1} \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$。下文将给出这一方向上的更多结果：

定理 5 *[44]* 设 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的可数向量族。则以下条件等价。

(i) φ 是 $\mathcal{H}$ 的 *Bessel* 序列。*(ii)* 合成算子 D_φ 在 $l^2(I)$ 上定义良好且有界。*(iii)* 分析算子 C_φ 在 $\mathcal{H}$ 上定义良好且有界。

定理 6 *[44]* 设 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的可数向量族。则以下条件等价。

(i) φ 是 $\mathcal{H}$ 的框架（分别为 *Riesz* 基）。*(ii)* 合成算子 D_φ 在 $l^2(I)$上定义良好、有界且满射（分别为在 $l^2(I)$上定义良好、有界且双射）。*(iii)* 分析算子 C_φ 在 $\mathcal{H}$上定义良好、有界、单射且值域闭（分别为在 $\mathcal{H}$上定义良好、有界且双射）。

特别是，后一个结果意味着每个 Riesz 基都是一个框架。下面给出框架成为 Riesz 基的其他等价条件。回顾一下，具有相同指标集的两个向量族 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 和 $(\psi_i)_{i\in I}$ 称为双正交，如果对所有 $i, j \in I$，都有 $\langle \varphi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$。

定理 7 *[45]* 设 $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架。则下列条件等价。

(i) φ 是 $\mathcal{H}$ 的 *Riesz* 基。*(ii)* φ 是极小的。*(iii)* φ 是精确的。
(iv) φ 具有一个双正交序列。*(iii)* $(\varphi_i)_{i\in I}$ 与 $(S_\varphi^{-1}\varphi_i)_{i\in I}$ 是双正交的。
(iii) 典范对偶框架 $(S_\varphi^{-1}\varphi_i)_{i\in I}$ 是 φ的唯一对偶框架。

Bessel 序列、框架和 Riesz基可以用正交归一基的算子扰动来刻画，见下文。

定理 8 *[45]* 设 $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间。则以下结论成立：

(i) $\mathcal{H}$ 中的 *Bessel* 序列恰好是形如 $(Ue_i)_{i\in I}$的族，其中 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 $(e_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$的标准正交基。*(ii)* $\mathcal{H}$ 中的框架恰好是形如 $(Ue_i)_{i\in I}$的族，其中 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是满射，且 $(e_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$的标准正交基。*(iii)* $\mathcal{H}$ 中的 *Riesz*基恰好是形如 $(Ue_i)_{i\in I}$ 的族，其中 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是双射，且 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$的标准正交基。

这使我们能够表述一个关于哪些算子保持某些性质的结果：

推论 1 *[45]* 设$\mathcal{H}$ 为一个可分希尔伯特空间。则以下结论成立：

(i) 如果（φ_i）$_{i\in I}$ 是 H 的 *Bessel* 序列，且 $U:H\longrightarrow H$ 是有界的，那么（$U\varphi_i$）$_{i\in I}$ 也是 H 的 *Bessel* 序列。*(ii)* 如果（φ_i）$_{i\in I}$ 是 H 的框架，且 $U:H\longrightarrow H$ 是有界满射的，那么（$U\varphi_i$）$_{i\in I}$ 也是 H 的框架。*(iii)* 如果（φ_i）$_{i\in I}$ 是 H 的 *Riesz* 基，且 $U:H\longrightarrow H$ 是有界双射的，那么（$U\varphi_i$）$_{i\in I}$ 也是 H 的 *Riesz* 基。

我们以如下关于给定框架 φ 的所有对偶框架的刻画结束本节。该刻画源于对分析算子 C_φ 的所有有界左逆的刻画（类似于引理 17），以及定理 8 的应用。

定理 9 *[45]* 设 $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架。那么，φ 的对偶框架恰为以下族

$$(\psi_i)_{i\in I}=\left(S_\varphi^{-1}\varphi_i+h_i-\sum_{k\in I}\langle S_\varphi^{-1}\varphi_i,\varphi_k\rangle h_k\right)_{i\in I},\tag{6}$$

其中 $(h_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 *Bessel* 序列。

根据上述结果和定理 7，任何不是 Riesz 基的框架都有无穷多个对偶框架。若 φ 是 Riesz 基，则可知式 (6) 中的余项$h_i-\sum_{k\in I}\langle S_\varphi^{-1}\varphi_i,\varphi_k\rangle h_k$消失，因为在这种情形下，$(\varphi_i)_{i\in I}$和$(S_\varphi^{-1}\varphi_i)_{i\in I}$是双正交的。

3 融合框架

本节将介绍有关融合框架、贝塞尔融合序列及其与融合框架相关算子之间关系的基本定义和结果。由于这是一篇关于该主题的综述，我们将给出完整的证明。读者会注意到，本节中的框架与融合框架之间有许多相似之处。不过，正如我们已经提到并将在后文看到的，融合框架理论引出了许多出乎意料且有趣的问题，而这些问题在希尔伯特空间框架中并不存在。

首先，我们通过推广框架定义来引入融合框架的概念。我们将框架不等式 (2) 中的项 $|\langle f,\varphi_i\rangle|^2$ 改写如下：

$$\begin{aligned}|\langle f,\varphi_i\rangle|^2 &= \langle f,\varphi_i\rangle\langle\varphi_i,f\rangle\\ &= \big\langle\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i,f\big\rangle\\ &= \|\varphi_i\|^2\left\langle\left\langle f,\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right\rangle\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|},f\right\rangle.\end{aligned}\tag{7}$$

若令 $V_i{:=}\operatorname{span}\underline{\{\varphi_i\}} = \operatorname{span}\{\varphi_i\}$，则单元素集 $\{\|\varphi_i\|^{-1}\cdot\ \varphi_i\}$ 是 V_i 的一组正交规范基。特别地，H 到一维子空间 V_i 上的正交投影 π_{V_i} 由 $\pi_{V_i}f = \left\langle f,\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right\rangle\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}$ 给出。将其代入 (7) 并令 $v_i := \|\varphi_i\|$，可~~得~~ ——

$$\begin{aligned}|\langle f,\varphi_i\rangle|^2 &= v_i^2\langle\pi_{V_i}f,f\rangle\\ &= v_i^2\langle\pi_{V_i}^2f,f\rangle\\ &= v_i^2\langle\pi_{V_i}f,\pi_{V_i}f\rangle = v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2.\end{aligned}$$

这使我们可以将框架不等式改写为 [42,命题 2。14]

$$A_\varphi\|f\|^2 \le \sum_{i\in I} v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2 \le B_\varphi\|f\|^2 \qquad (\forall f\in\mathcal{H}).$$

因此，我们看到，框架也可以看作满足不等式 (2) 的 1 维闭子空间的加权序列。允许任意权重——即加权框架 [9]——尤其是允许任意闭子空间，则引出了融合框架及相关概念 [40] 的定义：

定义 2 设 $V=(V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 是 H 的闭子空间 V_i 及权重 $v_i>0$组成的可数族。那么 V 称为

• H 的一个融合框架，如果存在正常数 $0<A_V\le B_V<\infty$，称为融合框架界，使得

$$A_V\|f\|^2 \le \sum_{i\in I} v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2 \le B_V\|f\|^2 \qquad (\forall f\in\mathcal{H}).\tag{8}$$

• 一个融合框架序列，如果它是 $\mathrm{H}:=\operatorname{span}(V_i)_{i\in I}$ 的融合~~框~~架。

• 一个 A_V-紧融合框架（序列），或简称紧融合框架（序列），如果它是一个融合框架（序列），其（8）中的融合框架界 A_V 和 B_V 可以取为相等。

• 若它是 1-紧融合框架（序列），则称其为帕塞瓦尔融合框架（序列）。
• 若它是一个融合框架，但移除其中一个分量（V_k，v_k）后便不再是融合框架，则称其为一个精确融合框架。
• 若对于某个 $B_V > 0$，式 (8) 中右侧但不一定是左侧的不等式成立，则称其为 H 上的贝塞尔融合序列 。在此情形下，我们称 B_V 为贝塞尔融合界。

注 *1*
(a) 对于任意贝塞尔融合序列 $V = (V_i,\ v_i)_{i\in I}$（以及因此的任意融合框架），我们始终默认（不失一般性）$V_i \neq \{0\}$ 对所有 $i \in I$均成立，因为零空间 $V_i = \{0\}$ 无论如何都不会对式 (8) 中的求和作出贡献。这样做是为了避免某些理论结果中的情形区分。

(b) 为初步了解框架与融合框架之间的差异，请考虑以下情况：众所周知，对于每个 $m, n \in \mathbb{N}$，任意 n 维希尔伯特空间 [34] 都存在一个由 m 个元素组成的帕塞瓦尔框架（甚至可以使这些向量具有相同的范数）。融合框架的情况则复杂得多。例如，无论权重如何选择，都不存在由两个二维子空间组成的帕塞瓦尔融合框架 $V = (V_i, v_i)_{i=1}^2$。这是因为在这种情况下，必定存在一个单位向量 f 属于一维空间 $V_1 \cap V_2$，因此 $v_1^2\|\pi_{V_1} f\|^2 + v_2^2\|\pi_{V_2} f\|^2 = (v_1^2 + v_2^2)\|f\|^2$；而单位向量 $f \in V_1 \setminus V_2$ 则满足 $v_1^2\|\pi_{V_1} f\|^2 + v_2^2\|\pi_{V_2} f\|^2 < (v_1^2 + v_2^2)\|f\|^2$，所以不可能有 $S_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$（见推论 4）。目前，对于子空间维数任意的情形，尚无已知的帕塞瓦尔融合框架存在的必要充分条件。
(c) 以下结论反过来说明了我们通过框架引入融合框架的动机：假设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架，且对于所有 $i \in I$，$\dim(V_i) = 1$。那么，对于每个 i，都存在一个合适的向量 φ_i，使得 $V_i = \mathrm{span}\{\varphi_i\} = \mathrm{span}\{\varphi_i\}$，并且 $\pi_{V_i} f = \langle f, \|\varphi_i\|^{-1} \cdot \varphi_i\rangle \|\varphi_i\|^{-1} \cdot \varphi_i$。现在很容易看出，$V$ 是融合框架，当且仅当 $(v_i\|\varphi_i\|^{-1} \cdot \varphi_i)$ 是一个框架。

(d) 如果 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 H 上的一个融合框架，那么子空间族 $V_i)_{i\in I} V_i$ 是完备的，即 $\mathrm{span}(V_i)_{i\in I} = \mathrm{H}$。为此，反设并非如此，则存在一个非零 $g \in \big(\mathrm{span}(V_i)_{i\in I}\big)^{\perp}$。那么，这个 g 将违反式 (8) 中的下融合框架不等式。

融合框架的另一个动机来自以下问题：

? 目标

设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 H 的一族闭子空间，并假设对于每个 $i \in I$，$(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 都是 V_i 的框架。给出关于子空间 V_i 的必要且充分条件，使得由所有局部框架（包括向量 φ_{ij} 因重复而产生的所有副本）构成的集合 $(\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 能够成为整个希尔伯特空间 H 的全局框架。

以下结果表明，融合框架的概念非常适合解决这一问题。

定理 10 *[42]* 设$(V_i)_{i\in I}$是$\mathcal{H}$的一族闭子空间，且$(v_i)_{i\in I}$是一族权重。对于每个 $i\in I$，设$(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$是 V_i的一个框架，其框架界为A_i 和 B_i，并假设 $0<A=$下确界$_{i\in I}\,A_i\le$上确界$_{i\in I}\,B_i=B<\infty$。则以下条件等价：

(i) $(V_i,v_i)_{i\in I}$是$\mathcal{H}$的一个融合框架。

(ii) $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是$\mathcal{H}$的一个框架。

特别地，若$(V_i,v_i)_{i\in I}$是框架界为 $A_V\le B_V$的融合框架，则$(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是$\mathcal{H}$的一个框架，其框架界为 $AA_V\le BB_V$。反之，若$(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是$\mathcal{H}$的一个框架，框架界为 $A_{v\varphi}\le B_{v\varphi}$，则$(V_i,v_i)_{i\in I}$是融合框架，其融合框架界为 $\frac{A_{v\varphi}}{B}\le\frac{B_{v\varphi}}{A}$。

证明 由于 $(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$是 V_i的一个框架，我们可以形式上得到

$$\begin{aligned}A\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2&\le\sum_{i\in I}v_i^2A_i\|\pi_{V_i}f\|^2\\&\le\sum_{i\in I}v_i^2\sum_{j\in J_i}|\langle\pi_{V_i}f,\varphi_{ij}\rangle|^2=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle f,v_i\varphi_{ij}\rangle|^2\\&\le\sum_{i\in I}v_i^2B_i\|\pi_{V_i}f\|^2\le B\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2.\end{aligned}$$

因此，若 $(V_i,\ v_i)_{i\in I}$是 H 上界为 $A_V\le B_V$的一个融合框架，则可得

$$AA_V\|f\|^2\le\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle f,v_if_{ij}\rangle|^2\le BB_V\|f\|^2.$$

反之，若 $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是 H 上框架界为 $A_{v\varphi}\le B_{v\varphi}$的一个框架，则

$$\frac{A_{v\varphi}}{B}\|f\|^2\le\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\le\frac{B_{v\varphi}}{A}\|f\|^2.$$

证明至此完成。 □

后一结果中，对于每个 $i\in I$，取特殊情形 $A=A_i=K=B_i=B$，即可得到以下推论。

推论 2 *[42]* 设 $(V_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间族，$(v_i)_{i\in I}$是权重族。对于每个 $i\in I$，设$(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$是 V_i的一个帕塞瓦尔框架。那么，对于每个 $K>0$，以下条件等价：

(i) $(V_i,v_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$ 上的 K-紧融合框架。

(ii) $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是 $\mathcal{H}$ 上的 K-紧框架。

这与许多应用中的做法相对应：人们考虑一个融合框架，并为其每个子空间配备局部框架 – ，由此得到以下定义，另见第 6.3 节和第 8 节：

定义 3 [42] 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架（贝塞尔融合序列），且 $\varphi^{(i)}:=(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 是 V_i 在 $i\in I$ 上的一个框架，其框架界为 A_i 和 B_i。假设 $A=$ 下确界为 $A_i>0$，且 $B=$ 上确界为 $B_i<\infty$。那么 $(V_i,v_i,\varphi^{(i)})_{i\in I}$ 称为融合框架系统（贝塞尔融合系统）。

下文将探讨与贝塞尔融合序列相关的权重 v_i。为此，下面的概念很有用：若存在正常数 $m\le M$，使得 $m\le v_i\le M$ 对所有 $i\in I$ 都成立，则称权重族 $(v_i)_{i\in I}$ 是半归一化的（另见 [8]）。

引理 1 *[59]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是一个贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为 B_V。那么，对所有 $i\in I$，都有 $v_i\le\sqrt{B_V}$。

证明 由于我们总是假设贝塞尔融合序列 $(V_i,v_i)_{i\in I}$ 满足 $V_i\neq\{0\}$，因此可以选取某个非零 $f\in V_i$，并注意到

$$v_i^2\|f\|^2=v_i^2\left\|\pi_{V_i}f\right\|^2\le\sum_{i\in I}v_i^2\left\|\pi_{V_i}f\right\|^2\le B_V\|f\|^2$$

对每个 $i\in I$ 均成立。两边除以 $\|f\|^2$ 即可得证。 □

根据引理 1，与融合框架 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 相关的权重 v_i 均有上界，该上界为其上框架界的平方根。然而，一般而言，$(v_i)_{i\in I}$ 不一定是半归一化的。一个简单的反例是 H 的帕塞瓦尔融合框架 $(\mathrm{H},2^{-n})_{n=1}^{\infty}$。

引理 2 设 $(w_i)_{i\in I}$ 是关于常数 $m\le M$ 的半正规化权重族。则 $(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架，当且仅当 $(V_i,v_iw_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架。特别地，$(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的贝塞尔融合序列，当且仅当 $(V_i,v_iw_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的贝塞尔融合序列。

证明 类似于定理 10 的证明，该结论由下式得到

$$m^2\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\le\sum_{i\in I}v_i^2w_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\le M^2\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\qquad(\forall f\in\mathcal{H}).$$

接下来，我们介绍融合框架相关算子，并利用它们刻画贝塞尔融合序列和融合框架。

框架的典范表示空间是序列空间 $l^2(I)$。在融合框架理论中，我们考虑 $l^2(I)$ 的推广。对于一族 $(V_i)_{i\in I}$ 希尔伯特空间（例如，V_i H 的闭子空间），希尔伯特直和 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$，也称为这些希尔伯特空间的直和 V_i [46, 24]，定义为

$$\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{\ell^2}=\left\{(f_i)_{i\in I}\in(V_i)_{i\in I}:\sum_{i\in I}\|f_i\|^2<\infty\right\}.$$

容易验证，对于 $(f_i)_{i\in I},(g_i)_{i\in I}\in\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$，该运算

$$\langle (f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I}\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}} := \sum_{i\in I}\langle f_i, g_i\rangle$$

在 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 上定义了一个内积（另见 [46]），从而得到范数

$$\|(f_i)_{i\in I}\|^2_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}} = \sum_{i\in I}\|f_i\|^2. \tag{9}$$

此外，对$l^2(I)$的任意初等完备性证明进行调整可得，空间 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 关于范数（9）是完备的，即为一个希尔伯特空间（例如参见 [62]）。注意，$\left(\sum_{i\in I}\oplus\mathbb{C}\right)_{l^2} = l^2(I)$。类似于稠密包含$l^{00}(I) \subseteq l^2(I)$，有限向量序列空间

$$\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{\ell^{00}} = \left\{(f_i)_{i\in I}\in (V_i)_{i\in I} : f_i \neq 0 \text{ for only finitely many } i\right\}$$

是 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 的稠密子空间。在本文余下部分，我们将其缩写为

$$\mathcal{K}^2_V := \left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{\ell^2} \quad \text{and} \quad \mathcal{K}^{00}_V := \left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{\ell^{00}}$$

相应地

$$\mathcal{K}^2_{\mathcal{H}} := \left(\sum_{i\in I}\oplus \mathcal{H}\right)_{\ell^2} \quad \text{and} \quad \mathcal{K}^{00}_{\mathcal{H}} := \left(\sum_{i\in I}\oplus \mathcal{H}\right)_{\ell^{00}}.$$

我们将在第 3.1 小节继续讨论希尔伯特直和。现在，我们先介绍融合框架相关算子的定义及其基本性质。

设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 H 中闭子空间的任意加权序列。与 V 相关的以下典范算子在融合框架理论中发挥着核心作用：

- 合成算子 合成算子 $D_V : \mathrm{dom}(D_V) \subseteq \mathrm{K}^2\mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{H}$，其中 $\mathrm{dom}(D_V) = \{(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2\mathcal{H} : \sum_{i\in I} v_i\pi_{V_i} f_i \text{ 收敛}\}$ 且 $D_V (f_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} v_i\pi_{V_i} f_i$,
- 分析算子 分析算子 $C_V : \mathrm{dom}(C_V) \subseteq \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{K}^2\mathcal{H}$，其中 $\mathrm{dom}(C_V) = \{f \in \mathrm{H} : (v_i\pi_{V_i} f)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2\mathcal{H}\}$ 且 $C_V f = (v_i\pi_{V_i} f)_{i\in I}$,
- 融合框架算子 融合框架算子 $S_V : \mathrm{dom}(S_V) \subseteq \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$，其中 $\mathrm{dom}(S_V) = \{f \in \mathrm{H} : \sum_{i\in I} v_i^2\pi_{V_i} f \text{ 收敛}\}$ 且 $S_V f = \sum_{i\in I} v_i^2\pi_{V_i} f$.

合成算子总是稠密定义的，因为 $\mathrm{K}^{00}\mathcal{H} \subseteq \mathrm{dom}(D_V)$ 在 $\mathrm{K}^2\mathcal{H}$ 中稠密，而且我们总有 $D_V^* = C_V$（有界情形见下文）。另一方面，可以证明 [84], 分析算子 C_V 一般不一定是稠密定义的。如果 C_V 是稠密定义的（或者等价地，D_V 是可闭的），那么 $D_V \subseteq C_V^*$，且在这种情况下，$D_V = C_V^*$。此外，可以证明总有 $S_V = D_V C_V$，并且 S_V 在其定义域上是对称的。关于与一般子空间序列相关的这些（可能无界的）算子的更多细节，请参阅 [84]

。就我们的目的而言，只需讨论有界情形即可（与定理 11 比较）。

引理 3 *[40]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中闭子空间的加权序列。若 $D_V\in\mathcal{B}(\mathcal{K}^2\mathcal{H},\mathcal{H})$，则 $D_V^*=C_V$；若 $C_V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}^2\mathcal{H})$，则 $C_V^*=D_V$；上述后两种情形中的任一种都意味着 $S_V=D_VC_V\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是自伴的。

证明 对于 $g\in\mathrm{H}$ 和 $(f_i)_{i\in I}\in\mathrm{K}^2\mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle D_V^*g,(f_i)_{i\in I}\right\rangle_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}&=\left\langle g,D_V(f_i)_{i\in I}\right\rangle\\&=\sum_{i\in I}\langle g,v_i\pi_{V_i}f_i\rangle\\&=\sum_{i\in I}\langle v_i\pi_{V_i}g,f_i\rangle\\&=\left\langle(v_i\pi_{V_i}g)_{i\in I},(f_i)_{i\in I}\right\rangle_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}\\&=\left\langle C_Vg,(f_i)_{i\in I}\right\rangle_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}=\left\langle g,C_V^*(f_i)_{i\in I}\right\rangle_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}.\end{aligned}$$

这就得出了前两个结论，其余部分显而易见。 □

定理 11 *[40]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$的闭子空间的加权序列。则以下各项等价：

(i) V 是贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为 B_V。*(ii)* 与 V 相关联的合成算子 D_V 是从$\mathcal{K}^2\mathcal{H}$到$\mathcal{H}$的有界算子，且满足 $\|D_V\|\le\sqrt{B_V}$。*(iii)* 与 V 相关联的分析算子 C_V 是从$\mathcal{H}$到$\mathcal{K}^2\mathcal{H}$的有界算子，且满足$\|C_V\|\le\sqrt{B_V}$。*(iv)* 与 V 相关联的融合框架算子 S_V 在$\mathcal{H}$上有界，且满足 $\|S_V\|\le B_V$。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 假设 V 是一个贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为B_V。那么对于任意有限向量序列$h=(h_i)_{i\in J}\in\mathrm{K}^{00}\mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in J}v_i\pi_{V_i}h_i\Big\|^2&=\sup_{\|g\|=1}\Big|\Big\langle\sum_{i\in J}v_i\pi_{V_i}h_i,g\Big\rangle\Big|^2\\&=\sup_{\|g\|=1}\Big|\sum_{i\in J}v_i\langle h_i,\pi_{V_i}g\rangle\Big|^2\\&\le\sup_{\|g\|=1}\Big(\sum_{i\in J}v_i\|\pi_{V_i}g\|\|h_i\|\Big)^2\\&\le\sup_{\|g\|=1}\Big(\sum_{i\in J}v_i^2\|\pi_{V_i}g\|^2\Big)\Big(\sum_{i\in J}\|h_i\|^2\Big)\le B_V\|h\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}^2.\end{aligned}$$

这意味着 D_V 在 $\mathrm{K}^{00}\mathcal{H}$ 上有界，界为 $\sqrt{B_V}$。由于 $\mathrm{K}^{00}\mathcal{H}$ 是 $\mathrm{K}^2\mathcal{H}$的稠密子空间，D_V 可延拓为有界算子 $D_V:\mathrm{K}^2\mathcal{H}\longrightarrow\mathrm{H}$，且 $\|D_V\|\le\sqrt{B_V}$。

(ii) ⇒(iii) ⇒(iv) 这由引理 3 得出。(iv) ⇒ (i) 若 S_V 有界且 $\|S_V\| \le B_V$，则对所有 $f \in \mathrm{H}$，我们有

$$\sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{V_i} f\|^2 = \langle S_V f, f\rangle \le \|S_V f\|\|f\| \le \|S_V\|\|f\|^2 \le B_V \|f\|^2,$$

即， V 是一个贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为 B_V。 □

注*2* 定理 11 的证明表明，对于任意贝塞尔融合序列$V = (V_i,\ v_i)_{i\in I}$，级数 $\sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{V_i} f_i$ 在 H 中对所有 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}}$均无条件收敛。

根据定理 11，只要$V = (V_i,\ v_i)_{i\in I}$是一个贝塞尔融合序列，融合框架算子 S_V 就在 H 上有界。如果此外， V 是一个融合框架，那么S_V是可逆的，从而实现完美重构，见下文定理 12。

> 与框架理论类似，融合框架能够在不假设子空间 V_i 彼此正交的情况下实现完美重构。这可以看作融合框架相较于正交子空间分解最重要的优势。

定理 12 *[40]* 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架，其融合框架界为$A_V \le B_V$。则融合框架算子 S_V 是有界、自伴、正且可逆的，并且满足

$$A_V \le \|S_V\| \le B_V \quad and \quad B_V^{-1} \le \|S_V^{-1}\| \le A_V^{-1}. \tag{10}$$

特别地

$$f = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{V_i} S_V^{-1} f = \sum_{i\in I} v_i^2 S_V^{-1} \pi_{V_i} f \qquad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{11}$$

其中两个级数都无条件收敛。

证明 若V是一个融合框架，则 V特别是一个贝塞尔融合序列。因此，根据定理 11 和引理 3，可知 S_V 是有界且自伴的。此外，根据 S_V的定义，我们可以将融合框架不等式（8）改写为

$$\langle A_V f, f\rangle \le \langle S_V f, f\rangle \le \langle B_V f, f\rangle \qquad (\forall f \in \mathcal{H}). \tag{12}$$

因此 S_V 是正的。此外，通过对（12）式进行变形，我们得到

$$0 \le \left\langle (\mathcal{I}_{\mathcal{H}} - B_V^{-1} S_V) f, f \right\rangle \le \left\langle \frac{B_V - A_V}{B_V} f, f \right\rangle \qquad (\forall f \in \mathcal{H})$$

因此，由于 $\mathrm{I}_{\mathcal{H}} - B_V^{-1} S_V$ 是自伴的，

$$\|\mathcal{I}_{\mathcal{H}} - B_V^{-1} S_V\| = \sup_{\|f\|=1} \langle (\mathcal{I}_{\mathcal{H}} - B_V^{-1} S_V) f, f \rangle \leq \frac{B_V - A_V}{B_V} < 1.$$

现在，应用诺伊曼定理可得 $B_V^{-1} S_V$ 是可逆的，因此S_V 也是可逆的。特别地，对于所有 $f \in \mathrm{H}$，我们有 $f = S_V S_V^{-1} f = S_V^{-1} S_V f$，这意味着（11）式无条件收敛（见注2）。最后，（10）式的左侧可由（12）立即得出。为证明（10）式的右侧，注意到我们有 $\|S_V^{-1}\| \geq \|S_V\|^{-1} \geq B_V^{-1}$，且 $A_V \|S_V^{-1} f\|^2 \leq \langle S_V S_V^{-1} f, S_V^{-1} f \rangle = \langle f, S_V^{-1} f \rangle \leq \|S_V^{-1}\| \|f\|^2$ 意味着 $\|S_V^{-1}\| \leq A_V^{-1}$。□

因此，对于任意融合框架 V，我们都可以通过公式 (11) 完美重构任意 $f \in \mathrm{H}$，其中子空间 V_i 不必彼此正交，并且可以具有非平凡交集。特别地，我们可以在融合框架系统中将融合框架重构与局部框架重构结合起来。更确切地说，给定一个融合框架系统 $(V_i,\ v_i,\ \varphi^{(i)})_{i\in I}$及其关联的全局框架 $v\varphi$，我们可以通过框架向量 $v_i\varphi_{ij}$实现完美重构的多种方式（见定义 3），这表明融合框架对于分布式处理任务 [42]极其有用。

引理 4 *[42]* 设 $V = (V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个融合框架系统，其全局框架为 $v\varphi$。如果对于每个 $i \in I$，$(\varphi_{ij}^d)_{j\in J_i}$ 是 $\varphi^{(i)}$ 的一个对偶，则

(i) $(S_V^{-1} v_i \varphi_{ij}^d)_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是全局框架 $v\varphi$ 的一个对偶框架。特别地

$$f = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \left\langle f, v_i \varphi_{ij} \right\rangle S_V^{-1} v_i \varphi_{ij}^d \qquad (\forall f \in \mathcal{H}).$$

(ii) $S_V = D_{v\varphi^d} C_{v\varphi} = D_{v\varphi} C_{v\varphi^d}$，其中 $v\varphi^d = (v_i \varphi_{ij}^d)_{i\in I,\ j\in J_i}$。

证明 (i) 对于每个 $f \in \mathrm{H}$，都有 $\pi_{V_i} f = \sum_{i\in I} \left\langle f,\ \varphi_{ij} \right\rangle \varphi_{ij}^d$，因此

$$f = \sum_{i\in I} v_i^2 S_V^{-1} \pi_{V_i} f = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \left\langle f, v_i \varphi_{ij} \right\rangle S_V^{-1} v_i \varphi_{ij}^d.$$

(ii) 类似地，我们可得

$$S_V f = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{V_i} f = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \left\langle f, v_i \varphi_{ij} \right\rangle v_i \varphi_{ij}^d,$$

其中需要指出的是，根据定理 10，$v\varphi^d$ 确实是 H 的一个框架。 □

就应用而言，了解逆融合框架算子S_V^{-1}对 H 中元素 $f \in$ 的作用至关重要。如果希望避免对 S_V求逆，可以采用诸如融合框架算法 （见引理 22）之类的近似过程。然而，对于紧融合框架，S_V^{-1}的计算相当简单，因此可以轻松完成融合框架重构，见 (13) 和 (14)。

首先，我们注意到不等式 (12) 的如下等价表述。

推论 3 *[42]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$ 的闭子空间加权序列，且 $0<A_V\le B_V<\infty$。那么以下条件等价：

(i) V 是一个融合框架，其融合框架界为 $A_V\le B_V$。*(ii)* $A_V\cdot\mathcal{I}_{\mathcal{H}}\le S_V\le B_V\cdot\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$（就正算子而言）。

推论 4 *[42]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$的闭子空间的一个加权序列。那么以下结论成立。

(i) V 是一个 A_V-紧融合框架，当且仅当 $S_V=A_V\cdot\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$。
(ii) V 是一个帕塞瓦尔融合框架，当且仅当 $S_V=\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$。
特别地，对于一个 A_V-紧融合框架，我们有

$$f=\frac{1}{A_V}\sum_{i\in I}v_i^2\pi_{V_i}f\qquad(\forall f\in\mathcal{H}),\tag{13}$$

而对于帕塞瓦尔融合框架，

$$f=\sum_{i\in I}v_i^2\pi_{V_i}f\qquad(\forall f\in\mathcal{H}).\tag{14}$$

与定理 11 类似，我们可以用相关的典范算子来刻画融合框架。这个刻画的关键观察是

$$\|C_Vf\|^2_{\mathcal{K}^2_{\mathcal{H}}}=\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2.\tag{15}$$

定理 13 *[42]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是由$\mathcal{H}$的闭子空间构成的加权序列。则以下条件等价：

(i) V 是$\mathcal{H}$的融合框架。*(ii)* 合成算子 D_V 在$\mathcal{K}^2{}_{\mathcal{H}}$上有定义，且有界并且满射。*(iii)* 分析算子 C_V 在$\mathcal{H}$上有定义，且有界、单射并具有闭值域。

证明 (ii) ⇔ (iii)的等价关系通常对希尔伯特空间之间的有界算子及其伴随算子 [46]成立。所有条件都蕴含有界性，正如下文所示。

(i) ⇒(ii) 若 V是融合框架，则根据定理 11，$D_V\in\mathrm{B}(\mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}},\mathrm{H})$。若 D_V 不是满射，则存在某个非零$h\in\mathrm{R}(D_V)^{\perp}=\mathrm{N}(D_V^*)=\mathrm{N}(C_V)$。然而，将该$h$ 代入方程 (15) 和下融合框架不等式 (8) 会导致矛盾。

(iii) ⇒ (i) 如果 (ii) 和 (iii) 成立，那么 C_V 在 H 上有下界 [46]，且在 H 上也有界（根据引理 3）。这意味着对于所有 $f\in\mathrm{H}$，融合框架不等式均成立。□

如上文所见，融合框架的框架相关算子与框架所对应的框架相关算子具有许多相同的性质（见定理 6）。

与经典框架理论类似，当然还有 – 其他 – 刻画方式，可以通过这些算子来刻画带权闭子空间族是否构成融合框架。例如，下面的结果通过合成算子给出了融合框架及其框架界的刻画。

命题 1 *[58]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$中闭子空间的加权族。那么，V 是$\mathcal{H}$上的融合框架，框架界为 $A_V\le B_V$，当且仅当满足以下两个条件：

(i) $(V_i)_{i\in I}$ 是完备的，即张成空间$(V_i)_{i\in I}=\mathcal{H}$。
(ii) 合成算子 D_V 在$\mathcal{K}^2\ \mathcal{H}$ 上有定义，且

$$A_V\|(f_i)_{i\in I}\|^2\le\|D_V(f_i)_{i\in I}\|^2\le B_V\|(f_i)_{i\in I}\|^2\quad(\forall(f_i)_{i\in I}\in\mathcal{N}(D_V)^\perp). \tag{16}$$

证明 首先假设 V 是一个融合框架，其融合框架界为 $A_V\le B_V$。由注 1 (d)可知，$(V_i)_{i\in I}$ 是完备的；定理 13 表明 (16) 中的上界不等式成立，且 $\mathrm{R}(C_V)$ 是闭的，因为 $\mathrm{R}(D_V)$ 是闭的。后者意味着 $\mathrm{N}(D_V)^\perp=\mathrm{R}(C_V)=\mathrm{R}(C_V)$，即 $\mathrm{N}(D_V)^\perp$ 由所有形如 $(v_i\pi_{V_i}f)_{i\in I}$的族构成，其中 $f\in\mathrm{H}$。现在，对于任意 $f\in\mathrm{H}$，我们看到

$$\Big(\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\Big)^2=|\langle S_Vf,f\rangle|^2\le\|S_Vf\|^2\|f\|^2\le\|S_Vf\|^2\frac{1}{A_V}\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2.$$

这意味着

$$A_V\sum_{i\in I}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\le\|S_Vf\|^2=\|D_V(v_i\pi_{V_i}f)_{i\in I}\|^2,$$

如所期望的那样。

反过来，假设 (i) 和 (ii) 成立。由于 $\mathrm{K}^2\mathrm{H}=\mathrm{N}(D_V)\oplus\mathrm{N}(D_V)^\perp$，(ii) 蕴含合成算子 D_V 在 $\mathrm{K}^2\mathrm{H}$ 上范数有界，界为 B_V。因此，根据定理 11，V 是一个贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为 B_V；接下来只需证明关于 A_V 的下融合框架不等式。我们先证明 $\mathrm{R}(D_V)=\mathrm{H}$。由 (i) 成立以及 $\mathrm{span}(V_i)_{i\in I}\subseteq\mathrm{R}(D_V)\subseteq\mathrm{H}$ 可知，只要证明 $\mathrm{R}(D_V)$ 是闭的，结论便成立。为此，取 $\mathrm{R}(D_V)$ 中的一个柯西序列 $(g_n)_{n=1}^\infty$。注意，$(g_n)_{n=1}^\infty=(D_V\mathrm{h}_n)_{n=1}^\infty$，其中 $(\mathrm{h}_n)_{n=1}^\infty$是 $\mathrm{N}(D_V)^\perp$ 中的一个序列，而 (16) 中的下界不等式蕴含 $(\mathrm{h}_n)_{n=1}^\infty$是 $\mathrm{N}(D_V)^\perp$ 中的柯西序列。由于 $\mathrm{N}(D_V)^\perp$ 是 $\mathrm{K}^2\mathrm{H}$ 的闭子空间，$(\mathrm{h}_n)_{n=1}^\infty$ 收敛到某个 $\mathrm{h}\in\mathrm{N}(D_V)^\perp$。由 D_V 的连续性可知，这意味着 $(g_n)_{n=1}^\infty$ 在 $\mathrm{R}(D_V)$ 中收敛到 $D_V\mathrm{h}$。因此 $\mathrm{R}(D_V)$ 是闭的，且可得 $\mathrm{R}(D_V)=\mathrm{H}$。注意，由定理 13 可知，我们已经可以推出 V 是一个融合框架。为了证明 A_V 是下融合框架界，回顾 (1) 可知，$D_V^\dagger D_V=\pi_{\mathcal{N}(D_V)^\perp}$ 且 $D_VD_V^\dagger=\pi_{\mathcal{R}(D_V)}=\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$。因此，由 (ii) 可知，对于任意 $(f_i)_{i\in I}\in\mathrm{K}^2\mathrm{H}$，我们可以估计

$$A\|D_V^\dagger D_V(f_i)_{i\in I}\|^2\le\|D_VD_V^\dagger D_V(f_i)_{i\in I}\|^2=\|D_V(f_i)_{i\in I}\|^2.$$

由于 $\mathrm{N}(D_V^\dagger) = \mathrm{R}(D_V)^\perp = \{0\}$，后者蕴含 $\|D_V^\dagger\|^2 \le A_V^{-1}$。特别地，这得到 $\|(D_V^*)^\dagger\|^2 = \|C_V^\dagger\|^2 \le A_V^{-1}$。由于 $C_V^\dagger C_V$ 是到 $\mathrm{R}(C_V^\dagger) = \mathrm{R}((D_V^\dagger)^*) = \mathrm{N}(D_V^\dagger)^\perp = \mathrm{R}(D_V) = \mathrm{H}$ 上的正交投影，我们最终得到，对于任意 $f \in \mathrm{H}$，都有

$$\|f\|^2 = \|C_V^\dagger C_V f\|^2 \le \frac{1}{A_V}\|C_V f\|^2 = \frac{1}{A_V}\sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{V_i} f\|^2,$$

即，A_V 是 V的下融合框架界。 □

3.1 希尔伯特直和之间的算子

在进入下一节之前，我们先探讨希尔伯特直和之间的线性算子及其矩阵表示。本节给出的结果主要是为后续各节中的若干证明细节作准备。因此，只对融合框架的主要结果感兴趣的读者可以跳过本小节。

我们不必只考虑形如 $\mathrm{K}_V^2 = \left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$，的空间，其中每个 V_i 都是给定希尔伯特空间 H 的闭子空间；还可以考虑稍微一般的情形，即 V_i 是任意希尔伯特空间，并令

$$\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{\ell^2} := \left\{(f_i)_{i\in I} : f_i \in V_i, \sum_{i\in I}\|f_i\|_{V_i}^2 < \infty\right\}. \tag{17}$$

同样，对于 $f = (f_i)_{i\in I}, g = (g_i)_{i\in I} \in (\sum_{i\in I}\oplus V_i)\ell^2$，运算

$$\langle f, g\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}} := \sum_{i\in I}\langle f_i, g_i\rangle_{V_i} \tag{18}$$

定义了一个内积，其诱导范数为

$$\|f\|_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}} = \left(\sum_{i\in I}\|f_i\|_{V_i}^2\right)^{1/2}$$

并且 $(\sum_{i\in I}\oplus V_i)\ell^2$ 关于此范数是完备的。

当然，定义（17）也适用于空间 V_is仅为预希尔伯特空间的情形，此时配备内积（18）的空间（$\sum_{i\in I}\oplus V_i$）ℓ^2 也只是预希尔伯特空间。当且仅当所有 V_is都是希尔伯特空间时，空间（$\sum_{i\in I}\oplus V_i$）ℓ^2 才是希尔伯特空间；在这种情况下，我们称其为（V_i）$_{i\in I}$的希尔伯特直和。特别地，由于希尔伯特空间的子空间是闭的当且仅当它们是完备的，我们得到以下推论。

引理 5 *[63]* 考虑希尔伯特直和 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$，并对每个 $i\in I$，设 U_i 是 V_i 的一个子空间。那么 $\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{l^2}$ 是 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 的闭子空间，当且仅当对于每个 $i\in I$，U_i 都是 V_i 的闭子空间。

与前一个结果类似，我们可以证明关于正交补的以下结果，另见 [63]。

引理 6 *[63]* 考虑希尔伯特直和 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 以及（不一定闭的）子空间 U_i（属于 $V_i(i\in I)$）和 $\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{l^2}$（属于 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$）。那么

$$\left(\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{\ell^2}\right)^{\perp}=\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i^{\perp}\right)_{\ell^2}.$$

证明 为证明“$\supseteq$”部分，取 $g=(g_i)_{i\in I}\in\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i^{\perp}\right)_{l^2}$，并注意到对于任意 $f=(f_i)_{i\in I}\in\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{l^2}$，都有 $\langle f,g\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}=\sum_{i\in I}\langle f_i,g_i\rangle_{V_i}=0$，从而得到 $g\in((\sum_{i\in I}\oplus U_i)_{\ell^2})^{\perp}$。

为了证明“$\subseteq$”部分，我们必须证明：如果 $\mathrm{h}=(\mathrm{h}_i)_{i\in I}\in((\sum_{i\in I}\oplus U_i)_{\ell^2})^{\perp}$，那么对于每个 $i\in I$，$\mathrm{h}_i\in U_i^{\perp}$。由于对所有 $f\in\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{l^2}$，$\langle f,\mathrm{h}\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}=0$ 都成立，因此对 $f=(...,0,0,f_i,0,0,...)\in\left(\sum_{i\in I}\oplus U_i\right)_{l^2}$（其中 $f_i\in U_i$ 位于第 i 个分量）尤其成立。由此可见，在这种情形下，$0=\langle f,\mathrm{h}\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}=\langle f_i,\mathrm{h}_i\rangle_{V_i}$，这意味着 $\mathrm{h}_i\in U_i^{\perp}$。由于这对所有 $i\in I$ 都成立，证明完毕。□

接下来，我们说明如何由局部标准正交基自然地构造希尔伯特直和的标准正交基：

引理 7 *[62]* 对于每个 $i\in I$，设 $(e_{ij})_{j\in J_i}$ 是 V_i 的一个标准正交基。令

$$\tilde{e}_{ij}=(\delta_{ik}e_{kj})_{k\in I}=(...,0,0,e_{ij},0,0,...)\ \textit{(e_{ij} in the i-th component).}$$

那么，$(\tilde{e}_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$ 是 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$ 的一个标准正交基。

证明 只需证明 $(\tilde{e}_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$ 是一个完备标准正交系。任取两个元素 $\tilde{e}_{ij},\tilde{e}_{i'j'}$：情形 $i\neq i'$ 下，由 $\langle .,.\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}$ 的定义以及元素 $\tilde{e}_{ij}$，我们立即得到 $\langle\tilde{e}_{ij},\tilde{e}_{i'j'}\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}=0$。情形 $i=i'$ 下，有 $\langle\tilde{e}_{ij},\tilde{e}_{ij'}\rangle_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i)_{\ell^2}}=\langle e_{ij},e_{ij'}\rangle_{V_i}=\delta_{jj'}$。因此，$(\tilde{e}_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$ 是一个标准正交系。为证明其完备性，注意到对于任意的 $(f_i)_{i\in I}\in\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i\right)_{l^2}$，有

$$(f_i)_{i\in I}=\sum_{i\in I}(\delta_{ik}f_k)_{k\in I}=\sum_{i\in I}\left(\delta_{ik}\sum_{j\in J_k}\langle f_k,e_{kj}\rangle e_{kj}\right)_{k\in I}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle f_i,e_{ij}\rangle\tilde{e}_{ij}$$

证明完成。 □

回顾以下记号

$$\mathcal{K}_V^2:=\left(\sum_{j\in J}\oplus V_j\right)_{\ell^2}\quad\text{and}\quad\mathcal{K}_W^2:=\left(\sum_{i\in I}\oplus W_i\right)_{\ell^2},$$

其中（V_j）$_{j\in J}$和（W_i）$_{i\in I}$是分别与（可能不同的）指标集 I 和 J相关联的任意希尔伯特空间族。假设对于所有 $i \in I$、 $j \in J$，给定线性算子 Q_{ij}: $\mathrm{dom}(Q_{ij}) \subseteq V_j \longrightarrow W_i$，并令 $f = (f_j)_{j\in J} \in (\mathrm{dom}(Q_{ij}))_{j\in J} \subseteq (V_j)_{j\in J}$。则

$$Qf := \Big(\sum_{j\in J} Q_{ij} f_j\Big)_{i\in I} \tag{19}$$

定义了一个线性算子 Q: $\mathrm{dom}(Q) \subseteq \mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{K}_W^2$ 其中

$$\mathrm{dom}(Q) = \Big\{(f_j)_{j\in J} \in (\mathrm{dom}(Q_{ij}))_{j\in J} : \sum_{i\in I} \Big\| \sum_{j\in J} Q_{ij} f_j \Big\|_{W_i}^2 < \infty \Big\}. \tag{20}$$

若将 $f = (f_j)_{j\in J}$ from K_V^2视为（可能是无限维的）列向量，那么（通过假设 $I = J = \mathbb{N}$ 不失一般性）我们可以用矩阵表示该算子 Q

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{21}$$

因为（19）恰好对应于 Q 与 f的形式矩阵乘法。

我们的目标是证明，所有有界算子 $Q \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$ 与所有由有界算子构成的矩阵 $[Q_{ij}]_{j\in J, i\in I} \mathrm{B}(V_j, W_i)$ 之间存在一一对应关系，其定义域为 $\mathrm{dom}([Q_{ij}]_{j\in J, i\in I}) = \mathrm{K}_V^2$（其中定义域如式（20）所定义）。

为此，我们定义坐标函数

$$C_{V,k} : \mathcal{K}_V^2 \longrightarrow V_k, \qquad C_{V,k}(f_j)_{j\in J} := f_k \qquad (k \in J).$$

显然，每个算子 $\mathrm{C}_{V,\,k}$ 的范数不超过 1，因此存在唯一确定的伴随算子 $\mathrm{C}_{V,\,k}^*$: $V_k \longrightarrow \mathrm{K}_V^2$。对于 $f_k \in V_k$和 $(g_j)_{j\in J} \in \mathrm{K}_V^2$，计算可得

$$\begin{aligned} \big\langle C_{V,k}^* f_k, (g_j)_{j\in J} \big\rangle_{\mathcal{K}_V^2} &= \langle f_k, C_{V,k}(g_j)_{j\in J} \rangle_{V_k} \\ &= \langle f_k, g_k \rangle_{V_k} \\ &= \langle (\ldots, 0, 0, f_k, 0, 0, \ldots), (g_j)_{j\in J} \rangle_{\mathcal{K}_V^2} \end{aligned}$$

$\mathrm{C}_{V,\,k}^*$将 $f_k \in V_k$映射到 $(\ldots, 0, 0, f_k, 0, 0, \ldots) \in \mathrm{K}_V^2$（$f_k$位于第 k 个分量中）。类似地，我们定义

$$C_{W,l} : \mathcal{K}_W^2 \longrightarrow W_l, \qquad C_{W,l}(g_i)_{i\in I} := g_l \qquad (l \in I)$$

其中 $\|\mathrm{C}_{W,\,l}\| = 1$ 和 $\mathrm{C}_{W,\,l}^*$: $W_l \longrightarrow \mathrm{K}_W^2$由 $\mathrm{C}_{W,\,l}^* g_l = (0, \ldots, 0, g_l, 0, 0, \ldots)$ 给出（g_l位于第 l 个分量中）。

命题 2 *[62]* 设 $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_V^2, \mathcal{K}_W^2)$ 有界。则存在唯一确定的有界算子矩阵 $[Q_{ij}]_{j\in J,\ i\in I}$，其元素属于 $Q_{ij} \in \mathcal{B}(V_j, W_i)$，使得 Q 在任意 $(f_j)_{j\in J} \in \mathcal{K}_V^2$ 上的作用由 $(Q_{ij})_{j\in J,\ i\in I}$ 与 $(f_j)_{j\in J}$ 的形式矩阵乘法给出，即

$$Q(f_j)_{j\in J} = \Big(\sum_{j\in J} Q_{ij} f_j\Big)_{i\in I}.$$

证明 对于每个 $f = (f_j)_{j\in J} \in \mathrm{K}_V^2$，我们有 $f = \sum_{j\in J} \mathrm{C}_{V,\ j}^{*} f_j$ 因此 $Qf = \sum_{j\in J} Q\mathrm{C}_{V,\ j}^{*} f_j$ 这是由 Q 的有界性得到的。此外，由于 $Qf \in \mathrm{K}_W^2$，我们可以写成 $Qf = ([Qf]_i)_{i\in I}$，其中 $[Qf]_i \in W_i$ 表示 Qf 的第 i 个分量。根据坐标函数 C_{W} 的定义，$_i$ 我们得到

$$\begin{aligned} Qf = ([Qf]_i)_{i\in I} &= (C_{W,i} Qf)_{i\in I} \\ &= \Big(C_{W,i} \sum_{j\in J} Q C_{V,j}^{*} f_j\Big)_{i\in I} = \Big(\sum_{j\in J} C_{W,i} Q C_{V,j}^{*} f_j\Big)_{i\in I}. \end{aligned}$$

我们令 $Q_{ij} := \mathrm{C}_{W,\ i} Q \mathrm{C}_{V,\ j}^{*} \in \mathrm{B}(V_j,\ W_i)$，并注意到，当将 f 视为列向量时，Q 作用于 $f = (f_j)_{j\in J} \in \mathrm{K}_V^2$ 的方式与矩阵 $[Q_{ij}]_{j\in J,\ i\in I}$ 在（19）中的作用方式相同。矩阵 $[Q_{ij}]_{j\in J,\ i\in I}$ 的唯一性由其构造方式可知。□

注意，我们还可以将上述证明中的思想加以推广，利用融合框架定义算子的矩阵表示；此时使用的不是“典范”算子 $\mathrm{C}_{W,\ i}$ 和 $\mathrm{C}_{V,\ j}$，而是与融合框架相关的分析与合成算子，参见 [11]。

接下来我们证明上述结果的逆命题。其证明在很大程度上依赖于一致有界性原理。为了正确地写出证明，我们使用下面定义的投影算子。注意，在此处及后续证明中，不失一般性地，我们可以假设 $I = J = \mathbb{N}$。对于 $m, n \in \mathbb{N}$ 我们定义

$$\begin{aligned} P_{\langle n\rangle}^{V} &: \mathcal{K}_V^2 \longrightarrow \mathcal{K}_V^2, \qquad P_{\langle n\rangle}^{V}(f_j)_{j\in J} = (f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots), \\ P_{\langle m\rangle}^{W} &: \mathcal{K}_W^2 \longrightarrow \mathcal{K}_W^2, \qquad P_{\langle m\rangle}^{W}(g_i)_{i\in I} = (g_1, \ldots, g_m, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

容易验证，$P_{\langle n\rangle}^{V}$ 和 $P_{\langle m\rangle}^{W}$ 是正交投影（$m,\ n \in \mathbb{N}$）。

命题 3 *[62]* 设对于所有 $j \in I, i \in I$，$Q_{ij} \in \mathcal{B}(V_j, W_i)$，并将 Q 定义如式（*19*）。若 $dom(Q) = \mathcal{K}_V^2$，则 $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_V^2、\ \mathcal{K}_W^2)$。

证明 假设 $\mathrm{dom}(Q) = \mathrm{K}_V^2$，这意味着 Q 是一个从 K_V^2 到 K_W^2 的定义良好的线性算子。考虑子矩阵 $T_m = P_{\langle m\rangle}^{W} Q : \mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{K}_W^2$ 如果我们能够证明每个 T_m 都是有界的，并且算子 T_m 逐点收敛

到 Q （当 $m \longrightarrow \infty$ 时），那么根据一致有界原理，这意味着 $Q \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$。

为了说明算子 T_m 逐点收敛到 Q，回顾我们的假设 $\mathrm{dom}(Q) = \mathrm{K}_V^2$ 意味着，对于所有 $f \in \mathrm{K}_V^2$，都有 $Qf \in \mathrm{K}_W^2$，这意味着 $\|Qf\|^2_{\mathcal{K}_W^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \| \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij} f_j \|^2_{W_i} < \infty$。特别地，这意味着

$$\begin{aligned} \lim_{m\longrightarrow\infty} \|(Q - T_m)f\|^2_{\mathcal{K}_W^2} &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \|(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_W^2} - P^W_{\langle m\rangle})Qf\|^2_{\mathcal{K}_W^2} \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij} f_j \Big\|^2_{W_i} = 0. \end{aligned}$$

还需要证明，对于每个 m，$T_m \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$。我们将再次使用一致有界原理来证明这一点。为此，我们固定任意一个 $m \in \mathbb{N}$，并考虑 $T_m^{(n)} = P^W_{\langle m\rangle} Q P^V_{\langle n\rangle} : \mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{K}_W^2$ 的子矩阵 T_m。为了说明对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$T_m^{(n)}$ 是有界的，注意到我们有

$$\begin{aligned} \|P^W_{\langle m\rangle} Q P^V_{\langle n\rangle} f\|^2_{\mathcal{K}_W^2} &= \sum_{i=1}^{K} \Big\| \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} f_j \Big\|^2_{W_i} \\ &\le \sum_{i=1}^{K} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|Q_{ij}\|_{V_j \to W_i} \|f_j\|_{V_j} \Big)^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{K} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|Q_{ij}\|^2_{V_j \to W_i} \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2_{V_j} \Big), \end{aligned}$$

这里用到了柯西-施瓦茨不等式。这意味着

$$\|P^W_{\langle m\rangle} Q P^V_{\langle n\rangle}\|^2_{\mathcal{K}_V^2 \to \mathcal{K}_W^2} \le mn \sup_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \|Q_{ij}\|^2_{V_j \to W_i} < \infty.$$

剩下需要证明的是 $T_m^{(n)} \longrightarrow T_m$ 逐点成立（当 $n \longrightarrow \infty$ 时），也就是说，对于任意 $f \in \mathrm{K}_V^2$，我们有

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \big\|(T_m - T_m^{(n)})f\big\|_{\mathcal{K}_W^2} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \big\|P^W_{\langle m\rangle} Q (\mathcal{I}_{\mathcal{K}_V^2} - P^V_{\langle n\rangle}) f\big\|_{\mathcal{K}_W^2} = 0. \tag{22}$$

为此，任取 $f = (f_j) \in \mathrm{K}_V^2$，并定义

$$g_n^{(i)} := \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} f_j.$$

于是显然，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 i，$g_n^{(i)} \in W_i$。根据构造，我们有 $\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij} f_j \in W_i$，这由 $Qf \in \mathrm{K}_W^2$ 得出。因此，对于每个 i，由 $x_n^{(i)} = \| \sum_{j=n}^{\infty} Q_{ij} f_j \|^2_{W_i}$ 定义的序列 $\{x_{(i)n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛的

序列，其取值于 $\mathbb{R}$，且极限为 0。这意味着

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|P^{W}_{\langle m\rangle}Q(\mathcal{I}_{\mathcal{K}^2_V}-P^{V}_{\langle n\rangle})f\right\|_{\mathcal{K}^2_W}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{K}\Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty}Q_{ij}f_j\Big\|^2_{W_i}$$
$$=\sum_{i=1}^{K}\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty}Q_{ij}f_j\Big\|^2_{W_i}=0$$

并且（22）得证。 □

我们可以将命题 2 和命题 3 总结如下:

每个有界算子 $Q\in\mathrm{B}(\mathrm{K}^2_V,\ \mathrm{K}^2_W)$ 都可以自然地对应于一个有界算子矩阵 $[Q_{ij}]_{j\in J,\ i\in I}$，其元素属于 $Q_i\in\mathrm{B}(V_j,\ W_i)$，该矩阵通过矩阵乘法作用于 $f=(f_j)_{j\in J}$（如（19）所示），并且还满足 $\mathrm{dom}(Q)=\mathrm{K}^2_V$（参见（20））。

这促使我们采用如下记号

$$\mathbb{M}(Q)=[Q_{ij}]_{j\in J,i\in I}$$

并称 $\mathbb{M}(Q)=[Q_{ij}]_{j\in J,\ i\in I}$为 Q的典范矩阵表示。

示例

假设 $V=(V_i,\ v_i)_{i\in I}$是 H 上的贝塞尔融合序列。那么，根据定理 11，$D_V\in\mathrm{B}(\mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}},\ \mathrm{H})$ 和 $C_V\in\mathrm{B}(\mathrm{H},\ \mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}})$ 是有界算子。它们各自的典范矩阵表示如下:

$$\mathbb{M}(D_V)=\left[\ldots\ v_{i-1}\pi_{V_{i-1}}\ v_i\pi_{V_i}\ v_{i+1}\pi_{V_{i+1}}\ \ldots\right],$$
$$\mathbb{M}(C_V)=\left[\ldots\ v_{i-1}\pi_{V_{i-1}}\ v_i\pi_{V_i}\ v_{i+1}\pi_{V_{i+1}}\ \ldots\right]^T,$$

其中，指数 T 按惯例表示矩阵转置。

注意：在本小节余下部分，我们假设 K^2_V 和 K^2_W 是以同一个指标集 I为指标的希尔伯特直和。

希尔伯特直和之间一类特别有趣的算子是分块对角 算子（也称为算子的直和 [46]），它们作用于由相同指标集 I 确定的希尔伯特直和之间。对于给定的算子$Q_i:\mathrm{dom}(Q_i)\subseteq V_i\longrightarrow W_i$，分块对角 算子 $\bigoplus_{i\in I}Q_i$ 定义为

$$\bigoplus_{i\in I}Q_i:\mathrm{dom}\Big(\bigoplus_{i\in I}Q_i\Big)\subseteq\mathcal{K}^2_V\longrightarrow\mathcal{K}^2_W,\qquad\bigoplus_{i\in I}Q_i(f_i)_{i\in I}:=(Q_if_i)_{i\in I}.\quad(23)$$

本文中我们仅考虑如下情形：每个 $Q_i \in \mathrm{B}(V_i,\ W_i)$ 都是有界的，见第6节。

根据定义，$\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$ 中的有界块对角算子，恰好是那些典范矩阵表示为对角矩阵的有界算子，即 $\mathbb{M}(\bigoplus_{i\in I} Q_i) = \mathrm{diag}(Q_i)_{i\in I}$。下面的引理给出了与 $Q_i \in \mathrm{B}(V_i, W_i)$ $(i \in I)$ 相关联的块对角算子 $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ 有界的一个简单判定方法。

引理 8 设给定有界算子 $Q_i \in \mathcal{B}(V_i, W_i)(i \in I)$。那么，按式（*23*）定义的 $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ 是一个有界算子 $\bigoplus_{i\in I} Q_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_V^2, \mathcal{K}_W^2)$，当且仅当 上确界$_{i\in I}$ $\|Q_i\| < \infty$。在这种情况下，$\|\bigoplus_{i\in I} Q_i\| =$ 上确界$_{i\in I}$ $\|Q_i\| < \infty$。

证明 这个证明只需写出定义，因此留给读者完成；更多详情另见 [62] 。□

注记*3* 简单计算可知，若 $\bigoplus_{i\in I} Q_i \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$ 是有界的块对角算子，则其伴随算子 $\left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right)^* = \bigoplus_{i\in I} Q_i^* \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_W^2, \mathrm{K}_V^2)$ 仍为块对角算子 [63]。

本文还将考虑有界块对角算子的一个子类：若有界块对角算子 $\bigoplus_{i\in I} Q_i \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$分量保持，则称其为分量保持的，如果每个 $Q_i \in \mathrm{B}(V_i, W_i)$ 都是满射。

考虑自伴算子 $M_{V,k} = \mathrm{C}_{V,k}^* \mathrm{C}_{V,k} \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2)$，它们由 $M_{V,k}(f_i)_{i\in I} = (\delta_{ki} f_i)_{i\in I}$ for $k \in I$ 给出；类似地，考虑 $M_{W,k} = \mathrm{C}_{W,k}^* \mathrm{C}_{W,k} \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_W^2)$。由此可得如下刻画：有界算子 $Q \in \mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$ 是分块对角的（分别地，是分量保持的）。其证明直接由 Q 的典范矩阵表示的唯一性得出，见上文。

引理 9 设 $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_V^2, \mathcal{K}_W^2)$。则以下条件等价：

(i) Q 是分块对角的。*(ii)* $QM_{V,k} = M_{W,k}Q$ 对每个 $k \in I$ 都成立。*(iii)* $QM_{V,k}(\mathcal{K}_V^2) \subseteq M_{W,k}(\mathcal{K}_W^2)$ 对每个 $k \in I$ 都成立。

此外，以下两个条件等价：

(iv) Q 是分量保持的。*(v)* $QM_{V,k}(\mathcal{K}_V^2) = M_{W,k}(\mathcal{K}_W^2)$ 对每个 $k \in I$ 都成立。

请注意，在本综述余下部分，我们只重新考察特殊情形 $\mathrm{K}_V^2 = \mathrm{K}^{2,\mathcal{H}}$ 和 $\mathrm{K}_V^2 = \left(\sum_{i\in I} \oplus V_i\right)_{l^2}$，其中每个 V_i 都是 H 的闭子空间。特别地，在第6节中，我们不再区分 $M_{V,k}$ 和 $M_{W,k}$，而是统一写作 M_k 。

4 融合框架理论中的其他概念

本节将进一步讨论融合框架理论中的一些概念。

定义 4 [40, 81] 设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 H 的闭非零子空间族，$(v_i)_{i\in I}$ 是权重族。

- $V=(V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 称为融合 Riesz 基，若 $\mathrm{span}(V_i)_{i\in I}=\mathrm{H}$，且存在常数 $0<\alpha_V\le\beta_V<\infty$，分别称为下融合 Riesz 界和上融合 *Riesz* 界，使得对所有有限向量序列 $(f_i)_{i\in I}\in \mathrm{K}_V^{00}$，都有

$$\alpha_V\sum_{i\in I}\|f_i\|^2\le\left\|\sum_{i\in I}v_i f_i\right\|^2\le\beta_V\sum_{i\in I}\|f_i\|^2. \tag{24}$$

- $(V_i)_{i\in I}$ 称为 H 的正交归一融合基，若 $\mathrm{H}=\bigoplus_{i\in I}^{\perp}V_i$ [1]，即 $\mathrm{I}_{\mathcal{H}}=\sum_{i\in I}\pi_{V_i}$ 且 $V_i\perp V_j$ 对所有 $i\neq j\in I$均成立。换言之，正交归一融合基是由两两正交子空间构成的族，使得 $S_{V^1}=\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$，其中 $V^1=(V_i,\ 1)_{i\in I}$。因此，在此情形下，我们总是考虑均匀权重 $v_i=1(i\in I)$。
- $(V_i)_{i\in I}$ 称为 H 的*Riesz* 分解，如果对于每个 $f\in\mathrm{H}$，都存在唯一的向量族 $(f_i)_{i\in I}$（$f_i\in V_i\,(i\in I)$），使得 $f=\sum_{i\in I}f_i$。
- $(V_i)_{i\in I}$称为极小，如果对于每个 $i\in I$，$V_i\cap\overline{\mathrm{span}(V_j)_{\,j\in I,\ j\neq i}}=\{0\}$。

首先，我们证明每个融合 Riesz 基都是融合框架。这个结论可由融合框架相关算子 D_V 和 C_V 对融合 Riesz 基的以下刻画得出。

定理 14 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是由闭子空间V_i 构成的加权序列，且这些子空间属于 $\mathcal{H}$。则以下条件等价。

(i) V 是 $\mathcal{H}$的融合 *Riesz* 基。*(ii)* D_V在 $\mathcal{K}^2{}_{\mathcal{H}}$上有界，且 $\mathcal{R}(D_V)=\mathcal{H}$并且 $\mathcal{N}(D_V)=(\mathcal{K}_V^2)^{\perp}$。*(iii)* C_V 在 $\mathcal{H}$上有界，且 $\mathcal{R}(C_V)=\mathcal{K}_V^2$ 并且 $\mathcal{N}(C_V)=\{0\}$。

特别地，每个融合 *Riesz* 基都是具有相同界的融合框架。

证明 首先，注意到根据引理 6，K_V^2在希尔伯特空间 $\mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}}$中的正交补为 $\left(\sum_{i\in I}\oplus V_i^{\perp}\right)_{l^2}$。根据 D_V的定义，这意味着 $D_V=D_V(\pi_{\mathcal{K}_V^2}+\pi_{(\mathcal{K}_V^2)^{\perp}})=D_V\pi_{\mathcal{K}_V^2}$，因此 $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}=D_V\pi_{\mathcal{K}_V^2}$ 在 K_V^2 上成立。特别地，命题 (ii) 等价于 $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}\in\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2,\mathrm{H})$ 是双射算子，而命题 (iii) 等价于 $C_V\in\mathrm{B}(\mathrm{H},\mathrm{K}_V^2)$ 是双射算子。此外，与引理 3 的证明类似，我们可以证明 $(D_V|_{\mathcal{K}_V^2})^*=C_V$，并且有 $C_V^*=D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$（假设它们有界），这源于以下事实：我们总有 $\mathrm{R}(C_V)\subseteq\mathrm{K}_V^2$。

[1] 我们使用记号 $\bigoplus_{i\in I}^{\perp}$ 来强调这些子空间两两正交，因此我们考虑的是一种非常特殊的直和。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 对于希尔伯特空间之间的有界双射算子及其伴随算子 [46], 这通常成立。正如我们将在下文看到的，所有条件都意味着这些算子有界。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 若 V 是融合 Riesz 基，则由 (24) 的右侧不等式可知，D_V 在 $\mathrm{K}^{00}\mathcal{H}$ 上有界，因此由稠密性可知，它在 $\mathrm{K}^2\mathcal{H}$上也有界。这意味着 C_V 也有界。若 $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 不是满射，则存在 $0 \neq h \in \mathrm{R}(D_V|_{\mathcal{K}_V^2})^{\perp} = \mathrm{N}(C_V)$，使得对所有 $i \in I$ 都有 $h \perp V_i$。然而，由于 $(V_i)_{i\in I}$ 根据假设是完备的，存在某个序列 $(g_n)_{n=1}^{\infty} \in \operatorname{span}(V_i)_{i\in I}$，使得

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|h - g_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} (\|h\|^2 - \langle h, g_n\rangle - \langle g_n, h\rangle + \|g_n\|^2) = 2\|h\|^2 > 0,$$

矛盾。因此， $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 是满射。特别地，根据定理 13， V 是一个融合框架，因此形如 $D_V(f_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} v_i f_i$ （其中 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}_V^2$）的级数无条件收敛。为证明 $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 是单射，注意到 (24) 的左侧不等式蕴含 $D_V|_{\mathcal{K}_V^{00}}$是单射。然而，由于 D_V的连续性、K_V^{00}在 K_V^2 中的稠密性以及 $\sum_{i\in I} v_i f_i$的无条件收敛，(24) 的左侧不等式对所有序列 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}_V^2$均成立，这意味着$D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 是单射。(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) 若$D_V|_{\mathcal{K}_V^2} : \mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{H}$ 有界且为双射，则不等式 (24) 对所有序列 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}_V^2$ 均成立，因此也对所有有限向量序列成立。若 $(V_i)_{i\in I}$ 不完备，则存在 $0 \neq h \in \mathrm{H}$，使得 $h \perp \operatorname{span}(V_i)_{i\in I}$。特别地， $C_V h = 0$，矛盾。因此，~~V~~是一个融合 Riesz 基。

最后，由定理 13 可知，每个融合 Riesz 基都是融合框架。特别地，如果 V 是融合 Riesz 基（因而也是融合框架），那么这意味着 C_V 分别被相应的融合框架界从上、下界定，并且 D_V 分别被相应的融合 Riesz 基界从上、下界定。由于 $D_V C_V$ 和 $C_V D_V$ 具有相同的非零谱，我们可以得出结论：融合框架界的集合与融合 Riesz 基界的集合相同。□

回顾第 3 节，与融合框架 V相关联的权重 $(v_i)_{i\in I}$ 在上方是一致有界的，但不一定是半归一化的。然而，与融合 Riesz 基相关联的权重确实是半归一化的:

引理 10 *[81]* 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是一个融合 *Riesz* 基，其融合 *Riesz* 基常数为 α_V 和 β_V。则

(i) 对所有 $i \in I$， $\sqrt{\alpha_V} \leq \overline{v_i} \leq \sqrt{\beta_V}$*(ii)* 对于每个半归一化权重族 $(w_i)_{i\in I}$，$(V_i, v_i w_i)_{i\in I}$ 也是一个融合 *Riesz* 基。

证明 (i) 回顾融合 Riesz 基的定义，对于任意有限向量序列 $(f_j)_{j\in J} \in \mathrm{K}_V^{00}$，我们有

$$\alpha_V \sum_{j\in J} \|f_j\|^2 \leq \Big\| \sum_{j\in J} v_j f_j \Big\|^2 \leq \beta_V \sum_{j\in J} \|f_j\|^2.$$

现在，任取 $i \in I$，令 $J = \{i\}$，选取某个归一化的 $g \in V_i$ 并应用上述结果。

(ii) 可仿照引理 2 的证明得出。 □

回顾框架理论可知，每个具有 $\|\varphi_i\| = 1 (\forall i \in I)$ 的帕塞瓦尔框架 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 都是标准正交基（反之亦然）[43]。在融合框架情形中，类似结论也成立（回顾注 1 (b)，对于一维子空间 $V_i = \operatorname{span}\{\varphi_i\}$，$v_i$ 对应于 $\|\varphi_i\|$）。

定理 15 *[40]* 设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一族闭子空间。则以下命题等价。

(i) $(V_i)_{i\in I}$ 是正交归一融合基。*(ii)* $(V_i, 1)_{i\in I}$ 是帕塞瓦尔融合框架。

证明 (i)⇒(ii) 若 $(V_i)_{i\in I}$ 是正交归一融合基，则对所有 $f \in \mathrm{H}$，$f = \sum_{i\in I} \pi_{V_i} f$，其中子空间 V_i 两两正交。特别地，这意味着与 $V^1 = (V_i, 1)_{i\in I}$ 相关联的融合框架算子 S_{V^1} 满足 $S_{V^1} = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$。由推论 4 可知，这意味着 V^1 是帕塞瓦尔融合框架。

(ii)⇒(i) 对于每个 $i \in I$，令 $(e_{ij})_{j\in J_i}$ 为 V_i 的一组正交归一基。若假设 $(V_i, 1)_{i\in I}$ 是帕塞瓦尔融合框架，那么根据推论 2，族 $(e_{ij})_{i\in I,\, j\in J_i}$ 是帕塞瓦尔框架。由于每个由范数为 1 的向量组成的帕塞瓦尔框架都是一组正交归一基，因此 [43], $(e_{ij})_{i\in I,\, j\in J_i}$ 是 H 的一组正交归一基。这意味着对于所有 $i \neq j$，$V_i \perp V_j$ 都成立，并且对于所有 $f \in$，$f = \sum_{i\in I} \pi_{V_i} f$ 在 H 中成立。因此 $(V_i)_{i\in I}$ 是一组正交归一融合基。□

下一个命题是 [40, 引理 4.2], 的一个稍微一般化的版本，它利用局部 Riesz 基刻画极小子空间族，并给出了新的证明。

命题 4 设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一族闭子空间，并假设对于每个 $i \in I$，$(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 都是 V_i 的 *Riesz* 基。则以下条件等价。

(i) $(V_i)_{i\in I}$ 是极小的。*(ii)* $(\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的极小序列。

证明 注意，对每个子集 $K \subset I$，$\overline{\operatorname{span}(V_i)}_{i\in K} = \overline{\operatorname{span}(\varphi_{ij})}_{i\in K, j\in J_i}$：事实上，由于族 $(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 是局部黎斯基基，我们可以推出 $\operatorname{span}(V_i)_{i\in K} \subseteq \operatorname{span}(\varphi_{ij})_{i\in K,\, j\in J_i}$，且 $\operatorname{span}(\varphi_{ij})_{i\in K, j\in J_i} \subseteq \operatorname{span}(V_i)_{i\in I}$。现在取相应的闭包。

(ii)⇒(i) 如果 $(V_i)_{i\in I}$ 不是极小的，那么就存在某个非零 $g \in \mathrm{H}$，使得 $g \in V_k \cap \operatorname{span}(V_i)_{i\in I,\, i\neq k}$ 对于某个 $k \in I$。由于 $(\varphi_{kj})_{j\in J_k}$ 是 V_k 的一组 Riesz 基，我们可以将 $g = \sum_{j\in J_k} c_{kj}\varphi_{kj}$ 写成适当标量 c_{kj} 的形式。由于 $g \neq 0$，存在一个 $c_{km} \neq 0$，并且我们有

$$\begin{aligned} c_{km}\varphi_{km} &\in \overline{\operatorname{span}}(\varphi_{ij})_{i\neq k, j\in J_i} - \sum_{j\neq m} c_{kj}\varphi_{kj} \\ &\subseteq \overline{\operatorname{span}}(\varphi_{ij})_{i\neq k, j\in J_i} + \overline{\operatorname{span}}(\varphi_{kj})_{j\neq m} \\ &\subseteq \overline{\operatorname{span}}(\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i, (i,j)\neq(k,m)}. \end{aligned}$$

这与 (ii) 矛盾。

(i)⇒(ii) 如果 $(\varphi_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$ 不是极小的，那么就存在某个非零的 $\varphi_{kl}\in\operatorname{span}(\varphi_{ij})_{i\in I,j\in J_i,(i,j)\neq(k,l)}$。由于 $(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 对每个 $i\in I$ 都是 V_i 中的极小序列，因此我们知道 $\varphi_{kl}\notin\operatorname{span}(\varphi_{kj})_{j\in J_k,j\neq l}$，这意味着 $\varphi_{kl}\in\operatorname{span}(\varphi_{ij})_{i\in I,j\in\overline{J_i,i\neq k}}=\operatorname{span}(V_i)_{i\in I,i\neq k}$，矛盾。□

现在，我们几乎可以刻画那些作为融合 Riesz 基的融合框架了。我们只需证明下面这个预备引理。

引理 11 *[63]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$的闭子空间的加权族，并假设对每个 $i\in I$，$\varphi^{(i)}=(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$都是 V_i的帕塞瓦尔框架。那么，当且仅当 $v\varphi=(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$ 是$\mathcal{H}$的框架时，V才是$\mathcal{H}$的融合框架。在这种情况下，$S_{v\varphi}=S_V$。

证明 命题的第一部分由定理 10 立即得出。对于第二部分，回顾一下，$\varphi^{(i)}$ 是帕塞瓦尔当且仅当$S_{\varphi^{(i)}}=\mathrm{I}_{V_i}$。因此，对于每个$f\in$H

$$\begin{aligned}S_{v\varphi}f&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle f,v_i\varphi_{ij}\rangle v_i\varphi_{ij}\\&=\sum_{i\in I}v_i^2\sum_{j\in J_i}\langle f,\varphi_{ij}\rangle S^{-1}_{\varphi^{(i)}}\varphi_{ij}\\&=\sum_{i\in I}v_i^2\pi_{V_i}f=S_Vf\end{aligned}$$

且证明完毕。□

完成这些准备后，我们可以证明文献 [81]中一个结果的轻微推广：

定理 16 设$(V_i,v_i,\varphi^{(i)})_{i\in I}$是一个融合框架系统，并设 $\varphi^{(i)}$ 是 V_i的一个 *Riesz* 基，对每个 $i\in I$均成立。则以下命题等价。

(i) $(V_i)_{i\in I}$ 在$\mathcal{H}$中是极小的。*(ii)* $(V_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$的一个 *Riesz* 分解。*(iii)* $(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是$\mathcal{H}$的一个融合 *Riesz* 基。*(iv)* $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$是$\mathcal{H}$的一个 *Riesz* 基。*(v)* $S_V^{-1}V_i\perp V_k$，对所有 $i,k\in I$且 $i\neq k$。*(vi)* $v_i^2\pi_{V_k}S_V^{-1}\pi_{V_i}=\delta_{ik}\pi_{V_i}$对所有 $i,k\in I$ 均成立。

在这种情形下，$(S_V^{-1}S^{-1}_{\varphi^{(i)}}v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$与$(v_i\varphi_{ij})_{j\in J_i}$的典范对偶框架。$i\in I$相重合。

证明 (i)⇒(ii) 假设 $(V_i)_{i\in I}$ 不是 H 的 Riesz 分解。那么存在某个 $f\in\mathrm{H}$，使得 $f=\sum_{i\in I}f_i=\sum_{i\in I}g_i$，其中 $(f_i)_{i\in I}\neq(g_i)_{i\in I}\in(V_i)_{i\in I}$。因此，存在某个 $k\in I$，使得 $f_k\neq g_k\in V_k$。这意味着，$0\neq g_k-f_k=\sum_{i\in I,\ i\neq k}(f_i-g_i)$，从而 $g_k-f_k\in V_k\cap$张成空间$(V_i)_{i\in I,\ i\neq k}$，这表示 $(V_i)_{i\in I}$不是极小的。

(ii)⇒(iii) 根据假设， V 是一个融合框架；根据定理 13，这意味着 D_V 有界且满射。由于 $\mathrm{R}(D_V|_{\mathcal{K}_V^2}) = \mathrm{R}(D_V) = \mathrm{H}$，我们特别看到 $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 有界且满射。现在，若 $(V_i)_{i\in I}$ 是一个 Riesz 分解，则根据定义， $D_V|_{\mathcal{K}_V^2}$ 也是单射。根据定理 14，这意味着 V 是一个融合 Riesz 基。

(iii)⇒(i) 若 V 是融合 Riesz 基，则根据引理 10， $V^1 := (V_i,1)_{i\in I}$ 也是融合 Riesz 基。根据定理 14，其对应的合成算子 D_{V^1} 将 K_V^2 有界且双射地映射到 H。因此，对每个 $f \in \mathrm{H}$，都存在唯一的序列 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}_V^2$，使得 $f = D_{V^1}(f_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} f_i$。如果 $(V_i)_{i\in I}$ 不是极小的，那么就存在这样的 f，使得还有另一个序列 $(g_i)_{i\in I} \in (V_i)_{i\in I}$ 满足 $\sum_{i\in I} g_i = f$。于是，根据D_{V^1}的定义，$(g_i)_{i\in I} \in \mathrm{dom}(D_{V^1}) = \mathrm{K}_V^2$，这与 D_{V^1} 的双射性矛盾。

(iii)⇔(iv) 若 (iii) 成立，则根据引理 10，$(v_i)_{i\in I}$ 是半归一化的。另一方面，若 (iv) 成立，则 $(v_i)_{i\in I}$ 同样是半归一化的：事实上，与引理 10 类似，可以证明，与 Riesz 基对应的框架向量是半归一化的，其一致界由相应框架界的平方根给出。因此（参见定义 3） $\sqrt{A} \le \sqrt{A_i} \le \|\varphi_{ij}\| \le \sqrt{B_i} \le \sqrt{B}$(对所有 $i \in I$， $j \in J_i$)。同时我们知道，对于适当的常数 m， $M > 0$，有 $m \le \|v_i\varphi_{ij}\| \le M$(对所有 $i \in I$， $j \in J_i$)。因此 $(v_i)_{i\in I}$ 必定是半归一化的。现在注意到，(iv) 成立当且仅当 $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是一个极小序列。由于在两种情形下 $(v_i)_{i\in I}$ 都是半归一化的，后者成立当且仅当 $(\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是极小的。根据命题 4，这当且仅当 $(V_i)_{i\in I}$ 是极小的；而根据等价关系 (i) ⇔ (iii)，这等价于 V 是一个融合 Riesz 基。

(iii)⇒(v) 对任意 $i \in I$，令 $(e_{ij})_{j\in J_i}$ 为 V_i 的标准正交基。根据等价关系 (iii)⇔(iv) 和引理 11， $ve := (v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是 H 的 Riesz 基，且 $S_{ve} = S_V$。根据定理 7，ve 有唯一的双正交序列 $(S_{ve}^{-1} v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i} = (S_V^{-1} v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$，这意味着只要 $(i,\ j) \ne (k,\ l)$，就有 $S_V^{-1} e_{ij} \perp e_{kl}$。因此，只要 $i \ne k$，就有 $S_V^{-1} V_i \perp V_k$，证毕。

(v)⇒(vi) 对每个 $k \in I$，我们有

$$\pi_{V_k} = \pi_{V_k} S_V^{-1} S_V = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{V_k} S_V^{-1} \pi_{V_i} = v_k^2 \pi_{V_k} S_V^{-1} \pi_{V_k}.$$

(vi)⇒(v) 设 $f \in V_i$ 和 $g \in V_k$，其中 $i \ne k$。则

$$\left\langle S_V^{-1} f, g \right\rangle = \left\langle S_V^{-1} \pi_{V_i} f, \pi_{V_k} g \right\rangle = \frac{1}{v_i^2} \left\langle v_i^2 \pi_{V_k} S_V^{-1} \pi_{V_i} f, g \right\rangle = 0.$$

(vi)⇒(i) 根据定理 7，只需证明框架 $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 与族 $(S_V^{-1} S_{\varphi^{(i)}}^{-1} v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 双正交。利用条件 (vi)，可得

$$\begin{aligned}\langle v_i\varphi_{ij}, S_V^{-1}S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle &= \langle v_i\pi_{V_i}\varphi_{ij}, S_V^{-1}\pi_{V_k}S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle \\ &= \frac{1}{v_i}\langle v_i^2\pi_{V_k}S_V^{-1}\pi_{V_i}\varphi_{ij}, S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle \\ &= \frac{1}{v_i}\langle \delta_{ik}\pi_{V_i}\varphi_{ij}, S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle = \frac{1}{v_i}\langle \delta_{ik}\varphi_{ij}, S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle.\end{aligned}$$

在情形 $k \neq i$下，这给出$\langle v_i\varphi_{ij}, S_V^{-1}S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle = 0$；在情形 $k = i$下，我们继续使用 —
$\langle v_i\varphi_{ij}, S_V^{-1}S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle = \frac{1}{v_k}\langle \varphi_{kj}, S_{\varphi^{(k)}}^{-1}v_k\varphi_{kl}\rangle = \langle \varphi_{kj}, S_{\varphi^{(k)}}^{-1}\varphi_{kl}\rangle = \delta_{jl}$，这里用到了每个局部里斯基底 $\varphi^{(i)}$ 都与其典范对偶 $(S_{\varphi^{(i)}}^{-1}\varphi_{ij})_{j\in J_i}$双正交这一事实。

最后的结论由 (vi)~~(i)~~ 的证明结合定理 7 得出。□

因此我们得到如下结论。

推论 5 如果 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是一个融合 *Riesz* 基，使得 S_V 和 π_{V_i} 对所有 $i \in I$均可交换，则$(V_i)_{i\in I}$ 是一个正交归一融合基。特别地，每个紧融合 *Riesz* 基都是正交归一融合基。

证明 利用定理 16 中的条件 (vi)，我们得到

$$\sum_{i\in I}\pi_{V_i} = \sum_{i\in I}v_i^2\pi_{V_i}S_V^{-1}\pi_{V_i} = S_V^{-1}S_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}},$$

这意味着 $(V_i,1)_{i\in I}$ 是一个帕塞瓦尔融合框架。根据定理 15，这意味着 $(V_i)_{i\in I}$ 是一个正交归一融合基。□

以下结果表明，定理 7 中的蕴含关系 (iii)~~(i)~~ 在融合框架情形下不成立。对于融合框架，只有其逆命题仍然成立。

命题 5 *[40]* 每个融合 *Riesz* 基都是精确融合框架。反之一般不成立。

证明 设 $V = (V_i, v_i)$ 是一个融合 Riesz 基。根据定理 14，C_V 将 H 双射映射到 K_V^2。任取一个指标 $k \in I$，并选取某个非零$g \in V_k$。则 $(\ldots, 0, 0, g, 0, 0, \ldots)$（$g$ 位于第 k 个分量中）是 K_V^2 的一个元素，因此属于 $\mathrm{R}(C_V)$。所以，存在唯一的非零 $f \in \mathrm{H}$，使得 $(\ldots, 0, 0, g, 0, 0, \ldots) = C_V f = (v_i\pi_{V_i}f)_{i\in I}$。特别地，对所有 $i \neq k$，$\pi_{V_i}f = 0$。因此，若从融合框架 V 中移除 (V_k, v_k)，就无法对 f 保持融合框架不等式。由于 k 是任意选取的，这意味着 V 是精确的。

为说明逆命题不成立，考虑 $e_i{}_{i=1}^3$ 为 $\mathbb{R}^3$的一个标准正交基，并令 E_1 = 张成空间{e_1、 e_2}， E_2 = 张成空间{e_2、 e_3}以及 $w_1 = w_2 = 1$。显然，这是一个精确融合框架；由于 $E_1 \cap E_2 \neq 0$，它不是 Riesz 分解，因此（定理 16）也不是融合 Riesz 基。或者，注意到全局框架（ e_1、 e_2、 e_2、 e_3）不是 Riesz 基。□

5 融合框架与算子

在本节中，我们考察算子作用下的子空间及其张成性质。在这里，我们将遇到更多结果，这些结果展示了框架与融合框架之间的差异，例如命题5。

我们从以下初步结果开始。这些结果直接源于首次讨论融合框架的对偶性，以及相关的观察： $T\pi_V$通常不是投影。

引理 12 *[42]* 设 V是 $\mathcal{H}$的闭子空间，且 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$\pi_V T^* = \pi_V T^* \pi_{\overline{TV}}. \tag{25}$$

证明 首先注意到， $g \in (TV)^\perp = (\overline{TV})^\perp$ 当且仅当 $T^* g \in V^\perp$。因此，对于所有 $f \in \mathrm{H}$ ，我们可得

$$\pi_V T^* f = \pi_V T^* \pi_{\overline{TV}} f + \pi_V T^* \pi_{(TV)^\perp} f = \pi_V T^* \pi_{\overline{TV}} f.$$

引理 13 设 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且$(\varphi_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$是 $\mathcal{H}$中的可数向量族。则 U张成空间$(\varphi_i)_{i\in I} \subseteq$ 张成空间$(U\varphi_i)_{i\in I}$。若 U 还是双射，则U张成空间$(\varphi_i)_{i\in I}$ = 张成空间$(U\varphi_i)_{i\in I}$。

证明 令 $g = Uf \in U\mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$for $f \in \mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$。那么存在一个序列 $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$，使得 $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$as $n \to \infty$。这意味着 $(Uf_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{span}(U\varphi_i)_{i\in I}$在 H 中收敛到 $Uf = g$，因为 $\|Uf - Uf_n\| \le \|U\|\|f - f_n\| \longrightarrow 0$as $n \to \infty$。因此 $g \in \mathrm{span}(U\varphi_i)_{i\in I}$。

对于第二部分，假设 $g \in \mathrm{span}(U\varphi_i)_{i\in I}$。那么存在一个序列 $(g_n)_{n=1}^\infty = (Uf_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathrm{span}(U\varphi_i)_{i\in I}$，使得 $\|g - Uf_n\| \longrightarrow 0$as $n \to \infty$。特别地，我们有 $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$。此外，由于 U是满射，存在某个 $f \in \mathrm{H}$，满足$Uf = g$。利用 U的可逆性，这意味着 $f \in \mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$，因为 $\|f - f_n\| = \|U^{-1}Uf - U^{-1}Uf_n\| \le \|U^{-1}\|\|Uf - Uf_n\| \longrightarrow 0$as $n \to \infty$。因此 $g = Uf \in U\mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in I}$。□

如果 $U \in \mathrm{B(H)}$ 不是双射，那么引理 13 中的反向包含一般而言并不成立：

例子

设 $\mathrm{H} = l^2(\mathbb{N})$，且对于 $i \in \mathbb{N}$，有 $\varphi_i = (\delta_{in} \cdot 1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$。由 $U(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot 1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ 定义的算子U： $l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$，在 $l^2(\mathbb{N})$ 上是有界的，且 $\|U\| = 1$，我们有 $U\varphi_i = (\delta_{in} \cdot 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$。注意到，$(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} U\varphi_i \in \mathrm{span}(U\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$。然而，$(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不包含于 $U\mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 中。事实上，根据 U的逐分量定义，唯一可能被 U映射到 $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的序列是 $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$。但由于 $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin l^2(\mathbb{N})$，我们特别有 $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathrm{span}(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$。注意，上述结果表明， U 不是满射。

由引理 13，我们还可以很容易地推出以下两个结果。

推论 6 设 $(\varphi_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ 且 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

(i) 若 $(U\varphi_i)_{i\in I}$ 是极小的，且 U 是单射，则 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 是极小的。若 U 是双射，逆命题也成立。*(ii)* 若 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 是完备序列，且 U 具有稠密值域，则 $(U\varphi_i)_{i\in I}$ 是完备序列。若 U 是双射，逆命题也成立。

证明 (i) 假设 $(U\varphi_i)_{i\in I}$ 是极小序列，而 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 不是极小序列。那么存在某个 $m \in I$，使得 $\varphi_m \in$ 张成空间$(\varphi_i)_{i\in I,\ i\neq m}$。由于 U 是单射，我们有 $U\varphi_m \neq 0$；根据引理 13，$U\varphi_m \in U$ 张成空间$(\varphi_i)_{i\in I,\ i\neq m} \subseteq$ 张成空间$(U\varphi_i)_{i\in I,\ i\neq m}$，这就产生了矛盾。第二个结论的证明类似。

(ii) 由于 $(\varphi_i)_{i\in I}$完备，根据引理 13 可知 $U(\mathrm{H}) = U$张成空间$(\varphi_i)_{i\in I} \subseteq$ 张成空间$(U\varphi_i)_{i\in I}$。因此 $\mathrm{H} = U(\mathrm{H}) \subseteq$张成空间$(U\varphi_i)_{i\in I}$。同理，用 U^{-1} 代替U重复上述论证即可证明第二个结论。□

推论 7 设 V是 $\mathcal{H}$的一个闭子空间，且 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$是双射。则$UV$ 是 $\mathcal{H}$的一个闭子空间。

有了这些预备结果，我们可以证明融合框架性质在有界可逆算子的作用下保持不变。具体而言：

定理 17 *[42]* 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个融合框架，其融合框架界为 $A_V \leq B_V$，并设 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 可逆。则 $UV = (UV_i, v_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$上的一个融-合框架，其融合框架界为 $A_V \left\|U^{-1}\right\|^{-2} \|U\|^{-2}$和 $B_V \left\|U^{-1}\right\|^2 \|U\|^2$，且其对应的融合框架算子 S_{UV} 满足

$$\frac{US_VU^*}{\|U\|^2} \leq S_{UV} \leq \|U^{-1}\|^2 US_VU^*.$$

证明 根据推论 7，每个子空间 UV_i 都是闭的。设 $f \in \mathrm{H}$ 为任意的。于是由 (25) 可得

$$\begin{aligned}
\langle S_{UV}f, f\rangle &= \sum_{i\in I} v_i^2 \left\|\pi_{UV_i} f\right\|^2 \\
&= \sum_{i\in I} v_i^2 \left\|\pi_{UV_i}(U^{-1})^*\pi_{V_i}U^* f\right\|^2 \\
&\leq \left\|U^{-1}\right\|^2 \sum_{i\in I} v_i^2 \left\|\pi_{V_i}U^* f\right\|^2 \\
&= \left\|U^{-1}\right\|^2 \left\langle US_VU^* f, f\right\rangle.
\end{aligned}$$

由引理12可知,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{US_VU^*}{\|U\|^2}f, f\right\rangle &= \frac{1}{\|U\|^2}\sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{V_i}U^*f\|^2 \\ &= \frac{1}{\|U\|^2}\sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{V_i}U^*\pi_{UV_i}f\|^2 \\ &\le \sum_{i\in I} v_i^2 \|\pi_{UV_i}f\|^2 = \langle S_{UV}f, f\rangle.\end{aligned}$$

Thus

$$\frac{US_VU^*}{\|U\|^2} \le S_{UV} \le \|U^{-1}\|^2 US_VU^*.$$

此外，注意到对于所有 $f\in \mathrm{H}$, $\|f\| \le \|U^{-1}\|\|U^*f\|$。综合以上观察，我们得到

$$\begin{aligned}A_V \frac{1}{\|U^{-1}\|^2\|U\|^2}\|f\|^2 &\le A_V \frac{1}{\|U\|^2}\|U^*f\|^2 \\ &\le \frac{1}{\|U\|^2}\left\langle S_VU^*f, U^*f\right\rangle \\ &\le \langle S_{UV}f, f\rangle \\ &\le \left\|U^{-1}\right\|^2 \left\langle US_VU^*f, f\right\rangle \le B_V \left\|U^{-1}\right\|^2 \|U\|^2\|f\|^2\end{aligned}$$

对所有 $f\in \mathrm{H}$，所求即得。 □

由上述结果，我们立即得到以下结论：

推论 8 *[55]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中闭子空间的加权族，且 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 可逆。那么以下命题等价：

(i) V 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架。*(ii)* $UV=(UV_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架。

推论 9 *[55]* 设 $(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架，其融合框架界为$A_V \le B_V$。那么 $S_V^{-1}V=(S_V^{-1}V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架，其融合框架界为 $A_V^3/B_V^2 \le B_V^3/A_V^2$。

证明 在定理 17 中用 U 代入 S_V^{-1}，可得 $(S_V^{-1}V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架，其框架界为 $A_V\|S_V\|^{-2}\|S_V^{-1}\|^{-2}$ 和 $B_V\|S_V\|^2\|S_V^{-1}\|^2$。结合 (10) 中相应的算子范数估计，即可得到所述的融合框架界。□

对于酉算子 $U\in\mathrm{B}(\mathrm{H})$，定理 17 得出以下结论。

推论 10 设 V是 $\mathcal{H}$上的融合框架，且 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是酉的。则 UV是具有相同融合框架界的融合框架，其关联的融合框架算子为 $S_{UV}=US_VU^*$。

我们还注意到，融合 Riesz 基在有界可逆算子的作用下保持不变。换言之，推论 1 (iii)在融合框架情形下仍然成立。

定理 18 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是希尔伯特空间中的闭子空间加权族，且 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 可逆。以下条件等价。

(i) V 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的融合 *Riesz* 基。*(ii)* $UV:=(UV_i, v_i)_{i\in I}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的融合 *Riesz* 基。

证明 (i)~~(i)~~ (ii) 定理 17 表明 UV 是融合框架。因此，根据定理 16，只需证明 $(UV_i)_{i\in I}$ 是极小的。为此，假设 $(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 对每个 $i\in I$ 都是 V_i 的 Riesz 基。由于 V 是融合 Riesz 基，定理 16 表明 V 是极小融合框架。根据命题 4，$(\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 是 H 中的极小序列；根据推论 6，$(U\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 也极小。由于 U 可逆，也容易看出 $(U\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 对每个 $i\in I$ 都是 UV_i 的 Riesz 基。因此，根据命题 4，UV 是极小的。

(i)~~(i)~~ (ii) 根据上述结论，如果 UV 是融合 Riesz 基，那么 $V=U^{-1}UV$ 也是融合 Riesz 基。 □

鉴于推论 1 (ii)，接下来研究有界满射算子作用下的融合框架似乎顺理成章。乍一看，人们可能会猜想，若 $V=(V_i,\ v_i)_{i\in I}$是一个融合框架，且 $U\in$B(H) 是满射的，那么 $UV=(UV_i,\ v_i)_{i\in I}$是 H 的一个融合框架，因为框架也有相应的结论。然而，对一般的融合框架而言，这样的结论并不成立。事实上，对于一个满射算子 $U\in$B(H)，UV_i一般甚至不是闭子空间。即使我们只想证明关于闭子空间UV_i的相应结论，也需要增加一个假设，否则该结论不成立（见下文）。

命题 6 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 H 的一个融合框架，其融合框架界为$A_V\ \le\ B_V$；设 $U\in$B(H) </style}是满射的，且具有附加性质：对所有 ，成立。那么 $(UV_i, v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架，其融合框架界为 $A_V\left\|U^{\dagger}\right\|^{-2}\|U\|^{-2}\le B_V\left\|U^{\dagger}\right\|^{2}\|U\|^{2}$。

证明 设 $(e_{ij})_{j\in J_i}$是 V_i的标准正交基，对每个 $i\in I$均成立。于是，由定理 10，$(v_ie_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是 H 的一个框架，其框架界为 A_V和 B_V。由定理 8，$(v_iUe_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$也是 H 的一个框架，并且可以根据推论 5.3.2]计算得出，$A_V\left\|U^{\dagger}\right\|^{-2}$和 $B_V\|U\|^2$是它的框架界。现在，任取 $i\in I$并选择 $Uf_i\in UV_i$。那么

$$\frac{\|Uf_i\|^2}{\left\|U^{\dagger}\right\|^2}=\frac{\left\|\pi^{*}_{\mathcal{R}(U)}Uf_i\right\|^2}{\left\|U^{\dagger}\right\|^2}=\frac{\left\|(U^{\dagger})^{*}U^{*}Uf_i\right\|^2}{\left\|U^{\dagger}\right\|^2}\le\|U^{*}Uf_i\|^2.$$

由于 $U^{*}UV_i\subseteq V_i$，我们可以继续

$$\|U^{*}Uf_i\|^2=\sum_{j\in J_i}\left|\left\langle U^{*}Uf_i, e_{ij}\right\rangle\right|^2=\sum_{j\in J_i}\left|\left\langle Uf_i, Ue_{ij}\right\rangle\right|^2.$$

另一方面，显然 $\|U^*Uf_i\|^2 \leq \|U\|^2\|Uf_i\|^2$。综上，这意味着 $Ue^{(i)}:=(Ue_{ij})_{j\in J_i}$ 对来自 UV_i 的所有元素都满足框架不等式。最后，利用稠密性论证 [43, 引理5.1.7]，我们可以得出结论：族 $Ue^{(i)}$ 是各自闭子空间 UV_i 的框架，且具有共同的框架界 $\|U^\dagger\|^{-2}$ 和 $\|U\|^2$。因此，应用定理 10 可得，$(UV_i,\ v_i)$ 是 H 上的融合框架，其融合框架界为 $A_V\left\|U^\dagger\right\|^{-2}\|U\|^{-2}$ 和 $B_V\left\|U^\dagger\right\|^2\|U\|^2$。□

下面的例子表明，即使我们考虑一个正交归一融合基 $(E_i)_{i\in I}$，并在每个 E_i 上施加一个有界满射算子 $U\in\mathrm{B}(\mathrm{H})$，那么，与希尔伯特框架情形——定理 8 和推论 1——不同，无论我们选择哪一个权重族 $(v_i)_{i\in I}$，也不一定能得到 $(UE_i,\ v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架。这是将框架的性质与融合框架的性质区分开来的另一项观察。

例子 [80]

设 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是某个无限维希尔伯特空间 H 的一个标准正交基，并对每个 $k\in\mathbb{N}$ 定义 $E_k:=\mathrm{span}\{e_{2k-1},\ e_{2k}\}$。那么 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个正交归一融合基。

接下来，考虑如下定义的线性算子 $U:\mathrm{H}_0\longrightarrow\mathrm{H}$:

$$Ue_n:=\begin{cases}2^{-\frac{n+1}{2}}e_1 & \text{if } n \text{ is odd}\\ e_{\frac{n}{2}+1} & \text{if } n \text{ is even}\end{cases},$$

其中，$\mathrm{H}_0:=\left\{f\in\mathrm{H}:\ f=\sum_{n\in K}\langle f,e_n\rangle e_n,\ |K|<\infty\right\}$。我们证明 U 在 H_0 上是有界的。对于任意 $g=\sum_{n\in K}\langle g,e_n\rangle e_n\in\mathrm{H}_0$，有

$$\begin{aligned}Ug&=\sum_{n\in K}\langle g,e_n\rangle Ue_n\\&=\sum_{\substack{n\in K\\ n\text{ odd}}}\langle g,e_n\rangle 2^{-\frac{n+1}{2}}e_1+\sum_{\substack{n\in K\\ n\text{ even}}}\langle g,e_n\rangle e_{\frac{n}{2}+1}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|Ug\|^2 &= \left\| \sum_{\substack{n\in K\\ n \text{ odd}}} \langle g, e_n\rangle 2^{-\frac{n+1}{2}} e_1 \right\|^2 + \sum_{\substack{n\in K\\ n \text{ even}}} \left\| \langle g, e_n\rangle e_{\frac{n}{2}+1} \right\|^2 \\ &\le \left(\sum_{\substack{n\in K\\ n \text{ odd}}} |\langle g, e_n\rangle| 2^{-\frac{n+1}{2}} \right)^2 + \sum_{\substack{n\in K\\ n \text{ even}}} |\langle g, e_n\rangle|^2 \\ &\le \left(\sum_{n\in K} |\langle g, e_n\rangle|^2 \right) \left(\sum_{n\in K} 2^{-(n+1)} \right) + \sum_{n\in K} |\langle g, e_n\rangle|^2 \\ &\le 3\|g\|^2.\end{aligned}$$

由于 H_0 是 H 的稠密子空间，因此存在唯一的延拓，将 U （仍记为 U）延拓为 H 上的有界算子。为证明 U 是满射，任取 $f \in \mathrm{H}$。根据 U的定义，

$$\begin{aligned}f &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n \\ &= \langle f, 2Ue_1\rangle 2Ue_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \langle f, Ue_{2n-2}\rangle Ue_{2n-2} \\ &= U\Big(4\langle U^* f, e_1\rangle e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \langle U^* f, e_{2n-2}\rangle e_{2n-2} \Big).\end{aligned}$$

现在，令 $V_k := UE_k = \mathrm{span}\{e_1, e_{k+1}\}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。反设存在一族权重 $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $(V_k, v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H 上具有融合框架界 $A_v \le B_v$ 的融合框架。然后，将相应的融合框架不等式应用于 $f = e_1$，得到 $A_v \le \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k^2 \le B_v$，即 $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$。另一方面，对于 $f = e_{k+1}$，我们得到

$$A_v = A_v \|e_{k+1}\|^2 \le \sum_{l\in\mathbb{N}} v_l^2 \|\pi_{V_l} e_{k+1}\|^2 = v_k^2 \qquad (\forall k \in \mathbb{N}),$$

这与 $v_k \to 0$ （因为 $k \to \infty$）矛盾。

上述例子失败的原因是 $\gamma_{(U\pi_{E_k})} / \|U\pi_{E_k}\| = 2^{-k} \to 0 (\text{as} k \to \infty)$，其中 $\gamma(A)$ 表示有界算子 $A \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ 的最小模，其定义为 $\gamma(A) = \inf \{\|Af\|, \|f\| = 1, f \in \mathrm{N}(A)^{\perp}\}$ [80]。最小模这类算子理论概念可用于推导相应条件，从而使命题 6（以及针对融合框架序列的类似命题）这类论述得以成立 [80]。

上述例子的逆命题在以下意义下成立。下文将证明，每个融合框架 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 都包含一个正交归一融合基 $(E_i)_{i\in I}$ 在有界满射算子 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 下的像，这意味着 $V_i \supseteq UE_i$ 对所有 $i \in I$ 均成立。注意，如果 V 对应于一个框架 $(\varphi_i)_{i\in I}$，即每个 $V_i = \mathrm{span}\{\varphi_i\}$ 都是一维的，那么根据定理 8，$V_i = UE_i$ 显然成立，因为我们默认排除 $V_i = \{0\}$ 这种情形。从这个意义上说，下一个结果确实推广了定理 8 (b) 的必要性部分。注意，如果 V 是融合 Riesz 基，那么对所有 $i \in I$，确实有 $V_i = UE_i$；其中 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 是双射，见命题 8。

命题 7 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架。则 $V_i \supseteq UE_i$ 对所有 $i \in I$ 均成立，其中 $(E_i)_{i\in I}$ 是一个正交归一融合基，且 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是满射的。

证明 假设 $(e_{ij})_{j\in J_i}$ 是 V_i 的一个标准正交基，对每个 $i \in I$ 均成立。因此，根据定理 10，$(v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是 H 上的一个框架。根据定理 8，存在一个满射算子 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$，以及 H 的一个标准正交基 $(\psi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$，使得 $v_i e_{ij} = U\psi_{ij}$ 对所有 $i \in I,\ j \in J_i$ 均成立。令 $E_i := \mathrm{span}(\psi_{ij})_{j\in J_i}$ 对每个 $i \in I$ 均成立。则 $(E_i)_{i\in I}$ 是 H 的~~一个正~~交归一融~~合基，~~ 并且根据引理 ~~13~~，对于每个 $i \in I$，我们有 $UE_i = U\mathrm{span}(\psi_{ij})_{j\in J_i} \subseteq \mathrm{span}(U\psi_{ij})_{j\in J_i} = \mathrm{span}(v_i e_{ij})_{j\in J_i} = V_i$。□

命题 8 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合 *Riesz* 基。那么 $(V_i)_{i\in I} = (UE_i)_{i\in I}$，其中 $(E_i)_{i\in I}$ 是正交归一融合基，且 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是双射的。

证明 假设对于每个 $i \in I$，$(e_{ij})_{j\in J_i}$ 都是 V_i 的标准正交基。由定理 16，$(v_i e_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 是 H 的 Riesz 基。因此，根据定理 8 (c)，存在一个双射算子 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$，以及 H 的一个标准正交基 $(\psi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$，使得对于所有 $i \in I, j \in J_i$，$v_i e_{ij} = U\psi_{ij}$。对每个 $i \in I$，令 $E_i := \mathrm{span}(\psi_{ij})_{j\in J_i}$。那么 $(E_i)_{i\in I}$ 是 H 的正交归一~~融合基~~，并且根据~~引理~~ 13，对于每~~个 $i \in$~~ I，有 $UE_i = U\mathrm{span}(\psi_{ij})_{j\in J_i} = \mathrm{span}(U\psi_{ij})_{j\in J_i} = \mathrm{span}(v_i e_{ij})_{j\in J_i} = V_i$。□

我们以框架与融合框架性质之间的另一个重大差异来结束本节。回忆一下，若 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 是一个框架，其框架算子为 S_φ，则族 $(S_\varphi^{-1/2}\varphi_i)_{i\in I}$ 始终是一个帕塞瓦尔框架 [43]。而在融合框架情形中，情况则大不相同。下面我们给出一个融合框架 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 的例子，使得对于任意有界可逆算子 $U \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$，$UV = (UV_i, w_i)_{i\in I}$ 绝不可能成为帕塞瓦尔融合框架，无论我们选择哪一族权重 $(w_i)_{i\in I}$：

例子 [80]

设 $\mathrm{H} = \mathbb{C}^4$ 和 $(e_i)_{i=1}^4$ 是 $\mathbb{C}^4$ 的一组标准正交基。考虑 $\mathbb{C}^4$ 上的融合框架 $(V_i, 1)_{i=1}^3$，其中 $V_1 =$ 张成空间 $\{e_1, e_2\}$，$V_2 =$ 张成空间 $\{e_1, e_3\}$，且 $V_3 =$ 张成空间 $\{e_4\}$。我们声称，对于任意可逆矩阵 $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ 以及任意一组权重 $(w_i)_{i=1}^3$，$(UV_i, w_i)_{i\in I}$ 都不可能是 $\mathbb{C}^4$ 上的帕塞瓦尔融合框架。事实上，令 $g_1 = \|Ue_1\|^{-1}Ue_1, g_4 = \|Ue_4\|^{-1}Ue_4$，并选择 g_2 和 g_3，使得 (g_1, g_2) 是

UV_1 的一组标准正交基，且 (g_1, g_3) 是 UV_2的一组标准正交基。假设 $(UV_i, w_i)_{i\in I}$ 是一个帕塞瓦尔融合框架。根据推论 2，其对应的全局框架$wg = (w_1g_1, w_2g_1, w_1g_2, w_2g_3, w_3g_4)$将是一个帕塞瓦尔框架。令$D_{wg} \in \mathbb{C}^{4\times5}$ 为其对应的合成矩阵，即以 wg 的框架元素为列向量组成的矩阵。再令 $H \in \mathbb{C}^{4\times4}$ 为一个酉矩阵，其第一行为 g_1，并将其余各行记为 h_2,h_3,h_4。那么

$$H \cdot D_{wg} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{bmatrix}$$

对于某个 $\mathbf{v} = (0,0,z) \in \mathbb{C}^3$ 和由下式给出的 $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$

$$A = \begin{bmatrix} \langle h_2, w_1g_2\rangle & \langle h_2, w_2g_3\rangle & \langle h_2, w_3g_4\rangle \\ \langle h_3, w_1g_2\rangle & \langle h_3, w_2g_3\rangle & \langle h_3, w_3g_4\rangle \\ \langle h_4, w_1g_2\rangle & \langle h_4, w_2g_3\rangle & \langle h_4, w_3g_4\rangle \end{bmatrix}.$$

由于 $HD_{wg}(HD_{wg})^* = HD_{wg}D_{wg}^*H^* = HS_{wg}H^* = HH^* = \mathrm{I}_{\mathbb{C}^4}$，我们必须有 $1 = w_1^2 + w_2^2 + |z|^2$，且 A 必须是酉的。但这是不可能的，因为 A 的前两列的范数分别为 $\|w_1g_2\| = w_1$ 和 $\|w_2g_3\| = w_2$，而 $1 = w_1^2 + w_2^2 + |z|^2$。

特别是，上述例子表明，对于某些融合框架 $(V_i, v_i)_{i\in I}$，融合框架 $(S_V^{-1/2}V_i, w_i)_{i\in I}$不可能在任何权重 $(w_i)_{i\in I}$的选择下成为帕塞瓦尔框架。

不过，我们仍然可以表述一个特定的正面结果：

命题9 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合 *Riesz* 基。那么，$(S_V^{-1/2}V_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$ 的正交归一融合基。

证明 假设对于每个 $i \in I$，$(e_{ij})_{j\in J_i}$是 V_i的标准正交基。根据定理 16 和引理 11，$(v_ie_{ij})_{j\in J_i,\ i\in I}$ 是 H 的 Riesz 基，其框架算子为 S_V。因此，$(v_iS_V^{-1/2}e_{ij})_{j\in J_i,\ i\in I}$是 H 的标准正交基。结合对于每个 $i \in I$，$(v_iS_V^{-1/2}e_{ij})_{j\in J_i}$是 $S_V^{-1/2}V_i$ 的标准正交基这一事实，我们看到，$(S_V^{-1/2}V_i)_{i\in I}$ 是 H 的正交归一融合基。□

6 融合框架理论中的对偶性

本节将介绍融合框架的对偶理论。对偶理论更清楚地凸显了框架与融合框架之间的差异。因此，我们决定先介绍对偶融合框架这一概念的起源。随后，我们将按照 [59, 57]介绍融合框架的对偶理论。我们还将改编 [58],中的结果，其中该概念是在更一般的斜对偶性框架下进行分析的。我们将研究这一概念的性质并给出示例。最后，我们将讨论对偶融合框架概念的特定情形和其他处理方法。

回顾一下，在框架理论中，每个 $f \in \mathrm{H}$ 都由标量系数的集合 $\langle f, \varphi_i \rangle$, $i \in I$表示，这些系数可以看作是 f在每个框架向量上的投影度量。利用这些系数，可以通过对偶框架和重构公式（如式 (5)）稳定地恢复 f，即

$$\sum_{i\in I} \langle f, \psi_i \rangle \varphi_i = \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \psi_i = f \qquad (\forall f \in \mathcal{H}).$$

用算子记号表示为

$$D_\varphi C_\psi = D_\psi C_\varphi = \mathcal{I}_\mathcal{H}. \tag{26}$$

如第 2.1 节所述，冗余框架有无穷多个对偶框架，因此框架在无数应用中备受青睐。考虑到这一点，我们希望像经典框架理论中那样定义对偶融合框架，并由此得到类似的结果。由于对偶条件可以用式 (5) 和式 (26) 两种形式表示，因此自然可以尝试将这些表达式推广到融合框架的情形，从而得到对偶融合框架的定义。

满足对偶融合框架所需性质的概念由此提出，并在 [59, 57], 中得到研究, 其中系数空间取为 K_V^2。其推理过程如下：

设 $V = (V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 为一个融合框架。由于 $S_V^{-1} S_V = \mathrm{I}_\mathcal{H}$，我们有如下重构公式

$$f = \sum_{i\in I} v_i^2 S_V^{-1} \pi_{V_i} f \qquad (\forall f \in \mathcal{H}), \tag{27}$$

这与式 (4) 类似。族 $(S_V^{-1} V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架（见推论 9），在 [40, 定义 3.19] 中称为 V的对偶融合框架，与经典框架理论中的典范对偶框架类似。正如 [41,第 13], 章所指出的，式 (27)——与框架的式 (5) 不同——并不能自动导出对偶融合框架的概念。

因此，我们可以尝试从（26）入手，而不是试图推广（5）。但在这种情形下，我们会遇到以下障碍。给定 H 上的两个融合框架 $V = (V_i,\ v_i)_{i\in I}$和 $W = (W_i,\ w_i)_{i\in I}$，其中 $(V_i)_{i\in I} \neq (W_i)_{i\in I}$，如果像原论文中那样，将相应的合成算子定义在各自的子空间 K_V^2 和 K_W^2 上，这两个合成算子的定义域便不同。因此，无法将 D_W 与 C_V 复合。在 [59] （另见 [57]）中，为了克服这个定义域问题，在 D_W 和 C_V之间插入了 $Q : \mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{K}_W^2$:

$$D_W Q C_V$$

由此产生了通常所称的 Q-对偶融合框架。当时的理念是对 Q施加额外条件，以获得对偶融合框架所需的不同性质，类似于对偶框架所具有的性质。这就是为什么首先采用一般的 Q ，仅要求 Q有界，从而得到

与对偶框架中存在的类似的极小限制刻画（见第6.1节）。

为了获得便于计算的重构公式，人们引入了分块对角对偶融合框架 [57]（另见 [58]）。对偶融合框架系统 [57, 58], 是局部处理任务中的有用工具，结果也具有分块对角结构。在研究对偶融合框架与分析算子的有界左逆之间的关系时，人们提出了一类特殊的分块对角对偶融合框架，称为分量保持对偶融合框架[58, 59, 57]。它们可由分析算子的左逆得到，因此易于构造。这类框架尤为重要，因为典范对偶融合框架就属于这一类型。此外，它们在应用中至关重要，因为在存在擦除时它们是最优的 [57, 72] （见第6节2）。

如果将 $\mathrm{K}^2\,\mathcal{H}$ 视为系数空间 – ，就像本综述前文所做的那样 – ，那么在 D_W 与 C_V 的复合中不存在定义域问题，因此原则上无需在二者之间加入算子 Q 。在这种情形下，寻找对偶融合框架定义时首先想到的办法，可能是直接从（26）推广对偶概念。然而，这种做法无法得到完全令人满意的对偶概念（见第6节9），这表明无法避免在 D_W 与 C_W 之间插入一个不同于恒等算子的算子 Q 。

6.1 Q-对偶融合框架

如本节开头所述，我们将介绍 [59, 57, 58] 中发展的融合框架对偶理论。不过，与这些文章中考虑 K_V^2 不同，我们将像本综述迄今所做的那样，考虑空间 $\mathrm{K}^2\,\mathcal{H}$ 作为合成算子的定义域。

克服最初定义域问题，并扩展 [40] 中引入的典范对偶融合框架概念（见第 6.6 小节）的定义如下:

定义 5 [59] 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 和 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是 H 上的融合框架。若存在 $Q\in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\,\mathcal{H})$ 使得 W 是 V 的对偶融合框架，我们称之为:

$$D_W Q C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}. \tag{28}$$

算子 Q 实际上在定义中很重要。如果需要明确指代它，我们会说W 是 V 的 Q-对偶融合框架。注意，如果W 是 V的Q-对偶融合框架，那么 V 就是W的 Q^*-对偶融合框架。正如我们将在引理 14 中看到的，满足条件 (28) 的贝塞尔融合序列 V 和W 自动构成融合框架。

注 *4* 正如我们所提到的，首先在定义 5 中引入对偶融合框架的一个一般类别，并且只要求算子 Q具有有界性，其中一个原因是探究获得对偶融合框架各种期望性质所需的最小条件。特别地，对于这一一般类别，我们有以下引理，它推广了对偶框架所具有的基本性质。该引理给出了两个贝塞尔融合序列构成对偶融合框架的等价条件。

引理 14 *[59]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 和 $W=(W_i, w_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$上的贝塞尔融合序列，并设 $Q\in\mathcal{B}(\mathcal{K}^2\mathcal{H})$。则以下命题等价：

(i) $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}=D_WQC_V$。*(ii)* $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}=D_VQ^*C_W$。*(iii)* $\langle f,g\rangle=\langle Q^*C_Wf, C_Vg\rangle$对所有 $f,g\in\mathcal{H}$均成立。*(iv)* $\langle f,g\rangle=\langle QC_Vf, C_Wg\rangle$对所有 $f,g\in\mathcal{H}$均成立。*(v)* C_V是单射，D_WQ是满射，且 $(C_VD_WQ)^2=C_VD_WQ$。*(vi)* C_W是单射，D_VQ^*是满射，且 $(C_WD_VQ^*)^2=C_WD_VQ^*$。

如果这些等价条件中的任一条件成立，V 且 W 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架，W 是 Q-对偶融合框架，而 V 是 W的 Q^*-对偶融合框架。

证明 首先，根据定理 11，D_W 和 C_V 是有界的。(i)⇔(ii) 这可由取伴随算子得到。

(iii)⇔(ii) 如果 (iii) 成立，那么对于每个 $f\in$H，我们得到

$$\langle(\mathcal{I}_{\mathcal{H}}-D_VQ^*C_W)f,g\rangle=0\qquad(\forall g\in\mathcal{H}),$$

因此 $(\mathrm{I}_{\mathcal{H}}-D_VQ^*C_W)\,f=0$，(ii) 得证。反之显然。

(iv)⇔(i) 这与 (iii)⇔(ii) 的证明类似。

(i)⇒(v) 根据 (i)，C_V 是单射的，D_WQ 是满射的，并且

$$(C_VD_WQ)^2=C_V\,(D_WQC_V)\,D_WQ=C_VD_WQ.$$

(v)⇒(i) 若 $(C_VD_WQ)^2=C_VD_WQ$，则

$$\mathcal{K}^2_{\mathcal{H}}=\mathcal{N}(C_VD_WQ)\oplus\mathcal{R}(C_VD_WQ).$$

由于 C_V是单射，我们有 $\mathrm{N}\,(C_VD_WQ)\;=\mathrm{N}\,(D_WQ)$，因此

$$\mathcal{K}^2_{\mathcal{H}}=\mathcal{N}(D_WQ)\oplus\mathcal{R}(C_VD_WQ).$$

这意味着 $\mathrm{H}\;=\{D_WQ(f_i)_{i\in I}:(f_i)_{i\in I}\in\mathrm{R}(C_VD_WQ)\}$。现在，设 $f\in\mathrm{H}$，且 $f=D_WQ(f_i)_{i\in I}$，其中某个 $(f_i)_{i\in I}\in\mathrm{R}(C_VD_WQ)$。那么

$$D_WQC_Vf=D_WQC_VD_WQ(f_i)_{i\in I}=D_WQ(f_i)_{i\in I}=f.$$

(ii)⇔(vi) 的证明类似。

最后，如果满足(i)-(vi)，那么 $\mathrm{R}(D_V)\;=\mathrm{H}\;=\mathrm{R}(D_W)$，因此根据定理 13，$V$和 W 都是融合框架。□

注释 *5* H 的两个融合框架 V 和 W 对于任意 L 始终是 RL-对偶融合框架，其中一个是 C_V的左逆，R 是 D_W 的右逆（与引理 17 比较）。这表明，我们总可以用其中一个进行分析，用另一个进行合成。但这是在定义 5 的一般框架下成立的，在该定义中，我们不对 Q施加任何额外条件。

注 *6* 人们曾将融合框架视为射影重构系统来研究其对偶性 [67, 68, 70, 71]。然而，射影重构系统在对偶运算下并不封闭；更确切地说，存在典范对偶不是射影重构系统的射影重构系统，也存在没有任何射影对偶的射影重构系统 [68]。我们将看到，采用 Q-对偶融合框架时，这些问题并不存在。关于与 Q-对偶融合框架相关的对偶射影重构系统的更详细讨论，请参阅 [57]。

6.2 分块对角与分量保持 Q-对偶融合框架

现在我们将介绍两种特殊类型的 Q-对偶融合框架，它们使由（28）得到的重构公式更为简洁（与第 3.1 小节比较）。

定义 6 [57] 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 和 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是 H 上的融合框架。若定义 5 Q 中的算子是分块对角的，则称 W 是 V的块对角对偶融合框架。若 Q是 B $(\mathrm{K}_V^2,\mathrm{K}_W^2)$-分量保持的（即 $QM_j(\mathrm{K}_V^2)=M_j(\mathrm{K}_W^2)$），则称 W是 V的分量保持对偶融合框架。

注意，在（28）中，只需知道 Q 如何将 R（C_V）$\subseteq \mathrm{K}_V^2$ 映射到 N（D_W）$^{\perp}\subseteq \mathrm{K}^2$ 。w

备注 *7* 引入定义 5 中对偶性概念的另一个动机是获得灵活性，因此仅在需要时才施加限制。定义 5 提供的一般框架能够适应具体问题。这也是先从最一般的类别入手、再自然引出本文所研究的特定类别的另一个原因：分块对角和分量保持对偶融合框架。正如我们将在引理 19 中看到的，对于由 C_V 的有界左逆得到的对偶融合框架，Q 是分量保持的。此外，对于对偶融合框架系统，Q 是分块对角的（见定义 7）。

根据分块对角算子的定义（见第 3.1 节），我们立即得到以下结论：

引理 15 *[58]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是一个融合框架。当且仅当满足以下条件时，融合框架 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是关于 $\bigoplus_{i\in I}Q_i\in\mathcal{B}(\mathcal{K}^2\mathcal{H})$的块对角对偶融合框架

$$\sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{W_i} Q_i \pi_{V_i} = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}. \tag{29}$$

注意，$(W_i, w_i)_{i\in I}$是$(V_i, v_i)_{i\in I}$关于$\bigoplus_{i\in I} Q_i$的块对角对偶融合框架，当且仅当$(W_i, c_i w_i)_{i\in I}$是V关于$\bigoplus_{i\in I}(\frac{1}{c_i} Q_i)$的块对角对偶融合框架，前提是$(c_i)_{i\in I}$是半归一化的。这两个对偶融合框架导出相同的重构公式。权重具有这种灵活性是可取的，因为我们可以选择满足以下条件的$(w_i)_{i\in I}$，使得对$(W_i, w_i)_{i\in I}$的选择最适合同时处理另一个与重构公式无关的问题。关于（29），我们可以将这些项$w_i v_i \|\pi_{W_i} Q_i \pi_{V_i}\|$视为子空间对$V_i$和$W_i$对于重构的重要性度量。

在以下各节中，我们将说明对偶融合框架系统与对偶框架之间存在密切联系，这一事实支持了定义 7 是对偶融合框架系统恰当定义这一观点。因此，这种密切联系也表明，在定义 5 中为融合框架的对偶性定义纳入“Q”是自然的。

6.3 对偶融合框架系统

为了在前文所述的情形中实现局部处理，我们在本节定义并研究对偶融合框架系统这一概念，见定义 3。为此，我们将考虑下述算子，该算子由我们在 [57], 中引入，并建立了融合框架系统的合成算子与其关联框架的合成算子之间的联系。

设$(V_i,\ v_i,\ \varphi^{(i)})_{i\in I}$是一个贝塞尔融合系统（见定义 3）。那么，由引理 8，$\bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}}$是一个有界算子，且满足$\|\bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}}\| \le \sqrt{B}$。此外，每个分量$D_{\varphi^{(i)}}$都是到$V_i$上的满射，并且由于$\sup_{i\in I}\|D^{\dagger}_{\varphi^{(i)}}\| = \sup_{i\in I}\|C_{\varphi^{(i)}} S^{-1}_{\varphi^{(i)}}\| \le \sqrt{B/A}$成立，分块对角算子$\bigoplus_{i\in I} D^{\dagger}_{\varphi^{(i)}}$也有界。特别地，对于每个$(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2_V$，我们有$(D^{\dagger}_{\varphi^{(i)}} f_i)_{i\in I} \in \left(\sum_{i\in I} \oplus l^2(J_i)\right)_{l^2}$，因此$(f_i)_{i\in I} = (D_{\varphi^{(i)}} D^{\dagger}_{\varphi^{(i)}} f_i)_{i\in I} = \bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}} (D^{\dagger}_{\varphi^{(i)}} f_i)_{i\in I}$，这意味着$\mathrm{R}(\bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}}) = \mathrm{K}^2_V$。$\bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}}$的伴随算子为$\bigoplus_{i\in I} C_{\varphi^{(i)}}$，并满足

$$A\|(g_i)_{i\in I}\| \le \left\|\bigoplus_{i\in I} C_{\varphi^{(i)}} (g_i)_{i\in I}\right\| \le B\|(g_i)_{i\in I}\| \qquad (\forall (g_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^2_V).$$

假设对于每个$i \in I$，$\varphi^{(i)}$都是$\varphi^{(i)}$的一个对偶框架，且其上框架界为$\widetilde{B}_i$，满足$\sup_{i\in I} \widetilde{B}_i < \infty$。那么，如上所述，$\bigoplus_{i\in I} C_{\widetilde{\varphi^{(i)}}}$是有界的，并且

$$\bigoplus_{i\in I} D_{\varphi^{(i)}} C_{\widetilde{\varphi^{(i)}}} = \bigoplus_{i\in I} \pi_{V_i}. \tag{30}$$

若将 $\left(\sum_{i\in I}\oplus l^2(J_i)\right)_{l^2}$ 与 $D_{v\varphi}$的定义域等同起来，其中 $v\varphi$ – 通常表示全局族 $(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$，则可见

$$D_{v\varphi}=D_V\bigoplus_{i\in I}D_{\varphi^{(i)}}\quad\text{and, by adjointing,}\quad C_{v\varphi}=\left(\bigoplus_{i\in I}C_{\varphi^{(i)}}\right)C_V,\tag{31}$$

另见 [63]。此外，将（31）式左侧的恒等式右乘算子$\bigoplus_{i\in I}C_{\widetilde{\varphi^{(i)}}}$，可得

$$D_V=D_{v\varphi}\bigoplus_{i\in I}C_{\widetilde{\varphi^{(i)}}}\quad\text{and, by adjointing,}\quad C_V=\left(\bigoplus_{i\in I}D_{\widetilde{\varphi^{(i)}}}\right)C_{v\varphi},\tag{32}$$

关于贝塞尔融合系统的算子恒等式，更多详情另见 [63] 。

上述观察引出了以下定义。

定义 7 [57]融合框架系统$(W_i,w_i,\psi^{(i)})_{i\in I}$称为融合框架系统$(V_i,v_i,\varphi^{(i)})_{i\in I}$的对偶融合框架系统，如果$(W_i,w_i)_{i\in I}$是$(V_i,v_i)_{i\in I}$的$\bigoplus_{i\in I}D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}}$-对偶融合框架。

根据（30），拥有一对对偶融合框架系统意味着全局族$(w_i\psi_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$和$(v_i\varphi_{ij})_{i\in I,j\in J_i}$构成一对对偶框架。注意，$(\mathrm{K}_V^2)^{\perp}\subseteq\mathrm{N}\left(\bigoplus_{i\in I}D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}}\right)$。如果定义 7 中的 $\bigoplus_{i\in I}D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}}$是$\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2,\mathrm{K}_W^2)$-分量保持的，则称$(W_i,w_i,\psi^{(i)})_{i\in I}$为$(V_i,v_i,\varphi^{(i)})_{i\in I}$的分量保持对偶融合框架系统。

6.4 分块对角对偶框架、对偶融合框架系统与对偶框架之间的关系

根据定义 7，我们可以看出，每个对偶融合框架系统都可以与一个分块对角对偶融合框架关联起来。反过来，在某些假设下，我们也可以为一对分块对角对偶融合框架关联一对对偶融合框架系统。为此，我们需要推论 11，该推论由下面的引理得出。

引理 16 *[58]若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$具有闭值域，则存在一个$\mathcal{H}$的框架$\varphi$和一个$\mathcal{K}$的框架$\psi$，二者具有相同的指标集，且$A=D_\psi C_\varphi$。特别地，$\varphi$和$\psi$可以选取为使得$\varphi$的框架界为1和2，而$\psi$的框架界分别为最小值$\left\{1,\|A^\dagger\|^{-2}\right\}$和最大值$\left\{1,\|A\|^2\right\}$。*

证明 设 φ 是 H 的任意一个框架，$\widetilde{\varphi}$ 是 φ的任意一个对偶框架。根据 [45, 命题 5.3.1]，$A\widetilde{\varphi}$是 R(A)的一个框架，且指标集相同。我们还有 $A=D_{A\widetilde{\varphi}}C_\varphi$。特别地，若 φ 是 H 的帕塞瓦尔框架，且 $\widetilde{\varphi}=\varphi$ 是φ的典范对偶框架，则 φ 的框架界为 1，而 $A\widetilde{\varphi}$ 的框架界为 $\|A^\dagger\|^{-2}$ 和 $\|A\|^2$。若 R(A) =K，则结论立即成立。若 R(A) ≠K，我们将以适当的方式扩充族 φ 和 $A\widetilde{\varphi}$，从而得到结论。

为此，假设 $\mathrm{R}(A) \neq \mathrm{K}$。设 $\psi=(\psi_i)_{i\in J}$ 是 $\mathrm{R}(A)^{\perp}$ 的任意一个框架。考虑族 $\tilde{\psi}=(\tilde{\psi})_{i\in J}$，其中对所有 i 均有 $\tilde{\psi}_i=0$，则有 $D_\psi C_{\tilde{\psi}}=0$。另一方面，我们可以构造一个并非所有元素都为零的 ψ，使得 $D_\psi C_{\tilde{\psi}}=0$。为此，考虑一个框架 $\psi=(\psi_j)_{j\in J}$，它是 $\mathrm{R}(A)^{\perp}$ 的框架，但不是基。设 $c=(c_m)_{m\in\mathbb{M}}$ 是 $\mathrm{N}(D_\psi)\subset l^2(J)$ 的一个标准正交基，其中 $\mathbb{M}=\mathbb{N}$，或 $\mathbb{M}=\{1,\dots,M\}$。设 $e=(e_l)_{l\in\mathbb{L}}$ 是 H 的一个标准正交基，其中 $\mathbb{L}=\mathbb{N}$，或 $\mathbb{L}=\{1,\dots,L\}$。取 $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{M}\cap\mathbb{L}$，满足 $|\mathbb{I}|<\infty$，并定义对每个 $j\in J$，$\psi_j=\sum_{l\in\mathbb{I}} c_l(j)e_l$。换言之，$\psi_j=D_eC_c\delta_j$，其中 $(\delta_j)_{j\in I}$ 是 l^2 的标准基。由所涉及算子的单射性可知，并非所有向量 $\tilde{\psi}_j$ 都等于 0。根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}|\langle f,\tilde{\psi}_j\rangle|^2&=\sum_{j\in J}\left|\left\langle f,\sum_{l\in\mathbb{I}}\overline{c_l(j)}e_l\right\rangle\right|^2=\sum_{j\in J}\left|\sum_{l\in\mathbb{I}}c_l(j)\langle f,e_l\rangle\right|^2\\&\le\sum_{j\in J}\sum_{l\in\mathbb{I}}|c_l(j)|^2\sum_{l\in\mathbb{I}}|\langle f,e_l\rangle|^2\le\sum_{l\in\mathbb{I}}\sum_{j\in J}|c_l(j)|^2\|f\|^2=|\mathbb{I}|\|f\|^2.\end{aligned}$$

因此，$\psi=(\psi_j)_{j\in J}$ 是一个 Bessel 序列，其 Bessel界为 $|\mathbb{I}|$。注意，若 $d\in l^2(J)$ 且 $f\in\mathrm{H}$，则

$$\begin{aligned}\langle D_{\tilde{\psi}}d,f\rangle&=\left\langle\sum_{j\in J}d(j)\sum_{l\in\mathbb{I}}\overline{c_l(j)}e_l,f\right\rangle\\&=\sum_{j\in J}d(j)\sum_{l\in\mathbb{I}}\overline{c_l(j)}\langle e_l,f\rangle=\left\langle d,\sum_{l\in\mathbb{I}}\langle f,e_l\rangle c_l\right\rangle.\end{aligned}$$

因此 $C_{\tilde{\psi}}f=\sum_{l\in\mathbb{I}}\langle f,e_l\rangle c_l$ 且 $D_\psi C_{\tilde{\psi}}f=\sum_{l\in\mathbb{I}}\langle f,e_l\rangle D_\psi c_l=0$，因为对于每个 $l\in\mathbb{I}$，$c_l\in\mathrm{N}(D_\psi)$。最后，(φ,ψ) 是 H 的一个框架，$(A\tilde{\varphi},\psi)$ 是 K 的一个框架，$|(\varphi,\psi)|=|(A\tilde{\varphi},\psi)|$ 以及 $A=D_{(A\tilde{\varphi},\psi)}C_{(\varphi,\tilde{\psi})}$。

特别地，如果选择 φ 和 ψ 为帕塞瓦尔框架，$\tilde{\varphi}=\varphi$ 和 $|\mathbb{I}|=1$，那么 $(\varphi,\ \psi)$ 是框架界为 1 和 2 的框架，而 $(A\tilde{\varphi},\ \psi)$ 是框架界分别为 $\min\{1,\|A^{\dagger}\|^{-2}\}$ 和 $\max\{1,\|A\|^2\}$ 的框架。□

推论 **11** *[58]* 设 $(V_i)_{i\in I}$ 和 $(W_i)_{i\in I}$ 是 H 中的两个闭子空间族，并假设 $Q=\bigoplus_{i\in I}Q_i\in B(K^2H)$，且对每个 $i\in I$，$N(Q_i)=V_i^{\perp}$、$R(Q_i)=W_i$，并且 $\inf_{i\in I}\|Q_i^{\dagger}\|^{-1}>0$。那么，对每个 $i\in I$，存在一个 $\varphi^{(i)}$ 的框架，其框架界为 A_i、B_i，满足 $0<\inf_{i\in I}A_i\le\sup_{i\in I}B_i<\infty$；还存在一个 W_i 的框架，其指标集相同，框架界为 $\widetilde{A}_i$、$\widetilde{B}_i$，满足 $0<\inf_{i\in I}A_i\le\sup_{i\in I}B_i<\infty$，使得 $Q=\bigoplus_{i\in I}D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}}$。

证明 假设 $Q=\bigoplus_{i\in I}Q_i\in\mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H})$，且对每个 $i\in I$，$\mathrm{N}(Q_i)=V_i^{\perp}$，$\mathrm{R}(Q_i)=W_i$，并且 $\inf_{i\in I}\|Q_i^{\dagger}\|^{-2}>0$。回顾一下，根据引理 8，我们还有 $\sup_{i\in I}\|Q_i\|<\infty$。应用引理 16，对于每个 $i\in I$，存在一个框架 $\varphi^{(i)}$，其对应于 V_i，框架界为 $A_i=1$ 和 $B_i=2$；还存在一个框架 $\psi^{(i)}$，其对应于 W_i，框架界为 $\widetilde{A}_i=\min\{1,\|Q_i^{\dagger}\|^{-2}\}$ 和 $\widetilde{B}_i=\max\{1,\|Q_i\|^2\}$，使得 $Q_i|_{V_i}=(D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}})|_{V_i}$。

特别地，我们有 $Q = \bigoplus_{i\in I} D_{\psi^{(i)}} C_{\varphi^{(i)}}$，以及 $\inf_{i\in I} A_i = 1$、$\sup_{i\in I} B_i = 2$、$\inf_{i\in I} \widetilde{A}_i \geq \min\left\{1, \inf_{i\in I} \|Q_i^{\dagger}\|^{-2}\right\} > 0$ 和 $\sup_{i\in I} \widetilde{B}_i \leq \max\left\{1, \sup_{i\in I} \|Q_i\|\right\} < \infty$。□

经过这些准备，我们能够证明分块对角对偶融合框架与对偶融合框架系统之间的重要关系。

定理 **19** *[58]* 令 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 为 H 上的一个融合框架，并令 $W = (W_i, w_i)_{i\in I}$ 为 V 的一个 $\bigoplus_{i\in I} Q_i$-对偶融合框架，其中对每个 $i \in I$，$N(Q_i) = V_i^{\perp}$，$R(Q_i) = W_i$ 且 $\inf_{i\in I} \|Q_i^{\dagger}\|^{-1} > 0$。那么，存在 V_i 的局部框架 $\varphi^{(i)}$ 以及 W_i 的局部框架 $\psi^{(i)}$（对所有 $i \in I$），使得 $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 是 H 上的一个融合框架系统，且 $(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$ 是 $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 的一个对偶融合框架系统。在这种情况下 $Q = \bigoplus_{i\in I} D_{\psi^{(i)}} C_{\varphi^{(i)}}$。

证明 结合定义 5、推论 11 和定义 7 即可得到该结论。□

下面的定理建立了对偶融合框架系统对与对偶框架对之间的联系。

定理 **20** *[58]* 设 $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 和 $(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$ 是 H 上的两个贝塞尔融合系统，其中 $\varphi^{(i)} = (\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ 且 $\psi(i) = (\psi_{ik})_{k\in K_i}$ 对任意 $i \in I$ 成立，并设 $v\varphi = (v_i\varphi_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ 和 $w\psi = (w_i\psi_{ik})_{i\in I, k\in K_i}$ 分别是它们对应的全局族。若对所有 $i \in I$ 均有 $|K_i| = |J_i|$，则以下条件等价：

(i) $v\varphi$ 和 $w\psi$ 是 H 的对偶框架对。*(ii)* $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 和 $(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$ 是 H 上的对偶融合框架系统对。

证明 这由定理 10、引理 14, [45, 引理 6.3.2], 以及算子恒等式 $D_{w\psi} C_{v\varphi} = D_W (\bigoplus_{i\in I} D_{\psi^{(i)}} C_{\varphi^{(i)}}) C_V$ 推出，而该恒等式可由(31)立即得到。□

6.5 对偶族

在本小节中，我们考虑对偶融合框架族。类似于对偶框架，我们将看到，分量保持对偶融合框架与分析算子的有界左逆相关。我们从以下预备结果开始。

引理 17 设 V 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架。则

(i) *[59]* 所有有界左逆的集合 $\mathcal{B}_L(C_V)$ 由下式给出：

$$\left\{S_V^{-1} D_V + L(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V) \,\middle|\, L \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2, \mathcal{H})\right\}.$$

（*ii*） D_V 的所有有界右逆构成的集合 $\mathcal{B}_R(D_V)$ 为

$$\left\{C_V S_V^{-1} + (\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V) R \,\middle|\, R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2)\right\}.$$

证明 （i）对于任意 $L \in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H},\mathrm{H})$，我们有

$$\left[S_V^{-1}D_V + L\left(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V\right)\right] C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}} + LC_V - LC_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}.$$

反过来，假设 $A \in \mathrm{B}_L(C_V)$。那么

$$A = S_V^{-1}D_V + A - S_V^{-1}D_V = S_V^{-1}D_V + A\left(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V\right)$$

包含于上述集合中。

(ii) 的证明类似：对于任意 $R \in \mathrm{B}(\mathrm{H}, \mathrm{K}^2\mathcal{H})$，我们有

$$D_V\left[C_V S_V^{-1} + \left(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V\right)R\right] = \mathcal{I}_{\mathcal{H}} + D_V R - D_V R = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}.$$

另一方面，对于每个 $A \in \mathrm{B}_R(D_V)$，我们有

$$A = C_V S_V^{-1} + A - C_V S_V^{-1} = C_V S_V^{-1} + \left(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V\right)A$$

包含于上述集合中。 □

注 *8* 考虑上述刻画的以下特殊情形：若 V 是融合 Riesz 基，则根据定理 14，$C_V : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{K}_V^2$ 是有界双射，因此

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - C_V S_V^{-1} D_V = \mathcal{I}_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2} - \pi_{\mathcal{K}_V^2} = \pi_{(\mathcal{K}_V^2)^\perp}.$$

因此，若 V 是融合 Riesz 基，则 C_V 的任意左逆算子都等于 $S_V^{-1}D_V$加上某个余项算子$L\pi_{(\mathcal{K}_V^2)^\perp}$。这个余项算子可以看作我们对 D_V 采用更一般定义（其定义域为 $\mathrm{K}^2\,\mathcal{H}$）所付出的代价。若将$D_V$ 定义为算子 $\mathrm{K}_V^2 \longrightarrow \mathrm{H}$，那么在引理 17 的刻画中，我们就会得到 $\mathrm{I}^{\mathcal{K}_V^2}$，而不是 $\mathrm{I}_{\mathcal{K}^2\,\mathcal{H}}$；在这种情况下，余项算子将消失，因为 $\mathrm{I}_{\mathcal{K}_V^2} - C_V S_V^{-1} D_V = 0$。

接下来，我们给出以下几个引理，以刻画分量保持对偶融合框架对。

引理 18 *[59]* 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架。若$(W_i, w_i)_{i\in I}$ 是 V 的Q-分量保持对偶融合框架，则对每个 $i \in I$，都有 $W_i = LM_i\mathcal{K}_V^2$，其中每个 $i \in I$ 都成立，且 $L = D_W Q \in \mathcal{B}_L(C_V)$。

证明 设 $Q \in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H})$ 是一个 $\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$-分量保持算子，满足$D_W Q C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$，并设 $L = D_W Q$。利用 Q 是 $\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$-分量保持的这一点，我们得到

$$LM_i(\mathcal{K}_V^2) = D_W Q M_i(\mathcal{K}_V^2) = D_W M_i(\mathcal{K}_W^2) = W_i$$

对每个 $i \in I$。 □

以下是后一结果的一个逆命题。

引理 19 *[59]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个融合框架，$L\in\mathcal{B}_L(C_V)$，$W_i=LM_i(\mathcal{K}_V^2)$ 且对每个 $i\in I$ 都成立。若 $W=(W_i, w_i)_{i\in I}$ 是一个贝塞尔融合序列，并且

$$Q_{L,w}:\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2\to\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2,\ Q_{L,w}(f_j)_{j\in I}=\left(\frac{1}{w_i}LM_i(f_j)_{j\in I}\right)_{i\in I},$$

是一个定义良好的有界算子，则W 是 $Q_{L,\ w}$-分量保持对偶融合框架。

证明 根据假设，$Q_{L,\ w}$ 是 B $(\mathrm{K}_V^2,\ \mathrm{K}_W^2)$-分量保持的，且$L|_{\mathcal{K}_V^2}=(D_W Q_{L,\ w})|_{\mathcal{K}_V^2}$。由于 $L\in \mathrm{B}_L(C_V)$，$D_W Q_{L,\ w}C_V=\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$。因此 W 是 $Q_{L,\ w}$- 分量保持对偶融合框架。□

注 *9* 设 L、V 和 W 如引理 19 所述。

(a) 由于 $L\in\mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H},\ \mathrm{H})$，由第 3.1 小节可知，$L$ 的典范矩阵表示由算子值行矩阵 $[\ldots L_{i-1}L_iL_{i-1}\ldots]$, 给出，其中 $L_i\in\mathrm{B}(\mathrm{H})$ 对每个 $i\in I$ 均成立。注意 $Q_{L,\ w}=\bigoplus_{i\in I}\frac{1}{w_i}L_i$。

(b) 我们可以给出以下充分条件，使W 成为贝塞尔融合序列，并使$Q_{L,w}$ 成为定义良好的有界算子：

(1) 令 $\gamma(A)$ 表示算子 $A\in\mathrm{B}(\mathrm{H}$ $\delta>0$ $i\in I$ $w_i^{-2}\gamma\ LM_i\ ^2\geq\mathrm{H})$ 的约化最小模（另见例子之后的段落）。假设对所有，( )。由于 (K,) 是 K 的正交归一融合基，根据[80, 定理 3.6] W 是 H 上的贝塞尔融合序列，其贝塞尔融合界为$\delta^{-1}\|L\|^2$。

(2) 若 w 是半归一化的（即，对每个$i\in I$，$\exists\delta>0$: $w_i>\delta$），则 $Q_{L,w}$ 是定义良好的有界算子，且$\|Q_{L,w}\|\leq\delta^{-1}\|L\|$。事实上，若 $f=(f_i)_{i\in I}\in\mathrm{K}^2\mathcal{H}$，则

$$\|Q_{L,w}f\|_{\mathcal{H}}^2=\sum_{i\in I}\|w_i^{-1}LM_if\|_{\mathcal{H}}^2\leq\frac{\|L\|^2}{\delta^2}\sum_{i\in I}\|M_if\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}^2=\frac{\|L\|^2}{\delta^2}\|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}^2.$$

尤其是在情形 $|I|<\infty$ 下，后者成立。

现在我们可以证明分量保持对偶融合框架的如下刻画。请注意，下述结果表明，获得分量保持对偶融合框架的方式与向量情形类似。

定理 21 *[57]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个融合框架。若 $(w_i)_{i\in I}$ 是半归一化的，则 Q-分量保持对偶融合框架恰为 V 的贝塞尔融合序列 $W=(W_i, w_i)_{i\in I}$，其中对所有 $i\in I$，均有 $W_i=LM_i(\mathcal{K}_V^2)$，且 $L\in\mathcal{B}_L(C_V)$。

此外，若 $\mathcal{H}$ 是有限维的，则 $\mathcal{B}_L(C_V)$ 中的任意元素都满足 $L|_{\mathcal{K}_V^2}=(D_W Q_{L,w})|_{\mathcal{K}_V^2}$，其中 W 是 V 的某个 Q-分量保持对偶融合框架。

证明 如果 W 是一个 Q-分量保持对偶融合框架，那么根据定义，W 是 H 上的贝塞尔融合序列，并且由引理 18 可知，对于所有 $i\in I$，都有 $W_i=LM_i(\mathrm{K}_V^2)$，其中 $L\in\mathrm{B}_L(C_V)$。

反之，假设 $W=(W_i,\ w_i)_{i\in I}$ 是 H 上的贝塞尔融合序列，并且对于某个 $L\in \mathrm{B}_L(C_V)$，有$W_i = LM_i(\mathrm{K}_V^2)$（$i\in I$）。由于我们假设 $(w_i)_{i\in I}$是半归一化的，注 9 (b) 和引理 19 表明，算子$Q = Q_{L,\ w}$ 是一个有界的 $\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2,\ \mathrm{K}_W^2)$-分量保持算子，并且 W 是相对于 Q的 V 的对偶融合框架。

此外部分由引理 19 及相应的证明细节推出。□

备注*10* 作为引理 *18* 和 *19* 的推论，若 H 是有限维的 –在这种情况下，通常只考虑有限指标集 I – 我们可以为 $(V_i, v_i)_{i\in I}$ 的任意 Q-对偶融合框架 $(W_i, w_i)_{i\in I}$ 关联一个 $Q_{L,\tilde{w}}$-分量保持对偶融合框架 $(LM_iK_V^2, \widetilde{w}_i)_{i\in I}$，其中 $L = D_W Q$ 且 $(\widetilde{w}_i)_{i\in I}$ 为任意权重。此外，若 Q 是分块对角的，则 $Q_{D_W Q,w} = \left(\bigoplus_{i\in I}\pi_{W_i}\right)Q$。特别地，若 Q 是 $B(K_V^2, K_W^2)$-分量保持的，则 $Q_{D_W Q,w} = Q$。

下一个命题表明，我们可以通过局部对偶框架和融合分析算子的有界左逆，从给定的融合框架构造分量保持对偶融合框架系统。

命题 **10** *[57]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i\in I}$ 为融合框架，$L\in B_L(C_V)$，且 w为半归一化权重，使得对于所有 $i\in I$，$m\le w_i\le M$。对每个$i\in I$，设 $\varphi^{(i)}:=(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$和 $\widetilde{\varphi}^{(i)}:=(\widetilde{\varphi}_{ij})_{j\in J_i}$ 为 V_i 的对偶框架对，B_i 为 $\varphi^{(i)}$ 的上框架界，满足 $\sup_{i\in I} B_i =: B<\infty$, $\widetilde{A}_i$，且 $\widetilde{B}_i$ 为 $\widetilde{\varphi}^{(i)}$ 的框架界，满足 $\inf_{i\in I}\widetilde{A}_i =: \widetilde{A}>0$ 和 $\sup_{i\in I}\widetilde{B}_i =: \widetilde{B}<\infty$，并令$\psi^{(i)}=(\psi_{ij})_{j\in J_i}:=\left(\frac{1}{w_i}L(\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\right)_{j\in J_i}$，且 W_i =为 $\underline{\mathrm{span}(\psi^{(i)})}$。那么

(i) 对于每个 $i\in I$，$\psi^{(i)}$都是 W_i 的框架，框架界为 $\|L^\dagger\|^{-2}\frac{A_i}{w_i^2}$和 $\|L\|^2\frac{B_i}{w_i^2}$。*(ii)* $(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$是$,w$-对偶融合框架系统$(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$ 的分量保持对偶融合框架系统。

证明 (i) 显然，对于每个 $i\in I$，$\left((\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\right)_{j\in J_i}$都是 $M_i\mathrm{K}_V^2$的框架，框架界为 $\widetilde{A}_i$和 $\widetilde{B}_i$。因此，对于每个 $i\in I$，$\left(\frac{1}{w_i}(\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\right)_{j\in J_i}$都是 $M_i\mathrm{K}_V^2$的框架，框架界为$w_i^{-2}\widetilde{A}_i$和 $w_i^{-2}\widetilde{B}_i$。由于 L是一个满足 $\mathrm{R}(L)=\mathrm{H}$ 的有界算子，结论由 [45, 命题5.3.1]得出。

(ii) 我们首先证明，相关的整体族 $\left(L(\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})^{l\in I}\right)_{i\in I,\,j\in J_i}$是 H 上的 Bessel 序列。对于 $g\in \mathrm{H}$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle g, L(\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\rangle|^2 &\le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle L^*g, (\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\rangle_{\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2}|^2\\ &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\left|\left\langle [L^*g]_i, \widetilde{\varphi}_{ij}\right\rangle\right|^2\\ &\le \sum_{i\in I}\widetilde{B}_i\|[L^*g]_i\|^2\\ &\le \widetilde{B}\|L^*g\|^2\le \widetilde{B}\|L\|^2\|g\|^2.\end{aligned}$$

如定理 10 的证明中所示，可知 $(W_i, w_i)_{i\in I}$是 Bessel 融合序列，其贝塞尔融合界为 $\widetilde{B}\|L\|^2M^2\widetilde{A}^{-1}\|L^\dagger\|^2$。因此，族 $(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$是 H 上的融合系统。现在，回顾注 9 (b)，$Q_{L,w}$是一个定义良好的有界算子，且 $\|Q_{L,w}\| \le \|L\|m^{-1}$。现在，将 L 与其典范矩阵表示 $[\dots\ L_{i-1}\ L_i\ L_{i-1}\dots]$, 对应起来，可知对于 $(h_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2{}_{\mathcal{H}}$，我们有

$$\begin{aligned} Q_{L,w}(h_i)_{i\in I} &= \Big(\frac{1}{w_i}LM_i(h_l)_{l\in I}\Big)_{i\in I} \\ &= \Big(\frac{1}{w_i}LM_i\Big(\sum_{j\in J_l}\langle h_l, \varphi_{lj}\rangle\widetilde{\varphi_{lj}}\Big)_{l\in I}\Big)_{i\in I} \\ &= \Big(\sum_{j\in J_i}\langle h_i, \varphi_{ij}\rangle\frac{1}{w_i}L_i\widetilde{\varphi_{ij}}\Big)_{i\in I} \\ &= \Big(\sum_{j\in J_i}\langle h_i, \varphi_{ij}\rangle\frac{1}{w_i}L(\delta_{il}\widetilde{\varphi}_{ij})_{l\in I}\Big)_{i\in I} \\ &= \Big(\sum_{j\in J_i}\langle h_i, \varphi_{ij}\rangle\psi_{ij}\Big)_{i\in I} = \bigoplus_{i\in I} D_{\psi^{(i)}}C_{\varphi^{(i)}}(h_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

因此，(ii) 由 (i) 和引理 19 得出。 □

以下命题给出了一种利用全局分析算子的有界左逆，从贝塞尔融合系统构造分量保持对偶融合框架系统的方法。

命题 **11** *[57]* 设 $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$是一个贝塞尔融合系统，其对应的全局框架为 $v\varphi$，并假设 $w=(w_i)_{i\in I}$是一个半归一化权重族。设 L是 $C_{v\varphi}$的一个有界左逆，并设 $((e_{ij})_{j\in J_i})_{i\in I}$是 $(\sum_{i\in I}\oplus l^2(J_i))_{\ell^2}$的典范正交归一基。对于每个 $i\in I$，令 $\psi(i):=\big(\frac{1}{w_i}Le_{ij}\big)_{j\in J_i}$，且 W_i:=张成 $\psi^{(i)}$。那么

(i) $\psi^{(i)}$是一个框架，其框架界为 $\frac{\|L^\dagger\|^{-2}}{w_i^2}$和 $\frac{\|L\|^2}{w_i^2}$。*(ii)* （W_i、w_i、$\psi^{(i)}$）$_{i\in I}$是（V_i、v_i、$\varphi^{(i)}$）$_{i\in I}$的对偶融合框架系统。

证明 (i) 与命题 10 (i) 的证明一样，该结论由 [45,命题5.31]得出。

(ii) 由于 w 是半归一化的，局部框架 $\psi^{(i)}$ 具有公共框架界。相应的全局族 $w\psi$ 是 H 上的 Bessel 序列，因为

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle g, Le_{ij}\rangle|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle L^*g, e_{ij}\rangle|^2 = \|L^*g\|^2 \le \|L\|^2\|g\|^2$$

对所有 $g\in\mathrm{H}$。因此，如定理 10 的证明中所示，$(W_i,\ w_i)_{i\in I}$是 H 的贝塞尔融合序列，因此 $(W_i,\ w_i,\ \psi^{(i)})_{i\in I}$是 H 的贝塞尔融合系统。现在注意，对每个 $i\in I$，$(\delta_j^{(i)})_{j\in J_i}$，其中 $\delta_j^{(i)}=(\delta_{jk})_{k\in J_i}$是$l^2(J_i)$的典范正交归一基。根据引理 7，每个 e_{ij}均由 $e_{ij}=(\delta_{ik}\delta_j^{(k)})_{k\in I}$给出。因此，

对于任意 $g \in \mathrm{H}$，我们有

$$D_{w\psi}C_{v\varphi}g = L\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle g, v_i\varphi_{ij}\rangle e_{ij} = L(\langle g, v_k\varphi_{kl}\rangle)_{i\in I, j\in J_i} = LC_{v\varphi}g = g.$$

换言之， $w\psi$ 是 $v\varphi$的一个对偶框架。最后，(ii)由定理 20 的应用可得。□

6.6 典范对偶融合框架

设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$是 H 的一个融合框架。设 $L = S_V^{-1}D_V \in \mathrm{B}_L(C_V)$和 $w = (w_i)_{i\in I}$ 是一个权重族，使得$(S_V^{-1}V_i, w_i)_{i\in I}$ 是 H 的一个贝塞尔融合序列。假设由$Q_{L,w}(f_i)_{i\in I} = (\frac{v_i}{w_i}S_V^{-1}\pi_{V_i}f_i)_{i\in I}$给出的$Q_{L,w}\colon \mathrm{K}^2\mathrm{H}\to\mathrm{K}^2\mathrm{H}$是一个定义良好的有界算子。根据引理 8， $Q_{L,w} = \bigoplus_{i\in I}\frac{v_i}{w_i}S_V^{-1}\pi_{V_i}$ 是定义良好且有界的算子，当且仅当 $\sup_{i\in I}\frac{v_i}{w_i} < \infty$。特别地，根据引理 1，对于所有 $i \in I$， $v_i \lesssim w_i$ 成立，或 w 为半归一化，足以保证$Q_{L,w}$ 有界。在这种情况下，根据引理 19，$(S_V^{-1}V_i, w_i)_{i\in I}$ 是$(V_i, v_i)_{i\in I}$的一个分量保持$Q_{L,w}$-对偶融合框架。我们将此对偶称为带权规范对偶 w。特别地，取 $v = w$ 可得，$(S_V^{-1}V_i, v_i)_{i\in I}$是$(V_i, v_i)_{i\in I}$ 的一个$Q_{S_V^{-1}D_V,v}$-分量保持对偶（另见 [59, 例子 3.7]）。此外，如果在定义 7 中，$(W_i, w_i)_{i\in I}$是$(V_i, v_i)_{i\in I}$的一个典范对偶融合框架，则称$(W_i, w_i, \psi^{(i)})_{i\in I}$是$(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i\in I}$的一个规范对偶融合框架系统。

现在，注意到将 $T = S_V^{-1}$和 $V = V_i$ 代入引理12，并利用由引理 13 可知 $S_V^{-1}V_i$ 是 H 的闭子空间，我们得到

$$\pi_{V_i}S_V^{-1}\pi_{S_V^{-1}V_i} = \pi_{V_i}S_V^{-1} \qquad (\forall i \in I).$$

这意味着

$$Q^*_{S_V^{-1}D_V,w}C_{S_V^{-1}V,w}f = C_V S_V^{-1}f \qquad (\forall f \in \mathcal{H}).$$

我们称 $C_V S_V^{-1}f = (v_i\pi_{V_i}S_V^{-1}f)_{i\in I}$为与 V 相关联的 H 上的典范对偶融合框架系数，并注意到它们也出现在融合框架重构 (11) 中。

下面的引理表明，在所有其他系数中，典范对偶融合框架系数是具有最小范数的系数。

引理 20 *[59]* 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$是 $\mathcal{H}$ 上的融合框架，且 $f \in \mathcal{H}$。对于所有满足 $D_V(f_i)_{i\in I} = f$ 的$(f_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^2\mathcal{H}$，我们有

$$\|(f_i)_{i\in I}\|^2 = \|C_V S_V^{-1}f\|^2 + \|(f_i)_{i\in I} - C_V S_V^{-1}f\|^2.$$

证明 假设 $(f_i)_{i\in I}\in \mathrm{K}^2\,\mathcal{H}$ 满足 $D_V(f_i)_{i\in I}=f$。那么我们有 $(f_i)_{i\in I}-C_V S_V^{-1}f\in \mathrm{N}(D_V)=\mathrm{R}(C_V)^{\perp}$。由于 $C_V S_V^{-1}f\in \mathrm{R}(C_V)$，结论得证。□

我们以一个关于融合 Riesz 基的对偶的结果作为本节的总结。

命题 12 *[58]* 设 $V=(V_i,v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合 *Riesz* 基。则以下断言成立：

(i) V 的分量保持对偶具有 $(S_V^{-1}V_i,w_i)_{i\in I}$ 的形式。*(ii)* 若 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是 H 的 *Riesz* 融合基，则限制映射 $(C_W D_V)|_{\mathcal{K}_V^2}:K_V^2\longrightarrow K_W^2$ 有界且可逆。*(iii)* 若 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是 V的块对角对偶融合框架，则对每个 $i\in I$，$S_V^{-1}V_i\subseteq W_i$。*(iv)* 若 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是 H 的融合 *Riesz* 基，也是 V的块对角对偶融合框架，则对每个 $i\in I$，$W_i=S_V^{-1}V_i$。

证明 (i) 由引理 17 和注 8，所有有界左逆的集合为

$$\mathcal{B}_L(C_V)=\left\{S_V^{-1}D_V+L\pi_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i^{\perp})_{\ell^2}}:L\in\mathcal{B}(\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^2,\mathcal{H})\right\}.$$

考虑到 $L\pi_{(\sum_{i\in I}\oplus V_i^{\perp})_{\ell^2}}M_i\mathrm{K}_V^2=0$，根据引理 18 可得，$V$的任意分量保持对偶融合框架都必须具有形式 $(S_V^{-1}V_i,w_i)_{i\in I}$。(ii) 这是定理 14 的直接推论。

(iii) 设 $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ 是融合里斯基 V 关于 $\bigoplus_{i\in I}Q_i$ 的一个块对角对偶融合框架。则 $D_W(\bigoplus_{i\in I}Q_i)C_V=\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$ 且 $C_V(S_V^{-1}D_V)|_{\mathcal{K}_V^2}=\mathrm{I}^{\mathcal{K}_V^2}$（后者成立，因为根据定理 14，$C_V:\mathrm{H}\longrightarrow\mathrm{K}_V^2$ 是双射，且 $S_V^{-1}D_V C_V=\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$）。对于任意的 $i\in I$ 和 $f_i\in V_i$，有 $(\delta_{ij}v_i^{-1}f_i)_{j\in I}\in\mathrm{K}_V^2$ 且 $D_V(\delta_{ij}v_i^{-1}f_i)_{j\in I}=f_i$。这意味着

$$\begin{aligned}S_V^{-1}f_i&=D_W\Big(\bigoplus_{i\in I}Q_i\Big)C_V S_V^{-1}D_V(\delta_{ij}v_i^{-1}f_i)_{j\in I}\\&=D_W\Big(\bigoplus_{i\in I}Q_i\Big)(\delta_{ij}v_i^{-1}f_i)_{j\in I}=D_W(\delta_{ij}Q_i v_i^{-1}f_i)_{j\in I}\in W_i.\end{aligned}$$

由于 i 和 f_i 是任意选取的，结论成立。

(iv) 由 (iii)，对每个 $i\in I$，$S_V^{-1}V_i\subseteq W_i$。假设存在某个 $i_0\in I$，使得 $S_V^{-1}V_{i_0}\subsetneq W_{i_0}$。由引理 7，$S_V^{-1}V_{i_0}$ 是W_{i_0} 的闭子空间，因此$U_{i_0}:=(S_V^{-1}V_{i_0})^{\perp}\cap W_{i_0}$ 是 W_{i_0}的真子空间，即 $W_{i_0}=S_V^{-1}V_{i_0}\oplus^{\perp}U_{i_0}$。现在，取 $0\neq u_{i_0}\in U_{i_0}$。由推论 9，$(S_V^{-1}V_i,\ v_i)_{i\in I}$ 是一个融合 Riesz 基，因此由定理 14，它是一个 Riesz 分解，从而对于唯一的$g_i\in S_V^{-1}V_i\ (i\in I)$，$u_{i_0}=\sum_{i\in I}g_i$。特别地，对每个 $i\in I$，$g_i\in W_i$。另一方面，$u_{i_0}=$

$\cdots+0+0+u_{i_0}+0+0+\ldots$ 可视为关于 Riesz 分解 $(W_i)_{i\in I}$ 的唯一线性组合。这意味着 $u_{i_0}=g_{i_0}\in S_V^{-1}V_{i_0}\cap U_{i_0}=\{0\}$。这是荒谬的。因此结论得证。□

在命题 12 (i) 中，如果关于 w 的算子 $Q_{S_V^{-1}D_V,w}$ 定义良好且有界，则 V 的分量保持对偶与权重为 w 的典范对偶相同，即这些对偶对应的算子 Q 为 $Q_{S_V^{-1}D_V,w}$。

6.7 对偶融合框架的性质总结

这里我们旨在强调前文介绍的对偶融合框架最重要的性质。

(a) 给定一个融合框架 $V=(V_i,\ v_i)_{i\in I}$，分析算子 C_V 的任意有界左逆 L 都是一个重构算子，它 – 使得对于每个 $f\in \mathrm{H}$ – ，都能从融合框架测量 $C_V f=(v_i\pi_{V_i}f)_{i\in I}$ 实现完美重构，即

$$LC_V=\mathcal{I}_{\mathcal{H}}. \tag{33}$$

根据引理 19，算子 L 可以与一个分量保持对偶融合框架 $W=(W_i,\ w_i)_{i\in I}$ 相关联，并且 L 与 W 的合成算子之间存在联系。

(b) $\psi=(\psi_i)_{i\in I}$ 是一个框架，当且仅当 $V=(\mathrm{span}\{\psi_i\},\ \|\psi_i\|)_{i\in I}$ 是一个融合框架。根据定理 20，ψ 的任意对偶框架都对应于 V 的一个对偶融合框架。

(c) 框架的对偶关系是对称的（即，ψ 是 φ 的对偶框架，当且仅当 φ 是 ψ 的对偶框架）。根据引理 14，关于伴随算子 Q^*，融合框架的对偶关系也具有对称性。

(d) 每个框架总是存在典范对偶框架。在第 6.6 节中，我们看到，融合框架的典范对偶融合框架也总是存在。

(e) 根据第 6.5 节的结果，我们可以看到，Q-对偶融合框架的一项优势是容易获得。它们可以通过融合框架分析算子的左逆，或通过对偶框架获得。这一事实带来了大量不同类型的 Q-对偶融合框架，它们具有不同的性质和重构公式。

6.8 对偶融合框架的示例

本小节给出一些对偶融合框架的例子。

我们先举一个融合 Riesz 基的分块对角对偶融合框架的例子，它不同于典范对偶，而且本身不是融合 Riesz 基。

例子 [57]

设 $\mathrm{H} = \mathbb{C}^4$，并令 $V_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0)^T : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ 和 $V_2 = \{(0, x_2, x_3, -x_2)^T : x_2, x_3 \in \mathbb{C}\}$。那么 $V = (V_i, 1)_{i=1}^2$ 是 $\mathbb{C}^4$ 的（2 等维）融合 Riesz 基，因此其唯一的分量保持对偶就是典范对偶。

尽管 $V = (V_i, 1)_{i=1}^2$ 是一个融合 Riesz 基，但仍有可能构造出一个不是融合 Riesz 基的分块对角对偶融合框架。为此，令

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= \left((1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T\right),\\
\varphi^{(2)} &= \left((0,1,0,-1)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,1,0)^T\right),\\
\psi^{(1)} &= \left((1/2,1/2,-1/2,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1/2,-1/2,1/2,0)^T\right),\\
\psi^{(2)} &= \left((0,0,0,-1)^T, (1/2,-1/2,1/2,0)^T, (-1/2,1/2,1/2,0)^T\right).
\end{aligned}$$

那么，对于 $i = 1, 2$，我们有 $V_i = \mathrm{span}\{\varphi^{(i)}\}$，且 $(V_i, 1, \varphi^{(i)})_{i=1}^2$ 是 $\mathbb{C}^4$的一个融合框架系统。此外，若令 $i = 1, 2$ 时 $W_i = \mathrm{span}\{\psi(i)\}$，则 $(W_i, 1, \psi^{(i)})_{i=1}^2$ 也是一个融合框架系统。直接计算表明，它们各自的全局框架 φ 和 ψ 构成一个对偶框架对，且 ψ 不是 φ的典范对偶框架。根据定理 20，$(W_i, 1, \psi^{(i)})_{i=1}^2$ 是 $(V_i, v_i, \varphi^{(i)})_{i=1}^2$的一个对偶融合框架系统。注意，$\bigoplus_{i=1}^2 D_{\psi^{(i)}} C_{\varphi^{(i)}}$是分块对角的，但不是 $\mathrm{B}(\mathrm{K}_V^2, \mathrm{K}_W^2)$-分量保持的：事实上，直接计算表明，$\mathrm{R}\left(D_{\psi^{(1)}} C_{\varphi^{(1)}}\right) = \{(x_1, x_2, 0, x_2)^T : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ 是二维的，而 W_1是三维的，因此 $\mathrm{R}\left(D_{\psi^{(1)}} C_{\varphi^{(1)}}\right) \subsetneq W_1$。

由于对于 $i = 1,2$，有 $\dim(W_i) = 3 > 2 = \dim(V_i)$，我们看到（与命题 14 (ii) 对照）$W = (W_i, 1)_{i=1}^2$ 是一个融合框架，但不是融合 Riesz 基。特别地，这意味着W 不是 V的典范对偶，否则定理 18 就会受到影响。

下一个例子证明了存在既是自对偶又非帕塞瓦尔的融合框架。

例子 [57]

设 $\mathrm{H} = \mathbb{R}^3$，并考虑子空间

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathrm{span}\left((0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right),\\
V_2 &= \mathrm{span}\left((1,0,0)^T, (0,0,1)^T\right).
\end{aligned}$$

那么，$V = (V_i, 1)_{i=1}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个（2-等维）融合框架，其中

$$S_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad S_V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

特别是， $S_V^{-1}V_1 = V_1$ 和 $S_V^{-1}V_2 = V_2$，因此 V 在权重相同的情况下，其典范对偶等于 V。换言之， V 是自对偶的，尽管 V 并非帕塞瓦尔融合框架。

最后，以下例子表明，融合框架的典范对偶的典范对偶 V 不一定是 V。这也说明，典范对偶的融合框架算子可能不同于融合框架算子的逆。

例子

设 $\mathrm{H} = \mathbb{R}^4$，并考虑子空间

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \operatorname{span}\big((1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,-1,1)^T\big),\\
V_2 &= \operatorname{span}\big((0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T\big),\\
V_3 &= \operatorname{span}\big(((0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T\big).
\end{aligned}
$$

那么， $V = (V_i,\ 1)_{i=1}^3$ 是 $\mathbb{R}^4$的一个融合框架。我们有

$$
S_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2&0&0&0\\ 0&4&0&0\\ 0&0&5&-1\\ 0&0&-1&3 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad S_V^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14&0&0&0\\ 0&7&0&0\\ 0&0&6&2\\ 0&0&2&10 \end{bmatrix}.
$$

对于具有相同权重的典范对偶 $\widetilde{V} = (\widetilde{V}_i,\ 1)_{i=1}^3$， 我们得到

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_1 &= S_V^{-1}V_1 = \operatorname{span}\big((1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,-2)^T\big),\\
\widetilde{V}_2 &= S_V^{-1}V_2 = \operatorname{span}\big((0,1,0,0)^T, (0,0,3,1)^T\big),\\
\widetilde{V}_3 &= S_V^{-1}V_3 = \operatorname{span}\big(((0,0,3,1)^T, (0,0,1,5)^T\big).
\end{aligned}
$$

并进一步

$$
S_{S_V^{-1}V} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10&0&0&0\\ 0&20&0&0\\ 0&0&21&-1\\ 0&0&-1&19 \end{bmatrix}, \qquad S_{S_V^{-1}V}^{-1} = \frac{1}{398}\begin{bmatrix} 398&0&0&0\\ 0&199&0&0\\ 0&0&190&10\\ 0&0&10&210 \end{bmatrix}.
$$

~ ~对于具有相同权重的 $\widetilde{V}$ 的典范对偶 $\widetilde{V} = (\widetilde{V}_i,\ v_i)_{i=1}^3$， 我们得到

$$\widetilde{\widetilde{V}}_1 = S_{S_V^{-1}V}^{-1}\widetilde{V}_1 = \mathrm{span}\big((1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T,(0,0,-17,41)^T\big) \neq V_1,$$
$$\widetilde{\widetilde{V}}_2 = S_{S_V^{-1}V}^{-1}\widetilde{V}_2 = \mathrm{span}\big((0,1,0,0)^T,(0,0,29,12)^T\big) \neq V_2,$$
$$\widetilde{\widetilde{V}}_3 = S_{S_V^{-1}V}^{-1}\widetilde{V}_3 = V_3.$$

因此， V的典范对偶的典范对偶与V不同。我们还观察到， $S_{S^{-1}V} \neq S_V^{-1}$，即典范对偶的融合框架算子不同于融合框架算子的逆。

6.9 Q 的特定取法

我们以强调定义 5 中的两种特定取法，结束本节关于对偶融合框架的讨论。

6.9.1 情形$Q = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$

如第6节开头所指出的，当系数空间为 K^2 $_{\mathcal{H}}$，因而复合 D_W 与 C_V时不存在定义域困难，那么定义对偶融合框架时最自然的初步想法，就是直接从 (26) 推广对偶概念。也就是说，我们考虑定义 5 中的分块对角算子$Q = \mathrm{I}_{\mathcal{K}^2}$ $_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$。因此 (28) 变为

$$D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}. \tag{34}$$

然而，关系式 (34) 限制颇多，并不能导出良好的对偶概念。

特别地，以下例子表明，与一对对偶框架相关联的融合框架不一定满足（34）。换言之，$\mathrm{I}_{\mathcal{K}^2}$ $_{\mathcal{H}}$-对偶融合框架并不将对偶框架作为特殊情形包含在内。

例子

假设 $\psi = (\psi_i)_{i\in I}$ 和 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$ 是 H 的一对对偶框架。考虑它们各自对应的融合框架 V =(span$\{\varphi_i\}$， $\|\varphi_i\|)_{i\in I}$和W =(span$\{\psi_i\}$， $\|\psi_i\|)_{i\in I}$。对于任意 $f \in \mathrm{H}$，我们有

$$\begin{aligned} D_W C_V f &= \sum_{i\in I} \|\varphi_i\|\|\psi_i\| \pi_{\operatorname{span}\{\psi_i\}} \left\langle f, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} \right\rangle \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} \\ &= \sum_{i\in I} \|\psi_i\| \langle f, \varphi_i \rangle \left\langle \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}, \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \right\rangle \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \\ &= \sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \left\langle \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}, \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \right\rangle \psi_i . \end{aligned}$$

现在，如果我们有

$$\left\langle \frac{\varphi_i}{\|\psi_i\|}, \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \right\rangle = 1 \qquad (\forall i \in I), \tag{35}$$

于是 $D_W C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$。例如，如果 $\psi = \varphi$ 是一个帕塞瓦尔框架，那么（36）将得到满足。然而，很容易找到一对对偶框架，使得 $D_W C_V \neq \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$：为简便起见，我们考虑 φ 是一个 Riesz 基的情形。于是 φ 具有唯一的对偶框架，由 $\psi = (S_\varphi^{-1}\varphi_i)_{i\in I}$ 给出，并且由于相应合成算子和分析算子的双射性，条件（35）对于（34）成立而言既是必要条件也是充分条件。根据 Riesz 基及其对偶框架的双正交性，条件（34）成立，当且仅当

$$\|\varphi_i\|\|\psi_i\| = 1 \qquad (\forall i \in I) \tag{36}$$

在此情形下。现在，取 $\mathrm{H} = \mathbb{R}^2$，并考虑由 $\varphi_1 = (1,\ 2)^T$ 和 $\varphi_2 = (1,\ -1)^T$ 给出的 Riesz 基。于是我们得到

$$S_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S_\varphi^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

特别地，我们看到 $\|\varphi_1\| = \sqrt{5}$，而 $\|S_\varphi^{-1}\varphi_1\| = \|(1/3,\ 1/3)^T\| = \sqrt{2}/3$。

与上述例子相比，寻找满足 V 和 W 使得 $D_W C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$ 的融合框架对，对于应用而言似乎仍然非常有趣。因此，本小节的其余部分将致力于这一任务。

我们首先考察如下特殊情形下的刻画，其中 V 是一个融合 Riesz 基。

命题 13 设 V 为一个融合 *Riesz* 基，W 为一个融合框架。则以下各项等价。

(i) $D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$.
(ii) $w_i \pi_{W_i} \pi_{V_i} = v_i S_V^{-1} \pi_{V_i}$ *for all* $i \in I$.

证明 如果 (ii) 成立，那么

$$D_W C_V = \sum_{i\in I} w_i v_i \pi_{W_i} \pi_{V_i} = \sum_{i\in I} v_i^2 S_V^{-1} \pi_{V_i} = S_V^{-1} S_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}.$$

反过来，假设 (i) 成立。对于每个子空间 V_i，选取一个正交归一基 $e_i = (e_{ij})_{j\in J_i}$。于是，由于 V 是融合 Riesz 基，根据定理 16，相应的全局框架 $we = (v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是一个 Riesz 基。此外，由于所有局部框架都是正交归一基，根据引理 11，我们有 $S_V = S_{we}$。现在注意到，对于所有 $f \in \mathrm{H}$，均有

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i\in I} w_i v_i \pi_{W_i} \pi_{V_i} f \\ &= \sum_{i\in I} w_i v_i \pi_{W_i} \sum_{j\in J_i} \langle f, e_{ij}\rangle e_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \langle f, v_i e_{ij}\rangle w_i \pi_{W_i} e_{ij}. \end{aligned}$$

这意味着 $(w_i \pi_{W_i} e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$ 是 we 的对偶框架。然而，由于 we 是 Riesz 基，它有唯一的对偶框架，即其典范对偶框架。因此

$$w_i \pi_{W_i} e_{ij} = S_{we}^{-1} v_i e_{ij} = S_V^{-1} v_i e_{ij} \quad (\forall i \in I, j \in J_i).$$

特别地，对于任意 $g \in V_i$，都有

$$w_i \pi_{W_i} g = \sum_{j\in J_i} \langle g, e_{ij}\rangle w_i \pi_{W_i} e_{ij} = \sum_{j\in J_i} \langle g, e_{ij}\rangle v_i S_V^{-1} e_{ij} = v_i S_V^{-1} g.$$

由于这对每个 $i \in I$ 都成立，(i) 得证。 □

对于任意融合框架 V，下述定理给出了满足 $D_W C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$ 的所有融合框架 W 的算子理论刻画。其证明依赖于第 3.1 节所述的希尔伯特直和之间有界算子的典范矩阵表示。

定理 22 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个融合框架。那么以下命题等价：

(i) $W = (W_i, w_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的贝塞尔融合序列，满足 $D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$。*(ii)* 存在一个族 $(L_i)_{i\in I}$ 属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $[\,\ldots L_{i-1}\, L_i\, L_{i+1}\ldots\,] \in \mathcal{B}(\mathcal{K}^2\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 并

$$w_i \pi_{W_i} = v_i S_V^{-1} \pi_{V_i} + L_i - \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) v_i S_V^{-1} \pi_{V_i} \quad (\forall i \in I). \tag{37}$$

证明 (i) 成立当且仅当 D_W 是 C_V 的有界左逆。根据引理 17 (a)，这等价于 $D_W = S_V^{-1} D_V + L(\mathrm{I}_{\mathcal{K}^2\mathcal{H}} - C_V S_V^{-1} D_V)$，其中 $L \in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H}, \mathrm{H})$。根据矩阵表示的唯一性（命题 2 和命题 3），恰好存在一个族 $(L_i)_{i\in I}$，属于 $\mathrm{B}(\mathrm{H})$，使得 $\mathbb{M}(L) = [\ldots L_{i-1}\, L_i\, L_{i+1}\ldots]$。此外，有界算子 $\mathrm{I}_{\mathcal{K}^2\mathcal{H}} - C_V S_V^{-1} D_V$ 的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} - v_i^2 \pi_{V_i} S_V^{-1} \pi_{V_i} & -v_i v_{i+1} \pi_{V_i} S_V^{-1} \pi_{V_{i+1}} & \dots \\ \dots & -v_{i+1} v_i \pi_{V_{i+1}} S_V^{-1} \pi_{V_i} & \mathcal{I}_{\mathcal{H}} - v_{i+1}^2 \pi_{V_{i+1}} S_V^{-1} \pi_{V_{i+1}} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

这意味着 $S_V^{-1} D_V + L\big(\mathrm{I}_{\mathcal{K}^2\mathcal{H}} - C_V S_V^{-1} D_V\big)$ 的矩阵表示为行矩阵 $[\dots\ A_{i-1}\ A_i\ A_{i+1}\ \dots]$,，其中

$$A_i = v_i S_V^{-1} \pi_{V_i} + L_i - \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) v_i S_V^{-1} \pi_{V_i}.$$

因此，(i) 等价于 (37)。 □

推论 12 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架。若存在一个族 $(L_i)_{i\in I}$ 属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $(\|L_i\|)_{i\in I} \in l^2(I)$，且 $W = (W_i, w_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间的加权族，满足

$$w_i \pi_{W_i} = v_i S_V^{-1} \pi_{V_i} + L_i - \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) v_i S_V^{-1} \pi_{V_i} \quad (\forall i \in I),$$

那么 W 是 $\mathcal{H}$ 的贝塞尔融合序列，并且成立 $D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$。

证明根据定理 22，只需证明我们的假设蕴含 $[\dots\ L_{i-1}\ L_i\ L_{i+1}\dots] \in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H}, \mathrm{H})$。为此，注意到对每个 $(f_i)_{i\in I} \in \mathrm{K}^2\mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned} \big\|[\dots L_{i-1}\ L_i\ L_{i+1} \dots](f_i)_{i\in I}\big\| &= \Big\|\sum_{I\in I} L_i f_i\Big\| \\ &\le \sum_{I\in I} \|L_i\|\|f_i\| \\ &\le \Big(\sum_{i\in I} \|L_i\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i\in I} \|f_i\|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式。 □

推论 13 设 $V = (V_i, v_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的融合框架。若 $W = (W_i, w_i)_{i\in I}$ 是满足 $D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ 的 $\mathcal{H}$ 的贝塞尔融合序列，则存在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个族 $(L_i)_{i\in I}$，使得 $L = [\dots\ L_{i-1}\ L_i\ L_{i+1}\dots] \in \mathcal{B}(\mathcal{K}^2\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 且

$$W_i \subseteq S_V^{-1} V_i + \mathcal{R}(L_i) + \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) S_V^{-1} V_i \quad (\forall i \in I).$$

证明 由定理 22 可知，存在 $\mathrm{B}(\mathrm{H})$ 中的一族算子 $(L_i)_{i\in I}$，使得 $[\dots\ L_{i-1}\ L_i\ L_{i+1}\dots] \in \mathrm{B}(\mathrm{K}^2\mathcal{H}, \mathrm{H})$，并且满足 (37)。特别地，(37) 中相应算子的值域必须一致。因此我们得到

$$W_i = \mathcal{R}(w_i\pi_{W_i}) = \mathcal{R}\Big(v_i S_V^{-1}\pi_{V_i} + L_i - \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) v_i S_V^{-1}\pi_{V_i}\Big)$$
$$\subseteq \mathcal{R}(v_i S_V^{-1}\pi_{V_i}) + \mathcal{R}(L_i) + \mathcal{R}\Big(\Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) v_i S_V^{-1}\pi_{V_i}\Big)$$
$$= S_V^{-1}V_i + \mathcal{R}(L_i) + \Big(\sum_{k\in I} L_k v_k \pi_{V_k}\Big) S_V^{-1}V_i$$

对所有 $i \in I$。 □

我们以命题 13 的以下推广结束本小节。

定理 23 设 V 和 W 是融合框架。则以下条件等价。

(i) $D_W C_V = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$。*(ii)* 对于 V_i的任意一组正交归一基$(e_{ij})_{j\in J_i}$，全局族 $(w_i\pi_{W_i}e_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$是全局框架 $ve = (v_i e_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$的对偶框架。

(iii) 对于 V_i的任意一组正交归一基$(e_{ij})_{j\in J_i}$，有

$$w_i\pi_{W_i}e_{ij} = S_V^{-1}v_i e_{ij} + h_{ij} - \sum_{k\in I}\sum_{j\in J_k}\langle S_V^{-1}v_i e_{ij}, v_k e_{kl}\rangle h_{kl} \quad (\forall i \in I, j \in J_i),$$

其中$(h_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$是 $\mathcal{H}$中的 *Bessel* 序列。

证明 对于每个子空间 V_i，选取一组标准正交基 $(e_{ij})_{j\in J_i}$。那么，对于相应的全局框架 $ve = (v_i e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$根据引理 11，我们有 $S_V = S_{ve}$。现在，我们观察到，对于所有 $f \in \mathrm{H}$，都有

$$D_W C_V f = \sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{W_i}\pi_{V_i} f$$
$$= \sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{W_i} \sum_{j\in J_i}\langle f, e_{ij}\rangle e_{ij}$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle f, v_i e_{ij}\rangle w_i \pi_{W_i} e_{ij}.$$

这意味着 $D_W C_V = \mathrm{I}_{\mathcal{H}}$ 当且仅当 $(w_i\pi_{W_i}e_{ij})_{i\in I,\ j\in J_i}$是 ve 的对偶框架。因此，等价关系 (i) ⇔ (ii) 成立。根据 $S_V^{-1} = S_{ve}^{-1}$ 和希尔伯特空间中对偶框架的刻画（定理 9），等价关系 (ii) ⇔ (iii) 立即成立。□

6.9.2 情形 $Q = \bigoplus_{i\in I} S_V^{-1}$

本节介绍的第二个特殊情形，在交替对偶融合框架的定义上却是历史上最早的，由 P. Gˇavruţa 在 [55] 中提出。在他的论文中，Gˇavruţa 使用合成算子 D_V 和分析算子 C_W，分别将其视为从 $\mathrm{K}_V^2 \longrightarrow$ 到 H 以及从 H $\longrightarrow$ 到 K_W^2 的算子。由于它们无法

像式（34）那样复合，G˘avruţa 便从不同的角度着手定义对偶融合框架。类比框架理论，他推广了由融合框架重构得到的典范对偶融合框架（见第 6.6 节）。在这一过程中，他利用引理12证明了 $S_V^{-1}\pi_{V_i} = \pi_{S_V^{-1}V_i}S_V^{-1}\pi_{V_i}$，并给出了重构公式

$$f = \sum_{i\in I} v_i^2 \pi_{S_V^{-1}V_i} S_V^{-1}\pi_{V_i} f \quad (\forall f \in \mathcal{H}). \tag{38}$$

此外，G˘avruţa推广了 (38)，并将贝塞尔融合序列 $W = (W_i, w_i)_{i\in I}$ 称为 V 的替代对偶融合框架，如果

$$f = \sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{W_i} S_V^{-1}\pi_{V_i} f \quad (\forall f \in \mathcal{H}). \tag{39}$$

如 [81], 中采用块对角算子的记号，我们可以通过块对角算子 $Q = \bigoplus_{i\in I} S_V^{-1}$ 将 (39) 改写为 (28)。

虽然替代对偶非常适合将融合框架重构纳入对偶框架，但这一特殊情形缺乏对称性（见下文），因此并未将对偶框架作为一种特殊情形包含在内。再次说明，我们需要一种更一般的 Q，使对偶框架定义足够灵活，能够满足对偶融合框架所预期的所有任务。

例子 [74]

考虑由 $\mathbb{R}^3$ 给出的子空间

$$V_1 = \operatorname{span}\big((1,0,0)^T\big),\ V_2 = \operatorname{span}\big((0,1,0)^T\big),\ V_3 = \operatorname{span}\big((0,0,1)^T\big),$$
$$V_4 = \operatorname{span}\big((0,1,0)^T\big),\ V_5 = \operatorname{span}\big((1,0,0)^T\big),\ V_6 = \operatorname{span}\big((0,0,1)^T\big),$$
$$W_1 = \operatorname{span}\big((1,0,0)^T\big),\ W_2 = \operatorname{span}\big((0,1,0)^T\big),\ W_3 = \operatorname{span}\big((0,0,1)^T\big),$$
$$W_4 = \operatorname{span}\big((0,0,1)^T\big),\ W_5 = \operatorname{span}\big((0,1,0)^T\big),\ W_6 = \operatorname{span}\big((1,0,0)^T\big),$$

那么，$V = (V_i,\ 1)_{i=1}^6$ 和 $W = (W_i,\ 2)_{i=1}^6$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的融合框架，其对应的融合框架算子分别为 $S_V = 2\cdot \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}$ 和 $S_W = 8\cdot \mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}$。直接计算可得

$$D_W\Big(\bigoplus_{i=1}^6 S_V^{-1}\Big)C_V = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^3} \qquad \text{and} \qquad D_V\Big(\bigoplus_{i=1}^6 S_W^{-1}\Big)C_W = \frac{1}{4}\cdot \mathcal{I}_{\mathbb{R}^3}.$$

因此，W 是 V的一个另一对偶，但 V 不是W的另一对偶。

7 有限融合框架

在前几节中，我们主要关注融合框架的一般理论，即由任意可数集 I索引的（可能是）无限维希尔伯特空间H中的融合框架。尽管此前的所有结果都可以轻松推广到有限维情形，但在介绍一些特别依赖于$\dim(\mathrm{H}) < \infty$的结果之前，我们将回顾一下有限维情形下已阐述理论的若干方面。在第8节中，我们将向读者介绍融合框架的实现。

到目前为止，在证明中我们几乎总是假设 I 是可数无限集，并在必要时确保收敛，尽管当 $\dim(\mathrm{H}) = \infty$时， I 可以是有限集。例如，H 的任意闭子空间 V 及其正交补 $V^{\perp}$ （权重均为 1）构成 H 的一个融合框架（虽然是一个很无聊的例子），其中 $|I| = 2$。反过来，如果 $\dim(\mathrm{H}) < \infty$，那么就存在具有无限指标集的融合框架，例如 $(\mathrm{H},\ 2^{-n})_{n=1}^{\infty}$。

从现在起，我们只考虑典型情形，即 I 是有限集且 H 是有限维的。

7.1 有限维希尔伯特空间中的融合框架

本节先简要总结有限维融合框架理论中最基本的概念，并介绍一些面向数值计算的初步结果。

设 $\mathrm{H} = \mathrm{H}^L$ 是定义在 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$上的 L维希尔伯特空间，即我们可以将 $\mathrm{H} = \mathbb{F}^L$。

设 $V = (V_i, v_i)_{i=1}^K$ 是 H^L 的一个子空间族 V_i，其权重为 $v_i > 0$。那么V 根据柯西-施瓦茨不等式始终是贝塞尔融合序列。此外，类似于框架 [43]，我们可以考虑最小值

$$A_V := \min\left\{ \sum_{i=1}^{K} v_i^2 \|\pi_{V_i} f\|^2, f \in \mathcal{H}^L, \|f\| = 1 \right\},$$

它存在，因为 $f \mapsto \sum_{i=1}^K v_i^2 \|\pi_{V_i} f\|^2$ 是连续的，且有限维希尔伯特空间中的单位球面是紧的。这意味着，

$$\begin{aligned} A_V > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{span}(V_i)_{i=1}^K = \operatorname{span} \cup_{i=1}^K V_i = \mathcal{H}^L \\ &\Longleftrightarrow \quad V \text{ is a fusion frame for } \mathcal{H}^L, \end{aligned} \tag{40}$$

此时， A_V 是下融合框架界。特别是在有限维情形下， V 的融合框架性质与权重$v_i > 0$无关。此外，根据定理 16，H^L 上的融合 Riesz 基只是一个

融合框架 $V=(V_i,\ v_i)_{i=1}^K$，其中 $\mathrm{H}^L=\oplus_{i=1}^K V_i$ 是子空间V_i的直和。

综上，我们得到以下结论：

命题 14 设 $V=(V_i, v_i)_{i=1}^K$ 是 $\mathcal{H}^L=\mathbb{F}^L$ 的一个子空间族 V_i，其权重为 $v_i>0$。

(i) V 是 $\mathcal{H}^L$ 的融合框架，当且仅当张成空间为 $\cup_{i=1}^K V_i=\mathcal{H}^L$。*(ii)* V 是 $\mathcal{H}^L$ 的融合 *Riesz* 基，当且仅当张成空间为 $\cup_{i=1}^K V_i=\mathcal{H}^L$，且$\sum_{i=1}^K$维数$(V_i)=L$。

注释*11* (a) 鉴于命题 14，人们或许会问，为什么有限维情形下的融合框架理论概念值得关注，因为其中最重要的定义要么显而易见，要么归结为基础线性代数。这个问题的答案至少有两个方面：一方面，融合框架不等式适用于有限维和无限维情形。有些结果无法直接移植——特别是，当 H 是无限维时，(40) 并不成立（事实上，此时 H 中的单位球面不是紧集，而 $\operatorname{span}(V_i)_{i\in I}=\mathrm{H}$ 只是下框架不等式成立的必要条件，并非充分条件）。不过，这种统一的定义为将所有关于融合框架的抽象结果应用于有限维情形提供了一种途径。

另一方面，融合框架界 A_V 和 B_V 包含数值信息，见引理21和22。

(b) 等价地，我们可以称一族 $(P_i)_{i=1}^K$ 的 $L\times L$–矩阵（取自 $\mathbb{F}$）为 H^L上的融合框架，若 $P_i^2=P_i$且 $P_i^*=P_i$对于 $i=1,\dots,K$成立，并且矩阵 $\sum_{i=1}^K v_i^2P_i$是正定的。事实上，我们有 $\pi_{V_i}=P_i, V_i=\mathrm{R}(P_i)$，且 $\sum_{i=1}^K v_i^2P_i=S_V$对应于融合框架算子 S_V。

对于有限紧融合框架，我们观察到 H 的维数 L 与相应子空间的维数 V_i之间存在如下关系。

命题 15 *[42]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i=1}^K$ 是 $\mathcal{H}^L$上的 A_V-紧融合框架。那么

$$\sum_{i=1}^K v_i^2\dim(V_i)=L\cdot A_V.$$

证明 对于每个 i，令 $(e_{ij})^{\dim(V_i)}{}_{j=1}$为 V_i的一组标准正交基。则全局框架 $(v_ie_{ij})^K{}_{,\text{维数}(V_i)i,j=1}$根据推论 2 是 A_V-紧框架。因此，利用 [39,第 2 节3]可得

$$L\cdot A_V=\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^{\dim(V_i)}\|v_ie_{ij}\|^2=\sum_{i=1}^K v_i^2\dim(V_i),$$

如所愿。 □

与 V相关联的系数空间为 $\sum_{i=1}^K\oplus\mathrm{H}^L=\{(f_i)_{i=1}^K:\ f_i\in\mathrm{H}^L\}$，配备 $\langle(f_i)_{i=1}^K,\ (g_i)_{i=1}^K\rangle=\sum_{i=1}^K\langle f_i,g_i\rangle$，我们可以将其识别为$(\mathbb{F}^{KL},\ \|\cdot\|_2)\cong(\mathbb{F}^{L\times K},\ \|\cdot\|_{\mathrm{Fro}})$。为保持一致，我们设 $\mathrm{K}^2\mathcal{H}:=\sum_{i=1}^K\oplus\mathrm{H}^L$。

因此，与 V 相关联的合成算子 $D_V\colon \mathrm{K}^2\mathcal{H}\longrightarrow \mathrm{H}^{\,L}$ 可以识别为定义在 $\mathbb{F}$ 上的 $L\times KL$ 矩阵，而分析算子 $C_V\colon \mathrm{H}^{\,L}\longrightarrow \mathrm{K}^2\mathcal{H}$ 可以识别为定义在 $\mathbb{F}$ 上的 $KL\times L$ 矩阵。特别地，$S_V = D_V C_V = \sum_{i=1}^{K} v_i^2\pi_{V_i}$ 可以识别为定义在 $\mathbb{F}$ 上的 $L\times L$ 矩阵。

如第 3 节所述，给定一个融合框架 $V=(V_i,\ v_i)_{i=1}^{K}$，利用 S_V 的可逆性即可实现完美重构，见式 (11)。在数值计算中，正定矩阵求逆时的一个重要度量是条件数，其定义为最大特征值与最小特征值之比。与框架类似，融合框架算子的条件数由最优（融合）框架界 [43], 的比值给出，见下文。

引理 21 设 $V=(V_i, v_i)_{i=1}^{K}$ 是 $\mathcal{H}^L$ 的一个融合框架。设 A_V^{opt} 表示最大的可能下融合框架界，B_V^{opt} 表示 V 的最小可能上融合框架界。那么 S_V 的条件数为 B_V^{opt}/A_V^{opt}。

证明 对每个 i，令 $(e_{ij})_{j=1}^{\dim(V_i)}$ 为 V_i 的一组标准正交基。于是，根据引理 11，$ve=(v_i e_{ij})_{i,\ j=1}^{K,\ \text{维数}(V_i)}$ 是 $\mathrm{H}^{\,L}$ 的一个框架，且 $S_{ve}=S_V$。特别地，它们各自的最优框架界和条件数相同，因此结论得证 [43]。□

如果希望避免对 S_V 求逆，可以改用框架算法 [43] 来近似 $f\in\mathrm{H}^L$。这与框架情形的证明完全类似，因为其证明仅依赖于（融合）框架算子的正定性。为完整起见，我们仍按照 [43] 给出证明。具体实现参见第8节。

引理 22 *[42]* 设 $V=(V_i, v_i)_{i=1}^{K}$ 是 $\mathcal{H}^{\,L}$ 上的融合框架，融合框架界为 $A_V\le B_V$。给定 $f\in\mathcal{H}^L$，定义序列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下：

$$g_0=0,\quad g_n=g_{n-1}+\frac{2}{A_V+B_V}S_V(f-g_{n-1})\qquad (n\ge 1).$$

Then

$$\|f-g_n\|\le\left(\frac{B_V-A_V}{B_V+A_V}\right)^n\|f\|.$$

特别地，$\|f-g_n\|\longrightarrow 0$ 如 $n\to\infty$。

证明 取 $f\in\mathrm{H}^L$。由下融合框架不等式，

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\mathcal{I}_{\mathcal{H}}-\frac{2}{A_V+B_V}S_V\right)f,f\right\rangle&=\|f\|^2-\frac{2}{A_V+B_V}\sum_{i=1}^{K}v_i^2\|\pi_{V_i}f\|^2\\&\le\|f\|^2-\frac{2A_V}{A_V+B_V}\|f\|^2\\&=\frac{B_V-A_V}{B_V+A_V}\|f\|^2.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{I}_{\mathcal{H}} - 2(A_V + B_V)^{-1} S_V$ 是自伴的，因此可得

$$\left\| \mathcal{I}_{\mathcal{H}} - \frac{2}{A_V + B_V} S_V \right\| \leq \frac{B_V - A_V}{B_V + A_V}.$$

现在，根据 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的定义，我们可知

$$\begin{aligned} f - g_n &= f - g_{n-1} - \frac{2}{A_V + B_V} S_V (f - g_{n-1}) \\ &= \left(\mathcal{I}_{\mathcal{H}} - \frac{2}{A_V + B_V} S_V \right) (f - g_{n-1}). \end{aligned}$$

通过迭代并利用假设 $g_0 = 0$，我们得到

$$f - g_n = \left(\mathcal{I}_{\mathcal{H}} - \frac{2}{A_V + B_V} S_V \right)^n f.$$

这意味着

$$\|f - g_n\| \leq \left(\frac{B_V - A_V}{B_V + A_V} \right)^n \|f\|,$$

如所期望的。 □

8 可复现研究实现

有限融合框架——此处指 H N 的子空间 ^{L} ——作为大型时频分析工具箱（LTFAT） [85] 中框架框架的一部分实现。框架框架在 [76] 中引入，遵循面向对象的编程范式，其中框架类作为父类，派生出特定的框架对象。融合框架表示为容器框架，可由任意组合的框架对象构成。

LTFAT 框架框架支持以面向对象的方式处理变换[76]——即框架分析矩阵。框架对象既可以通过具体方式构造，即使用选项 gen 将合成矩阵传递给框架类；也可以通过抽象类构造，即根据特定需求的属性初始化框架对象，例如特定的框架结构，或可调整的时间尺度或频率尺度。目前，LTFAT 支持的抽象结构化框架包括离散伽博变换（DGT） [86] 、非平稳伽博变换（NSDGT） [10], 、具有线性和对数频率尺度的多种滤波器组实现[73], ， 以及小波变换 [77]。有关目前支持的框架类型的完整列表，请参阅 LTFAT 文档 [1]。

框架对象的性质（例如融合框架权重 w）对应于对象的属性，而框架相关操作（例如分析和合成）则对应于框架对象的方法。框架对象并非直接创建系数矩阵，而是以类似算子的方式实例化，

表1：完全初始化的 LTFAT 融合框架对象中的一些相关字段，指出这些字段是否为融合框架专用，并描述其对应的框架性质。

字段名称	融合框架专用	描述
Nframes	+	局部框架的数量 N
w	+	融合框架权重（w_1，……，w_N）
框架	+	局部框架对象（D_1，……，D_N）
frana		构造分析算子的方法
融合框架合成方法		构造合成算子的方法
L		全空间的维数、框架向量的长度
M	+	每个局部框架中的元素/向量数量：向量（K_1，…，K_N）
A	+	下融合框架界
B	+	上融合框架界
是紧的	+	如果框架是紧的，即 $A = B$
是帕塞瓦尔框架	+	如果框架是帕塞瓦尔框架，即 $A = B = 1$
是均匀框架	+	如果该框架是均匀的，即 $w_i = 1 \forall i$
局部对偶框架	+	局部对偶框架对象
框架算子	+	框架算子对应的矩阵

也就是说，它是一个主要由匿名函数构成的结构。当框架对象完成初始化后，便不再是抽象的，而是可应用的；一旦其维度固定为特定的 $\mathbb{C}^L$，它在数学意义上便得到了完整定义。表1列出了融合框架特有或与融合框架特别相关的框架性质，以及它们在框架对象中的名称。

在创建融合框架时，使用相应局部框架的合成矩阵来定义融合框架，即

$$D^{(i)} := D_{\phi^{(i)}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{iK_i} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{41}$$

其中，K_i是 $\phi^{(i)}$的框架向量数量。可以通过以下命令，根据给定的合成矩阵创建局部框架 $\phi^{(i)} = (\phi_{ik})_{k \in K_i}$

locfram $^{(i)}$ = 框架('gen',$D^{(i)}$)；

然后使用以下命令创建融合框架

g F =框架 ('fusion', 权重, locfram $^{(1)}$,…,locfram$^{(N)}$);.

融合框架的属性——权重（w）、局部框架结构体（frames）、其数量（Nframes）以及分析和合成方法（分别为 frana 和 frsyn）——在通过 frame 函数实例化框架对象时进行设置。

融合框架是 H^L 中的一类子空间 W_i。为了降低表示空间的维数并提高数值效率，可以考虑不同维数的空间 W_i

但随后必须明确如何将局部框架融合在一起，例如，将低维子空间 W_i 中的算子指派到 H^L [32][第 13.2 节3]。

为避免引入这一额外算子，我们直接考虑 H^L 的子空间。合成算子 D_W 通过 $f = \sum_{i=1}^{N} w_i \pi_{W_i} f_i$ 定义，使我们无需检查 f_i 是否属于所考虑的子空间 W_i，并且可以将合成算子表示为 $\mathbb{C}^{L\times L\cdot N}$ 中矩阵的形式，这一形式适用于全系数空间 $\mathrm{K}^2\,\mathcal{H} = \mathbb{C}^{L\cdot N}$。这种方法的另一个优点是，可以直接修改分析-合成流程中的系数（例如乘子 [8, 3] ），而无需确保其始终处于相关子空间内。此外，对于使用融合框架表示为分块矩阵方程的算子方程的数值求解，这种方法也更加方便 [11]——原因相同。

对于分析算子 C_W： $\mathbb{C}^L \longrightarrow \mathbb{C}^{L\times N}$，必须在子空间 W_i上实施正交投影。在我们的实现中，子空间 W_i 始终由局部框架 $\phi^{(i)} = (\phi_{ik})_{k\in K_i}$ 给出，即 W_i =张成空间$(\phi_{ik})_{k\in K_i}$（换句话说，我们始终考虑一个融合框架系统 $\left(W_i,\ w_i,\ \phi^{(i)}\right)_{i=1}^{N}$ 。这些局部框架是全空间 H^L 中的框架序列。根据 [45, 命题 5.2。3]，正交投影通过使用相应的局部对偶框架向量 $\widetilde{\phi}_{ik} = S^{-1}_{\phi^{(i)}}$ 进行局部框架重构来计算· ϕ_{ik}，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ N$ 和 $k \in K_i$，即

$$\pi_{W_i} f = \sum_{k\in K_i} \langle f, \phi_{ik}\rangle\, \widetilde{\phi}_{ik}. \tag{42}$$

分析算子 $C_W f = \mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^{N}$ 按分量定义为

$$p_i = w_i \pi_{W_i} f$$

其中， f 为输入信号， w_i 为融合框架权重， W_i 为相应局部框架所张成的子空间。在 LTFAT 中，此功能通过 fuana 函数实现。若只想提取一个投影，即投影到固定子空间 W_{i_0}，则可使用选项 fuana(..., 'range',i_0)。合成算子也使用此功能，并通过函数 fusyn 实现。还可以指定 $1, \ldots, N$ 的任意子集向量。

本章图的生成代码可从 http://ltfat.org/notes/ltfatnote058.zip 下载。该代码也将包含在即将发布的 LTFAT 2.6 版中。

8.1 对偶融合框架的计算

为了计算给定融合框架 $(S_W^{-1}W_i,\ w_i)_{i=1}^{N}$ 的典范对偶融合框架，我们需要知道融合框架算子 S_W 的逆 S_W^{-1}。算子 S^{-1} 可以通过对融合框架算子v直接求逆来计算

S_W 使用 fudual 函数。对于一般的融合框架，无法对系数空间的结构作出任何假设。因此，无法应用高效的因式分解算法，例如用于 Gabor框架 [87], 的算法。一般而言，对于较大的 L 和/或N，直接求逆在数值上不可行。另一种选择是采用迭代方法。我们实现了融合框架算法，见定理 22。这是一种标准的 Richardson迭代，其矩阵大小为 $L \times L$ ，该矩阵源自一个融合框架。也可以在系数空间上进行分块迭代 [11],，但在这里没有必要。

均匀随机融合框架的收敛速率示例见图 1。该框架是在维数为 $L = 105$ 的空间中构造的，包含八个局部框架序列，即八个子空间， $N = 8$。局部框架中的元素数量在区间 $[0.25 \cdot L, 0.75 \cdot L]$ 内随机选取，其系数也在范围 $(0, \ldots, 0.5)$ 内随机选取。

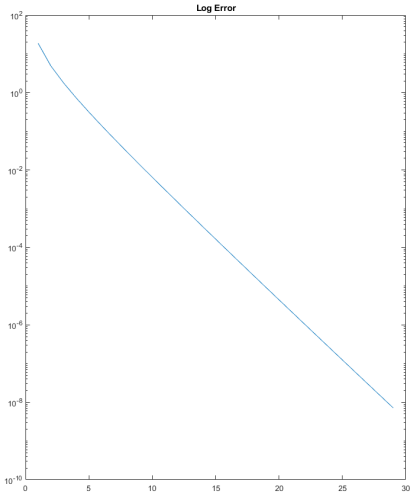


图 1：融合框架算子的 Richardson 算法对数收敛速率。

作为一个易于可视化的例子，考虑由局部框架向量 $\phi_{11} = (1,0,0)^T$、$\phi_{12} = (0,1,1/2)^T$、 $\phi_{21} = (1,1,0)^T$ 和 $\phi_{22} = (0,0,1)^T$ 以及权重 $w_1 = w_2 = 1$ 定义的融合框架系统。图 2 展示了向量 $f = (-0.5, -1.5, 0.5)^T$ 在两个对应子空间上的投影，即融合框架系数。图 3 展示了典范对偶框架的三维图，以及 $\mathbb{R}^3$ 中的局部框架。

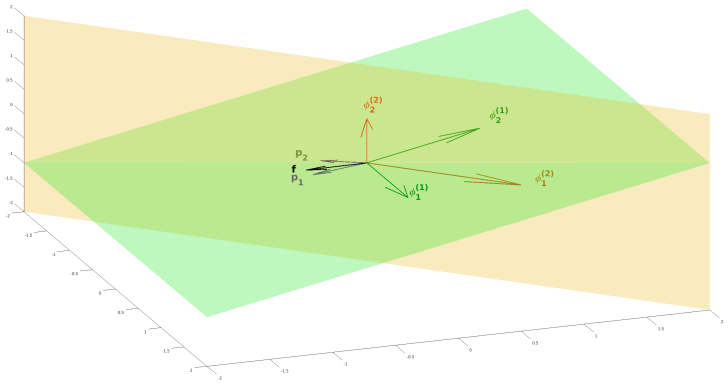


图 2：向量 $f = (-0.5, -1.5, 0.5)^T$ 在由子空间 $W_1 = \text{span}(\phi_{11}, \phi_{12})$（绿色）和 $W_2 = \text{span}(\phi_{21}, \phi_{22})$（橙色）构成的均匀融合框架上的投影，其中 $\phi_{11} = (1, 0, 0)^T$、$\phi_{12} = (0, 1, 1/2)^T$、$\phi_{21} = (1,1, 0)^T$ 和 $\phi_{22} = (0,0,1)^T$。局部框架以相应颜色（橙色和绿色）的箭头表示。向量 f 以黑色箭头表示，其在对应两个子空间上的投影 p_1 和 p_2 以灰色表示。

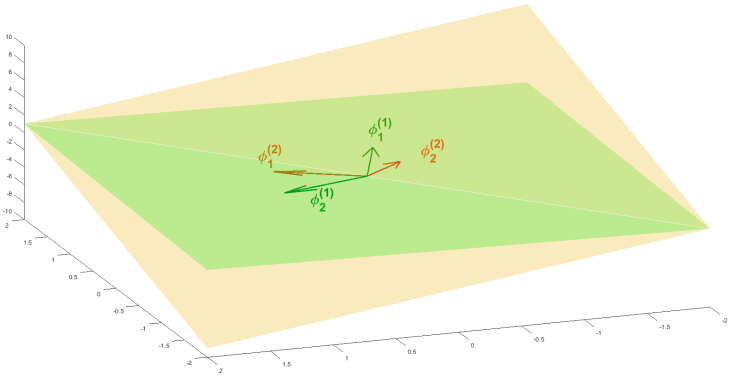


图 3：上述融合框架系统的典范对偶融合框架——图示沿方位角方向旋转了 90 度。

8.2 融合框架系数的可视化探索

目前还不清楚应该采用何种规范方式来展示融合框架的系数。本节将介绍几种方案，以引发后续讨论。这个主题无疑将成为未来的研究课题。

一种直接的方案是直接展示向量 $p_i = \pi_{W_i} f$。图4a展示了第8.1节中介绍的、针对 $L = 105$ 的随机融合框架。图中绘制了正弦输入信号 $f(t) = \sin(2\pi 4t)$ 的融合框架分析系数，其中 $t = 0, \frac{1}{L}, \frac{1}{L}, \ldots, \frac{1}{L}$。这可以称为直接融合框架系数图。

即使对于这些随机框架，也可以从图中猜出正弦信号的频率。右侧的图4b绘制了这些系数的范数 $\|p_i\| = \|\pi_{W_i} f\|$。这可以看作声谱图的类似图示，因此可以称为 融合图。

另一种选择是显示融合框架系统的全局框架系数，同时以一种也能指示融合框架（即相应的局部框架）的方式进行显示。这可以称为<sty le id='1'>局部融合图。对于无结构框架而言，这种表示方式只不过是将多个类似图 4b 的显示拼接起来。这似乎不太有趣，也不太实用。如果所有局部框架都具有某种共同的特定结构，从而子空间也具有这种结构，那么采用这种方法似乎更有前景。

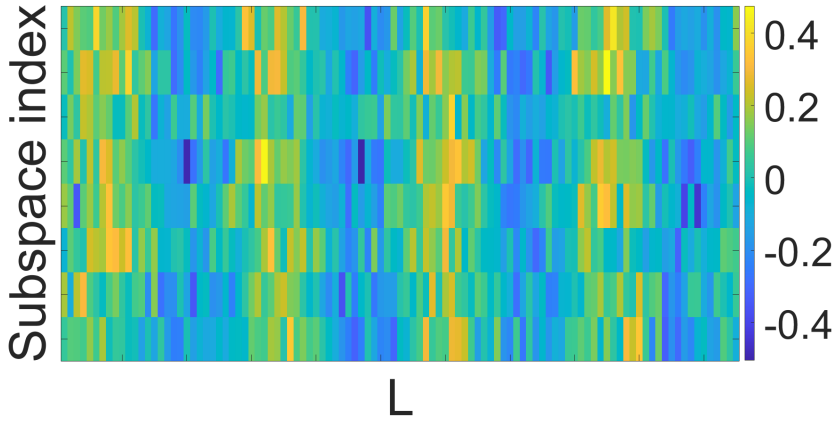
一个典型例子是将一般的时频表示构造为图块的集合，并将其排列在一个二维平面上，使这些图块在时间和频率两个维度上都彼此重叠——类似于拼图 [61] 或拼布 [50] 的思想。在融合框架条件的支持下——不同于其他方法——这种时频表示的重构很容易实现。

8.3 具有时频关系的融合框架

我们描述与时频具有“某种”关系的融合框架系统的方法如下：以“完整时频平面”（即由 STFT ($a = b = 1$) 得到的$L \times L$ 平面）为起点，我们考虑一些（与时频相关的）框架序列 $\psi_{(i)}=(\psi_{ik})_{k\in K_i}$。进一步假设，对于相应局部框架 $\psi^{(i)}$的所有元素 ψ_{ik}，我们都能找到相应的时频点（t_k^i, f_k^i） $\in [0, .., L-1] \times [0, .., L-1]$。现在，我们在（完整的）时频平面中定义区域 Q_i （这些区域之间存在一定重叠）。最后，通过这种方式，我们得到新的局部框架，具体为

$$\varphi^{(i)} = (\psi_{ik})_{k\in K_i, (t_k^i, f_k^i)\in Q_i}. \tag{43}$$

现在， $W_i :=$ 张成空间$\{\varphi^{(i)}\}$，我们考虑’混合时频变换’ 系统 $W_i, 1, \varphi^{(i)})_{i=1}^N$。在这里，我们可以应用上述关于融合框架的所有结果。在



(a) 均匀随机框架的融合框架分析算子 C_W，其中 $L = 105$ 和 $N = 8$ 作用于四振荡正弦信号（即 $f(t) = \sin(2\pi 4t)$，其中 $t = 0, \frac{1}{L}, \frac{1}{L}, \ldots\ldots, \frac{1}{L}$）。



(b) 均匀随机框架的融合框架分析算子的范数，其中 $L = 105$ 和 $N = 8$ 作用于同一信号。

具体而言，框架系数的重构通过引理 4 得以解决——这与 [61] 和 [50]中的方法不同。

为阐明这一想法，下面通过一个清晰的时频对应，举例说明一种特定“局部融合图”的实际实现。

8.3.1 局部融合图概念验证

在这个例子中，我们考虑来自两种知名时频表示的采样点／子集所构成的框架序列：离散 Gabor 变换（DGT）和快速小波变换（FWT） [64]。这两种变换都有时频对应，因此可以为特定框架元素分配相关的时频点:

在 $\mathbb{C}^L$ 中，一个 Gabor 系统由以下元素组成

$$g_{m,n}[k] = M_{mb}T_{na}g[k] = e^{\frac{2\pi imb}{L}}g[k-na],$$

其中我们使用标准记号 [52], , 即 M_ω 表示调制 ω， T_x 表示平移 x，而 g 是给定的窗函数。对于式 (41) 中的表示，我们有 $k = \frac{L}{a}n + m$。因此，时频关联为

$$(t_k^{DGT}, f_k^{DGT}) = \left(\left\lfloor \frac{ka}{L} \right\rfloor, ka \mod L\right)$$

假设窗函数在时域和频域中都以 0 为中心。按照 Mallat 算法 [65] 的实现，小波系统在快速小波变换中定义为

$$\begin{aligned} h_{j,n}[k] &= D_j T_n h[k] = h[2^j \cdot (k-n)] \qquad (1 \le j < J), \\ h_{J,n}[k] &= D_j T_n \tilde{h}[k] = \tilde{h}[2^J \cdot (k-n)], \end{aligned}$$

其中我们使用 [23], 中的常用记号，即 D_j 表示二进膨胀，h 是给定的母小波，h 表示尺度函数。对于式 (41) 中的表示，给定 k，令 $o := \max\{\lceil \frac{L}{i} \rceil, J\}$。那么相应的时频关联为

$$(t_k^{FWT}, f_k^{FWT}) = \left(2^{\lceil \frac{L}{i} \rceil}\left(k - \frac{L}{2^{\lceil \frac{L}{i} \rceil}} - 1\right) + \frac{1 + 2^{\lceil \frac{L}{i} \rceil}}{2}, \frac{3L}{2^{\lceil \frac{L}{i} \rceil}}\right) \text{for} \left\lceil \frac{L}{i} \right\rceil \le J$$

and

$$(t_k^{FWT}, f_k^{FWT}) = \left(2^J\left(k - \frac{L}{2^J} - 1\right) + \frac{1 + 2^J}{2}, \frac{L}{2^J}\right) \text{for} \left\lceil \frac{L}{i} \right\rceil > J,$$

假设窗函数在时域和频域中的支撑集内都居中。

如上文(43)所述，局部框架 $\varphi^{(i)}$ 是通过将区域 Q_i 选为时频平面上的重叠矩形 N，并选取相应的 DGT 和快速小波变换元素来定义的。在我们的例子中，它由一组六个 DGT 和快速小波变换框架片段组成（每种各三个片段），交替排列，并以重叠的拼图式布局呈现。我们没有使用整个 $[L \times L]$ 时频平面，而只显示正频率，因此将讨论范围限制在维数为 $[\frac{L}{2} \times L]$ 的时频平面上。所得

融合图如图5所示。区域 Q_i 的边界在图5和图7中以白线标出。

在这个具体例子中，我们选择了使用高斯窗的 DGT，跳步大小为 $a_{DGT} = 16$，对应 $M_{DGT} = 48$ 个通道，冗余度为 $r = \frac{M}{a} = 3$。对于快速小波变换，我们使用了迭代深度 $J = 6$，得到七个频率通道 M_{WL}，并采用了八阶 Daubechies小波。这两种实现 [86, 77]均可通过 LTFAT 轻松获取。在此设置下，我们得到一个框架界为 $A_W = 1$。7321 和 $B_W = 5$。6051 的融合框架。由此得到的全局框架的界为$A = 1$和 $B = 5$。0512。

我们展示了一个长度为 $L = 384$ 的输入信号 f，它由一串随机数（取值范围为 (0、.....、1)）经高斯窗加窗后构成，还包括一个频率为最大频率四分之一的正弦信号，即 $\left(\frac{L}{2}\right)/4 = 48$，以及一个冲激：在第 320 至 325 个采样点处，信号值为 2，共持续六个采样点。图 6 展示了该输入信号以及所用的高斯窗。

对于完整矩阵中所有存在对应框架元素的时频位置（t_k^i， f_k^i），我们将其值设为 $\langle f, \psi_{i,k} \rangle$。如果同一位置对应多个系数，则使用它们的平均值。其余系数使用 MATLAB 插值函数 fillmissing 进行填充。我们在图 5 中以对数刻度绘制绝对值。在底部图块中，正弦信号分量显示为一条红色条带。冲激大致位于时间采样点 250 到 350 之间。中间较高能量的区域源于加窗噪声。

在图 7 中，我们绘制了融合框架系数的范数（如图 4b 所示），但按照之前相同的时频模式排列。在这里，输入信号的能量分布同样得到了反映：第一个图块中的能量很少，中间图块中有一些能量，这同样是由加窗噪声造成的，而正弦信号则在底部图块中贡献了能量。由于冲激，最右侧的两个图块相较于最左侧的两个图块包含更高的能量。

9 进一步研究

本章旨在介绍融合框架理论的基础知识，并着重阐述引言中给出的研究动机。

因此，本书并未——也不可能——涵盖该理论的许多分支领域，例如：(1) 融合框架中的相位恢复和范数恢复 [2, 7, 6, 2, 36, 37], (2) 融合框架与受限等距性质 [14], (3) 融合框架与无偏基本序列 [15], (4) 利用融合框架进行稀疏信号恢复 [17],(5) 融合框架构造 [21, 27],(6) 融合框架势 [25, 56, 66],(7) 谱俄罗斯方块融合框架构造 [26, 35, 38], (8) 融合框架与分布式处理 [42, 63],(9) 传感器网络与融合框架 [33], (10) 随机融合框架 [19], (11) 融合框架的子空间擦除 [41, 57, 72],(12) 利用融合框架表示算子的矩阵表示 [11, 81], (13) 非正交融合框架 [20],(14) 融合框架与组合学 [18],(15) K-

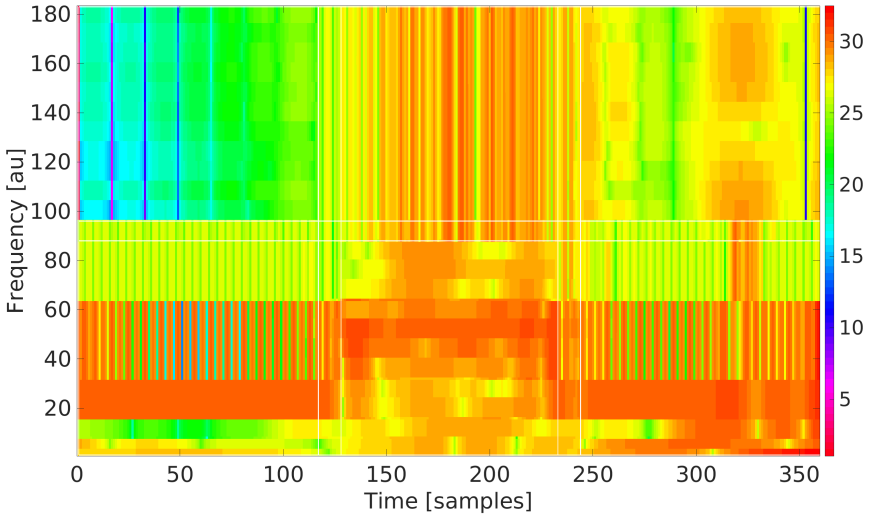


图5：由小波和 Gabor框架生成的融合图（从上到下、从左到右依次为：Gabor、小波、小波、Gabor、Gabor、小波）。该表示形式通过取插值后框架系数的对数绝对值获得。（出于显示目的，为将负系数映射到正值范围，在取对数之前，加上了一个偏移量，该偏移量对应于融合框架系数对数的最小值。）图中以白线表示的重叠部分经过选择，使相邻框架的相应框架长度彼此覆盖 10%。

融合框架 [82], (16) 交织融合框架 [49], (17) 融合框架乘子[83], (18)交织K-融合框架 [53],(19) 等弦紧融合框架 [69],(20) p-融合框架 [5] 以及 (21) 融合框架的扰动 [79]。最后，(22)[22] 是对（无需算法的）融合框架构造的最终论述。作者构造了几乎所有的融合框架，证明了构造的唯一性，并给出了每个融合框架的精确公式。关于 (23) 融合框架的各种应用，请参阅引言。

致谢

作者感谢 N. Holighaus 和 A. A. Arefijamaal 就相关问题展开讨论，并非正式地审阅了本长篇章节。

B.P. 和 Sh.M. 的工作得到了 OeAW创新资助 FUn（框架与无界算子；IF_2019_24_Fun）的支持。K.L.、B.P. 和 Sh.M. 的工作得到了奥地利科学基金（FWF）项目 P 34624 “局部化框架、融合框架与框架张量”（LoFT）的支持。H.S. 和 M.P. 的工作

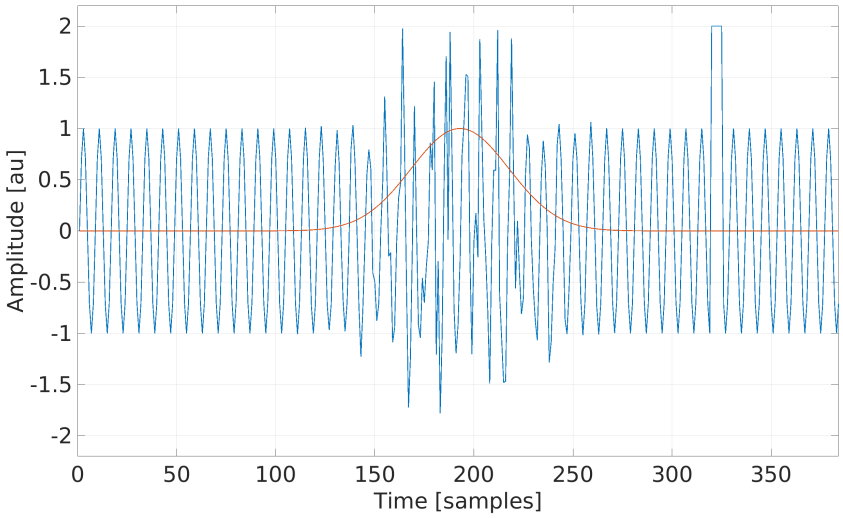


图6：所用的输入信号是加窗正弦信号与$f = 48Hz$、取值范围为 (0，.....，1) 的高斯窗加权随机信号，以及采样点范围为320至325的冲激的叠加。红色部分表示用于对噪声信号加窗的高斯窗。

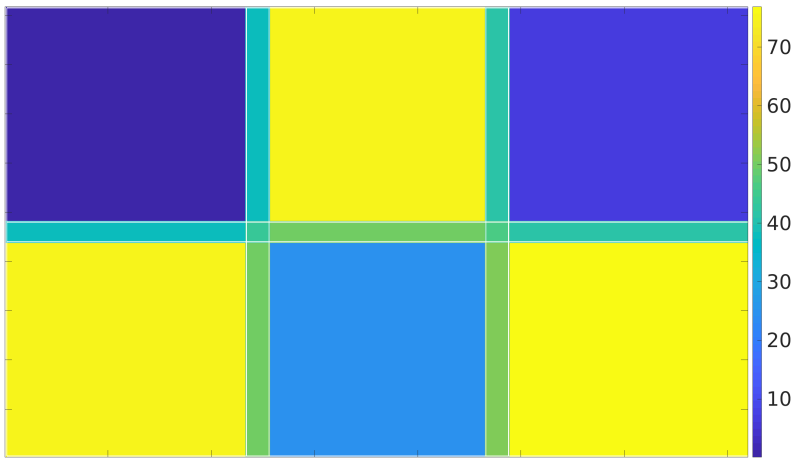


图7：显示了融合框架分析系数的范数，与图4b中的显示方式相同，但采用与图5相同的排列方式，其中数值在重叠区域内取平均。

获资助项目包括 PIP 112-201501-00589-CO（CONICET）和 PROIPRO 03-1420（UNSL）。

参考文献

1. 大型时频分析工具箱中框架函数的文档。http: // ltfat.org/doc/frames/frame.html. 访问日期：2022-10-30。2. F. Akrami、P. Casazza 和 A. Rahimi。关于实希尔伯特空间（融合）框架的相位（范数）可恢复性的一则说明。《国际小波、多分辨率与信息处理杂志》，即将发表。3. M. L. Arias 和 M. Pacheco。贝塞尔融合乘子。《数学分析与应用杂志》，348(2):581 – 588，2008年。4. M. S. Asgari。希尔伯特空间中融合基与里斯融合基的新刻画。《线性与拓扑代数杂志》，04(02):131–142，2015年。5. C. Bachoc 和 M. Ehler。紧 p-融合框架。《应用与计算调和分析》，35 15，2013 1 1( ): – 。6. R. Balan、B. Bodmann、P. Casazza 和 D. Edidin。无相位信号重构的快速算法。无相位信号重构的快速算法，*SPIE*会议论文集 -《小波 *XII*》，6701:11920–11932，2007年。7. R. Balan、P. Casazza 和 D. Edidin。无噪声相位信号重构。《应用与计算调和分析》，20:345–356，2006年。8. P. Balazs。贝塞尔乘子的基本定义与性质。《数学分析与应用杂志》，325(1):571–585，2007年1月。9. P. Balazs、J.-P. Antoine 和 A. Grybos。加权受控框架：相互关系与初步数值性质。《国际小波、多分辨率与信息处理杂志》，8(1):109–132，2010年1月。10. P. Balazs、M. Dörfler、N. Holighaus、F. Jaillet 和 G. Velasco。非平稳加博尔框架的理论、实现与应用。《计算与应用数学杂志》，236(6):1481–1496，2011年。11. P. Balazs、M. Shamsabadi、A. A. Arefijamaal 和 G. Chardon。利用融合框架表示算子。已投稿，2022年。12. P. Balazs、D. Stoeva 和 J.-P. Antoine。利用框架相关算子对一般序列进行分类。《采样理论、信号与图像处理》，10(2):151–170，2011年。13. B. Bodmann。通过抗丢失分组编码实现最优线性传输。《应用与计算调和分析》，22:274–285，2007年。14. B. Bodmann、P. Casazza 和 J. Cahill。融合框架与受限等距性质。《数值泛函分析与优化》，33，2012年。15. B. Bodmann、P. Casazza、J. Peterson 和 J. Tremain。等角融合框架与互不偏置基序列。《调和分析探索》，1:19–34，2012年。16. B. Bodmann、D. Kribs 和 V. Paulsen。通过最优 c^*编码实现抗退相干量子通信。《*IEEE* 信息论汇刊》，53(12):4738–4749，2007年。17. B. Boufounos、G. Kutyniok、和 H. Rauhut。由组合融合框架测量实现稀疏恢复。《*IEEE* 信息论汇刊》，57:3864–3876，2011年。18. M. Bownik、K. Luoto 和 E. Richmond。紧融合框架的组合刻画。《太平洋数学杂志》，275(2):257–294，2015年。19. J. Cahill、P. Casazza、M. Ehler 和 S. Li。紧的随机非正交融合框架。《当代数学》，650:23–36，2015年。20. J. Cahill、P. Casazza 和 S. Li。非正交融合框架及融合框架算子的稀疏性。《傅里叶分析与应用杂志》，18(2):287–308，2012年。21. R. Calderbank、P. Casazza、A. Heinecks、G. Kutyniok 和 A. Pezeshki。构造具有所需参数的融合框架。*SPIE*会议论文集，《小波 *XIII*》，圣迭戈，2009年。22. I. Campbell。融合框架构造中的无算法方法。博士论文，密苏里大学，2022年11月。

23. R. Carmona、W.-L. Hwang 和 B. Torrésani。《实用时频分析》。Academic Press，圣迭戈，1998年。24. P. Casazza。《采样、小波与断层成像》，章节“非规则 Weyl-Heisenberg 框架简介”，第61–82页。Birkhäuser，波士顿，2003年。25. P. Casazza 和 M. Fickus。使融合框架势最小化。应用数学学报，107(103):7– 24，2009年。26. P. Casazza、M. Fickus、A. Heinecke、Y. Wang 和 Z. Zhou。谱俄罗斯方块融合框架构造。*JFAA*，18(4):828–851，2012年。27. P. Casazza、M. Fickus、D. Mixon、Y. Wang 和 Z. Zhou。构造紧融合框架。《应用与计算调和分析》，30:175–187，2011年。28. P. Casazza、J. Haas、J. Stueck 和 T. Tran。通过对称仿射区组设计和互无偏基构造及研究最优分散子空间打包。预印本，2018年。29. P. Casazza、J. H. IV、J. Stueck 和 T. Tran。具有混合秩的子空间最优打包的概念及其解。载于：*Hirn, M., Li, S., Okoudjou, K.A., Saliani, S.*（编）《调和分析探索》，6，2021年。30. P. Casazza、P. C. J.C. Tremain 和 J. Tremain。数学与工程中的 Kadison-Singer问题。美国国家科学院院刊，103(7):2032–2039，2006年。31. P. Casazza 和 G. Kutyniok。子空间擦除和局部框架向量擦除对融合框架稳健性的影响。《当代数学》，464:149–160，2008年。32. P. Casazza 和 G. Kutyniok。《有限框架理论及应用》。应用与数值调和分析。波士顿，马萨诸塞州：Birkhäuser。xvi，2013年。33. P. Casazza、G. Kutyniok、S. Li 和 C. Rozell。利用融合框架对传感器网络建模。*SPIE*会议论文集 -《小波 *XII*》，6701:11910–11913，2007年。34. P. Casazza 和 M. Leon。具有给定框架算子的有限框架的存在性与构造。《纯粹与应用数学国际杂志》，63:149–158，2010年。35. P. Casazza 和 J. Peterson。通过谱俄罗斯方块构造加权融合框架。《计算数学进展》，40(2):335–351，2014年。36. P. Casazza 和 J. Tremain。利用向量和投影进行相位恢复与范数恢复。预印本。37. P. Casazza 和 L. Woodland。利用向量和投影进行相位恢复。《当代数学》，626 18，2014 1: – 。38. P. Casazza 和 L. Woodland。谱俄罗斯方块框架构造的基础。《采样理论：复兴》，应用与数值调和分析，第217–266页，2015年。39. P. G. Casazza 和 J. Kovačević。具有擦除的等范数紧框架。《计算数学进展》，18:387–430，2003年。40. P. G. Casazza 和 G. Kutyniok。子空间框架。《当代数学》，2004年。41. P. G. Casazza 和 G. Kutyniok。《有限框架理论》。编者：P.G. Casazza 和 G. Kutyniok。Birkhäuser，波士顿，2012 年。42. P. G. Casazza 、 G. Kutyniok 和 S. Li。融合框架与分布式处理。《应用与计算调和分析》，254(1):114–132，2008年。43. O. Christensen。《框架与里斯基简介》。Birkhä user，波士顿，第2版，2003年。44. O. Christensen。《框架与基：入门课程。 应用与数值调和分析。巴塞尔：Birkhäuser，2008年。45. O. Christensen。《框架与里斯基简介》。Birkhäuser，2016年。46. J. B. Conway。《泛函分析教程》。数学研究生教材。Springer，纽约，第2版，1990年。47. M. S. Craig 和 R. L. Genter。地震检波器阵列形成与相似度评估。勘探地球物理学家协会，71，01 2006年。48. I. Daubechies、A. Grossmann 和 Y. Meyer。无痛非正交展开。数学物理学杂志，27:1271–1283，1986年。49. Deepshikha、S. Garg、L. K. Vashisht 和 G. Verma。希尔伯特空间上的交织融合框架。*2017*年采样理论与应用国际会议（*SampTA*），第381–385页，2017年。

50. M. Dörfler. 拼接框架——一种用于自适应表示的新概念。应用数学进展，47(4):668–687，2011年。51. R. J. Duffin and A. C. Schaeffer. 一类非调和傅里叶级数。美国数学会会刊，72:341–366，1952年。52. H. G. Feichtinger and T. Strohmer. *Gabor*分析与算法——理论与应用。Birkhäuser Boston，1998年。53. S. Garg and L. K. Vashisht. 希尔伯特空间中的交织k-融合框架。计算数学基础，3(2):101–116，2020年。54. K. Gröchenig. 时频分析基础。Birkhäuser，波士顿，2001年。55. P. G˘avruţa. 关于融合框架的对偶性。《数学分析与应用杂志》，333(2):871–879，2007年。56. S. B. Heineken, J. P. Llarena, and P. M. Morillas. 融合框架势的极小化子。数学新闻，291:669–681，2018年。57. S. B. Heineken and P. M. Morillas. 有限对偶融合框架的性质。线性代数及其应用，453:1 – 27，2014年。58. S. B. Heineken and P. M. Morillas. 斜对偶融合框架。数值泛函分析与优化，39(7):800–824，2018年。59. S. B. Heineken, P. M. Morillas, A. M. Benavente, and M. Zakowicz. 对偶融合框架。数学档案，103:355–365，2014年。60. S. Iyengar and R. B. Eds. 分布式传感器网络。Chapman & Hall/CRC CRC Press，巴吞鲁日，2005年。61. F. Jaillet and B. Torrésani. 时频拼图：自适应多层Gabor展开。国际小波与多分辨率信息处理杂志，1(5):1–23，2007年。62. L. Köhldorfer. 融合框架与算子。硕士论文，维也纳大学，2021年。63. L. Köhldorfer and P. Balazs. 关于融合框架系统的框架相关算子之间的关系。采样理论、信号处理与数据分析，21(9)，2023年。64. S. Mallat. 多分辨率信号分解理论：小波表示。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，11(7):674–693，1989年。65. S. Mallat. 信号处理小波导览。Academic Press London，1998年。66. P. Massey, M. Ruiz, and D. Stojanoff. 融合框架上框架势极小化子的结构。傅里叶分析及其应用杂志，16:514–543，2010年。67. P. G. Massey, M. A. Ruiz, and D. Stojanoff. 重构系统中的对偶性。线性代数及其应用，436(3):447–464，2012年。68. P. G. Massey, M. A. Ruiz, and D. Stojanoff. 稳健对偶重构系统与融合框架。应用数学学报，119(1):167–183，2012年。69. B. Mayo. 等弦紧融合框架与双角正交可分紧框架。博士论文，数学与统计系，2021年。70. P. M. Morillas. 群重构系统。电子线性代数杂志，22:875–911，2011年。71. P. M. Morillas. 调和重构系统。电子线性代数杂志，26 705，2013 692: – 。72. P. M. Morillas. 面向概率擦除的最优对偶融合框架。电子线性代数杂志，32:191–203，2017年。73. T. Necciari, N. Holighaus, P. Balazs, Z. Průša, P. Majdak, and O. Derrien. Audlet滤波器组：一种采用听觉频率尺度的通用分析/合成框架。应用科学，8(1)，2018年。74. E. Osgooei and A. a. Arefijammal. 比较融合框架与离散框架的对偶框架。萨汉德数学分析通讯，08(1):83–96，2017年。75. P. Oswald. 稳定空间分解与融合框架。载于《小波 *XIII*》（*V. Goyal*、*M. Papadakis*、*D. Van de Ville* 编），*SPIE*会议论文集，圣迭戈，第7446卷，2009年8月。76. Z. Průša, P. L. Søndergaard, N. Holighaus, C. Wiesmeyr, and P. Balazs. 大型时频分析工具箱2.0。载于 M. Aramaki、O. Derrien、R. Kronland-Martinet 和 S. Ystad 编的声音、音乐与运动，计算机科学讲义，第419–442页。Springer国际出版，2014年。

77. Z. Průša, P. L. Søndergaard, and P. Rajmic. MATLAB/GNU Octave大型时频分析工具箱中的离散小波变换。*ACM*数学软件汇刊，42(4):32:1– 32:23，2016年6月。78. C. Rozell and D. Johnson. 分析感觉与特征提取系统中冗余群体编码的稳健性。神经计算，69(10–12):1215–1218，2006年。79. M. Ruiz and P. Calderon. 关于融合框架的扰动札记。《数学分析与应用杂志》，461(1):169–175，2013年。80. M. A. Ruiz and D. Stojanoff. 通过算子理论方法获得的子空间框架的一些性质。数学分析与应用杂志，343:366–378，2008年。81. M. Shamsabadi, A. Arefijamaal, and P. Balazs. 算子 U-融合交叉Gram矩阵的可逆性。地中海数学杂志，17:130，2020年。82. M. Shamsabadi, A. Arefijamaal, and G. Sadeghi. k-融合框架的对偶与乘子。伪微分算子与应用杂志，11:1621–1633，2020年。83. M. Shamsabadi and A. A. Arefijamaal. 融合框架乘子的可逆性。线性与多重线性代数，65(5):1062–1072，2016年。84. M. Shamsabadi and P. Balazs. 一般子空间分类。（已投稿）。85. P. Søndergaard, B. Torrésani, and P. Balazs. 线性时频分析工具箱。国际小波与多重，10(4):1250032，2012年。86. P. L. Søndergaard. 使用长FIR窗的离散Gabor变换高效算法。傅里叶分析及其应用杂志，18(3):456–470，2012年。87. T. Strohmer. 离散*Gabor*展开的数值算法，第267–294页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1998年。88. S. Waldron. 有限紧框架导论。ANHA丛书。Birkhäuser，波士顿，2018年。