arXiv:2303.01208v2 [math.FA] 9 Nov 2023

论 Paley-Wiener 空间中 Nehari 定理的失效

KONSTANTINOS BAMPOURAS

ABSTRACT. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空开凸子集。关于 Ω 的 Paley-Wiener 空间定义为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中傅里叶变换支撑于 Ω 的函数所构成的闭子空间。对于温和分布 ϕ，我们将 Hankel 算子定义为如下稠密定义算子：

$$\widehat{\mathrm{H}_\phi f}(x) = \int_\Omega \widehat{f}(y)\widehat{\phi}(x+y)dy, \text{ for } x \in \Omega.$$

如果每个有界 Hankel 算子都由一个有界函数生成，我们就称 Ω 满足 Nehari 定理。本文证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 中具有无限多个极点的任意凸集，Nehari 定理均不成立。特别地，对于所有不是多胞体的有界凸集，该定理都不成立。此外，在 $\mathbb{R}^2$ 的情形下，对于所有非多面体集合，无论有界还是无界，该定理都不成立。

1. INTRODUCTION

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空凸开子集。给定函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们$\widehat{\ }$将 f 的傅里叶变换记作 f或 $\mathscr{F}(f)$，即函数

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi ixy}dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

众所周知，傅里叶变换可以延拓为从$L^2(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的等距同构，将 Schwartz 空间映射到其自身，其逆为 $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(-x)$。关于某个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的 Paley-Wiener 空间定义为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中傅里叶变换的支集包含于 Ω 的闭子空间。即

$$\mathrm{PW}(\Omega) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Omega\}.$$

对于温和分布 $\phi \in S'(\mathbb{R}^n)$，我们将 PW(Ω) 上的 Hankel 算子定义为如下算子

$$\widehat{\mathrm{H}_\phi f}(x) = \int_\Omega \widehat{f}(y)\widehat{\phi}(x+y)dy, \text{ for } x \in \Omega,$$

该算子在傅里叶支集紧包含于 Ω 的光滑函数上稠密定义。每个有界函数 ϕ 都会在 PW(Ω) 上生成一个有界 Hankel 算子，并且满足估计 $\|\mathrm{H}_\phi\| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$。因此，一个非常自然的问题随之产生：

问题：每个有界 Hankel 算子都由某个有界函数生成吗?

Date:2023年11月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47B35。

Key words and phrases. Nehari 定理，Hankel 算子，Paley-Wiener 空间。

如果对于任意能在 PW(Ω) 上生成有界 Hankel 算子 H_ϕ 的 $\phi \in S'(\mathbb{R}^n)$，都存在一个有界函数 ψ，使得 $\phi = \psi$ 属于 2Ω，且 $H_\phi = H_\psi$，那么我们就说 Nehari 定理对 PW(Ω) 成立。

这个问题最初是针对二维单位圆盘上的 Hardy 空间 $\mathcal{H}^2$ 提出的。设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$，并定义 Hankel 算子 $H\colon \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$，其无限矩阵 $(a_{n+m})_{n,\ m\geq 0}$ 相对于基 $\{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ 属于 $\mathcal{H}^2$。Z. Nehari [9] 证明了$\widehat{}$该算子有界，当且仅当存在 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$，使得对所有 $n \geq 0$，都有 $\phi(n) = a_n$。Kronecker [7] 给出了有限秩 Hankel 算子的刻画。P. Hartman [5] 将 $\mathcal{H}^2$ 上的紧 Hankel 算子刻画为由 $\mathbb{T}$上的连续函数生成的所有算子。V. Peller [10] 和 R. Rochberg [13] 刻画了 Hankel 算子的所有 $p \geq 1$ Schatten-von Neumann 类，而 V. Peller 则刻画了所有$p > 0$ [10]。

这些结果由 R. Rochberg [14] 推广到 Paley-Wiener 空间中，在一个有界区间上 $\mathbb{R}$. 本文所研究的多变量 Hankel 算子由 F. Andersson 和 M. Carlsson 在 [1], [2], 中引入；他们还刻画了这类算子的有限秩结构。L. Peng [11], [12] 证明，在二维单位圆盘和 n–维立方体上，Hankel 算子的 Schatten-von Neumann 类由 Besov 空间中的分布生成。对于集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，Ω 的 Paley-Wiener 空间上的 Besov 空间 $B_p(\Omega)$ $p > 0$是依据 Ω 的一个分解和单位分解定义的。L. Peng 证明，对于 $(-\pi, \pi)^n$，$H_\phi \in S_p$ 当且仅当对所有 $p > 0$，$\phi \in B_p(2\Omega)$。对于二维圆盘，他证明了对所有 $p \in [1, 2]$都成立的类似结果；而对于 $p \geq 2$，他证明了必要性。

$\mathbb{R}^n$ 中的简单多面体定义为这样一种多胞体：每个顶点恰好属于 n 条棱（棱是超平面与凸集的 $n-1$维交集）。K. Perfekt 和 M. Carlsson [7] 证明了，对于 $\mathbb{R}^n$中的任意凸简单多面体，Nehari 定理成立；他们将该定理对 $\mathbb{R}^n_+$成立作为黑箱使用。最近发现，Nehari 定理对 $\mathbb{R}^n_+$ 成立实际上是一个开放问题 [8]；目前甚至不知道是否存在一个 $\mathbb{R}^n$ $n > 1$ 中的多胞体，使得 Nehari 定理成立。对于二维单位圆盘，K. Perfekt 和 O. Brevig [3]证明了该定理不成立。

本文的主要目标是证明，对于所有有界凸非多面体区域，Nehari 定理均不成立；我们通过使用凸分析推广 [3]的论证来实现这一目标。此外，我们证明，在二维中，对于所有非多面体集合，即不是有限个半空间的交的集合，Nehari 定理均不成立（见第 3 节）。

致谢。作者谨向导师 Karl-Mikael Perfekt 致以谢意，感谢他的指导以及围绕这一主题进行的有趣讨论。作者还要感谢匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见有助于改进本文。

2. Preliminary Lemmas

本节中，Ω 始终表示 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空开凸子集。现在假设 Nehari 定理对 Ω 成立。通过开映射定理的论证，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们可以找到 $C > 0$（引理 1），使得 $\inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \psi|_{2\Omega} = \phi|_{2\Omega}\} \leq C\|H_\phi\|$。

定义。对于 Schwartz 函数 ϕ，我们将使用以下记号：

$$D_\phi = \{x \in \Omega : x + y \in \operatorname{supp}\widehat{\phi},\ \textit{for some } y \in \Omega\} = (\operatorname{supp}\widehat{\phi} - \Omega) \cap \Omega.$$

注意，如果 ϕ_1 和 ϕ_2 的 D_{ϕ_1} 与 D_{ϕ_2} 不相交，那么

$$\| \mathrm{H}_{\phi_1+\phi_2} \| = \max(\| \mathrm{H}_{\phi_1} \|, \| \mathrm{H}_{\phi_2} \|) \quad \text{(Lemma 2)}.$$

Usi基于此，我们构造函数序列 ϕ_n，使得 $\psi_n = \phi_1 + ... + \phi_n$ 满足

$$\frac{\inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \widehat{\psi}|_{2\Omega} = \widehat{\psi_n}|_{2\Omega}\}}{\| \mathrm{H}_{\psi_n} \|} \to \infty,$$

这否定了 Nehari 定理。这些函数的构造基于 Ω 中存在无穷多个暴露点（具有支撑超平面的边界点，且该超平面与集合仅相交于该点）。

例子。当 Ω 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 时：$|z| < 1\}$ 且 $\mathrm{supp}\phi = \overline{D}(z, r)$ 是以 $z \in \mathbb{C}$ 为圆心、半径为 $r > 0$的圆盘，简单计算可得 $D_\phi = \mathbb{D} \cap D(z, 1+r)$。若令 z 趋近于 w （ $2\mathbb{D}$ 的边界上的一点）和 $r \to 0$，则 D_ϕ 趋近于单点集 $\{\frac{1}{|w|}w\}$.

[3] 中的一个关键思想是， $2\mathbb{D}$ 的边界上有无穷多个点具有这样的性质： D_ϕ 可以趋近于一个单点。下面的例子表明，存在只有有限个此类点的凸集。

Example. 现在考虑 $\Omega = (-1, 1)^n$ 和 $\mathrm{supp}\,\phi = [x_1, y_1] \times ... \times [x_n, y_n]$。于是 we can 计算

$$D_\phi = (-1, 1)^n \cap (x_1 - 1, y_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, y_n + 1).$$

我们在 $[-2, 2]^n$ 的边界上选取一个非顶点，例如 $z = (z_1, ..., z_n)$。那么它会有一个坐标 $-2 < z_i < 2$ ，因此，若我们取立方体$[x_1, y_1] \times ... \times [x_n, y_n]$ 的中心，使其趋近于 z ，且其直径趋近于零，那么 D_ϕ的 $i - th$坐标将趋近于线段 $(-1, 1) \cap (z_i - 1, z_i + 1)$，而该线段不是单点集。

这两个例子的区别在于，立方体只有有限个极点，而圆盘有无限个极点。多胞体是唯一具有有限个极点的有界凸集（见第 3 节）。现在我们将介绍一些技术引理，用于证明我们的定理。

引理 1. 如果 Nehari 定理对 Ω 成立，那么存在 $C > 0$ 使得

$$\inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \widehat{\psi}|_{2\Omega} = \widehat{\phi}|_{2\Omega}\} \le C \| \mathrm{H}_\phi \|$$

证明. 令 $\phi \sim \psi$ 当且仅当 $\psi|_{2\Omega} = \phi|_{2\Omega}$. 则 $\sim$ 是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的等价关系。我们在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)/\sim$ 上定义如下范数:

$$\|[\phi]\| := \inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \psi \sim \phi\},$$

这使得 $L^\infty/\sim$ 成为一个巴拿赫空间。根据 [4, 命题 5.1] ，Hankel 算子集合$\mathscr{H}$是 PW(Ω) 上有界算子的闭子空间，因此也是一个巴拿赫空间。Nehari 定理表明，算子 T : $L^\infty(\mathbb{R}^n)/_\sim \to \mathscr{H}$ 且满足 $T(\phi) = \mathrm{H}\phi$ 是双射且连续，因此其逆算子有界。□

引理 2. 设 $\phi = \phi_1 + \phi_2$，使得 $D_{\phi_1} \cap D_{\phi_2} = \emptyset$. 则

$$\| \mathrm{H}_\phi \| = \max\{\| \mathrm{H}_{\phi_1} \|, \| \mathrm{H}_{\phi_2} \|\}.$$

注意，根据归纳法，该引理可推广到有限和。

证明。定义 $T_i \in B(\mathrm{PW}(D_{\phi_i}))$ 为 $T_i f = \mathrm{H}_{\phi_i}(f)$ $i = 1、2$，并定义 $T \in B(\mathrm{PW}(D_{\phi_1} \cup D_{\phi_2}))$ 为 $Tf = \mathrm{H}_{\phi}(f)$。首先，注意到 $\|T_i\| = \|\mathrm{H}_{\phi_i}\|$ 和 $\|T\| = \|\mathrm{H}_{\phi}\|$。这是因为：

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{H}_{\phi_i}\| &= \sup_{f\in \mathrm{PW}(\Omega)} \frac{\|\mathrm{H}_{\phi_i} f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} = \sup_{f\in \mathrm{PW}(\Omega)} \frac{\|\mathrm{H}_{\phi_i}(f * \mathscr{F}^{-1}(\chi_{D_{\phi_i}}))\|_{L^2}}{\|\widehat{f}\|_{L^2}} \\
&\leq \sup_{f\in \mathrm{PW}(\Omega)} \frac{\|T_i(f * \mathscr{F}^{-1}(\chi_{D_{\phi_i}}))\|_{L^2}}{\|\widehat{f}\chi_{D_{\phi_i}}\|_{L^2}} = \sup_{f\in \mathrm{PW}(\Omega)} \frac{\|T_i(f * \mathscr{F}^{-1}(\chi_{D_{\phi_i}}))\|_{L^2}}{\|f * \mathscr{F}^{-1}(\chi_{D_{\phi_i}})\|_{L^2}} \\
&= \sup_{f\in \mathrm{PW}(D_{\phi_i})} \frac{\|T_i(f)\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} = \|T_i\|.
\end{aligned}$$

反向不等式由 $\mathrm{PW}(D_{\phi_i}) \subset \mathrm{PW}(\Omega)$ 这一事实得出。采用相同的论证，我们证明关于 T 的相同结果。现在，由于 $\mathrm{PW}(D_{\phi_1}) \oplus \mathrm{PW}(D_{\phi_2}) = \mathrm{PW}(D_{\phi_1} \cup D_{\phi_1})$，且 $f = f_1 + f_2$ 是 f 关于直和的分解。因此$Tf = T_1 f_1 + T_2 f_2$，从而 $T = T_1 \oplus T_2$。这意味着 $\|T\| = \max(\|T_1\|, \|T_2\|)$，如所求。□

引理 3. 设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathrm{supp}\, f \subset 2\Omega$。那么

$$\frac{|\langle \widehat{f}, \widehat{\phi}\rangle|}{\|f\|_{L^1}} \leq \inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \widehat{\psi}|_{2\Omega} = \widehat{\phi}|_{2\Omega}\}.$$

证明。

$$\frac{|\langle \widehat{f}, \widehat{\phi}\rangle|}{\|f\|_{L^1}} = \frac{|\langle \widehat{f}, \widehat{\psi}\rangle|}{\|f\|_{L^1}} = \frac{|\langle f, \psi\rangle|}{\|f\|_{L^1}} \leq \frac{\|f\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} = \|\psi\|_{L^\infty}.$$

对所有这样的 ψ 取下确界，即得所需结果。 □

下一个命题将 [3] 中主要思路的处理方法系统化。

命题 4. 如果对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都能找到 $y_i \in 2\Omega$、 $i = 1、...、 k$ 和 $r > 0$，使得t

$$(\overline{B}(y_i, r) - \Omega) \cap (\overline{B}(y_j, r) - \Omega) \cap \Omega = \emptyset,$$

对于所有 $i \neq j$ 都成立，那么 Nehari 定理对于 Ω 不成立。

证明。首先注意，如果存在这样的 $r > 0$，我们可以将 r 取得足够小，从而还满足 $\overline{B}(y_i, r) \subset 2\Omega$。令 b 为一个光滑凸起函数，使得 $\mathrm{supp}\, b = B(0, 1)$， $b = 1$ 在 $\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ 上，并且对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\widehat{b}(x) \in [0, 1]$。令 $\widehat{b_j^r}(x) = \widehat{b}(\frac{x - y_i}{r})$， $j \in \{1, ..., k\}$。固定一个 $k \in \mathbb{N}$，令 $r > 0$ 满足我们的假设，并令 $\phi_k = \sum_{j=1}^k b_j^r$。我们将证明

$$\frac{\|\widehat{\phi_k}\|_{L^2}^2}{\|\mathrm{H}_{\phi_k}\|\|\phi_k\|_{L^1}} \to \infty$$

因此，由引理1和引理3可知，Nehari 定理对 Ω 不成立。由于 $\overline{B}(y_j, r) \subset 2\Omega$，我们得到 $\frac{1}{2}\overline{B}(y_j, r) \subset \Omega$，且 $\frac{1}{2}\overline{B}(y_j, r) \subset \overline{B}(y_j, r) - \frac{1}{2}\overline{B}(y_j, r) \subset \overline{B}(y_j, r) - \Omega$，因此

$$\mathrm{supp}\, \widehat{b_j^r} = \overline{B}(y_j, r) \subset 2(\Omega \cap (\overline{B}(y_j, r) - \Omega)).$$

因此，根据我们的假设， b_j^r 彼此正交，从而我们估计

$$\|\widehat{\phi_k}\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^k \|\widehat{b_j^r}\|_{L^2}^2 = r^n k \|\widehat{b}\|_{L^2}^2.$$

由于现在 $D_{b_j^r} = (\overline{B}(y_j, r) - \Omega) \cap \Omega$，对于 Hankel 算子的范数，利用引理 2 可得

$$\| \mathrm{H}_{\phi_k} \| = \max_{1\le j\le k} \| \mathrm{H}_{b_j^r} \| \le \max_{1\le j\le k} \|b_j^r\|_{L^\infty} \le \max_{1\le j\le k} \|\widehat{b_j^r}\|_{L^1} = r^n \|\widehat{b}\|_{L^1}.$$

现在，我们需要对 $\|\phi_k\|_{L^1}$ 给出上界。对于 $R > 0$，我们将这个范数分解为:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_k| = \int_{|x|\le \frac{R}{r}} |\phi_k| + \int_{|x|>\frac{R}{r}} |\phi_k| := I_1 + I_2.$$

对于 I_1，我们使用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$I_1 \le \sqrt{m_n(\frac{R}{r}B_n)}\|\phi_k\|_{L^2} = c_n \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\sum_{j=1}^k \|b_j^r\|_{L^2}^2} = c_n \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{kr^n\|b\|_{L^2}^2} = c_n R^{\frac{n}{2}} \sqrt{k\|b\|_{L^2}^2},$$

其中，m_n 是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度，B_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球，而 c_n 是 B_n 体积的平方根。

对于 I_2，我们注意到定义 $\widehat{b_j^r}(x) = \widehat{b}(\frac{x-y_j}{r})$ 蕴含 $b_j^r(x) = r^n e^{\frac{2\pi i}{r}xy_j} b(rx)$，因此我们可以计算

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|x|>\frac{R}{r}} |\phi_k| \le \sum_{j=1}^k \int_{|x|>\frac{R}{r}} |b_j^r| = \sum_{j=1}^k \int_{|x|>\frac{R}{r}} |r^n b(rx)| = \sum_{i=1}^k \int_{|x|>R} |b| = k\int_{|x|>R} \frac{|x||b|}{|x|} \\ &\le \frac{k}{R}\||x|b\|_{L^1}, \end{aligned}$$

其中 $\||x|b\|_{L^1}$ 是有限的，因为 b 是 Schwartz 函数。

最后，若我们假设 PW(Ω) 上的 Nehari 定理成立，则利用引理1和引理3可得，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $R > 0$:

$$\begin{aligned} C &\ge \frac{\inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \widehat{\psi}|_{2\Omega} = \widehat{\phi_k}|_{2\Omega}\}}{\| \mathrm{H}_{\phi_k}\|} \ge \frac{\|\widehat{\phi_k}\|_{L^2}^2}{\|\phi_k\|_{L^1}\| \mathrm{H}_{\phi_k} \|} \ge \frac{r^n k\|\widehat{b}\|_{L^2}^2}{r^n\|\widehat{b}\|_{L^1}(c_n R^{\frac{n}{2}}\sqrt{k\|b\|_{L^2}^2} + \frac{k}{R}\||x|b\|_{L^1})} \\ &= \frac{k\|\widehat{b}\|_{L^2}^2}{\|\widehat{b}\|_{L^1}(c_n R^{\frac{n}{2}}\sqrt{k\|b\|_{L^2}^2} + \frac{k}{R}\||x|b\|_{L^1})}. \end{aligned}$$

现在，取 $k \to \infty$，我们得到

$$C \ge \frac{R\|\widehat{b}\|_{L^2}^2}{\|\widehat{b}\|_{L^1}\||x|b\|_{L^1}}$$

对每个 $R > 0$都成立，因此 Nehari 定理不成立。 □

3. The main theorem and its proof

设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个内部非空的闭集。对于 $x \in \partial K$，经过 x 的 K 的一个支撑超平面是一个超平面 $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, a\rangle = t\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$，满足

$$K \subset H^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, a\rangle \le t\} \quad \text{and} \quad x \in H.$$

K 是凸的，当且仅当每个边界点都存在一个支撑超平面。 [6, 定理 1.16]。某些 $x \in \partial K$可能存在不止一个经过它的支撑超平面。例如，考虑 $K = [-1, 1]^2$ 中的 $\mathbb{R}^2$。那么，直线 $x = 1$ 和 $y = 1$ 都是经过 (1, 1) 的 K 的支撑超平面。如果 $K \cap H^- = \{x\}$ 对于某个支撑

超平面，则称 x 为 K的暴露点。对于两个点 x_1和 $x_2 \in \mathbb{R}^n$ ，我们使用以下记号

$$[x_1, x_2] = \{tx_1 + (1-t)x_2 : t \in [0,1]\} \quad \text{and} \quad (x_1, x_2) = \{tx_1 + (1-t)x_2 : t \in (0,1)\}$$

我们称点 $x \in \partial K$ 是 K 的极点，如果对任意 y、 $z \in K$、 $x \in [y,z]$ 都有 $x = y$ 或 $x = z$。显然，暴露点是极点。反之则不成立。例如，我们可以考虑集合

$$[-2,0] \times [-1,1] \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ and } x \geq 0\}.$$

点 (0, 1) 是一个极点，但经过 (0, 1) 的唯一支撑超平面是 $y = 1$ ，它与我们的集合相交于 $[-2,0] \times \{1\}$。然而，极点与暴露点之间存在一种联系，即斯特拉谢维奇定理 [15] 指出：

引理 5.（斯特拉谢维奇定理）设 K 是一个闭凸集。那么，暴露点集在极点集中稠密。

对于非空凸集 $K \subset \mathbb{R}^n$ ，我们分别用 ext K 和 exp K 表示 $\overline{K}$ 的极点集和暴露点集。

定理 6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 非空、开且凸，并假设 exp Ω 是一个无限集。那么 Nehari 定理对 Ω 不成立。

证明. 我们要证明以下断言：

断言. 对每个 $y \in$ expΩ 和每个 $\rho > 0$ ，都存在 $z \in \Omega$ 和 $s > 0$ ，使得 t

$$(\overline{B}(2z,s) - \Omega) \cap \Omega \subset B(y,\rho).$$

首先，假设该断言成立。那么，对于 $k \in \mathbb{N}$，我们可以选取互不相同的 $y_1, ..., y_k \in$exp Ω, 且 $\rho = \frac{1}{2}\min_{1 \leq i \neq j \leq k} |y_i - y_j|$。根据该断言，我们可以找到 $z_i \in \Omega$ 和 $s > 0$，使得

$$(\overline{B}(2z_i,s) - \Omega) \cap (\overline{B}(2z_j,s) - \Omega) \cap \Omega \subset B(y_i,\rho) \cap B(y_j,\rho) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

最后，由命题 4 得出结论。

断言的证明：固定 $y \in$ exp Ω，并假设该断言不成立。再固定 $x_k \in \Omega$, $x_k \to y$。那么存在一个 $\rho > 0$ ，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$(\overline{B}(2x_k, \frac{1}{k}) - \Omega) \cap \Omega \nsubseteq B(y,\rho).$$

因此，我们可以找到一个序列 $z_k \in \Omega$，使得 $|z_k - y| \geq \rho$ 和 $z_k = 2x_k + \frac{1}{k}u_k - \omega_k$，其中 $\omega_k \in \Omega$ 且 $|u_k| \leq 1$. 令 $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = t\}$ 是 y 处的一个支撑超平面，并且与 Ω 仅在 y处相交。那么

$$t > \langle z_k, a\rangle = \langle 2x_k + \frac{1}{k}u_k - \omega_k, a\rangle = 2\langle x_k, a\rangle + \frac{1}{k}\langle u_k, a\rangle - \langle \omega_k, a\rangle \geq 2\langle x_k, a\rangle + \frac{1}{k}\langle u_k, a\rangle - t.$$

取 $k \to \infty$ ，我们得到 $\lim_k \langle z_k, a\rangle = t$。由于 $z_k \notin B(y, \rho)$，我们可以找到 $a_k \in [z_k, y] \subset \Omega$, 使得 $a_k \in \partial B(y, \rho)$。现在令 a_{k_i}为一个子序列，该子序列收敛于某个 $a_0 \in \partial B(y, \rho)$。由于 Ω 是闭集， $a_0 \in \Omega$。还必然有 $\langle a_0, a\rangle = t$，原因如下：存在$t_{k_i} \in [0,1]$使得 $a_{k_i} = t_{k_i} z_{k_i} + (1 - t_{k_i})y$，并且如果我们假设 k_j 是k_i 的一个子序列，使得 t_{k_j} 收敛，则得到

$$\langle a_0, a\rangle = \lim_j \langle a_{k_j}, a\rangle = \lim_j (t_{k_j}\langle z_{k_j}, a\rangle + (1 - t_{k_j})\langle y, a\rangle) = t.$$

The因此 $a_0 \in H \cap \overline{\Omega}$，这意味着 $a_0 = y$，与以下事实矛盾： $a_0 \in \partial B(y, \rho)$.

□

多胞体定义为有限多个点的凸包，即包含这些点的最小凸集；多面体则定义为有限多个半空间的交。对于有界凸集，这两个定义是一致的 [6, 定理 1.20 和 1.22]。对于由有限集 E 生成的多胞体 K，有 $\exp K = \operatorname{ext} K \subset E$ [6, 定理 1.18]。$\mathbb{R}^n$ 中的闭有界凸集是其极点的凸包 [6, 定理 1.21]，，因此多胞体是仅有的具有有限个极点、进而也仅有的具有有限个暴露点的有界凸集（引理 5）。由此得到以下推论：

推论 7. 对于任何具有无限多个极点的凸集，Nehari 定理均不成立。特别地，对于任何不是多胞体的有界凸集，Nehari 定理均不成立。

证明. 设 Ω 为这样一个集合。由于 $\overline{\Omega}$ 是闭集且具有无限多个极点，根据引理 5，暴露点的集合也必定是无限的。□

对于无界凸集，每个不含直线的闭凸集 K 都是由其极点和极射线的凸包 [16, 定理 2]（即具有如下性质的半直线 $l \subset \partial K$ ：若凸集中有两点 x、y 满足（x，y）$\cap\, l \neq \emptyset$，则 x 和 y 都必须属于 l）。利用这一点，我们证明以下推论：

推论 8. 对于 $\mathbb{R}^2$ 中任何不是多面体的凸子集，Nehari 定理均不成立。

为了证明这一推论，我们首先需要证明以下引理：

引理 9. 设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为凸集且为闭集。则 K 具有有限条极射线。

证明。假设 K 包含 9 条或更多极射线。根据抽屉原理，其中必有三条极射线的方向位于同一个象限内，不妨设为第一象限。因此 $\ell_j = \{y = a_j x + b_j\colon\ x \geq x_j\}$，其中 $a_j \geq 0$ 和 b_j，$x_j \in \mathbb{R}$。设 $\ell = \{y = -x + b\}$，$b \in \mathbb{R}$ 为一条直线，使得 $(x_j,\ a_j x_j + b_j) \in \{y \leq -x + b\}$（例如，我们可以取 $b = \max_{j=1,\ 2,\ 3}(x_j + a x_j + b_j)$）。令 $f_j(x) = x + a_j x + b_j$。于是 $f_j(x_j) \leq b$，且 $\lim_{x\to+\infty} f_j(x) = +\infty$，因此根据介值定理，对于每个 j，我们都可以找到 $z_j \geq x_j$，使得 $f_j(z_j) = b$，这意味着 $(z_j,\ a_j z_j + b_j) \in \ell_j \cap \ell$。由于这三个点位于同一直线上，不妨设 $(z_1,\ a_1 z_1 + b_1)$ 严格位于连接 $(z_2,\ a_2 z_2 + b_2)$ 与 $(z_3,\ a_3 z_3 + b_3)$ 的线段上，这与 ℓ_1 为极点的事实相矛盾。□

为证明该推论，我们需要引入以下记号：对于集合$X \subset \mathbb{R}^n$，我们将由 X 生成的正锥定义为集合

$$\operatorname{cone} X = \{\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i : \mu_i \geq 0, x_i \in X, m \in \mathbb{N}\}.$$

根据 [17, 定理 1.2]，，我们知道，$\mathbb{R}^n$ 中的凸集是多面体，当且仅当它是一个多胞体与由有限集生成的正锥之和。因此，我们有如下证明：

推论 8 的证明：只需证明，如果一个闭集 K 具有有限个极点，那么它就是一个多面体。K 有界的情形已在推论 7 中讨论过。因此，在证明的其余部分，K 将是一个具有有限个极点的无界集。首先，假设我们的集合 K 包含一条直线 ℓ。不妨设

一般性 $\ell = \mathbb{R} \times \{0\}$。如果 $(x, y) \in K \setminus \ell$，由 K 的凸性可得 $\mathbb{R} \times [0, y] \subset K$。因此，令 $\alpha = \sup_{(x,y)\in K} y$ 且 $\beta = \inf_{(x,y)\in K} y$，可得 $K = \mathbb{R} \times [\beta, \alpha]$，从而得到一个多面体。因此，我们必须考察 K 不包含直线的情形，于是 K 是其极点和极射线的凸包。根据引理 9，K 可以表示为有限个点和有限条半直线的凸包，即

$$K = \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m, \ell_1, ..., \ell_k\},$$

其中，$m \geq k$ 且 x_i 是 ℓ_i, $i = 1,..., k$. 的原点。设 u_i 为 ℓ_i 的方向。我们将证明

$$K = \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m, \ell_1, ..., \ell_k\} = \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m\} + \operatorname{cone}\{u_1, ..., u_k\}$$

因此，由 [17, 定理 1，2] K 是一个多面体。对于包含关系“ $\subset$ ”，我们注意到 $x_i \in \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m\} + \{0\} \subset \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m\} + \operatorname{cone}\{u_1, ..., u_k\}$，且 $\ell_i = \{x_i + \mu_i u_i : \mu_i \geq 0\} \subset \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m\} + \operatorname{cone}\{u_1, ..., u_k\}$。该包含关系源于以下事实：一个集合的正锥是凸的，且凸集之和也是凸的。对于另一个包含关系，设 $x \in \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m\} + \operatorname{cone}\{u_1, ..., u_k\}$。则存在 $p_i, \mu_i \geq 0$，使得 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ 且 $x = \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^k \mu_i u_i$。最后，我们将 x 写为

$$x = \sum_{i=k+1}^{m} p_i x_i + \sum_{i=1, p_i \neq 0}^{k} p_i (x_i + \frac{\mu_i}{p_i} u_i) \in \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_m, \ell_1, ..., \ell_k\},$$

如所需。 □

推论 8 中的论证无法推广到 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$。推论 8 利用了这样一个事实：在 $\mathbb{R}^2$ 中，不存在极点有限但不是多面体的凸集。在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个反例可以是圆锥 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$。这个集合只有一个极点（即原点），却有无穷多个极射线 $\{\lambda(\cos\theta, \sin\theta, 1) : \lambda \geq 0\}$，但它不是多面体。因此可以提出以下问题：在 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 中，是否存在一个不是多面体且 Nehari 定理成立的凸集?

References

[1] Fredrik Andersson 和 Marcus Carlsson。《一般域上的截断相关算子与有限秩卷积算子》。 *Integral Equations Operator Theory*, 82(3):339–370, 2015。[2] Fredrik Andersson 和 Marcus Carlsson。《多变量中一般域上半正定有限秩 Hankel 算子与 Toeplitz 算子的结构》。 *Complex Anal. Oper. Theory*, 11 784, 2017 4 755( ): – .[3] Ole Fredrik Brevig 和 Karl-Mikael Perfekt。《圆盘 Paley-Wiener 空间上的 Nehari 问题》。*J. Geom. Anal.*, 33(1):第 16 号论文，7, 2023年。[4] Marcus Carlsson 和 Karl-Mikael Perfekt。《多变量凸域上的 Hankel 算子与 Toeplitz 算子的 Nehari 定理》。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5):3331–3361, 2021。[5] Philip Hartman。《关于完全连续 Hankel 矩阵》。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:862–866。[6] Daniel Hug 和 Wolfgang Weil。 *Lectures on convex geometry* 286 *Graduate Texts in Math-* ，卷。 *ematics* 2020 Springer，Cham， [2020] © 。[7] Leopold Kronecker。 *Leopold Kronecker's Werke. Bände I–V*。Chelsea 出版公司，纽约，1968。由 K. Hensel 应普鲁士皇家科学院之邀编订。[8] Michael T. Lacey、Stefanie Petermichl、Jill C. Pipher 和 Brett D. Wick。《勘误通知：多参数 Riesz 交换子》。 *Amer. J. Math.*, 143(2):333–334, 2021。[9] Zeev Nehari。《关于有界双线性形式》。 *Ann. of Math. (2)*, 65:153–162, 1957。[10] Vladimir V. Peller。 *Hankel operators and their applications*。Springer 数学专著。Springer 出版社，纽约，2003。

[11] Li Zhong Peng。《圆盘 Paley-Wiener 空间上的 Hankel 算子》。载于 *Miniconferences on harmonic analysis and operator algebras (Canberra, 1987)* 16 ,

Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. 卷，页码 – 。澳 *Univ.* 173 180 1988
大利亚国立大学，堪培拉，。[12] Li Zhong Peng。《R^d 上 Paley-Wiener 空间的 Hankel 算子》。
Integral Equations Operator Theory, 12 4 567( ): –591, 1989。[13] Richard Rochberg。《Hankel 算子与交换子的迹理想判据》。 *Indiana Univ. Math. J.*, 31 6 913( ): –925, 1982。[14] Richard Rochberg。《Paley-Wiener 空间上的 Toeplitz 算子与 Hankel 算子》。 *Integral Equations Operator Theory* 10 2 187 235, 1987 , ( ): – 。[15] R. Tyrrell Rockafellar。 *Convex analysis*。普林斯顿数学丛书，第 28 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[16] Tudor Zamfirescu。《任意凸集的闵可夫斯基定理》。 *European J. Combin.*, 29(8):1956– 1958, 2008。[17] G¨unter M. Ziegler。 *Lectures on polytopes*, *Graduate Texts in Mathematics* 第 152 卷。Springer 出版社，纽约，1995。

Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Sciences and Technology (NTNU), NO-7491 Trondheim, Norway*Email address*: konstantinos.bampouras@ntnu.no