arXiv:2303.01222v1 [math-ph] 2 Mar 2023

奇异摄动 Burgers方程的渐近阶梯状解

Samoilenko Valerii，基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学数学物理系

Samoilenko Yuliia
克洛德·贝尔纳第一区大学 Camille Jordan研究所

Zappale Elvira
罗马第一大学工程基础与应用科学系

摘要

本文研究带变系数和小参数的 Burgers方程的渐近阶梯状解问题。通过非线性 WKB 方法，提出了构造这些渐近解的算法，并证明了关于该算法合理性的结论。

通过一个例子说明所得结果，并明确求得了其首个渐近阶跃型近似。该渐近解是全局的，具有冲击波型函数的形式。此外，还给出了特定数值参数下这些近似解的图像。

MSC 分类：35Q35；35B25；35C20；76D33；76M45

关键词：Burgers方程；奇异摄动方程；渐近解；WKB技术；类孤子渐近解；渐近阶梯状解

1 引言

本文探讨如何构造如下形式的变系数奇异摄动 Burgers方程的渐近解

$$\varepsilon u_{xx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

其中，函数 $a(x,t,\varepsilon)$、 $b(x,t,\varepsilon)$、$(x,t) \in \mathrm{R} \times [0;\, T]$ 写成渐近（按 Poincar´e 意义）级数

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k a_k(x,t) + O(\varepsilon^{N+1}),\ b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k b_k(x,t) + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{2}$$

这里，对于所有 $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\ T]$，$a_0(x,t)$ $b_0(x,t)$；ε 是一个小参数。

方程（1）是描述具有小黏度和变特征的介质中波动过程的数学模型，是常系数 Burgers方程的推广

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \tag{3}$$

其中，$u = u(x,t)$ 是运动液体的速度，ν 是液体的黏性。

该方程用于流体力学、声学、气体动力学及应用数学的其他领域，用于描述具有黏性 $\nu > 0$ 的波动过程。

方程（3）自1906年起便已为人所知（见 [1], [2]），并引起了研究人员的关注，因为在一维情形下，该方程是纳维–斯托克斯方程的一种简单形式，而后者是流体力学中最重要的模型之一 [3]。

回顾一下，纳维–斯托克斯方程组于19世纪上半叶先由 A. Navier，随后由 O. Cauchy、S. Poisson、A. Saint-Venant 和 G. Stokes 建立，用于描述黏性（一般情况下为不可压缩）液体（气体）的运动，其基础是牛顿定律。

纳维–斯托克斯方程组具有非线性，因此研究其解本质上十分复杂；这些解对系数的扰动以及初始（和/或边界）条件都很敏感。

20 世纪 30 年代末，J. M. Burgers 将方程（3）作为一个最简单的模型进行了研究，该模型统一了描述流体动力学湍流现象所需的典型非线性和黏性 [4, 5, 6]。若不存在黏性（对于 $\nu = 0$ ），则方程（3）是传输方程

$$u_t + uu_x = 0, \tag{4}$$

它也称为霍普夫方程 [7]。

方程的解会发生所谓的梯度灾变[8]。这一现象与波的翻转（破坏）有关。由方程（4）的柯西问题在初始条件 $u(x,0) = f(x)$ $x \in \mathbb{R}$ 下的解公式可推得，该解可隐式写为 $u(x,t) = f(x - tu(x,t))$。特别是，从注记中可以得出，如果初始函数 $f(x)$ 快速衰减，那么

相应的方程（4）柯西问题的解仅在有限时间区间 [9] 上存在。这些性质显然是非线性项 uu_x 存在的结果。即使是形如νu_{xx}的小扰动，其中方程（4）中的 $\nu > 0$ ，也会显著影响其解的定性性质。

模型（3）是描述非线性效应的最简单模型之一，尤其是激波的出现和演化。Burgers方程（3）的许多定性性质可由其精确解的公式获得；这些精确解是通过采用E. Hopf [7] 和J. Cole [10]分别提出的代换，将非线性方程（3）化为线性热方程而得到的。通过这种方式，他们得到了Burgers方程精确解的公式，从而能够根据初始条件分析具有小黏度的非线性介质中激波的出现过程。特别地，由于黏性，不会发生波的翻转，但耗散的存在会导致所谓的以恒定速度 [8, 11]传播的驻定波出现。这些方程（3）的驻定解写为

$$u(x,t) = a\left(1 - \tanh\left(\frac{a}{2}\,\frac{x-at}{\nu} + \varphi_0\right)\right), \tag{5}$$

其中，实常数 a、 φ_0 是任意的。

在黏性消失的情况下，即若 $\nu \to 0$，则方程（5）的解的极限值是不连续的阶梯状函数，因为

$$\lim_{\nu\to 0} u(x,t) = \begin{cases} 0, & x - at > 0, \\ 2a, & x - at < 0. \end{cases} \tag{6}$$

因此，自然会出现这样一个问题：如何为含有小参数 ε 的方程（1）构造近似解，使其渐近行为（当 $\nu \to 0$时）类似于形式（5）的解，正如方程（3）的情形一样。

本文讨论了这一问题：利用 WKB 技术为方程（1）构造了渐近解，该解在极限情形（当 $\varepsilon \to 0$）[12, 13, 14]时是一个不连续的阶梯状函数。这样的解称为渐近阶跃型解。

本文提出了一种构造这类解的通用算法，并求出了渐近阶跃型解的一阶近似

并证明了主项和一阶近似满足方程（1）时的精度定理。这些结果通过一个例子加以说明。

2 初步说明与定义

根据构造流体力学变系数奇异摄动微分方程渐近解的概念，所求解可写成如下形式的渐近级数 [13, 14]:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}\left[u_{j}(x,t)+V_{j}(x,t,\tau)\right],\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},\tag{7}$$

其中，$u_j(x,t)$、$V_j(x,t,\tau)$、$j=0$、1、.....、$\varphi=\varphi(t)$ 是构造渐近解时定义的无穷次可微函数。

这里，函数 $\varphi=\varphi(t)$ 定义了间断曲线 [12, 13]。

∞函数 $U(x,t,\varepsilon)=\sum\varepsilon^{j}u_{j}(x,t)$ 称为渐近式（7）的正则部分，而函数 $V(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum\varepsilon^{j}V_{j}(x,t,\tau)$ 称为渐近式的奇异部分。正则部分是背景函数，而其奇异部分则描述了所求渐近解（7）的定性性质。

根据函数（5）的性质，渐近展开的奇异部分中的各项被寻找为某个函数空间 G 的元素，该空间定义如下 [13, 14]。

空间 $G=G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ 包含函数 $f=f(x,t,\tau)\in C^{\infty}(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$，且这些函数满足以下条件：$1^0$。关系

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^{n}\frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^{p}\,\partial t^{q}\,\partial\tau^{r}}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K,$$

对所有非负整数 n, p, q, r，该条件关于 (x,t) 在任意紧集 $K\subset\mathbf{R}\times[0$ 上一致成立；$T]$；2^0。存在一个无穷次可微函数 $f^{-}(x,t)$，使得

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^{n}\frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^{p}\,\partial t^{q}\,\partial\tau^{r}}\left(f(x,t,\tau)-f^{-}(x,t)\right)=0,\quad (x,t)\in K.$$

注意，根据记号 $\tau = x - \varphi(t)\,\varepsilon$ 和 $\varphi(t) = at$，函数 (5) 属于空间 G。由函数 (5) 的性质 (6) 可知，对于解 (7)，使用间断曲线这一概念是恰当的，该曲线定义为 $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;\ T] :\ x = \varphi(t)\}$。

用 $G_0 = G_0(\mathbf{R} \times [0;\ T] \times \mathbf{R}) \subset G$ 表示满足条件的此类函数空间 $f = f(x,t,\tau)$

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0$$

该条件关于 $(x,t) \in K$ 一致成立，对任意紧集 $K \subset \mathbf{R} \times [0;\ T]$ 均如此。

3 算　　法：构造渐近解

求渐近解 (7) 的各项时，我们采用渐近分析的一般方法和思想，并利用空间G的性质。对于渐近级数 (7)，我们首先确定正则部分的各项，然后求出渐近展开的奇异部分各项，以及确定间断曲线的函数 $\varphi = \varphi(t)$。

渐近展开的正则项所满足的方程形式如下

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,(u_0\,u_j) = f_j(x,t), \tag{9}$$

将解（7）代入（1），并利用性质1^0，即可得到 $V_j(x,t,\tau) \in G$, $j = 0$, 1, . . .。

（9）中的函数 $f_j(x,t)$ $j = 0, 1, \ldots,$ 可通过递推求得。例如，

$$f_1(x,t) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - a_1(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} - b_1(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

注意，由于方程（8）是拟线性的，而方程（9）是线性的，因此可以通过例如特征线法求得它们的解。所以，我们可以假设这些解是已知的。

渐近展开中奇异项的方程如下

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + a_0(x,t)\,\varphi'(t)\,\frac{\partial V_0}{\partial \tau} - b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2}+a_0(x,t)\,\varphi'(t)\,\frac{\partial V_j}{\partial \tau}-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(V_0 V_j\right)\right)=F_j(x,t,\tau),\ (11)$$

将解（7）代入（1），并考虑方程（8）和（9）后即可得到。

这里的函数

$$F_j(x,t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),\ldots,u_j(x,t)),$$

其中 $j=1$、2、.....是在求得渐近展开的正则部分后递推得到的。

与渐近展开的正则部分所对应的方程不同，方程 (10)、(11) 通常无法针对 $j=0$、1、.....以闭式积分，因为这些方程具有变系数，且其解必须属于函数空间 G。因此，我们来考察这些解的存在性问题。

研究按以下方式进行：

1. 假设曲线 Γ 已知，并在曲线 Γ 上考察方程 (10)、(11)。主项对应的方程通过求积法积分，而对于其他方程，则可以降低其阶数。由此得到一阶线性非齐次微分方程，并显式写出其解。随后，研究所得解是否属于空间 G；

2. 根据方程 (10)、(11) 的解在曲线 Γ 上属于空间 G 这一条件，我们得到关于函数 $\varphi=\varphi(t)$ 的非线性常微分方程。

此外，我们采用记号 $v_j=v_j(t,\tau)=V_j(x,t,\tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j=0,1,\ldots$.

3.1 渐近展开的奇异部分的主项

函数 $v_0(t,\tau)=V_0(\varphi(t)\ t,\tau)$ 满足以下非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \tau^2}+a_0(\varphi,t)\,\varphi'(t)\,\frac{\partial v_0}{\partial \tau}-b_0(\varphi,t)\,(u_0(\varphi,t)+v_0)\,\frac{\partial v_0}{\partial \tau}=0.\qquad(12)$$

由于函数 $V_0(x,t,\tau)$ 属于空间 G，我们得到函数$v_0(t,\tau)$，即

$$v_0(t,\tau)=A\,[1-\tanh\left(\beta\ (\tau+c)\right)],\qquad(13)$$

其中

$$A = A(t) = \frac{a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t) - b_0(\varphi(t),t)u_0(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t),t)}, \tag{14}$$

$$\beta = \beta(t) = \frac{1}{2}\,A(t)\,b_0(\varphi(t),t), \tag{15}$$

$c = c(t)$ 是一个积分常数，假设其为零 o.

接下来我们证明，可以将函数 $v_0(t,\tau)$ 视为奇异部分渐近展开的主项 $V_0(x,t,\tau)$，该函数由公式（13）给出。

已知渐近展开正则部分的主项后，我们证明以下定理。

定理 1. 设条件 $a_0(x,t)\,b_0(x,t) \neq 0$ 对所有 $(x,t) \in \mathrm{R} \times [0;\ T]$ 均成立；函数 $a_0(x,t)$、 $b_0(x,t)$ 关于变量 $(x,t) \in \mathrm{R} \times [0;\ T]$ 无穷次可微。那么，对于任意无穷次可微函数 $x = \varphi(t)$，$t \in [0;\ T]$，以下函数

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + v_0(t,\tau), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{16}$$

是方程（1）的渐近阶跃型解的主项，并且在集合 $\mathrm{R}\times[0;\ T]$ 上以渐近精度 $O(1)$ 满足该方程。此外，当 $\tau \to +\infty$ 时，它以渐近精度 $O(\varepsilon)$ 满足方程（1）。

此外，若函数 (14) 满足条件 $\dfrac{dA}{dt} = 0$，则其满足方程（1），且 *(16)*

当 $\tau \to -\infty$ 时，其渐近精度为 $O(\varepsilon)$。

证明. 为证明定理 1，需要估计方程（1）情形下式 (16) 的余项。将渐近解 (16) 代入方程（1），并考虑渐近展开中正则部分和奇异部分所满足的方程，可得残差函数的显式表达式。

所求的残差函数由公式确定

$$g_0(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left[a_0(x,t) - a_0(\varphi(t),t)\right]\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \tag{17}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left[u_0(x,t)b_0(x,t) - u_0(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t),t)\right]\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left[b_0(x,t) - b_0(\varphi(t),t)\right]v_0\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + a_0(x,t)\frac{\partial v_0}{\partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} +$$

$$+b_1(x,t)\,(u_0+v_0)\,\frac{\partial v_0}{\partial \tau}+O(\varepsilon).$$

对于所有的（x， t） $\in \Omega^{\mu}$（Γ） $=\{$（x； t） $\in \mathbf{R}\times[0;\ T]:$ $|x-\varphi$（t）$|<\mu$、 $\}$，其中$\mu>0$，我们有不等式

$$|a_0(x,t)-a_0(\varphi(t),t)|\le C_1|x-\varphi(t)|,$$

$$|b_0(x,t)-b_0(\varphi(t),t)|\le C_2|x-\varphi(t)|,$$

$$|u_0(x,t)b_0(x,t)-u_0(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t),t)|\le C_3|x-\varphi(t)|$$

其中 C_k、$k=1$ 为某些正常数，3.

由于 $\dfrac{\partial v_0}{\partial \tau}$ 是关于变量 τ 快速递减的函数，因此渐近等式 $g_0(x,t,\varepsilon)=O$ (1) 成立。

由于 $v_0(t,\tau)\in G$，函数 $v_0(t,\tau)$ 显然以精度 $O(\varepsilon)$ 满足方程（1），当 $\tau\to+\infty$ 时成立。若（14）中的 $A(t)$ 的值为常数，则函数 $v_0(t,\tau)$ $\in G$ 满足条件 $v_{0t}(t,\tau)\in G_0$。因此，当 $\tau\to-\infty$ 时，函数 $v_0(t,\tau)$ 以渐近精度 $O(\varepsilon)$ 满足方程（1）。

定理 1 得证。

3.2 渐近展开奇异部分的高阶项

考虑间断曲线 Γ 上渐近展开奇异部分高阶项的方程。提醒一下，函数 $v_j=v_j(t,\tau),j\in\mathbf{N}$ 属于空间 G。我们有

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial \tau^2}+a_0(\varphi,t)\varphi'(t)\,\frac{\partial v_j}{\partial \tau}-b_0(\varphi,t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \tau}\,(v_0v_j)\right]=\mathcal{F}_j(t,\tau), \tag{18}$$

其中 $\mathcal{F}_j(t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau)\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau)\ u_0(x,t)\ldots,u_j(x,t))|_{x=\varphi(t)}$ 是在求得函数 $u_0(x,t)$， $u_1(x,t)$, . . .,$u_j(x,t)$， $V_0(x,t,\tau)$ $V_1(x,t,\tau)$, . . ., $V_{j-1}(x,t,\tau)$, $j=1,N$ 后递归定义的。

特别地，

$$\mathcal{F}_1(t,\tau)=a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial t}+b_0(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)v_0+ \tag{19}$$

$$+\left[-a_1(\varphi,t)\varphi'(t)+b_1(\varphi,t)u_0(\varphi(t),t)+b_0(\varphi,t)u_1(\varphi,t)\right]\frac{\partial v_0}{\partial \tau}+$$

$$+\tau\left[-a_{0x}(\varphi,t)\varphi'(t)+b_{0x}(\varphi,t)u_0(\varphi,t)+b_0(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)\right]\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+$$

$$+\left[b_1(\varphi,t)+\tau b_{0x}(\varphi,t)\right]v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}.$$

由于变量 t 可以在该方程中视为参数，我们对变量 τ 进行积分。得到

$$\frac{\partial v_j}{\partial\tau}=\left[-a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t)+b_0(\varphi(t),t)\left(u_0(\varphi(t),t)+v_0\right)\right]v_j+\Phi_j(t,\tau),\quad(20)$$

其中

$$\Phi_j(t,\tau)=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\mathcal{F}_j(t,\xi)d\xi,\quad j\in\mathbf{N}.\quad(21)$$

方程的解（20）的解可明确写成如下形式

$$v_j(t,\tau)=\left(C_0\,\cosh^2(\beta\tau_0)+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\cosh^2(\beta s)\Phi_j(t,s)ds\right)\cosh^{-2}(\beta\tau),\quad(22)$$

其中，C_0、τ_0 为任意常数，值 $\beta=\beta(t)$由公式（15）定义，$j\in$**N**。

以下引理成立。

引理1. 若 $\Phi_j(t,\tau)\in G$, $j\in$**N**，则对于任意 $t\in[0;\ T]$ 函数都是 *(22)* 方程（20）的有界解。

引理1的结论由以下不等式得出

$$\left|\cosh^{-2}(\beta\tau)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\cosh^2(\beta s)\Phi_j(t,s)ds\right|\le$$

$$\le c_{1j}\,\cosh^{-2}(\beta\tau)\left(\frac{\sinh(2\beta\tau)}{4\beta}+\frac{\tau}{2}+c_{2j}\right)<\infty,$$

其中 c_{1j}、c_{2j} 是一些常数，$j\in$**N**。

引理1得证。

考虑函数 (22)。容易看出它具有以下性质：

1. 函数 $v_0(t,\tau)$ 可用双曲正切 $(\beta\,\tau)$ 表示；

2. 右端函数 (18) 取决于 $v_k(t,\tau)$、函数关于变量 τ 的导数及其乘积。

因此，可以假设，在级数 (2) 的系数满足某些条件时，函数 $\Phi_j(t,\tau)$, $j\in\mathbf{N}$，可能具有以下形式

$$\Phi_j(t,\tau)=C_{10}(t)+\sum_{k=1}^{3}C_{1k}(t)\tanh^k(\beta\tau)+\sum_{k=1}^{m}C_{2k}(t)\cosh^{-k}(\beta\tau),\quad(23)$$

其中 $C_{1k}(t)\,k=0,\overline{3,}\,C_{2k}(t)$, $k=1,\overline{m}$为一些值， m为自然数， t为参数。

容易看出，在对(23)中展开的系数施加某些条件时，函数(22)属于空间 G。实际上，例如，对于零背景且渐近展开的正则部分为平凡的情形 $U_N(x,t,\varepsilon)=0$，我们研究曲线Γ 上渐近展开的奇异部分的第一项。于是有

$$\Phi_1(t,\tau)=\alpha_0+\alpha_1\tau+\alpha_2\tau\tanh(\beta\tau)+\alpha_3\tau\tanh^2(\beta\tau)+\quad(24)$$
$$+\alpha_4\ln\cosh(\beta\tau)+\alpha_5\tanh(\beta\tau)+\alpha_6\tanh^2(\beta\tau),$$

其中

$$\alpha_0=\alpha_0(t)=-A\,a_1(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)+\frac{A^2}{2}\,b_1(\varphi(t),t),\quad(25)$$

$$\alpha_1=\alpha_1(t)=a_0(\varphi(t),t)\frac{dA}{dt}-\frac{A^2}{2}\,b_{0x}(\varphi(t),t),\quad(26)$$

$$\alpha_2=\alpha_2(t)=-\frac{A}{\beta}\,a_0(\varphi(t),t)\,\frac{d\beta}{dt}+A\,a_{0x}(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)-A^2\,b_{0x}(\varphi(t),t),\quad(27)$$

$$\alpha_3=\alpha_3(t)=\frac{A^2}{2}\,b_{0x}(\varphi(t),t),\quad(28)$$

$$\alpha_4=\alpha_4(t)=-a_0(\varphi(t),t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\beta}\right)-\frac{A}{\beta}\,a_{0x}(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)+\frac{A^2}{\beta}\,b_{0x}(\varphi(t),t),\quad(29)$$

$$\alpha_5=\alpha_5(t)=A\,a_1(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)-A^2b_1(\varphi(t),t)+\frac{A^2}{2\beta}\,b_{0x}(\varphi(t),t),\quad(30)$$

$$\alpha_6=\alpha_6(t)=\frac{A^2}{2}\,b_1(\varphi(t),t).\quad(31)$$

这里的值 A,β 由公式(14)、(15)定义。

由于函数 $\Phi_1(t,\tau)$ 作为空间G中的元素必须有界，因此必须满足以下条件

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0\quad(32)$$

。

利用公式（26）–（29），我们将条件（32）用方程（1）的系数表示。由条件 $\alpha_3 = 0$ 可推出等式$b_{0x}(\varphi(t)\ t) = 0$，例如，在情形 $b_0(x,t) = b_0(t)$下，该等式成立。在此情形下，由条件 $\alpha_1 = 0$ 可得关系 $A'(t) = 0$，它等价于关于间断曲线的非线性二阶常微分方程

$$\frac{d\varphi}{dt} = \rho\,\frac{b_0(t)}{a_0(\varphi,t)}, \tag{33}$$

其中 $\rho \neq 0$ 是任意常数。

这里，函数 $\varphi = \varphi(t)$是方程（33）的一个解，满足初始条件 $\varphi(0) = \varphi_0$，并定义在某个（最大）区间 $(\omega_-,\omega_+) \subset \mathbf{R}$上，其中值 ω_-,ω_+ 取决于初值 φ_0。一般而言，区间 (ω_-,ω_+) 是有限的，不过尤其值得关注的是函数 $\varphi = \varphi(t)$对所有 $t \geq 0$均有定义的情形。

在条件（33）下，等式 $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ 等价于关系

$$a_0(\varphi(t),t)\,b_0'(t) = \rho\,b_0^2(t)\,a_{0x}(\varphi(t),t). \tag{34}$$

因此，如果（2）中的系数 $a_0(x,t)$、$b_0(x,t)$ 满足条件 $a_0(x,t) = a_0(t)$ $b_0(x,t) = b_0 = const$，且 $\varphi = \varphi(t)$ 是方程（33）的一个解，那么函数 $\Phi_1(t,\tau)$ 属于空间 G。此外，根据引理1，方程（20）的解 $v_1(t,\tau)$ 是一个有界函数，可由公式（22）解析地求得。

3.2.1 一阶近似的渐近估计

设（22）中的 $\tau_0 = 0$ 以及条件（32）均得到满足。考虑到表示（24），我们可以显式地求得函数 $v_1(t,\tau)$。有

$$v_1(t,\tau) = \frac{\alpha_5}{2\beta} + \left[c - \frac{\alpha_5}{2\beta} + (\alpha_0 - \alpha_6)\,\frac{\tau}{2}\right]\cosh^{-2}(\beta\tau) + \frac{\alpha_0 + \alpha_6}{2\beta}\,\tanh(\beta\tau), \tag{35}$$

其中，值 α_0、α_5、α_6 由（25）、（30）、（31）定义，而 c 是积分常数。

显然，所构造的函数 $v_1(t,\tau) \in G$。那么，第一个渐近

近似解可写为

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = v_0(t,\tau) + \varepsilon v_1(t,\tau), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{36}$$

其中， $v_0(t,\tau)$、 $v_1(t,\tau)$分别由公式 (13)、(35) 定义。

这一性质由以下定理得出。

定理 2. 以下条件成立：

1^0. 函数 $a_0(x,t)$、 $b_0(x,t)$、 $a_1(x,t)$、 $b_1(x,t)$ 关于变量 $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0$ 具有无穷次可微性； $T]$ 且 $a_0(x,t) \neq 0, b_0(x,t) = b_0(t) \neq 0$;

2^0. 函数 $\varphi = \varphi(t)$、 $t \in [0;\ T]$ 是微分方程 (33) 的解;

3^0. 关系 (34) 成立。

那么，函数（36）就是方程（1）的渐近阶跃型解的一阶近似，并且在集合 $\mathbf{R} \times [0;\ T]$ 上以精度 $O(\varepsilon)$ 满足方程（1）；对于$\tau \to +\infty$，该函数以精度 $O(\varepsilon^2)$ 满足此方程。

如果此外条件

$$\frac{d}{dt}\frac{a_1(\varphi(t),t)\varphi'(t) - b_1(\varphi(t),t)A(t)}{b_0(\varphi(t),t)} = 0 \tag{37}$$

成立，其中值 $A(t)$ 由公式（14）给出，那么该函数在 $\tau \to -\infty$ 时 *(36)* 以渐近精度 $O(\varepsilon^2)$ 满足方程（1）。

证明。与证明定理 1 的情况一样，有必要估计函数（36）和方程（1）的残差。将渐近解（36）代入方程（1），并考虑奇异项所满足的方程，我们得到残差的显式表达式。因此，我们需要估计函数

$$g_1(x,t,\varepsilon) = [a_0(x,t) - a_0(\varphi(t),t)]\frac{\partial v_0}{\partial t} - \tag{38}$$

$$-\left[\frac{1}{\varepsilon}(a_0(x,t) - a_0(\varphi(t),t) - \varepsilon\tau a_{0x}(\varphi(t),t)) + (a_1(x,t) - a_1(\varphi(t),t))\right] \times$$

$$\times\varphi'\frac{\partial v_0}{\partial \tau} - [a_0(x,t) - a_0(\varphi(t),t)]\varphi'\frac{\partial v_1}{\partial \tau} +$$

$$+\varepsilon\left[a_1(x,t)\frac{\partial v_0}{\partial t} - a_2(x,t)\varphi'\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + a_0(x,t)\frac{\partial v_1}{\partial t} - a_1(x,t)\varphi'\frac{\partial v_1}{\partial \tau}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(b_0(x,t)-b_0(\varphi(t),t)-\varepsilon\tau b_{0x}(\varphi(t),t)\right)+\left(b_1(x,t)-b_1(\varphi(t),t)\right)\right]\times$$

$$\times v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+\left[b_0(x,t)-b_0(\varphi(t),t)\right]\left(v_0\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\varepsilon\left[b_1(x,t)\left(v_0\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right)+b_2(x,t)v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+b_0(x,t)v_1\frac{\partial v_1}{\partial\tau}\right]+O\left(\varepsilon^2\right).$$

考虑残差函数（38）的前两项。由于 $v_0(t,\tau)$ 的显式公式和条件 2^0 可直接推出 $v_{0t}\in G_0$，对于第一项，我们得到渐近估计

$$\left|\left[a_0(x,t)-a_0(\varphi(t),t)\right]\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|\le\left|a_0(x,t)-a_0(\varphi(t),t)\right|\left|\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|\le$$

$$\le M_1\varepsilon|\tau|\left|\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|\le C_1\varepsilon,$$

其中，$M_1>0$、$C_1>0$ 是某些值。

类似地，对于残差函数（38）的第二项，我们有以下不等式:

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\left[a(x,t)-a_0(\varphi(t),t)-\varepsilon\,\tau\,a_{0x}(\varphi(t),t)\right]\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}M_2\,\varepsilon^2\,\tau^2\left|\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right|\le C_2\varepsilon,$$

其中，$M_2>0$、$C_2>0$ 是某些常数。

类似地，对残差函数（38）的其他项进行估计。

因此，我们得到渐近等式 $g_1(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$。

由于 $v_0(t,\tau)$ $v_1(t,\tau)\in G$，函数 $Y_1(x,t,\varepsilon)$ 显然以渐近精度 $O(\varepsilon^2)$ 满足方程（1），当 $\tau\to+\infty$ 时。

此外，若公式（35）中的值 $\dfrac{\alpha_0+\alpha_6}{2\beta}$ 不依赖于变量 t，即条件（37）成立，则函数 $Y_1(x,t,\varepsilon)\in G$ 满足条件 $Y_{1t}(t,\tau)\in G_0$。因此，函数 $Y_1(x,t,\varepsilon)$ 满足方程（1），其精度为 $O(\varepsilon^2)$，当 $\tau\to-\infty$ 时。

定理 2 得证。

这样就可以构造阶跃型渐近解的奇异部分的高阶项，但这些公式十分繁琐。因此这里不予列出。还应指出，要充分描述

小扰动微分方程的解，通常只需考虑一阶渐近近似 [18, 19, 20, 21]。

4 示例

考虑变系数 Burgers方程

$$\varepsilon u_{xx} = \left(t^2 + 1 + \varepsilon(x^2+1)^2\right) u_t + \left(1 + \varepsilon \frac{(x^2+1)^2}{t^2+1}\right) u u_x \tag{39}$$

并针对零背景情形，构造其渐近解的一阶近似。

对于此例，渐近级数 (2)、(7) 的前几个系数写作

$$a_0(x,t) = t^2 + 1, \quad a_1(x,t) = (x^2+1)^2, \tag{40}$$

$$b_0(x,t) = 1, \quad b_1(x,t) = \frac{(x^2+1)^2}{t^2+1}. \tag{41}$$

考虑到 (40)、(41) 以及等式 $u_0(x,t) = u_1(x,t) = 0$，由 (33) 可得函数 $\varphi = \varphi(t)$ 的方程，形式如下：

$$(t^2+1)\varphi'(t) = \rho, \quad \rho \neq 0.$$

该方程满足初始条件 $\varphi(0) = 0$ 时，其解写作

$$\varphi(t) = \rho \arctan t$$

并且对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义。

那么 $A = A(t) = \rho$, $\beta = \rho/2$ 并且你可以轻易确认，条件 (34) 和 (37) 在 $C_0 = 0$ 下均得到满足。

因此，定理 1、2 的所有条件均已满足。

方程的渐近展开的奇异部分的主项由以下公式给出 (39)

$$V_0(x,t,\varepsilon) = 1 - \tanh\left(\rho \frac{x - \rho \arctan t}{2\varepsilon}\right), \tag{42}$$

而渐近展开的奇异部分的首项写作

$$V_1(x,t,\varepsilon) = \left[c - \rho^2 \frac{\left(1 + \rho^2 \arctan^2 t\right)^2}{t^2+1} \frac{x - \rho \arctan t}{2\varepsilon}\right] \times \tag{43}$$

$$\times \cosh^{-2}\left(\rho\,\frac{x-\rho\arctan t}{2\varepsilon}\right).$$

显然，$V_0(x,t,\varepsilon) \in G$, $V_1(x,t,\varepsilon) \in G_0$。

函数

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = 1 - \tanh\left(\frac{x-\rho\arctan t}{2\varepsilon}\right) + \tag{44}$$

$$+\varepsilon\left[c - \rho^2\,\frac{\left(1+\rho^2\arctan^2 t\right)^2}{t^2+1}\,\frac{x-\rho\arctan t}{2\varepsilon}\right]\cosh^{-2}\left(\rho\,\frac{x-\rho\arctan t}{2\varepsilon}\right)$$

是方程（39）的第一个渐近阶跃型解近似，并且根据定理 2，其满足该方程，精度为 $O(\varepsilon)$。此外，当 $\tau \to \pm\infty$ 时，该近似满足该方程，精度为 $O(\varepsilon^2)$。

函数（42）、（43）和（44）的图像在图1–6中给出，对应 $\rho = 1$、$c = 0$、 $\varepsilon = 0$、9 和 $\varepsilon = 0$、25。这些图像展示了解（1）的性质；这些性质是函数所固有的，并在数学上描述了激波。

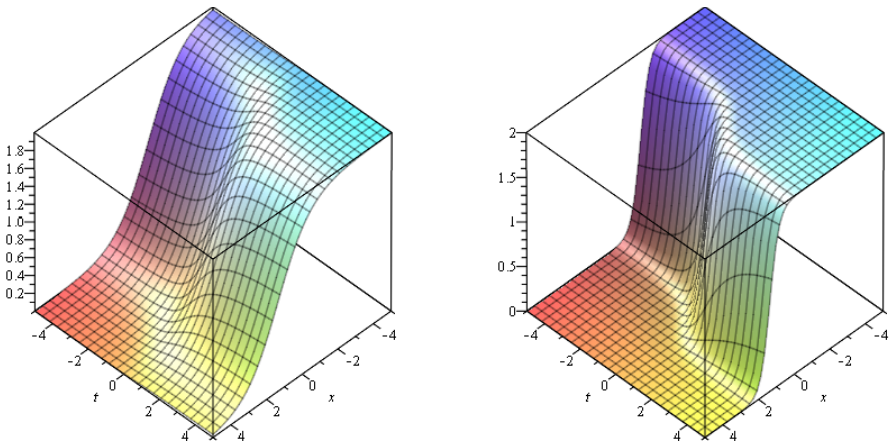


图1：渐近解 $V_0(x,t,\varepsilon)$ 的主项，分别对应 $\varepsilon = 0.9$ （左侧）和 $\varepsilon = 0.25$ （右侧）。

5 结论与讨论

本文探讨如何构造带有变系数和小参数的Burgers方程的渐近阶梯状解。该方程可视为以下过程的数学模型：

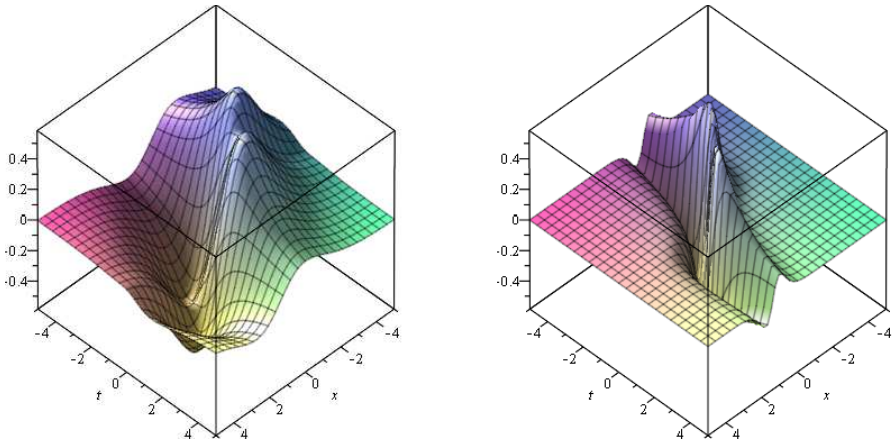


图2：渐近解的首项 $V_1(x,t,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0.9$ （左）和 $\varepsilon = 0.25$ （右）时的情形。

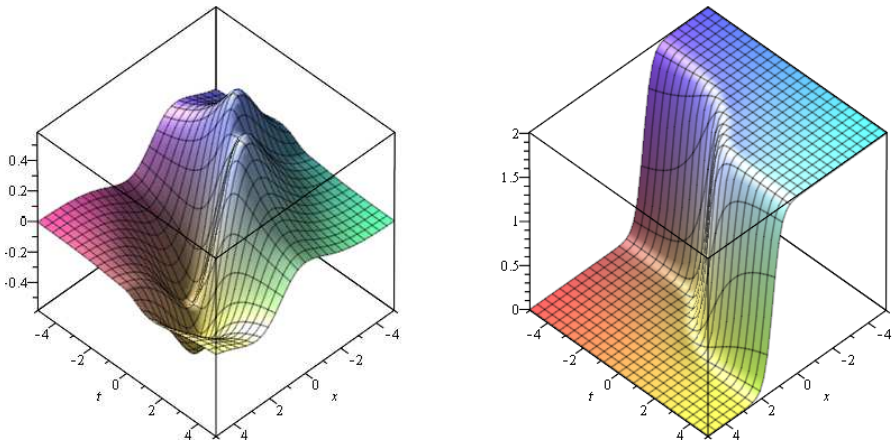


图3：一阶渐近解 $Y_1(x,t,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0.9$ （左）和 $\varepsilon = 0.25$ （右）时的情形。

具有小黏度和变特性的介质中的波动过程，也可视为经典Burgers方程的推广。

Burgers方程被认为是最简单的数学模型，它统一了典型的非线性和黏性，并描述了流体动力学湍流、爆破以及波的翻转（破坏）等现象。当黏性趋于零时，解的极限值是一个不连续的阶梯状函数。

因此，自然会产生寻找变系数 Burgers方程的渐近阶梯状解这一问题。该问题通过非线性WKB方法求解。本文提出了构造这些渐近解的算法，并证明了该算法合理性的相关结论。所得结果通过一个例子加以说明，

其中明确求出了第一个渐近阶跃型近似。此外，还给出了在某些数值参数下这些近似解的图像。

在本例中，与一般情形不同，渐近解对所有时空变量的取值都有定义，其形式为冲击波型函数。这些图还表明，第一阶渐近近似能够充分描述所研究方程的解。

6 致谢

这项工作的部分内容是在第一作者作为访问学者，通过“因冲突而身处风险境况的访问教授”计划，赴罗马第一大学萨皮恩扎校区工程基础与应用科学系期间完成的。因此，他对所获支持和热情接待深表感谢。第一作者和最后一位作者也感谢意大利国家高等数学研究所“乌克兰访问教授服务窗口”提供的支持。最后一位作者是意大利国家高等数学研究所应用数学与物理分析组的成员，并谨此致谢该组织的支持。第二作者在里昂第一大学获得PAUSE计划的资助，对所获支持和热情接待深表感激。

参考文献

[1] A.R. Forsyth，《微分方程理论》第4部分：偏微分方程，5-6（1906年）。[2] H. Bateman，《关于流体运动的一些近期研究》，《月度天气评论》43（1915）163–170，https://doi.org/10.1175/1520-0493(1915)43¡163:SRROTM¿2.0.CO;2。[3]L.I. Sedov，《连续介质力学》，共2卷。《理论与应用力学丛书》第4卷，World Scientific，1997年。[4] J.M. Burgers，《阐释湍流运动理论中出现的关系的数学例子》，Verhandelingen der Konin-

klijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Afdeeling natu- urkunde (Eerste sectie)，XVII（2）（1939）1–53。

[5] J.M. Burgers，《应用一个模型系统阐释自由湍流统计理论的若干要点》，载于：《科学部论文集》。荷兰皇家科学院，阿姆斯特丹，XLII（1）（1940），2–12。

[6] J.M. Burgers，《阐释湍流理论的数学模型》。载于：《应用力学进展》。系列主编：Richard von Mises 和 Theodore von Karman，1（1948）171 – 199。[7]E. Hopf，《偏微分方程 $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$》，《纯粹与应用数学通讯》3（1950）201 – 230，https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302。[8] R.Z. Sagdeev、D.A. Usikov、G.M. Zaslavsky，《非线性物理学：从摆到湍流与混沌》，瑞士库尔；纽约：Harwood Academic Publishers，1988。[9] V. Samoilenko、Yu. Samoilenko、L. Vovk，《一阶线性偏微分方程快速衰减解的存在性》，载于《教学与研究中的计算机代数系统》IX（2021）162 – 174。[10] J.D. Cole，《航空动力学中出现的一个拟线性抛物型方程》，《应用数学季刊》9（1951）225 – 236。[11]M.J. Ablowitz，《非线性色散波：渐近分析与孤子》，剑桥大学出版社，剑桥，2011，https://doi.org/10.1017/CBO9780511998324。[12]V.P. Maslov、G.A. Omel’yanov，《偏微分方程的几何渐近》，普罗维登斯：美国数学会，2001。[13] V.H. Samoylenko、Yu.I. Samoylenko，《变系数 Korteweg-de-Vries 方程单相孤子型解的渐近展开》，《乌克兰数学杂志》57（1）（2005）132 – 148，https://doi.org/10.1007/s11253-005-0176-9。

[14]V. Samoilenko、Yu. Samoilenko，《变系数奇异摄动 Benjamin–Bona–Mahony 方程的渐近孤子型解》，《数学物理学杂志》60（1）（2019）011501，https://doi.org/10.1063 / 1.5085291。.[15] L. Prandtl，《极小摩擦下的流体运动》，载于《第三届国际数学大会论文集》，德国海德堡。2（1904）484 – 491。[16] V.H. Samoylenko、Yu.I. Samoylenko，《变系数奇异摄动 Korteweg-de-Vries 方程柯西问题的双相孤子型解》，《乌克兰数学杂志》65（11）（2014）1681 – 1697，https://doi.org/10.1007/s11253-014-0889-8。[17]V.I. Karpman，《色散介质中的非线性波》，自然哲学国际专著丛书，牛津：Pergamon Press，第一版，1974。[18] N.N. Bogoliubov、Yu.A. Mitropolsky，《非线性振荡理论中的渐近方法》，纽约：Gordon and Breach，1961。[19]A.H. Nayfeh，《摄动技术导论》，纽约、奇切斯特、布里斯班、多伦多：Wiley-Interscience 出版物，1993。[20] M. Amar、J. Matias、M. Morandotti 等，《结构变形背景下的周期均匀化》，《应用数学与物理学杂志》73（4），173（2022）。https://doi.org/10.1007/s00033-022-01817-6[21]V. Samoilenko、Yu.I. Samoilenko、V.O. Limarchenko、V.S. Vovk、K.S. Zaitseva，《具有奇异摄动和变系数的 Korteweg-de Vries 方程的孤子型渐近解》，《数学建模与计算》6（2）（2019）375 – 386，https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.374。