arXiv:2303.01224v1 [math.CO] 2 Mar 2023

空的 Δ-模单纯形的枚举与幺模等价 *

D. V. Gribanov[1],2[0000−0002−4005−9483]

[1] 下诺夫哥罗德洛巴切夫斯基国立大学，俄罗斯联邦下诺夫哥罗德市加加林大街23号，邮编603950[2] 国立高等经济大学，俄罗斯联邦下诺夫哥罗德市大佩切尔斯卡娅街25/12号，邮编603155 dimitry.gribanov@gmail.com

摘要。 考虑一类由线性不等式系统 $Ax \leq b$定义、其矩阵为 Δ-模矩阵的单纯形。若一个矩阵的所有秩阶子式的绝对值均不超过 Δ ，则称其为 Δ- 模矩阵。在本文中，若单纯形可由一个系统 $Ax \leq b$ 定义，且其矩阵 Δ为 Δ-模矩阵 A，则称该单纯形为 Δ-模单纯形。若单纯形不包含任何整数坐标点，则称其为空的。文献中，若单纯形的所有顶点均具有整数坐标，则称其为格单纯形。而若格单纯形除其顶点外不包含任何整数坐标点，则称其为空的。

最近，在假设 Δ 固定的情况下， [37] 证明了，模幺模等价关系的 Δ-模空单纯形的数量关于维数有一个多项式上界。我们证明，类似结论对 Δ-模空格单形这一类也成立。作为主要结果，我们再次假设参数 Δ 的值固定，并证明这两类单纯形的所有幺模等价类均可由多项式时间算法枚举。作为次要结果，我们证明存在一种多项式时间算法，可判断给定的一对 Δ-模单纯形（不一定为空）是否满足幺模等价关系。

关键词： 格单纯形 · 空单纯形 · Δ-模矩阵 · 有界子式 · 幺模等价 · 枚举算法

1 引言

一方面，单纯形是相当简单的对象，因为它们构成了一类顶点数尽可能少的实心多胞体。与此同时，单纯形也是重要且基础的几何与组合对象。例如，无界背包问题可以建模为定义在单纯形上的整数线性优化问题；单纯形是任何给定多胞体进行三角剖分时的基础

*本文的研究工作得到俄罗斯科学基金会第21-11-00194号项目的资助。

构件；单纯形可以用作通用且相当简单的有界区域；等等。

在我们的工作中，我们只考虑由 $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n$ 定义的单纯形 $\mathcal{S}: \ Ax \leq b\}$，其中 $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$，$\text{rank}(A) = n$ 且 $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$。我们主要关注与集合 $\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n$ 相关的各种问题。例如，在整数可行性问题 中，我们需要判断 $\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ 是否成立。这个问题自然是 NP-完全的，因为经典的 NP-完全无界子集和问题可以表示为单纯形中的整数可行性问题。在更一般的 NP-难整数线性优化问题中，我们需要找到一个点 $x^* \in \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n$，使得 $c^\top x^* = \max\{c^\top x: x \in \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n\}$，其中$c \in \mathbb{Z}^n$ 是任意向量；或者判定 $\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$。然而，假设维数固定，得益于 Lenstra 的开创性工作 [48] （关于更新、更通用的算法，参见例如 [25,2,24,22,31,60,30]），对于由线性不等式系统定义的任意多胞体，整数可行性问题和整数线性优化问题都可以通过多项式时间算法求解。在整数点计数问题 中，我们需要计算 $|\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n|$ 的值；出于相同原因，这是一个 #P-难问题。得益于 Barvinok 的开创性工作[12] （另见相关研究 [11,13,29,45] 和著作 [10,26,47,16]），假设维数固定，对于一般多胞体，最后这个问题可以通过多项式时间算法求解。

重要的单形（以及更一般的多胞体）包括格单形和空格单形。如果 $\text{vert}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{Z}^n$，则称单形 $\mathcal{S}$ （或一般多胞体）为格单形。如果 $\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n = \text{vert}(\mathcal{S})$，则称格单形 $\mathcal{S}$ （或一般格多胞体）为空的。在我们的工作中，如果 $\mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$，则将不是格单形的单形 $\mathcal{S}$称为空的。

空格多胞体出现在许多有关整数规划理论的重要著作中。它们是割平面理论的核心对象之一 [6,3,20,27,15], ，并且可用于构造凸整数优化中的最优性证明 [17,18,1,62,50,14,5,53]。从代数几何的角度来看，空单纯形与终端商奇点几乎构成双射，参见例如 [51,52,41,19]。关于所有四维空格单形的分类问题已在论文 [41]中完全解决。该方向的早期成果可见于例如相关著作[51,56,39,58]。三维分类问题由 White [61]解决（另见 [56,52]）。 [59]介绍了一般三维空格多胞体的重要结构性质。

一个与单纯形、格单纯形或一般无格凸体的空性密切相关的重要参数是格宽度，或简称为宽度：

定义 1。 对于凸体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ 和向量 $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$，定义

$$\text{width}_c(\mathcal{P}) = \max_{x\in\mathcal{P}} c^\top x - \min_{x\in\mathcal{P}} c^\top x, \quad \textit{and}$$
$$\text{width}(\mathcal{P}) = \min_{c\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \big\{\text{width}_c(\mathcal{P})\big\}.$$

宽度$(\mathcal{P})$ 的值称为 $\mathcal{P}$ 的格宽度 （或简称宽度）。

这一联系可从 A. Khinchin 的著名成果中推导出来，并以平坦性定理之名为人所知。

定理 1（平坦性定理，A. Khinchin [44]）。设 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，满足 $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$。

$$Then, \quad \operatorname{width}(\mathcal{P}) \leq \omega(n),$$

其中 $\omega(n)$ 是某个仅依赖于 n 的函数。

已有许多关于平坦性定理的证明发表于 [4,46,42,7,8,9]„ 每种证明都给出了关于 $\omega(n)$ 的不同渐近估计。结合 Banaszczyk、Litvak、Pajor 和 Szarek [9] 以及 Rudelson [54], 的工作，目前最好的上界是 $\omega(n) = n^{4/3} \cdot \log^{O(1)}(n)$。限制在单纯形的情形下，已有研究表明 [9]， $\omega(n) = O(n\log(n))$。Banaszczyk [8]证明了在限制为对称凸体时， $\omega(n)$ 也满足相同的上界。已有一系列工作 [43,56,23,28,49] 致力于建立 $\omega(n)$ 的下界。其中最先进的结果来自 Mayrhofer、Schade 和 Weltge 的工作 [49]，他们构造出了一个宽度为 $2n - o(d)$ 的空格单纯形。据 [9] 中的猜想，即使将 $\omega(n)$ 的取值限制为单纯形，也有 $\omega(n) = \Theta(n)$。据我们所知，猜想得到验证的唯一一个非平凡情形是椭球的情形，这归功于 [8]。

由于 [56], ，对于给定的格单纯形 $\mathcal{S}$，判定宽度$(\mathcal{S}) \leq 1$ 是一个 NP完全问题。然而，正如 [56], 中所指出的，假设维数固定，该问题仍可通过多项式时间算法求解。

1.1 Δ-模单纯形类

事实证明，可以为系统 $Ax \leq b$定义一个有趣且重要的参数，它会显著影响所研究问题的复杂度。

定义 2。对于矩阵 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$，

$$\Delta_k(A) = \max\left\{\left|\det(A_{\mathcal{I}\,\mathcal{J}})\right| : \mathcal{I} \subseteq \{1,\ldots,m\},\ \mathcal{J} \subseteq \{1,\ldots,n\}, |\mathcal{I}| = |\mathcal{J}| = k\right\},$$

我们用它表示 A所有 $k \times k$ 子矩阵行列式绝对值的最大值。这里，符号 $A_{\mathcal{I}\,\mathcal{J}}$ 表示 A的子矩阵，该子矩阵由索引属于 $\mathcal{I}$ 的所有行以及索引属于$\mathcal{J}$的所有列构成。

注意， $\Delta_1(A) = \|A\|_{\max} =$ 最大值$_{ij}\,|A_{ij}|$。此外，令 $\Delta(A) = \Delta_{\operatorname{rank}(A)}(A)$。对于某个 $\Delta > 0$，满足 $\Delta(A) \leq \Delta$的矩阵 A 称为 Δ-模。由系统 $Ax \leq b$ 定义、且其矩阵 A为 Δ-模的多胞体 $\mathcal{P}$称为 Δ-模多胞体。

令人惊讶的是，对于满足 $\Delta =$ poly(ϕ) 的 Δ-模单纯形，所有上述问题都可以通过多项式

时间算法求解。这类算法也称为 FPT算法。具体而言，将问题限制在单纯形上，根据 [37, 定理 14]，整数可行性问题可通过 $O\big(n+\min\{n,\Delta\}\cdot\Delta\cdot\log(\Delta)\big)$ 次运算求解。根据 [37, 推论 9]（另见 [35]），整数线性优化问题可通过 $O\big(n+\Delta^2\cdot\log(\Delta)\cdot\log(\Delta_{\gcd})\big)$ 次运算求解。根据 Gribanov 与 Malyshev [34] 以及 Gribanov、Malyshev 与 Zolotykh [32], 的一项改进，整数点计数问题可通过 $O(n^4\cdot\Delta^3)$ 次运算求解。根据 Gribanov、Malyshev、Pardalos 与 Veselov [35]（另见 [33]），格宽度可通过 poly(n,Δ,Δ_{ext}) 次运算计算，其中 $\Delta_{ext}=\Delta(A\,b)$ 和 $(A\,b)$ 是该系统的扩展矩阵。此外，对于空单纯形，可以消除复杂度对 Δ_{ext} 的依赖，从而得到界 poly(n,Δ)。Gribanov、Malyshev 与 Veselov [36] 给出了由其顶点的凸包定义的格单纯形的类似结果。

此外，Gribanov 与 Veselov [38] 证明了可以为单纯形证明平坦性定理的一个变体，使得函数ω 仅取决于 A 的子行列式谱，而非 n。更确切地说，以下结论成立：对于任意空单纯形 $\mathcal{S}$，不等式 width$(\mathcal{S})<\Delta_{\min}(A)$ 成立，其中 $\Delta_{\min}(A)$是 A 所有秩阶非零子式的绝对值中的最小值。此外，如果该不等式不成立，则可以通过多项式时间算法找到 $\mathcal{S}$ 内部的一个整数点。Henk、Kuhlmann 与 Weismantel 的研究 [40] 将空单纯形的最后一个不等式改进为 width$(\mathcal{S})<\lfloor\Delta_{\min}/2\rfloor$。对于一般的 Δ-模空多胞体 $\mathcal{P}$，文献 [38], 证明了不等式 width$(\mathcal{S})\le(\Delta_{\mathrm{lcm}}(A)-1)\cdot\Delta(A)\,\Delta_{\gcd}(A)\cdot(n+1)$，其中 $\Delta_{\gcd}(A)$和 $\Delta_{\mathrm{lcm}}(A)$分别是 A 的秩阶子式绝对值的最大公约数函数和最小公倍数函数。此外，如果该不等式不成立，则 $\mathcal{P}$ 包含一个格单纯形，且可以通过多项式时间算法找到该单纯形的某个顶点。最近，Celaya、Kuhlmann、Paat 与 Weismantel 的研究 [21] 将空多胞体的最后一个不等式改进为 width$(\mathcal{S})<\frac{4n+2}{9}\cdot\Delta(A)$。

1.2 Th本文的主要动机和结果 ults

为表述主要问题和结果，我们首先需要给出一些补充定义。对于幺模矩阵 $U\in\mathbb{Z}^{n\times n}$ 和整数向量$x_0\in\mathbb{Z}^n$，仿射映射 $\mathcal{U}(x)=Ux+x_0$ 称为幺模。若存在幺模仿射映射$\mathcal{U}$ 使得 $\mathcal{U}(\mathcal{S}_1)=\mathcal{S}_2$，则称单纯形 $\mathcal{S}_1$ 和$\mathcal{S}_2$ 幺模等价。容易看出，这种关系将所有单纯形划分为若干等价类。

文献 [37, 定理 16] 证明，模幺模等价关系下，空的 Δ-模单纯形的数量有如下界：

$$\binom{n+\Delta-1}{\Delta-1}\cdot\Delta^{\log_2(\Delta)+2}, \tag{1}$$

对于固定的 Δ，这是一个多项式。该结果引出了以下

问题 *1*（空的 Δ-模单纯形枚举）。对于给定的参数 Δ，枚举所有 Δ-模空单纯形和空格单形的幺模等价类。

为了解决最后一个问题，拥有一种能够检验幺模等价关系的算法非常重要。

问题 *2*（幺模等价检验）。对于给定的单纯形 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$，确定单纯形 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 是否幺模等价。

作为主要结果，我们证明了，在 Δ 的值固定的情况下，这两个问题都可以通过多项式时间算法求解。然而遗憾的是，这些新算法不属于 FPT 类。我们的结果的形式化定义将在以下定理中给出。

定理 2。设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 是 Δ-模单纯形。对于 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 的幺模等价关系，可以通过复杂度为

$$n^{\log_2(\Delta)} \cdot \Delta! \cdot \mathrm{poly}(n, \Delta),$$

的算法进行检验；当 Δ 的值固定时，该复杂度为多项式。

定理 3. 我们可以通过一个复杂度上界为以下形式的算法，枚举 Δ-模空单纯形和空格单形在幺模等价类中的所有代表元

$$O\big(n+\Delta\big)^{\Delta-1} \cdot n^{\log_2(\Delta)+O(1)},$$

对于固定的 Δ 值，该上界是多项式。

证明见下一节第 2 节。

2 定理 2 和定理 3 的证明

2.1 Hermite 标准形

设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 是一个秩为 n 的整数矩阵，且假定 A 的前 n 行线性无关。众所周知（例如，参见 [55,57]），存在一个幺模矩阵 $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$，使得 $A = \binom{H}{B}Q$，其中 $B \in \mathbb{Z}^{(m-n)\times n}$，且 $H \in \mathbb{Z}^{n\times n}_{\geq 0}$ 是一个下三角矩阵，满足：对于任意 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 和 $j \in \{1,\ldots,i-1\}$，都有 $0 \leq H_{ij} < H_{ii}$。矩阵 $\binom{H}{B}$ 称为矩阵 A 的厄米特标准形（简称埃尔米特标准形）。此外，[35] 证明了 $\|B\|_{\max} \leq \Delta(A)$，因此 $\left\|\binom{H}{B}\right\|_{\max} \leq \Delta(A)$。Storjohann 与 Labahn 的工作 [57] 给出了一种近乎最优的多项式时间算法，用于构造 A 的埃尔米特标准形。

2.2 标准化形式的系统及其枚举

定义 3. 假设单纯形 $\mathcal{S}$ 由系统 $Ax \leq b$ 定义，其中 $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$ 且 $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$。

如果系统 $Ax \leq b$ 具有以下形式，则称其为标准化的：

$$\begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} h \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad where$$

1. 矩阵 $A = \binom{H}{c^\top}$ 是某个整数 $(n+1) \times n$ 矩阵的埃尔米特标准形，且$|det(H)| = \Delta(A)$；*2.* 矩阵 H 具有形式 $H = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0}_{s\times k} \\ B & T \end{pmatrix}$，其中 $k+s=n$, $k \leq log_2(\Delta)$，B 的列按字典序排序，T 具有下三角形式，且 $T_{ii} \geq 2$，对任意 $i \in \{1,\dots,k\}$；*3.* 对于 $i \in \{1,\dots,n\}$, $0 \leq h_i < H_{ii}$。因此，$h_i = 0$，对任意 $i \in \{1,\dots,s\}$；*4.* 对于系统 $Ax \leq b$中的任意不等式 $a^\top x \leq a_0$，$gcd(a, a_0) = 1$；*5.* $c \in Par(-H^\top)$，其中 $Par(M) = \left\{Mt \colon t \in (0,1]^n\right\}$，对于任意 $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$；*6.* $\|A\|_{\max} \leq \Delta$。

引理 1. 规范化系统具有以下性质：

1. 定义 *3* 的第 5 和第 6 个条件是冗余的，即它们可由其余条件及 $\mathcal{S}$ 的性质推出；*2.* 设 $\mathcal{S}$ 为定义 *3* 中使用的单纯形。假设 $\mathcal{S}$ 是空单纯形或空格单纯形，则 $|c_0 - c^\top v| \leq \Delta$，其中 $v = H^{-1}h$ 是相对于由不等式 $c^\top x \leq c_0$ 确定的面而言的 $\mathcal{S}$ 的对顶点。

证明。我们来证明条件 $c \in \text{Par}(-H^\top)$ 是冗余的。显然，由于 $\mathcal{S}$ 是单纯形，可知对于某个 $t \in \mathbb{R}^n_{>0}$，有 $c = -H^\top t$。假设存在 $i \in \{1,\dots,n\}$ 使得 $t_i > 1$。令 M 为由 H 中指标属于集合 $\{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$ 的行以及一行 $c^\top$ 构成的矩阵。于是，$|\det(M)| = t_i \cdot |\det(H)| > \Delta$，这与 $\mathcal{S}$ 的 Δ-模性相矛盾。因此，对于所有 $i \in \{1,\dots,n\}$，都有 $0 < t_i \leq 1$，且 $c \in \text{Par}(-H^\top)$。

如第 2.1 小节所述，对于每个化为埃尔米特标准形的 Δ-模矩阵 A，不等式 $\|A\|_{\max} \leq \Delta$ 成立。因此，第六个条件直接由第一个条件以及 A的 Δ-模性质推出。

我们来证明引理中所述的第二个性质。当$\mathcal{S}$ 为空时，不等式 $|c_0 - c^\top v| < \Delta$ 已在 [38, 定理 7] 中证明（另见 [37, 推论 10]）。我们来证明 $\mathcal{S}$ 为空格单纯形时的不等式 $|c^\top v - c_0| \leq \Delta$。考虑一点 $p = v - u$，其中 u 是伴随矩阵 $H^* = \det(H) \cdot H^{-1}$的第一列。注意，$p$ 是子系统 $Hx \leq h$的一个整数可行解。由于 $\|c^\top H^*\|_\infty \leq \Delta$，有$|c^\top p - c^\top v| \leq \Delta$。于是，不等式 $|c^\top v - c_0| > \Delta$ 推出 $p \in \mathcal{S} \setminus \text{vert}(\mathcal{S})$，这就产生了矛盾。

以下引理是构造规范化系统的算法的基本构件之一。

引理 2. 设 $H \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 是一个化为埃尔米特标准形的非退化矩阵，且 $b \in \mathbb{Z}^n$。那么，存在一个多项式时间算法，可以计算出唯一的平移 $x \to x + x_0$，将系统 $Hx \le b$ 映射到满足性质 $0 \le h_i < H_{ii}$ 的系统 $Hx \le h$，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$ 均成立。

证明。记 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个标准基向量为 e_i。考虑以下算法：令 $b^{(0)} := b$，并对从 1 递增到 n 的指标 i，依次对系统 $Ax \le b$ 应用整数平移 $x \to x + \lfloor b^{(i-1)}/H_{ii} \rfloor \cdot e_i$，其中 $b^{(i)}$ 表示第 i 次迭代后的 $Ax \le b$ 的右端项。我们有 $b^{(i+1)} := b^{(i)} - \lfloor b^{(i)}/H_{ii} \rfloor H_i$，其中 H_i 是 H 的第 i 列。若将所得系统的右端项记为 h，则 $h = b^{(n)}$，且当 $i \in \{1, \dots, n\}$ 时，$h_i = b_i \bmod H_{ii}$。显然，返回 h 和累积整数平移向量 x_0 的算法是多项式时间的。

注意，向量 b 和 h 还满足公式 $h = b - Hx_0$。由于埃尔米特标准形的三角结构，且 $h_1 = b_1 \bmod H_{11}$，可得 $(x_0)_1 = \lfloor b_0/H_{11} \rfloor$，因此 x_0 的第一个分量是唯一的。现在，利用归纳法，假设 x_0 的前 k 个分量由 H 和 b 唯一确定，并证明对于 $(x_0)_{k+1}$ 同样成立。显然，

$$h = b - H_{\{1,\dots,k\}}(x_0)_{\{1,\dots,k\}} - H_{\{k+1,\dots,n\}}(x_0)_{\{k+1,\dots,n\}}.$$

记 $h = h + H_{\{1,\dots,k\}}(x_0)_{\{1,\dots,k\}}$，我们有

$$\hat{h} = b - H_{\{k+1,\dots,n\}}(x_0)_{\{k+1,\dots,n\}}.$$

注意，$h_{k+1} = h_{k+1} = b_{k+1}$ 模 $H_{(k+1)(k+1)}$。同样，由于埃尔米特标准形的三角结构，有 $(x_0)_{k+1} = \lfloor b_{k+1}/H_{(k+1)(k+1)} \rfloor$，由此完成证明。

下面的引理提出了一种用于构造规范化系统的算法。此外，它还证明了所有等价的规范化系统都可以通过这种方式构造。

引理 3（规范化算法）。设 $\mathcal{S}$ 是由系统 $Ax \le b$ 定义的一个 Δ-模单纯形。

以下命题成立：

1. 对于给定的 A 的基 $\mathcal{B}$，其中 $|\det(A_{\mathcal{B}})| = \Delta$，存在一种多项式时间算法，可返回一个幺模等价的规范化系统 $\binom{H}{c^\top} x \le \binom{h}{c_0}$ 以及一个置换矩阵 $P \in \mathbb{Z}^{n\times n}$，使得 H 是 $PA_{\mathcal{B}}$ 的埃尔米特标准形。将此算法称为规范化算法；*2.* 任何与 $\mathcal{S}$ 幺模等价的规范化系统 $\binom{H}{c^\top} x \le \binom{h}{c_0}$，都可以通过以置换后的系统 $PAx \le Pb$ 的基 $\{1, \dots, n\}$ 为输入，运行规范化算法而得到，其中某个置换矩阵为 $P \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$。

证明。下面描述规范化算法。首先，我们将$A_{\mathcal{B}} = HQ$表示为 $H \in \mathbb{Z}^{n\times n}$，其中 $H \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 是 $A_{\mathcal{B}}$ 的埃尔米特标准形，而 $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 是一个幺模矩阵。经过一些简单的额外行列置换后，我们可以假设原系统与以下系统等价

$$\begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} h \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \text{where } H = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0}_{s\times k} \\ B & T \end{pmatrix},$$

$s + k = n$, $k \leq \log_2(n)$ 和 T 具有下三角形式，其中 $T_{ii} \geq 2$，对于$i \in \{1, \ldots, k\}$。

为满足定义 3 的所有条件，我们需要对矩阵 B 和向量 h进行一些额外处理。对于 B，只需使用任意多项式时间排序算法，即可满足定义 3 中的第二个条件。新系统与原系统幺模等价，因为前 s 列的列置换可以通过对前 s 行进行行置换来撤销。接下来，只需使用引理 2 中的算法，即可满足 h 的第三个条件。最后，只需将系统的每一行除以相应的最大公约数函数值，即可轻松满足第 4 个条件。由于所有步骤都可以通过多项式时间算法完成，因此整个算法是多项式时间的，这证明了该引理的第一个命题。

我们来证明第二个命题。假设给定了某个幺模等价的规范化系统 $A'x \leq b'$。令 $\mathcal{S}'$ 为由 $A'x \leq b'$ 定义的单纯形，并令 $\mathcal{U}(x) = Ux' + x_0$ 为将 $\mathcal{S}$ 映射到 $\mathcal{S}'$ 的唯一幺模仿射映射。由此可知，存在一个由 $\mathcal{U}$ 诱导的 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 的面之间的双射。由于系统 $Ax \leq b$ 中的任意不等式都定义了 $\mathcal{S}$ 的某个面，因此可直接得出，存在一个置换矩阵 $P \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$，使得系统 $PAx \leq Pb$ 与 $A'x \leq b'$ 等价，且两个系统中的不等式一一对应。由于任意两个不等式在某个正齐次乘数意义下等价，并且根据定义 3 的条件 4，可知存在一个对角矩阵 $D \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)}$，其对角元均为严格正整数，使得

$$PAU = DA' \quad \text{and} \quad P(b - Ax_0) = Db'. \tag{2}$$

让我们对输入系统 $PAx \leq Pb$ 和基 $\mathcal{B} = \{1, \ldots, n\}$ 使用规范化算法。该算法分为三个部分：第一部分构造结果矩阵，第二部分构造结果右端项，第三部分从结果系统的各行中去除齐次乘数。我们来看看输入系统 $PAx \leq Pb$ 经过算法第一部分处理后会是什么样子。由于 DA' 是 PA 的埃尔米特标准形，因此系统将为 $DA'x \leq Pb$。现在，我们对系统 $DA'x \leq Pb$ 应用算法的第二部分，并使用引理 2。由等式 (2) 可得，

$$Db' = Pb - PAx_0 = Pb - PAUt = Pb - DA't, \quad \text{for } t = U^{-1}x_0 \in \mathbb{Z}^n.$$

根据引理 2，t 是将系统 $DA'x \leq Pb$ 变换为系统 $DA'x \leq Db'$的唯一整数平移向量。因此，

算法的第二部分将生成系统 $DA'x \le Db'$，该系统将在算法的第三部分之后变换为最终的规范化系统 $A'x \le b'$。证明结束。

以下引理有助于枚举所有等价的规范化系统。

引理 4. 对于给定参数 Δ，存在一种算法，可构造两个单纯形族 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{L}$，它们具有以下性质：

1. 单纯形族 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{L}$ 中的每个单纯形都是 Δ-模的，且由一个规范化系统定义；*2.* $\mathscr{S}$ 中的单纯形是空的，并且所有 Δ-模空单纯形的幺模等价类都由 $\mathscr{S}$ 中的单纯形表示；*3.* $\mathscr{L}$ 中的单纯形是格单纯形且为空，并且所有 Δ-模空格单形的幺模等价类都由 $\mathscr{L}$中的单纯形表示。

该算法的计算复杂度为

$$\binom{n+\Delta-1}{\Delta-1} \cdot \Delta^{\log_2(\Delta)} \cdot \mathrm{poly}(n,\Delta) = \\ = O\left(\frac{n+\Delta}{\Delta}\right)^{\Delta-1} \cdot n^{O(1)},$$

对于任意固定的 Δ，这是多项式级的。

证明。 根据引理 3，要构造集合 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{L}$ 的单纯形，只需枚举所有标准化系统

$$\binom{H}{c^\top} x \le \binom{h}{c_0}, \quad \text{where } H = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0}_{s\times k} \\ B & T \end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{D}$ 为 Δ 的所有非平凡因数的集合。显然，可以在 poly(Δ) 时间内构造 $\mathcal{D}$。要枚举所有标准化系统，可以使用以下简单方案：

1. 枚举 $\mathcal{D}$ 的所有可能元组 $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$，使得 $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = \Delta$。元组可以含有重复项；2. 对任意固定的元组 $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$，枚举矩阵 $H = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0}_{s\times k} \\ B & T \end{pmatrix}$和向量 h，其中元组 $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ 构成 T 的对角线；3. 对任意固定的 H，枚举向量 $c \in \mathrm{Par}(-H^\top)$；4. 对任意固定的三元组 (H, h, c)，枚举所有满足相应单纯形仍为空的值 c_0。

所有元组 $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ 组成的族可按以下方式枚举：假设已从 $\mathscr{D}$ 和 $d_1 \cdot \ldots \cdot d_j < \Delta$ 中选出值 $d_1, d_2, \ldots, d_j$，我们选择 d_{j+1}，使得乘积 $d_1 \cdot \ldots \cdot d_j \cdot d_{j+1}$ 能整除 Δ。由于

该过程最多包含 $\log_2(\Delta)$ 步，因此枚举的复杂度大致可界定为

$$\frac{\Delta}{2^0}\cdot\frac{\Delta}{2^1}\cdot\ldots\cdot\frac{\Delta}{2^{\lfloor\log_2(\Delta)\rfloor-1}}\le \Delta^{\log_2(\Delta)}/2^{\frac{(\log_2(\Delta)-2)(\log_2(\Delta)-1)}{2}}= \\ =\frac{1}{2}\cdot\Delta^{3/2}\cdot\Delta^{\log_2(\Delta)/2}.$$

这里使用了不等式 $x-1\le\lfloor x\rfloor\le x$。

对于选定的元组 $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$，下三角矩阵 $T\in\mathbb{Z}^{k\times k}$可按以下方式枚举。我们将 $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$ 放在 T 的对角线上。当 T 的对角线确定后，对于任意 $j\in\{1,\ldots,k\}$ 和 $i\in\{j+1,\ldots,k\}$，我们需要选择 $T_{ij}\in\{0,\ldots,T_{ii}-1\}$。注意，对于任意 $j\in\{1,\ldots,k\}$，都有 $\prod_{i=j+1}^{k}T_{ij}\le\Delta/2^j$。因此，对于给定的对角线，矩阵 T 可通过 $\Delta^{\log_2(\Delta)/2}$ 次运算枚举。结合对角线的枚举，算术成本为 $\Delta^{3/2}\cdot\Delta^{\log_2(\Delta)}$。

为了完成矩阵 H 的枚举，我们需要枚举矩阵 $B\in\mathbb{Z}^{k\times s}$。设 $\mathscr{B}=\{x\in\mathbb{Z}^k:\ 0\le x<T_{ii},\ \text{其中 } i\in\{1,\ldots,k\}\}$。那么，由于 B 的列按字典序排序，它们与 $\mathscr{B}$ 的多重子集一一对应。由于 $|\mathscr{B}|=\Delta$，矩阵 B 的总数为

$$\binom{s+\Delta-1}{\Delta-1}\le\binom{n+\Delta-1}{\Delta-1}.$$

这类对象的枚举很简单。

因此，枚举矩阵 $H=\begin{pmatrix}I_s & \mathbf{0}_{s\times k}\\ B & T\end{pmatrix}$ 的算术复杂度不超过 $\binom{n+\Delta-1}{\Delta-1}\cdot\Delta^{\log_2(\Delta)+3/2}$。由于 $h\in\mathscr{B}$，只需进行 $O(\Delta)$ 次运算即可枚举向量 h。因此，枚举子系统 $Hx\le h$ 所需的运算总数不超过

$$\binom{n+\Delta-1}{\Delta-1}\cdot\Delta^{\log_2(\Delta)+5/2}. \tag{3}$$

根据 [35, 引理 6]（另见 [45, 引理 9], [56] 或 [37, 引理 1]），可以通过 $O\big(n\cdot\Delta\cdot\min\{n,\log_2(\Delta)\}\big)$ 次运算枚举向量 $c\in\mathrm{Par}(-H^\top)$。

现在，我们来讨论如何枚举 c_0的取值。令 $v=H^{-1}h$ 并记

$$\mathcal{S}(c_0)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \begin{pmatrix}H\\ c^\top\end{pmatrix}x\le\begin{pmatrix}h\\ c_0\end{pmatrix}\right\}.$$

注意，如果 $\mathcal{S}(c_0)$ 是满维的，那么它构成一个单纯形，而 v 是相对于由不等式 $c^\top x\le c_0$ 导出的面而言的 $\mathcal{S}(c_0)$ 的对顶点。考虑以下两种情况：$v\notin\mathbb{Z}^n$ 和 $v\in\mathbb{Z}^n$。

情况 $v \notin \mathbb{Z}^n$。考虑问题

$$\begin{aligned} &c^\top x \to \min \\ &\begin{cases} Hx \le h \\ x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

并令 f^* 为目标函数的最优值。根据 [37, 定理 12], , 问题 (4) 可通过 $O\big(n + \mathsf{min}\{n, \Delta\} \cdot \Delta \cdot \mathsf{log}(\Delta)\big)$ 次运算求解。记

$$l^* = \begin{cases} \lceil c^\top v \rceil, & \text{if } c^\top v \notin \mathbb{Z} \\ c^\top v + 1, & \text{if } c^\top v \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

由于 $v \notin \mathbb{Z}^n$，且根据引理 3，我们有 $0 < f^* - l^* \le \Delta$。根据构造，对于 $c_0 \in \{l^*, \dots, f^* - 1\}$ 的任意取值，集合 $\mathcal{S}(c_0)$ 构成一个空单纯形。根据 f^* 的定义，对于取值 $c_0 \ge f^*$，单纯形 $\mathcal{S}(c_0)$ 非空。对于 $c_0 \le l^* - 1$，只要有 $\mathcal{S}(c_0) = \emptyset$，那么对于任意 $c_0 \in \{l^*, \dots, f^* - 1\}$，我们都将相应的单纯形 $\mathcal{S}(c_0)$ 放入族 $\mathscr{S}$ 中。

情形 $v \in \mathbb{Z}$ ^{n}。考虑以下问题

$$\begin{aligned} &c^\top x \to \min \\ &\begin{cases} Hx \le h \\ x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

并再次令 f^* 为目标函数的最优值。为求得 f^*，我们可以求解以下一组问题：对于任意 $j \in \{1, \dots, n\}$，该问题为

$$\begin{aligned} &c^\top x \to \min \\ &\begin{cases} Hx \le h - e_j \\ x \in \mathbb{Z}^n . \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

显然， f^* 的值可确定为所定义问题组中各问题最优目标值的最小值。如前所述，这些n 问题均可通过 $O\big(n + \mathsf{min}\{n, \Delta\} \cdot \Delta \cdot \mathsf{log}(\Delta)\big)$ 次运算求解。根据构造，对于 $c_0 < f^*$，集合 $\mathcal{S}(c_0)$ 不构成格单纯形，或者为空。对于 $c_0 > f^*$，即使 $\mathcal{S}(c_0)$ 构成格单纯形，它也不是空的。因此，只有单纯形 $\mathcal{S}(f^*)$ 值得关注。接下来，如果 $\mathsf{vert}\big(\mathcal{S}(f^*)\big) \subseteq \mathbb{Z}^n$，我们就将单纯形 $\mathcal{S}(c_0)$ 纳入族 $\mathscr{L}$。反之，我们只需跳过当前的向量值 c，并转到下一个值（如果存在）。

根据引理 1，对于固定向量 c，c_0 的选择至多有 Δ 种可能。因此，使用所提出的算法，枚举 c 和 c_0 的值所需的复杂度上界为 $\mathsf{poly}(n, \Delta)$。因此，回顾枚举系统 $Hx \le h$ 的复杂度界 (3)，总枚举复杂度与引理定义中的相同，由此完成证明。

下面的引理有助于检验两个单纯形之间的幺模等价关系。

引理 5. 设 $\mathcal{S}$ 是由系统 $Ax \leq b$ 定义、其矩阵 A 为 $a\Delta$-模的任意单纯形。那么，存在一种算法，可以找出族 $\mathscr{S}$（或分别为 $\mathscr{L}$）中所有与 $\mathcal{S}$ 幺模等价的单纯形。该算法的复杂度为

$$n^{\log_2(\Delta)} \cdot \Delta! \cdot \mathrm{poly}(\phi),$$

其中，ϕ 是 $Ax \leq b$的编码长度。

证明。 将所得单纯形的集合记为 $\mathscr{R}$。根据引理3的第二个命题，我们可以使用以下简单方案生成族 $\mathscr{R}$:

1. 枚举 A 的所有基 $\mathcal{B}$，使得 $|\det(A_{\mathcal{B}})| = \Delta$; 2. 对于固定的基 $\mathcal{B}$，将引理3的规范化算法应用于系统$\binom{A_{\mathcal{B}}}{A_l}x \leq \binom{b_{\mathcal{B}}}{b_l}$，其中 l 是 $Ax \leq b$中未包含在 $\mathcal{B}$内那一行的行索引。令

$$\begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} h \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \text{where } H = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0}_{s\times k} \\ B & T \end{pmatrix}.$$

所得的标准化系统为;
3. 枚举所有 $n \times n$ 置换矩阵 P;
4. 对于固定的 P，对该系统应用引理 3 的规范化算法

$$\begin{pmatrix} PH \\ c^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} Ph \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

最后一步将产生一个新的标准化系统，它与 $\mathcal{S}$ 幺模等价，并将其放入 $\mathscr{R}$。

这种方法将生成族 $\mathscr{R}$，但枚举所有置换相对于 n而言代价很高。接下来我们将说明，没有必要枚举所有置换矩阵，只需枚举其中相对较小的一部分即可。

固定 A 的一个基 $\mathcal{B}$，这可以通过 $n+1$ 种方式完成，并考虑方案第二步生成的标准化系统 $\binom{H}{c^\top}x \leq \binom{h}{c_0}$。注意， H 的行可以分成两部分：第一部分的每一行都是 $n \times n$ 单位矩阵 I_n 的一行，第二部分的每一行都是矩阵 $\begin{pmatrix} B & T \end{pmatrix}$ 的一行。令 $\mathcal{I}$ 为第一部分的指标集合，$\mathcal{J}$ 为第二部分的指标集合。对 $A_{\mathcal{B}}$ 的行作任意置换 π，均可按如下方式生成:

1. 从 n 个位置中选出 $|\mathcal{J}|$ 个位置来放置索引为 $\mathcal{J}$ 的行，共有 $\binom{n}{k}$ 种选法; 2. 对索引为 $\mathcal{J}$ 的行进行排列，共有 $k!$ 种排列方式; 3. 对索引属于 $\mathcal{I}$ 的行进行排列。

我们来仔细看看第三类置换。如果对于某个幺模矩阵 $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$， $P_\pi H = HQ$, 我们就称置换 π 冗余。

显然，索引属于 $\mathcal{I}$ 的行的所有冗余置换 π 都可以省略，因为 H 和 $P_\pi H$ 的埃尔米特标准形相同。索引属于 $\mathcal{I}$ 的行与 B 的列之间存在自然的一一对应关系：对这些行进行的任何置换，都可以通过对 B 进行相应的列置换来抵消。由于对于任意 $i \in \{1, \dots, k\}$ 和 $j \in \{1, \dots, s\}$、$B_{ij} \le T_{ii}$ 和 $\prod_{i=1}^{k} T_{ii} = \Delta$，矩阵 B 至多有 Δ 个不同的列。现在很容易看出，对应于 B 中相同列的行索引所进行的任何行置换 π 都是冗余的。因此，只需考虑对应于 B 中不同列的 $\mathcal{I}$ 的行置换即可。由于 B 至多包含 Δ 个不同的列，这类置换至多有 $\Delta!$ 个。计算这些置换相对简单：我们只需在 B 中找出相同行组成的类，为每一类找出一个代表索引，然后用标准方法枚举这些代表元的置换。

结合所有三种类型的置换以及构造埃尔米特标准形所需的复杂度 $\mathrm{poly}(\phi)$，对于固定基 $\mathcal{B}$，该过程的复杂度为

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot \Delta! \cdot \mathrm{poly}(\phi) \quad \lesssim \quad n^{\log_2(\Delta)} \cdot \Delta! \cdot \mathrm{poly}(\phi).$$

由于选择 $\mathcal{B}$ 的方式至多有 $n+1$ 种，因此算法的总复杂度与引理定义中的相同，证明至此完成。

2.3 定理 2 和定理 3 的证明收尾

以下命题显而易见，但为便于后续使用，在此特别指出。

命题 1。单纯形 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 等价，当且仅当存在一个由规范化系统 $Ax \le b$ 定义的单纯形 $\mathcal{S}'$，使得 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 均与 $\mathcal{S}'$ 幺模等价。

定理 2 的证明。

证明。 首先，我们为$\mathcal{T}$构造一个幺模等价的规范化系统。根据引理 3，这可以通过多项式时间算法完成。

接下来，我们使用引理 5 构造族 $\mathscr{R}$，其中包含所有与 $\mathcal{S}$等价的规范化系统。根据命题 1，如果单纯形 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 幺模等价，那么族 $\mathscr{R}$ 必定包含$\mathcal{T}$的规范化系统。为了有效地存储集合 $\mathscr{R}$，我们可以使用任何支持对数时间搜索、插入和删除操作的平衡搜索树数据结构。显然，只需将两个规范化系统分别表示为长度为 $(n+1)^2$ 的两个向量，并对这些向量使用字典序，即可比较它们。根据引理 5 的复杂度界限，并且由于 $\log_2(|\mathscr{R}|) = \mathrm{poly}(n, \Delta)$，整个算法的复杂度与定理表述中的相同，由此完成证明。

定理 3 的证明。

证明。 首先，利用引理 4，我们分别生成由 Δ-模空单纯形和空格单形组成的族 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{L}$。正如引理 4 所示，所有幺模等价类都已经由 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{L}$ 表示，但 $\mathscr{S}$ 或 $\mathscr{L}$ 中的某些不同规范化系统可能表示同一个等价类。下面说明如何从 $\mathscr{S}$ 中删除这些重复项；对 $\mathscr{L}$ 采用相同的步骤即可。

为有效存储集合 $\mathscr{S}$，我们可以使用任意支持对数时间搜索、插入和删除操作的平衡搜索树数据结构。只需将两个规范化系统表示为长度为 $(n+1)^2$ 的两个向量，并按这些向量的字典序比较，即可比较它们。根据引理 4，我们有 $|\mathscr{S}| = O\big(\frac{n+\Delta}{\Delta}\big)^{\Delta-1} \cdot n^{O(1)}$。因此，搜索树的所有操作都可以在 poly$(n, \Delta)$ 次操作的代价内完成。

我们枚举所有规范化系统 $\mathcal{S} \in \mathscr{S}$，并使用引理 5 的算法，对每个 $\mathcal{S}$，枚举 $\mathscr{S}$ 中与 $\mathcal{S}$ 幺模等价的所有规范化系统。对于以这种方式生成的每个系统，我们从表示 $\mathscr{S}$ 的搜索树中删除相应的条目。根据命题 1，经过此过程，搜索树中的所有重复项都会被删除，只留下表示不同等价类的规范化系统。显然，算法的总复杂度等于引理 4 和引理 5 的算法复杂度之积：

$$O\left(\frac{n+\Delta}{\Delta}\right)^{\Delta-1} \cdot n^{\log_2(\Delta)+O(1)} \cdot \Delta! = \\ = O\big(n+\Delta\big)^{\Delta-1} \cdot n^{\log_2(\Delta)+O(1)},$$

从而完成证明。

结论

本文考察两个问题：

– 枚举所有空的 Δ-模单纯形，以及模去幺模等价关系后的空的 Δ-模格单纯形；– 判断两个不一定为空的 Δ-模单纯形是否幺模等价。

已有研究表明，在假设 Δ 的值固定的情况下，这两个问题都可以通过多项式时间算法求解。

这些结果可用于构建一个数据库，其中包含所有空的 Δ-模单纯形和空的 Δ-模格单纯形的幺模等价类，适用于较小的 Δ 值和适中的 n 值。由于 [35], , 空单纯形或空格单纯形的格宽度可以通过关于参数 Δ 的固定参数可 tract 算法计算。因此，也可以预先计算数据库中每个单纯形的格宽度。

作者希望，这样的基和本文的结果有助于研究这两类空单纯形以及一般

空格多胞体的性质。构造这一基并改进现有的单纯形处理算法，是值得进一步研究的有趣方向。

致谢

这些结果是在俄罗斯科学基金会 21-11-00194 号项目的资助下完成的。

参考文献

1. 整数规划的 b-包。《离散应用数学》**3**(3), 193–201 (1981) 2. Aardal, K., Eisenbrand, F.: 整数规划、格与固定维数下的结果。《运筹学与管理科学手册》**12**, 171–243 (2005) 3. Andersen, K., Louveaux, Q., Weismantel, R., Wolsey, L.A.: 来自单纯形表两行的不等式。载于：整数规划与组合优化：第12届国际IPCO会议，美国纽约州伊萨卡，2007年6月25–27日。论文集12。第1–15页。Springer (2007) 4. Babai, L.: 关于Lovász格约化和最近格点问题。《组合数学》**6**, 1–13 (1986) 5. Baes, M., Oertel, T., Weismantel, R.: 混合整数凸最小化的对偶性。《数学规划》**158**, 547–564 (2016) 6. Balas, E.: 交切——一种用于整数规划的新型割平面。《运筹学》**19**(1), 19–39 (1971) 7. Banaszczyk, W.: 数的几何中若干转移定理的新界。《数学年刊》**296**, 625–635 (1993) 8. Banaszczyk, W.: r^n中凸体与极性对偶格的不等式。《离散与计算几何》**13**, 217–231 (1995) 9. Banaszczyk, W., Litvak, A.E., Pajor, A., Szarek, S.J.: 通过巴拿赫空间局部理论证明非对称凸体的平坦性定理。《运筹学数学》**24**(3), 728–750 (1999) 10. Barvinok, A.:《多面体中的整数点》。欧洲数学会，ETH中心，瑞士苏黎世 (2008) 11. Barvinok, A., Pommersheim, J.: 多面体中格点的算法理论。《代数组合学新视角》**38** (1999) 12. Barvinok, A.: 固定维数下计算多面体整数点数目的多项式时间算法。载于：1993年IEEE第34届计算机科学基础年度研讨会论文集。第566–572页 (1993)。https://doi.org/10 366830 13 1109 1993 . /SFCS. . . Barvinok, A., Woods, K.: 格点问题的短有理生成函数。《美国数学会杂志》**16**(4), 957–979 (2003), http://www.jstor.org/stable/30041461 14. Basu, A., Conforti, M., Cornuéjols, G., Weismantel, R., Weltge, S.: 凸最小化的最优性证书与Helly数。《运筹学快报》**45**(6), 671–674 (2017) 15. Basu, A., Conforti, M., Di Summa, M.: 割生成函数的几何方法。《数学规划》**151**, 153–189 (2015)

16. Beck, M., Robins, S.: 连续的离散计算。Springer，纽约 (2015) 17. Blair, C.E., Jeroslow, R.G.: 混合整数规划值函数的构造性刻画 I。《离散应用数学》**9**(3), 217–233 (1984) 18. Blair, C.E., Jeroslow, R.G.: 混合整数规划值函数的构造性刻画 II。《离散应用数学》**10**(3), 227–240 (1985) 19. Borisov, A.: 商奇点、阶乘的整数比与黎曼猜想。《国际数学研究通报》**2008**(9), rnn052–rnn052 (2008) 20. Borozan, V., Cornuéjols, G.: 整数约束的极小有效不等式。《运筹学数学》**34**(3), 538–546 (2009) 21. Celaya, M., Kuhlmann, S., Paat, J., Weismantel, R.: 线性整数优化的邻近性与平坦性界 (2022) 22. Chirkov, A., Y., Gribanov, D., V., Malyshev, D., S., Pardalos, P., M., Veselov, S., I., Zolotykh, N., Y.: 关于拟凸整数最小化问题的复杂性。《全局优化期刊》**73**(4), 761–788 (2019)。https://doi.org/10.1007/s10898-018-0729-8 23. Codenotti, G., Santos, F.: 大宽度的空多胞体。《美国数学会会刊》**148**(2), 835–850 (2020) 24. Dadush, D.: 整数规划、格算法与确定性体积估计。佐治亚理工学院，ProQuest论文出版，安娜堡 (2012) 25. Dadush, D., Peikert, C., Vempala, S.: 通过m-椭球覆盖，在任意范数下进行枚举格算法。载于：2011年IEEE第52届计算机科学基础年度研讨会。第580–589页 (2011)。https://doi.org/10.1109/FOCS.2011.31 26. De Loera, Jesús, A., Hemmecke, R., Köppe, M.: 离散优化理论中的代数与几何思想。工业与应用数学学会，费城，美国 (2013) 27. Del Pia, A., Weismantel, R.: 来自无格点多面体的混合整数集合松弛。4OR **10**, 221–244 (2012) 28. Doolittle, J., Katthän, L., Nill, B., Santos, F.: 大宽度的空单纯形 (2021) 29. Dyer, M., Kannan, R.: 关于Barvinok固定维数格点计数算法。《运筹学数学》**22**(3), 545–549 (1997)。https://doi.org/10.1287/moor.22.3.545 30. Eisenbrand, F.: 固定维数下的快速整数规划。载于：算法-ESA 2003 19，2003年11月16日：第19届欧洲年度研讨会，匈牙利布达佩斯。论文集。第196–207页。Springer (2003) 31. Gribanov, D.V., Malyshev, D.S.: 基于比较预言机的整数锥函数最小化。载于：Khachay, M., Kochetov, Y., Pardalos, P. (编)《数学优化理论与运筹学》。第218–231页。Springer International Publishing，Cham (2019)。https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_1632. Gribanov, D., Malyshev, D., Zolotykh, N.: 稀疏整数线性规划以及超图多重打包/多重覆盖问题的更快算法。arXiv预印本 arXiv:

2201 08988 2 . v

[ ] 2022

cs.CC ( ) 33. Gribanov, D., V., Chirkov, A., Y.: 约束矩阵子式有界的单纯形上的宽度与整数优化。《优化快报》**10**, 1179–1189 (2016)。
https://doi.org/10.1007/s11590-016-1048-y,
https://doi.org/10.1007/s11590-016-1048-y

34. Gribanov, D., V., Malyshev, D., S.：在 δ-模多面体中计数整数点数量的更快算法。《西伯利亚电子数学报告》（2022 051 35 10 33048 2022 19）。https://doi.org/ 。/ semi. . . . Gribanov, D., V., Malyshev, D., S., Pardalos, P., M., Veselov, S., I.：若干与整数规划相关问题的FPT算法。《组合优化杂志》**35**，1128–1146（2018）。 https://doi.org/10.1007/s10878-018-0264-z, https://doi.org/10.1007/s10878-018-0264-z 36. Gribanov, D., V., Malyshev, D., S., Veselov, S., I.：计算由凸包给定的单纯形宽度的FPT算法。《莫斯科大学计算数学与控制论》**43**(1)，1–11（2016）。https://doi.org/10 0278641919010084 37 3103. /S . Gribanov, D., V., Shumilov, I., A., Malyshev, D., S., Pardalos, P., M.：关于标准形中的 δ-模整数线性问题及其等价问题。《全球优化杂志》（2022 9 38 10 1007 10898 022 01165）。https://doi.org/ 。/s - - - . Gribanov, D., V., Veselov, S., I.：关于有界行列式的整数规划。《优化快报》**10**，1169–1177（2016）。 https://doi.org/10.1007/s11590-015-0943-y, https://doi.org/10.1007/s11590-015-0943-y 39. Haase, C., Ziegler, G.M.：关于空格点单纯形的最大宽度。《欧洲组合学杂志》**21**(1)，111–119（2000）40. Henk, M., Kuhlmann, S., Weismantel, R.：关于无格点多面体的格宽与希尔伯特基的高度。《SIAM离散数学杂志》**36**(3)，1918–1942（2022）41. Iglesias-Valino, O., Santos, F.：空格点4-单纯形的完整分类。《伊比利亚美洲数学杂志》**37**(6)，2399–2432（2021）42. Kannan, R., Lovász, L.：覆盖极小值与无格点凸体。《数学年刊》页577–602（1988）43. Kantor, J.M.：关于无格点单纯形的宽度。《数学汇刊》**118**，235–241（1999）44. Khinchine, A.：Kronecker逼近理论的定量表述。《苏联科学院院刊：数学辑》**12**(2)，113–122（1948），[俄文45 。Köppe, M., Verdoolaege, S.：使用原始Barvinok算法计算参数化有理生成函数。《电子组合学杂志》**15** （2008 740 46 10 37236 740，10 37236）。https://doi.org/ 。/ https://doi.org/ 。/ 。Lagarias, J.C., Lenstra, H.W., Schnorr, C.P.：格及其倒格子的Korkin-Zolotarev基与连续最小值。《组合学》**10**，333–348（1990）47. Lasserre, J.B.：《线性与整数规划对比线性积分与计数：对偶性视角》。施普林格科学与商业媒体，纽约（2009）48. Lenstra, H., W.：固定变量数的整数规划。《运筹学数学》**8**(4)，538–548（1983）。 https://doi.org/10 538 49 1287 8 4 538，10 1287 8 4 . /moor. . . https://doi.org/ 。/ moor. . . 。Mayrhofer, L., Schade, J., Weltge, S.：具有格宽$2d - o(d)$的无格点单纯形。载于：整数规划与组合优化：第23届国际会议，IPCO 2022，荷兰埃因霍温，2022年6月27–29日，会议论文集。第375–386页。Springer（2022）50. Morán R, D.A., Dey, S.S., Vielma, J.P.：锥混合整数规划的强对偶。《SIAM优化杂志》**22**(3)，1136–1150（2012）51. Mori, S., Morrison, D.R., Morrison, I.：关于四维终端商奇点。《计算数学》**51**(184)，769–786（1988)

52. Morrison, D.R., Stevens, G.：三维和四维中的终端商奇点。美国数学会会刊**90(1)**，15–20（1984）53. Paat, J., Schlöter, M., Speakman, E.：构造二维无格点梯度多面体。《数学规划》**192**(1-2)，293–317（2022）54. Rudelson, M.：非对称凸体之间的距离与 mm^*-估计。《正性》**2**(4)，161–178（2000）55. Schrijver, A.：《线性与整数规划理论》。约翰·威利父子出版公司，奇切斯特（1998）56. Sebő, A.：空格点单纯形导论。载于：Cornuéjols, G., Burkard, R.E., Woeginger, G.J.（编）《整数规划与组合优化》。第400–414页。施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡（1999）。https://doi.org/10 1007 3 540 48777 8_30。/ - - -。Storjohann, A., Labahn, G.：整数矩阵Hermite标准形的渐近快速计算。载于：1996年国际符号与代数计算研讨会论文集。第259–266页。ISSAC '96，美国计算机协会，纽约，NY，美国（1996）。https://doi.org/10 237083 58 1145 236869。/ . . Valiño, Ó.I., Santos, F.：宽度大于2的空格点4-单纯形分类。《离散数学电子札记》**61**，647–653（2017）59. Veselov, S., Chirkov, Y.：$\mathbb{Z}^3$中简单集的结构。《自动机与遥控》**65**(3)，396–400（2004），http://www.uic.unn.ru/~vesi/SimpleSet.pdf 60. Veselov, S., Gribanov, D., Zolotykh, N., Chirkov, A.：固定维数下离散凸函数最小化的多项式算法。《离散应用数学》**283**，11–19（2020）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.006, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218 19304561 6116，389X。White, G.K.：格点四面体。《加拿大数学杂志》–396（1964）62. Wolsey, L.A.：整数规划对偶：价格函数与灵敏度分析。《数学规划》**20**，173–195（1981）