arXiv:2303.01232v1 [math.AP] 2 Mar 2023

水波的 BOUSSINESQ 方程：区域I中的渐近分析

C. CHARLIER[1] 和 J. LENELLS[2]

[1]数学科学中心，隆德大学，瑞典隆德 *22100*。[2]皇家理工学院数学系，瑞典斯德哥尔摩 *10044*。

Abstract. 在近期的一篇论文中，我们证明了，Boussinesq 水波方程的一类具有物理意义的解在大 x，t 时的行为由十个主要渐近区域描述。在与正 x 轴相邻、称为扇区 I 的区域中，我们曾陈述一个关于首要渐近项的精确表达式及其误差估计，但未作证明。本文将证明这一渐近公式。

AMS Subject Classification (2020): 34E05，35G25，35Q15，37K15，76B15。
Keywords: 渐近行为，Boussinesq方程，黎曼–希尔伯特问题，初值问题。

1. 引言

在最近的一篇论文中 [2], 我们为布oussinesq [1]方程发展了一种逆散射方法

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx}. \tag{1.1}$$

这种方法给出了用 1×3 行向量 Riemann–Hilbert（RH）问题的解 $n(x,t,k)$ 表示解 $u(x,t)$ 的表达式。通过对该 RH 问题进行 Deift–Zhou最速下降分析，可以推导出 $u(x,t)$ 在大 (x,t) 情形下的渐近公式。在 [2], 中，我们通过这种方式确定了半平面 $t \geq 0$ 内的十个主要扇区，用以描述一类具有物理意义的初始数据下 $u(x,t)$ 的渐近行为（见图1），并为每个扇区给出了相应解的渐近公式。为简洁起见， [2],中将与正 x 轴相邻的扇区（称为扇区 I）的公式陈述如下，但未给出证明。本文将证明这一公式。

方程 (1.1) 最早出现在布oussinesq 于 1872 [1], 发表的一篇论文中，他在文中将其推导为水道中长小振幅波的模型。约一个世纪后，广田发现 (1.1) 存在孤子解 [8], ，此后不久，扎哈罗夫[10] 为 (1.1) 构造了一个 Lax对，从而证明了它具有形式可积性。20世纪80年代初，Deift、Tomei 和 Trubowitz [6]为一个与 Boussinesq方程密切相关的方程（更确切地说，是由 (1.1) 删除 u_{xx}项后得到的方程）建立了逆散射形式体系。然而，为 (1.1) 建立逆散射变换形式体系要复杂得多，因为 (1.1) 涉及一个系数在无穷远处不衰减至零的谱问题。这使 Riemann–Hilbert 问题在单位圆上出现新的跳跃，而事实证明，当 $(x,t) \to \infty$ 时， $u(x,t)$ 的所有主要渐近贡献都源自这些新跳跃。特别是，如下文所示，扇区 I 中 $u(x,t)$ 的主要渐近行为贡献来自一个用于消去单位圆某些部分上的跳跃的全局参数子，以及单位圆上的六个鞍点。

E-mail address: christophe.charlier@math.lu.se, jlenells@kth.se。

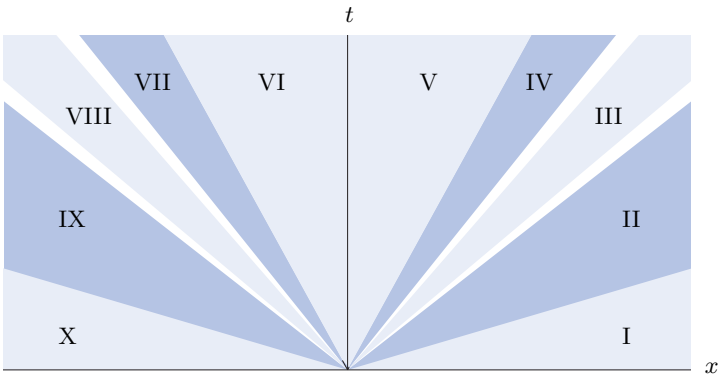

图1。（*1.1*）在 xt平面上的十个渐近区域。

要描述 $u(x,t)$ 在大 (x,t) 下的渐近行为，只需考虑扇区 I–V，因为扇区IV–V 可通过对称性与扇区 I–V 联系起来。本文给出的扇区 I 渐近公式推导与扇区II–V 中的推导有若干不同之处。例如，在扇区 I 中，x 起大参数的作用，而不是 t，因为在扇区 I 中，当 $(x,t) \to \infty$ 时，t 并非一致地取大值。扇区 I 所需的分析还因以下事实而变得复杂：当 (x,t) 接近 x 轴时，与分析相关的六个鞍点会与六个点 $\{ie^{\pi ij/3}\}_{j=0}^{5}$ 合并，而这些点都是 Riemann–Hilbert 问题跳跃轮廓的交点。这使得鞍点附近的局部分析更加复杂，也迫使我们对 Riemann–Hilbert 问题进行额外的变换（见第5节）；为此，还需要在从原点出发并经过 $\{ie^{\pi ij/3}\}_{j=0}^{5}$的六条射线上，对反射系数 r_1 和 r_2 作额外的解析近似。由于还需要在单位圆上对 r_1 和 r_2 作另一组解析近似，因此出现了一个颇为奇特的情况：同一组函数在重叠区域上有两种不同的近似。不过，得益于 r_1 和 r_2 满足的某些非线性关系（见 (4.4) 和 (4.5)），仍然可以对相关的新跳跃进行估计（见引理 7.3）。

2. Main result

设 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是 Schwartz 类 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中的实值函数，并考虑（1.1）在直线上的初值问题，其初始条件为

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

2.1. **假设**。我们的结果在对 u_0 和 u_1 所作的假设与 [2, 定理 2。14]中的相同的条件下成立。为表述这些假设，我们定义两个散射矩阵$s(k)$ 和 $s^A(k)$ 如下：

$$s(k) = I - \int_{\mathbb{R}} e^{-x\mathcal{L}(k)}(\mathsf{U}X)(x,k)e^{x\mathcal{L}(k)}dx, \quad s^A(k) = I + \int_{\mathbb{R}} e^{x\mathcal{L}(k)}(\mathsf{U}^T X^A)(x,k)e^{-x\mathcal{L}(k)}dx,$$

这里使用了以下记号：

- $\mathcal{L}$ = 对角矩阵$(l_1,\ l_2,\ l_3)$，其中函数 $\{l_j(k)\}_{j=1}^{3}$ 定义为

$$l_j(k) = i\frac{\omega^j k + (\omega^j k)^{-1}}{2\sqrt{3}}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{2.2}$$

其中 $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$。

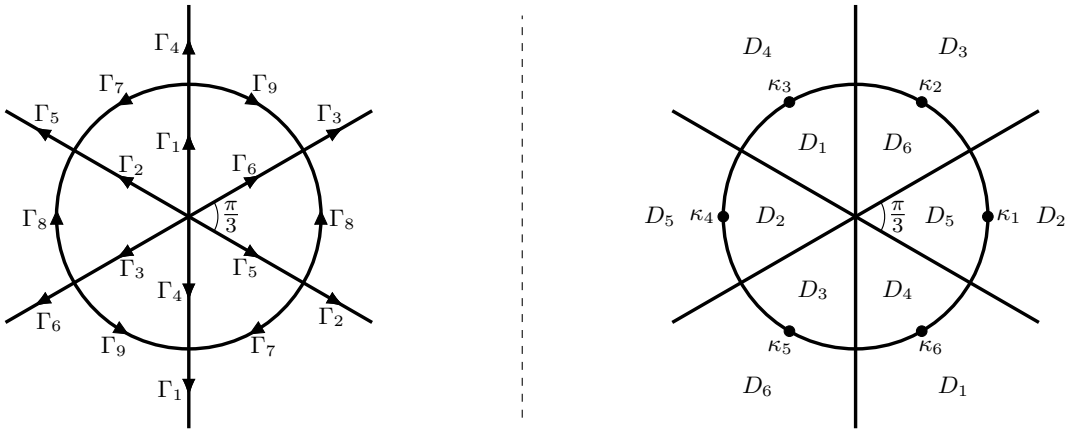

图 2. 复 k 平面中的轮廓线 $\Gamma = \cup_{j=1}^{9}\Gamma_j$ （左），以及开集 $D_n, n = 1, \ldots, 6$，连同六次单位根 $\kappa_j,\ j = 1, \ldots, 6$ （右）。

- $\mathsf{U}(x,\ k)$ 由下式给出

$$\mathsf{U}(x,k) = P(k)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_{0x}}{4} - \frac{iv_0}{4\sqrt{3}} & -\frac{u_0}{2} & 0 \end{pmatrix} P(k),$$

其中 $v_0(x) := \int_{-\infty}^{x} u_1(x')dx'$ 并且

$$P(k) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1(k) & l_2(k) & l_3(k) \\ l_1(k)^2 & l_2(k)^2 & l_3(k)^2 \end{pmatrix}.$$

- $X(x,k)$ 和 $X^A(x,k)$ 是 Volterra 积分方程的唯一解

$$X(x,k) = I - \int_x^{\infty} e^{(x-x')\mathcal{L}(k)}(\mathsf{U}X)(x',k)e^{-(x-x')\mathcal{L}(k)}dx',$$

$$X^A(x,k) = I + \int_x^{\infty} e^{-(x-x')\mathcal{L}(k)}(\mathsf{U}^T X^A)(x',k)e^{(x-x')\mathcal{L}(k)}dx'.$$

现在可以将关于 $\{u_0, u_1\}$ 的假设表述如下：
(i) 质量守恒：我们假设 $\int_{\mathbb{R}} u_1(x)dx = 0$。

(ii) 孤子不存在：我们假设 $s(k)_{11} \neq 0$ 对于 $k \in (\bar{D}_2 \cup \partial\mathbb{D}) \setminus \hat{\mathcal{Q}}$，其中 $\{D_n\}_1^6$是复平面上的开子集，如图2所示，$\partial\mathbb{D}$ 是单位圆，而 $\hat{\mathcal{Q}} = \{\kappa_j\}_{j=1}^6 \cup \{0\}$ 满足 $\kappa_j = e^{\frac{\pi i(j-1)}{3}}$，$j = 1, \ldots, 6$，即六次单位根。

(iii) s 和 s^A 在 $k = 1$ 和 $k = -1$附近的一般行为：对于 $k_\star = \pm 1$，我们假设 $\lim_{k\to k_\star}(k - k_\star)s(k)_{11} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}(k - k_\star)s(k)_{13} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star} s(k)_{31} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star} s(k)_{33} \neq 0$，

$$\lim_{k\to k_\star}(k - k_\star)s^A(k)_{11} \neq 0,\ \lim_{k\to k_\star}(k - k_\star)s^A(k)_{31} \neq 0,\ \lim_{k\to k_\star} s^A(k)_{13} \neq 0,\ \lim_{k\to k_\star} s^A(k)_{33} \neq 0.$$

(iv) 初值问题存在全局解：我们假设对所有 $k \in [0, i]$，$r_1(k) = 0$，其中 $[0, i]$ 是从 0 到 i 的竖直线段。

2.2. **主要结果陈述**。文献 [2] 证明，初值问题的解 $u(x,t)$（对应方程 (1.1)，初始数据为 u_0, u_1，且满足假设 (i)–(iv)）可表示为跳跃轮廓线如图 n 所示并按图定向的行向量 Riemann–Hilbert 问题的解 $\Gamma = \cup_{j=1}^{9}\Gamma_j$。见图 2。特别地，假设 (i)–(iv)

意味着解 $u(x,t)$ 在全局范围内存在。我们的主定理给出了 $u(x,t)$ 在由 $\tau := t/x \in [0,\tau_{\max}]$ 给出的扇区 I 中的渐近行为，其中 $\tau_{\max} \in (0,1)$ 是一个常数。该渐近公式用两个谱函数 $r_1(k)$ 和 $r_2(k)$ 表示，它们定义如下：

$$\begin{cases} r_1(k) = \frac{(s(k))_{12}}{(s(k))_{11}}, & k \in \hat{\Gamma}_1 \setminus \hat{\mathcal{Q}}, \\ r_2(k) = \frac{(s^A(k))_{12}}{(s^A(k))_{11}}, & k \in \hat{\Gamma}_4 \setminus \hat{\mathcal{Q}}, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\hat{\Gamma}_j = \Gamma_j \cup \partial\mathbb{D}$ 表示 Γ_j 与单位圆的并集。我们定义 $\Phi_{ij}(\tau, k)$，其中 $1 \le j < i \le 3$ 满足

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\tau,k) = (l_i(k) - l_j(k)) + (z_i(k) - z_j(k))\tau, \tag{2.4}$$

其中 $l_j(k)$ 如（2.2）中所示，函数 $z_j(k)$、$j = 1$、2、3 的定义类似：

$$z_j(k) = i\frac{(\omega^j k)^2 + (\omega^j k)^{-2}}{4\sqrt{3}}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Fin此外，我们引入 $\tilde{\Phi}_{21}$ 的鞍点 $\{k_j = k_j(\tau)\}_{j=1}^4$，其定义为

$$k_1 = \frac{1}{4\tau}\left(1 - \sqrt{8\tau^2+1} + i\sqrt{2}\sqrt{4\tau^2 - 1 + \sqrt{8\tau^2+1}}\right), \qquad k_2 = \bar{k}_1, \tag{2.6a}$$

$$k_3 = \frac{1}{4\tau}\left(1 + \sqrt{8\tau^2+1} + \sqrt{2}\sqrt{-4\tau^2 + 1 + \sqrt{8\tau^2+1}}\right), \qquad k_4 = k_3^{-1}, \tag{2.6b}$$

并满足 $|k_1| = 1$, $k_3 \in (1, +\infty)$，且 $\arg k_1 \in (\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3})$。以下是我们的主要结果。

定理 2.1 (区域I中的渐近分析)。设 u_0，$u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为实值函数，满足假设 (i)–(iv) 成立。对于任意整数 $N \ge 1$，存在常数$\tau_{\max} \in (0,1)$，使得初值问题 $u(x,t)$ 的全局解（初始数据为 *1.1*） u_0，u_1 满足

$$u(x,t) = \frac{A(\tau)}{\sqrt{x}}\cos\alpha(x,\tau) + O\left(\frac{1}{x^N} + \frac{C_N(\tau)\ln x}{x}\right) \qquad as\ x \to +\infty, \tag{2.7}$$

对于 $\tau = t/x \in [0,\tau_{\max}]$一致成立，其中 $C_N(\tau) \ge 0$是 τ 的一个光滑函数，在 $\tau = 0$ 处各阶均为零； $A(\tau)$和 $\alpha(x,\tau)$定义如下：

$$A(\tau) := 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{-\nu}\sqrt{-1-2\cos(2\arg k_1)}}{-ik_1 z_\star}\operatorname{Im} k_1,$$

$$\alpha(x,\tau) := \frac{3\pi}{4} + \arg r_2(k_1) + \arg\Gamma(i\nu) + \arg d_0 + x\operatorname{Im}\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1).$$

这里 $\Gamma(k)$ 是伽马函数， $z_\star$ 定义为

$$z_\star = z_\star(\tau) := \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{4\tau - 3k_1 - k_1^3}{4k_1^4}}, \tag{2.8}$$

其中平方根分支满足 $-ik_1 z_\star > 0$，并且

$$\begin{aligned} \nu = \nu(k_1) &:= -\frac{1}{2\pi}\ln(1 + r_1(k_1)r_2(k_1)) \le 0, \\ \arg d_0 = \arg d_0(x,\tau) &:= \nu\ln\left|\frac{(\frac{1}{\omega^2 k_1} - k_1)(\frac{1}{\omega k_1} - k_1)}{3(\frac{1}{k_1} - k_1)^2 z_\star^2}\right| - \nu\ln x \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_i^{k_1}\ln\left|\frac{(k_1 - s)^2(\frac{1}{\omega^2 k_1} - s)(\frac{1}{\omega k_1} - s)}{(\frac{1}{k_1} - s)^2(\omega k_1 - s)(\omega^2 k_1 - s)}\right| d\ln(1 + r_1(s)r_2(s)), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中积分路径 $\int_i^{k_1}$ 从 i 出发，沿单位圆逆时针方向前进，最终到达 k_1。

注 2.2。 由于 k_1 趋于 i 当 $\tau \to 0$ 且 $r_1(k)$ 在 $k = i$处具有任意阶的零点，因此可得 ν，从而 $A(\tau)$在 $\tau \to 0$趋于无穷时也具有任意阶的零点。因此，式（2.7）意味着

$$u(x,t) = O\left(\frac{1}{x^N} + \frac{C_N(\tau)}{\sqrt{x}}\right) \qquad as\ x \to +\infty$$

对 $\tau \in [0, \tau_{\max}]$一致成立。特别地，对于任意固定的 $t \geq 0$，公式（2.7）化简为$u(x,\ t) = O(x^{-N})$ 当 $x \to +\infty$时，这与 $u(x,\ t)$ 是一个 *Schwartz* 类解这一事实相符。

注 2.3。 将定理 2.1 中的渐近公式用 $\zeta = x/t$而非 $\tau = t/x$表示，可知它等价于 [2] 中针对扇区 *I* 给出的公式（注意， $z_\star$ 在此应与 $z_\star/\sqrt{\zeta}$ 中的 [2]相对应）。本文将使用变量 τ，因为这样无需取极限即可在 $t = 0$ 和 $\tau = 0$ 处计算某些表达式。

注 2.4. 结合定理 2.1以及$u(x,t)$ 在区域 *II* 中的渐近公式（见 [2]），可知定理 2.1 的结论实际上对任意选取的 $\tau_{\max} \in (0,1)$均成立。

定理 2.1 的证明见第 4–12节。该证明基于对一个 Riemann–Hilbert 问题的最速下降分析，该问题在 [2] 中针对一个 1×3行向量值解 n导出，下面我们将回顾这一问题。

3. The RH problem for n

对于 $j = 1, \ldots, 6$，令 $\Gamma_{j'} = \Gamma_j \setminus \mathbb{D}$为 Γ_j在开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{k \in \mathbb{C} \,|\, |k| < 1\}$ 之外的部分，并令 $\Gamma_{j''} := \Gamma_j \setminus \Gamma_{j'}$为 $\mathbb{D}$内部的部分，其中 Γ_j如图 2 所示。令$\theta_{ij}(x,t,k) = x\,\tilde{\Phi}_{ij}(\tau, k)$，并将 $\Gamma_\star = \{i\kappa_j\}_{j=1}^6 \cup \{0\}$ 记为Γ的交点集合。在单位圆上定义函数 f 如下

$$f(k) := 1 + r_1(k)r_2(k) + r_1(\tfrac{1}{\omega^2 k})r_2(\tfrac{1}{\omega^2 k}), \qquad k \in \partial\mathbb{D}, \tag{3.1}$$

并定义 $k \in \Gamma$ 的跳跃矩阵 $v(x,t,k)$，其定义如下

$$v_{1'} = \begin{pmatrix} 1 & -r_1(k)e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{1''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1(\frac{1}{k})e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_2(\frac{1}{\omega k})e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{2''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},\ v_{3'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{3''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1(\frac{1}{\omega^2 k})e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{4'} = \begin{pmatrix} 1 & -r_2(\frac{1}{k})e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{4''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{5'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{5''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_1(\frac{1}{\omega k})e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},\ v_{6'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r_2(\frac{1}{\omega^2 k})e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{6''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_7 = \begin{pmatrix} 1 & -r_1(k)e^{-\theta_{21}} & r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ -r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 + r_1(k)r_2(k) & \big(r_2(\frac{1}{\omega k}) - r_2(k)r_2(\omega^2 k)\big)e^{-\theta_{32}} \\ r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & \big(r_1(\frac{1}{\omega k}) - r_1(k)r_1(\omega^2 k)\big)e^{\theta_{32}} & f(\omega^2 k) \end{pmatrix},$$

$$v_8 = \begin{pmatrix} f(k) & r_1(k)e^{-\theta_{21}} & \big(r_1(\frac{1}{\omega^2 k}) - r_1(k)r_1(\omega k)\big)e^{-\theta_{31}} \\ r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 & -r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ \big(r_2(\frac{1}{\omega^2 k}) - r_2(\omega k)r_2(k)\big)e^{\theta_{31}} & -r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 + r_1(\omega k)r_2(\omega k) \end{pmatrix},$$
$$v_9 = \begin{pmatrix} 1 + r_1(\omega^2 k)r_2(\omega^2 k) & \big(r_2(\frac{1}{k}) - r_2(\omega k)r_2(\omega^2 k)\big)e^{-\theta_{21}} & -r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ \big(r_1(\frac{1}{k}) - r_1(\omega k)r_1(\omega^2 k)\big)e^{\theta_{21}} & f(\omega k) & r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ -r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中，$v_j, v_{j'}, v_{j''}$ 分别是 v 在 Γ_j、$\Gamma_{j'}$ 和 $\Gamma_{j''}$ 上的限制。跳跃矩阵 v 满足以下对称性

$$v(x,t,k) = \mathcal{A}v(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}v(x,t,k^{-1})^{-1}\mathcal{B}, \qquad k \in \Gamma, \tag{3.3}$$

其中

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

以下 Riemann–Hilbert 问题由 [2] 推导得出。

Riemann–Hilbert 问题 3.1 (关于 n 的 Riemann–Hilbert 问题)。 求一个取值于 1×3 行向量的函数 $n(x,t,k)$，使其满足以下性质：
(a) $n(x,t,\cdot)$: $\mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}^{1\times 3}$ 是解析的。(b) $n(x,t,k)$ 当 k 从左侧和右侧趋近于 $\Gamma \backslash \Gamma_\star$ 时，其极限均存在，在 $\Gamma \setminus \Gamma_\star$ 上连续，分别记为 n_+ 和 n_-。此外，

$$n_+(x,t,k) = n_-(x,t,k)v(x,t,k) \qquad for \quad k \in \Gamma \setminus \Gamma_\star. \tag{3.5}$$

(c) $n(x,\ t,\ k) = O(1)$ 当 $k \to k_\star \in \Gamma_\star$ 时。
(d) 对于 $k \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$，$n$ 满足对称性

$$n(x,t,k) = n(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = n(x,t,k^{-1})\mathcal{B}. \tag{3.6}$$

(e) $n(x,\ t,\ k) = (1,\ 1,\ 1) + O(k^{-1})$ 当 $k \to \infty$。

4. Brief overview of the proof

由于 u_0 和 u_1 满足假设 (i)–(iv)，[2, 定理 2.6 和 2.12] 表明 Riemann–Hilbert 问题 3.1 存在唯一解 $n(x,\ t,\ k)$，对每个 $(x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$，即

$$n_3^{(1)}(x,t) := \lim_{k\to\infty} k(n_3(x,t,k) - 1)$$

对于 $(x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ 是良定义且光滑的，并且

$$u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} n_3^{(1)}(x,t) \tag{4.1}$$

是 $\mathbb{R}\times[0,\infty$ 上方程 (1.1) 的一个实值 Schwartz 类解，其初始数据为 $u(x,0) = u_0(x)$ 和 $u_t(x,0) = u_1(x)$。因此，我们可以借助 Deift–Zhou [7]陡降法，通过分析 Riemann–Hilbert 问题 3.1，得到 $u(x,t)$ 的渐近行为。在此分析中，三个相位函数 Φ_{21}、Φ_{31} 和 Φ_{32} 的鞍点起着核心作用。$\tilde{\Phi}_{21}$ 的鞍点，即方程 $\partial_k \tilde{\Phi}_{21}(\tau,k) = 0$ 的解，在第 2 节中记作 $\{k_j\}_{j=1}^4$。由于 $\tilde{\Phi}_{31}(\tau,k) = -\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega^2 k)$ 且 $\tilde{\Phi}_{32}(\tau,k) = \tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega k)$，可知 $\{\omega k_j\}_{j=1}^4$ 是 $\tilde{\Phi}_{31}$ 的鞍点，而 $\{\omega^2 k_j\}_{j=1}^4$ 是 $\tilde{\Phi}_{32}$ 的鞍点。对于扇区 I，渐近分析中只有六个鞍点 $\{\omega^j k_1, \omega^j k_2\}_{j=0}^2$ 起作用。~ ~ ~ Φ_{21}、Φ_{31} 和 Φ_{32} 的符号表见图 3。

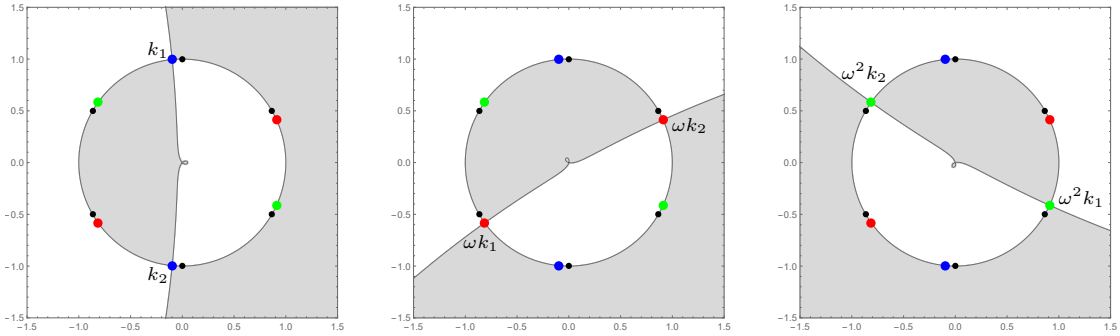

图 3。 从左到右： $\tau = \frac{1}{10}$ 对应的 $\tilde{\Phi}_{21}$、 $\tilde{\Phi}_{31}$和 $\tilde{\Phi}_{32}$ 的符号表。 灰色区域对应于 $\{k \,|\mathrm{Re}\ \Phi_{ij} > 0\}$，白色区域对应于 $\{k \,|\mathrm{Re}\ \Phi_{ij} < 0\}$。 Φ_{21} 的鞍点 k_1、 k_2 用蓝色表示， Φ_{31} 的鞍点 ωk_1、 ωk_2 用红色表示， $\tilde{\Phi}_{32}$ 的鞍点 $\omega^2 k_1$、 $\omega^2 k_2$ 用绿色表示。黑点为点 $i\kappa_j$、 $j = 1$、……、6。

最速下降分析通过一系列变换 $n \mapsto n^{(1)} \mapsto n^{(2)} \mapsto n^{(3)} \mapsto n^{(4)} \mapsto \hat{n}$ 进行，使得 $n^{(1)}$、 $n^{(2)}$、 $n^{(3)}$、 $n^{(4)}$ 和 $\hat{n}$ 所满足的 Riemann–Hilbert 问题，均与 n 所满足的 Riemann–Hilbert 问题 3.1 等价。我们将用 $\Gamma^{(j)}$、$\hat{\Gamma}$ 和 $v^{(j)}$、$\hat{v}$ 分别表示关于 $n^{(j)}$、$\hat{n}$ 的 Riemann–Hilbert 问题的轮廓线和跳跃矩阵。每次变换都会保留对称性 (3.3) 和 (3.6)，因此，对于 $j = 1$、2、3、4，

$$v^{(j)}(x,t,k) = \mathcal{A} v^{(j)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B} v^{(j)}(x,t,k^{-1})^{-1}\mathcal{B}, \qquad k \in \Gamma^{(j)}, \tag{4.2}$$

$$n^{(j)}(x,t,k) = n^{(j)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = n^{(j)}(x,t,k^{-1})\mathcal{B}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^{(j)}, \tag{4.3}$$

$\hat{n}$ 和$\hat{v}$也同理。我们将看到，鞍点$\{k_j, \omega k_j, \omega^2 k_j\}_{j=1}^2$附近的六个局部参数子以及一个全局参数子 Δ^{-1} 都会对$u(x,t)$的渐近行为作出贡献。然而，由于对称性 (4.2)–(4.3)，我们只需显式构造 k_1 附近的局部参数模型，并且只需在扇区 S: $= \{k \in \mathbb{C} | \arg\ k \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\}$中定义变换 $n^{(j)} \mapsto n^{(j+1)}$和 $n^{(4)} \mapsto \hat{n}$。最终，我们将发现， $\hat{n}$ 满足一个小范数 Riemann–Hilbert 问题，其解可表示为沿轮廓线$\hat{\Gamma}$的积分。这将得到$\hat{n}^{(1)}(x,t)$的渐近公式： $= \lim_{k\to\infty} k(\hat{n}(x,t,k) - (1, 1, 1))$，因此，通过逆转上述变换，也可得到 $n_3^{(1)}$ (x,t)的渐近公式。将该公式代入 (4.1)，即可得到定理 2.1 的公式。

以下函数的性质 r_1 和 r_2 在 [2, 定理 2 中3] 建立，将在证明过程中反复使用： $r_1 \in C^\infty(\hat{\Gamma}_1)$， $r_2 \in C^\infty(\hat{\Gamma}_4 \setminus \{\pm\omega^2\})$， $r_1(\kappa_j) \neq 0$对于 $j = 1$，……，6， $r_2(k)$ 在 $k = \pm\omega$处有简单零点，在 $k = \pm\omega^2$处有简单极点，并且 r_1， r_2当 $|k| \to \infty$时具有快速衰减性质。此外，

$$r_1(\tfrac{1}{\omega k}) + r_2(\omega k) + r_1(\omega^2 k) r_2(\tfrac{1}{k}) = 0, \qquad k \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\pm\omega\}, \tag{4.4}$$

$$r_2(k) = \tilde{r}(k)\overline{r_1(\bar{k}^{-1})}, \qquad \tilde{r}(k) := \frac{\omega^2 - k^2}{1 - \omega^2 k^2}, \qquad k \in \hat{\Gamma}_4 \setminus \{0, \pm\omega^2\}, \tag{4.5}$$

$$r_1(1) = r_1(-1) = 1, \qquad r_2(1) = r_2(-1) = -1. \tag{4.6}$$

5. The $n \to n^{(1)}$ transformation

令 $\tau = t/x$，并注意到 $x\Phi_{ij}(\tau,k) = \theta_{ij}$。我们采用记号 $\mathcal{I} := [0, \tau_{\max}]$，其中 $\tau_{\max} \in (0,1)$ 是一个常数，因此扇区 I 对应于 $\tau \in \mathcal{I}$。跳跃矩阵 $v_{1''}$ 和 $v_{4'}$ 分别涉及非对角元 $r_1(\frac{1}{k})e^{x\Phi_{21}(\tau,k)}$ 和 $-r_2(\frac{1}{k})e^{-x\Phi_{21}(\tau,k)}$，

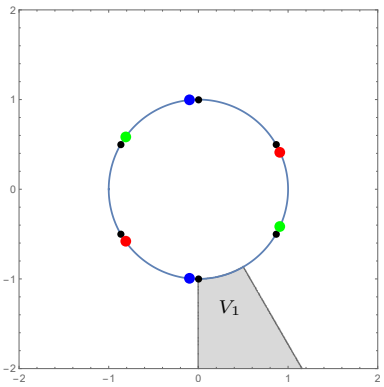

图 4。 复 k 平面的开子集 V_1 。

只要 $\tau > 0$ 远离 0，指数函数 $e^{x\Phi_{21}(\tau,k)}$ 和 $e^{-x\Phi_{21}(\tau,k)}$ 对于 $k \in (0, i)$ 和 $k \in (i, i\infty)$，分别在 $x \to \infty$ 时呈指数级衰减。然而，

$$\tilde{\Phi}_{21}(\tau, k) = \frac{k^2 - 1}{2k} - \frac{k^4 - 1}{4k^2}\tau,$$

因此 $\tilde{\Phi}_{21}(0, i\mathrm{Im}\, k) = i\frac{(\mathrm{Im}\, k)^2+1}{k}\mathrm{Im}$ 对于所有 $k \in i\mathbb{R}$ 都是纯虚数，这意味着上述指数函数在 $\tau \to 0$ 处失去衰减性。第一次变换的目标 $n \to n^{(1)}$ 是将跳跃 $v_{1''}$ 和 $v_{4'}$ 变形到指数函数仍保持衰减性的区域中，使其满足 $x \to\infty$ ，并且对足够小的 τ一致。为此，我们需要引入函数 r_1 和 r_2的解析近似。设 $V_1 \subset \mathbb{C}$ 为开集（见图 4）

$$V_1 = \{k \in \mathbb{C} \,|\, \arg k \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{3}),\ |k| > 1\}.$$

引理 5.1（分解引理 I）。 对于每个整数 $N \geq 1$，存在一个分解

$$r_1(k) = \tilde{r}_{1,a}(x, k) + \tilde{r}_{1,r}(x, k), \qquad k \in \partial V_1 \cap i\mathbb{R} = (-i\infty, -i], \tag{5.1}$$

使得函数 $\tilde{r}_{1,\,a}$,$\tilde{r}_{1,\,r}$ 具有以下性质：

(a) 对于每个 $x \geq 1$, $\tilde{r}_{1,\,a}(x, k)$ 在 $k \in V_1$ 上有定义且连续，在 $k \in V_1$上解析。(b) 对于 $x \geq 1$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$，函数 $\tilde{r}_{1,\,a}$ 满足

$$\left|\tilde{r}_{1,a}(x, k) - \sum_{j=0}^{N} \frac{r_1^{(j)}(k_\star)}{j!}(k - k_\star)^j\right| \leq C|k - k_\star|^{N+1} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \qquad k \in \bar{V}_1, \tag{5.2}$$

$$|\tilde{r}_{1,a}(x, k)| \leq \frac{C}{1 + |k|^{N+1}} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \qquad k \in \bar{V}_1, \tag{5.3}$$

其中 $k_\star = -i$ ，常数 C 与 x, τ, k无关。

(c) 对 于每个 $1 \leq p \leq \infty$，$\tilde{r}_{1,\,r}(x, \cdot)$ 在 $\partial V_1 \cap i\mathbb{R}$ 上的 L^p-范数为 $O(x^{-N})$，当 $x \to \infty$.

注 *5.2.* 稍后我们还需要引入 r_1 的另一种分解，见引理 *6.1*。在引理 *5.1* 中，我们在函数 $\tilde{r}_{1,\,a}$ 和 $\tilde{r}_{1,\,r}$ 上加波浪号，以便将它们与引理 *6.1* 中的函数 $r_{1,\,a}$ 和 $r_{1,\,r}$ 区分开来。函数 $\tilde{r}_{1,\,a}$ 和 $r_{1,\,a}$ 的定义域部分重叠，但通常在这些定义域的交集上并不相等。由于引理 *5.1* 和引理 *6.1* 的推导分别使用了不同的相位函数 $-i\Phi(0, k)$ 和 $-i\Phi(\tau, k)$，因此似乎难以构造 $\tilde{r}_{1,\,a}$，使其在该交集上与 $r_{1,\,a}$ 重合。

引理的证明 5.1。证明沿用了 [7] 的思路，但并不寻常，因为当$\tilde{}$时，$\Phi_{21}(\tau,k)$ 的实部非零，$k\in(-i\infty,-i)$ 总是如此。$\tau>0$因此，我们给出一个$\tilde{}$证明，其核心思路是使用 $-i\Phi_{21}(0,k)$，而不是 $-i\Phi_{21}(\tau,k)$，作为相位函数。

设 $M\geq N+1$ 为一个较大的整数。存在一个有理函数 $f_0(k)$，它在 $\bar{V}_1$ 中没有极点，使得 r_1 和 f_0 在 $k=-i$ 处的 $4M$ 阶近似相同，并且当 $(-i\infty,-i]\ni k\to\infty$ 时，$f_0(k)=O(k^{-4M})$。由于 $r_1\in C^\infty((-i\infty,-i])$ 在 k 趋于 ∞ 时快速衰减，因此 r_1 和 f_0 在 $k=\infty$ 处也具有 $4M$ 阶近似。令 $f_1(k)=r_1(k)-f_0(k)$。映射 $k\mapsto\phi=\phi(k)$，其中

$$\phi=-i\tilde{\Phi}_{21}(0,k)=-\frac{i}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)=\frac{1+(\operatorname{Im}k)^2}{2\operatorname{Im}k} \tag{5.4}$$

是一个双射 $(-i\infty,-i]\to(-\infty,-1]$，因此我们可以定义

$$F(\phi):=\begin{cases}\frac{k^{2M}}{(k-k_\star)^M}f_1(k), & \phi\leq-1,\\ 0, & \phi>-1,\end{cases} \tag{5.5}$$

其中 $k_\star:=-i$。函数 $F(\phi)$ 在 $\phi\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ 上光滑。此外，对于 $n\geq1$，

$$F^{(n)}(\phi)=\left(\frac{2ik^2}{(k-k_\star)(k-i)}\frac{d}{dk}\right)^n\left[\frac{k^{2M}}{(k-k_\star)^M}f_1(k)\right],\qquad \phi\leq-1, \tag{5.6}$$

因此，只要选择足够大的 M，就可以使 F 属于索伯列夫空间$H^{N+1}(\mathbb{R})$。由此可得

$$\hat{F}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(\phi)e^{-i\phi s}d\phi,\qquad F(\phi)=\int_{\mathbb{R}}\hat{F}(s)e^{i\phi s}ds \tag{5.7}$$

并且，根据 Plancherel 定理，$\|s^{N+1}\hat{F}(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|\frac{F^{(N+1)}(\phi)}{(\phi)\sqrt{2\pi}}\|_{L^2(\mathbb{R})}<\infty$。根据 (5.5) 以及 (5.7)，

$$\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}\int_{\mathbb{R}}\hat{F}(s)e^{s\tilde{\Phi}_{21}(0,k)}ds=f_1(k)$$

对于 $k\in(-i\infty,-i]$。特别地，$f_1(k)=f_a(x,k)+f_r(x,k)$ 对于 $x\geq1$ 以及 $k\in(-i\infty,-i]$，其中

$$\begin{aligned}f_a(x,k)&:=\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{4}}\hat{F}(s)e^{s\tilde{\Phi}_{21}(0,k)}ds,\qquad k\in\bar{V}_1,\\ f_r(x,k)&:=\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}\int_{\frac{x}{4}}^{+\infty}\hat{F}(s)e^{s\tilde{\Phi}_{21}(0,k)}ds,\qquad k\in(-i\infty,-i].\end{aligned}$$

$\tilde{}$由于 $\operatorname{Re}\Phi_{21}(0,k)=0$ 对于 $k\in(-i\infty,-i]$，我们有

$$\begin{aligned}|f_r(x,k)|&\leq\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}\int_{\frac{x}{4}}^{+\infty}s^{N+1}|\hat{F}(s)|s^{-N-1}ds\\ &\leq\frac{C}{1+|k|^M}\|s^{N+1}\hat{F}(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{\int_{\frac{x}{4}}^{+\infty}s^{-2N-2}ds}\leq\frac{C}{1+|k|^M}x^{-N-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $x\geq1$ 和 $k\in(-i\infty,-i]$。因此，$f_r(x,\cdot)$ 在 $(-i\infty,-i]$ 上的 L^1 范数和 L^∞ 范数为$O(x^{-N-\frac{1}{2}})$。另一方面，$f_a(x,\cdot)$ 显然在 $\bar{V}_1$ 上连续，并且在 V_1 中解析。$\tilde{}$$\tilde{}$$\bar{}$由于对于 $k\in V_1$，有 $\operatorname{Re}\Phi_{21}(\tau,k)\geq\operatorname{Re}\Phi_{21}(0,k)\geq0$（参见图 3），因此同样有

$$\begin{aligned}|f_a(x,k)|&\leq\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}\|\hat{F}\|_{L^1(\mathbb{R})}\sup_{s\leq\frac{x}{4}}e^{s\operatorname{Re}\tilde{\Phi}_{21}(0,k)}\leq C\frac{(k-k_\star)^M}{k^{2M}}e^{\frac{x}{4}\operatorname{Re}\tilde{\Phi}_{21}(0,k)}\\ &\leq C(k-k_\star)^Me^{\frac{x}{4}\operatorname{Re}\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)}\end{aligned} \tag{5.9}$$

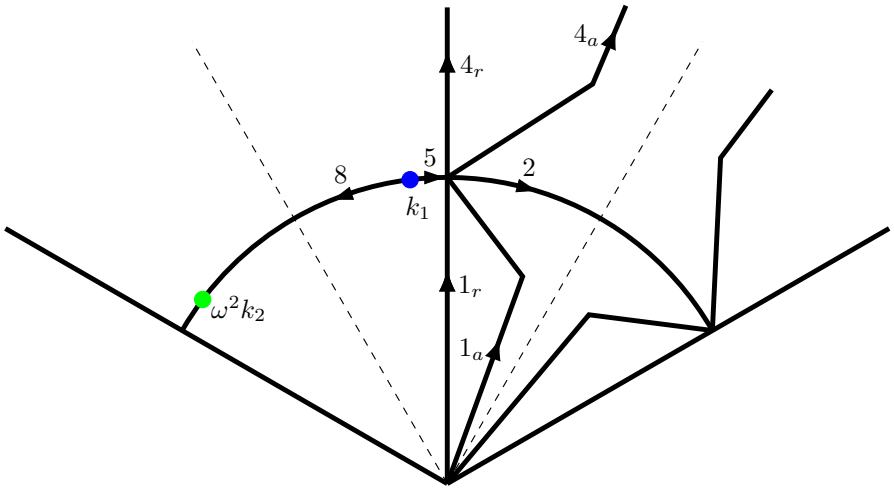

图 5. 轮廓线 $\Gamma^{(1)}$ （实线）、S 的边界（虚线），以及鞍点 k_1（蓝色）和 $\omega^2 k_2$ （绿色）。

f ¯或 $x \geq 1$、 $\tau \in \mathcal{I}$和 $k \in V_1$。由于 $M \geq N+1$，可得以下映射

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1,a}(x,k) &:= f_0(k) + f_a(x,k) && \text{for} \quad k \in \bar{V}_1, \\ \tilde{r}_{1,r}(x,k) &:= f_r(x,k) && \text{for} \quad k \in (-i\infty, -i], \end{aligned}$$

从而得到具有所需性质的 r_1 分解。 □

引理5.1 给出了 r_1 的一种分解。接着，对称性（4.5）给出 $\tilde{r}_2$ 的类似分解 $r_2 = \tilde{r}_{2,a} + \tilde{r}_{2,r}$，如下所示:

$$\tilde{r}_{2,a}(x,k) := \tilde{r}(k)\overline{\tilde{r}_{1,a}(x,\bar{k}^{-1})}, \quad k \in V_2; \quad \tilde{r}_{2,r}(x,k) := \tilde{r}(k)\overline{\tilde{r}_{1,r}(x,\bar{k}^{-1})}, \quad k \in (-i,0),$$

其中 $V_2 := \{k | \bar{k}^{-1} \in V_1\}$。

现在我们可以定义第一个变换 $n \mapsto n^{(1)}$。如第 4 节所述，我们将重点关注扇区S。设 $\Gamma^{(1)}$ 如图 5所示。注意,

$$\Gamma_8^{(1)} := \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in (\arg k_1, \tfrac{2\pi}{3})\}, \qquad \Gamma_2^{(1)} := \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2})\}.$$

矩阵 $v_{1''}$ 和 $v_{4'}$ 可进行如下因式分解

$$v_{1''} = v_{1_a}^{(1)} v_{1_r}^{(1)}, \qquad v_{4'} = v_{4_a}^{(1)} v_{4_r}^{(1)},$$

其中

$$\begin{aligned} v_{1_a}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{1,a}(\frac{1}{k})e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & v_{1_r}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{1,r}(\frac{1}{k})e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ v_{4_a}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{r}_{2,a}(\frac{1}{k})e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & v_{4_r}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{r}_{2,r}(\frac{1}{k})e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

函数 $n^{(1)}$ 定义为

$$n^{(1)}(x,t,k) = n(x,t,k)G^{(1)}(x,t,k), \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^{(1)}, \tag{5.11}$$

其中，函数 $G^{(1)}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(1)}$中解析。对于 $k\in\mathsf{S}$，它由下式给出

$$G^{(1)}=\begin{cases} v_{1_a}^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_{1_r}^{(1)},\\ v_{4_a}^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_{4_r}^{(1)},\\ I, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{5.12}$$

并利用对称性将其延拓至 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(1)}$

$$G^{(1)}(x,t,k)=\mathcal{A}G^{(1)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}G^{(1)}(x,t,k^{-1})\mathcal{B}. \tag{5.13}$$

下一个引理可由图3 中的符号表和引理5.1推出 .

引理5.3。 $G^{(1)}(x,t,k)$和 $G^{(1)}(x,t,k)^{-1}$关于 $k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(1)}$、 $x\geq 1$和 $\tau\in\mathcal{I}$一致有界。

利用(5.11)，我们推得 $n_+^{(1)}=n_-^{(1)}v_j^{(1)}$ 在 $\Gamma_j^{(1)}$ 上，其中 $v_j^{(1)}$ 由(5.10)给出，适用于 $j=1_a,\ 1_r,\ 4_a,\ 4_r$ 以及 $j=2,\ 5,\ 8$，依据

$$v_2^{(1)}=v_9,\qquad v_5^{(1)}=v_7^{-1},\qquad v_8^{(1)}=v_7.$$

$v^{(1)}-I$在 $\Gamma_{1_r}^{(1)}\cup\Gamma_{4_r}^{(1)}$ 上的 L^1 范数和 L^∞ 范数在扇区 I 中均为 $O(x^{-N})$阶，这是引理5.1的推论。$\tilde{r}_{1,\ a}$ 的估计（5.3）保证了 $n^{(1)}$ 与 n 具有相同的行为（当 $k\to\infty$ 时），误差项为 $O(k^{-N})$。

6. The $n^{(1)}\to n^{(2)}$ transformation

为实现变换 $n^{(1)}\to n^{(2)}$，我们需要对函数 r_1、r_2作另一组分解。我们还需要对函数 $\hat{}r_1$、$\hat{}r_2$ 作分解；这些函数对所有满足 $\arg k\in[\frac{\pi}{2},\arg k_1]$ 的$k\in\partial\mathbb{D}$ 都有定义，具体如下：

$$\hat{r}_j(k):=\frac{r_j(k)}{1+r_1(k)r_2(k)}=\frac{r_j(k)}{1+\tilde{r}(k)|r_1(k)|^2},\qquad j=1,2, \tag{6.1}$$

其中第二个等式由 (4.5) 得出。由于对于 $\tau\in[0,1)$，$\arg k_1\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$，且对于 $\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$，$\tilde{r}(e^{i\theta})>0$，因此对于 $|k|=1$，$\arg k\in[\frac{\pi}{2},\arg k_1]$，有 $1+r_1(k)r_2(k)=1+\tilde{r}(k)|r_1(k)|^2>1$。因此 $\hat{}r_1$、$\hat{}r_2$ 是良定义的。给定 $K>1$，我们定义开集 $\hat{}U_1=U_1(\tau,K)$ 和 $U_1=U_1(\tau,K)\subset\mathbb{C}$ （见图 6）。

$$\begin{aligned}U_1=\big(&\{k\,|\,\arg k\in[-\pi,-\tfrac{5\pi}{6})\cup(\arg k_1,\pi],\ K^{-1}<|k|<1\}\\ &\cup\{k\,|\,\arg k\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{3}),\ 1<|k|<K\}\big)\cap\{k\,|\,\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\},\\ \hat{U}_1=&\{k\,|\,\arg k\in(\tfrac{\pi}{4},\arg k_1),\ 1<|k|<K\}\cap\{k\,|\,\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}.\end{aligned}$$

引理 6.1 (分解引理II)。 对于每个整数 $N\geq 1$，都存在 $K>1$ 和分解

$$\begin{aligned}r_1(k)&=r_{1,a}(x,t,k)+r_{1,r}(x,t,k), && k\in\partial U_1\cap\partial\mathbb{D},\\ \hat{r}_1(k)&=\hat{r}_{1,a}(x,t,k)+\hat{r}_{1,r}(x,t,k), && k\in\partial\hat{U}_1\cap\partial\mathbb{D},\end{aligned}$$

使得 $r_{1,\ a}$,$r_{1,\ r}$, $\hat{}r_{1,\ a}$, $\hat{}r_{1,\ r}$ 满足以下性质：

$^-(a)$ 对于每个 $x\geq 1$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$， $r_{1,a}(x,t,k)$ 在 $k\in U_1$ 上有定义且连续，并在 $k\in U_1$ 上解析；而 $\hat{}r_{1,a}(x,t,k)$ 在 $k\in U_1$ 上有定义且连续，并在 $k\in U_1$ 上解析$\hat{}$。

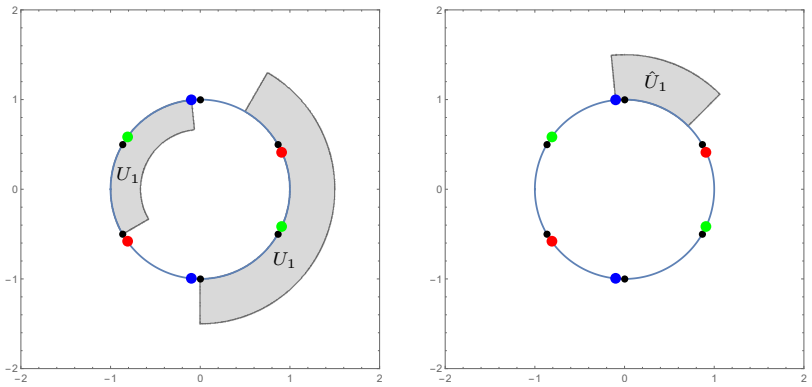

图 6. 复 k 平面中的开子集 U_1 和 $\hat{U}_1$。

(*b*) 对于 $x \geq 1$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$，函数 $r_{1,a}$ 及 $\hat{r}_{1,a}$ 满足

$$\left| r_{1,a}(x,t,k) - \sum_{j=0}^{N} \frac{r_1^{(j)}(k_\star)}{j!}(k-k_\star)^j \right| \leq C|k-k_\star|^{N+1} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \quad k \in \bar{U}_1,\ k_\star \in \mathcal{R}_1,$$

$$\left| \hat{r}_{1,a}(x,t,k) - \sum_{j=0}^{N} \frac{\hat{r}_1^{(j)}(k_\star)}{j!}(k-k_\star)^j \right| \leq C|k-k_\star|^{N+1} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \quad k \in \bar{\hat{U}}_1,\ k_\star \in \hat{\mathcal{R}}_1,$$

其中 $\mathcal{R}_1 = \{k_1, \pm\omega, \omega^2 k_2, \pm e^{\frac{\pi i}{6}}, \pm e^{-\frac{\pi i}{6}}, \pm 1, -i, \omega^2 k_1, \omega k_2\}$，$\hat{\mathcal{R}}_1 = \{i, k_1\}$，且 $C > 0$ 与 x、τ、k无关。事实上，对于 $k_\star = k_1$，以下更强的估计成立：

$$\left| r_{1,a}(x,t,k) - \sum_{j=0}^{N} \frac{r_1^{(j)}(k_\star)}{j!}(k-k_\star)^j \right| \leq C_N(\tau)|k-k_\star|^{N+1} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \quad k \in \bar{U}_1,$$

$$\left| \hat{r}_{1,a}(x,t,k) - \sum_{j=0}^{N} \frac{\hat{r}_1^{(j)}(k_\star)}{j!}(k-k_\star)^j \right| \leq C_N(\tau)|k-k_\star|^{N+1} e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|}, \quad k \in \bar{\hat{U}}_1,$$

其中 $C_N(\tau) \geq 0$是关于 τ的光滑函数，与 x、k无关，并且在 $\tau = 0$处所有阶均消失。

(*c*) 对于每个 $1 \leq p \leq \infty$，$r_{1,r}(x,t,\cdot)$ 在 $\partial U_1 \cap \partial\mathbb{D}$ 上的 L^p-范数为 $O(x^{-N})$，而 $\hat{r}_{1,r}(x,t,\cdot)$ 在 $\partial \hat{U}_1 \cap \partial\mathbb{D}$ 上的 L^p-范数为 $O(x^{-N})$，且当 $\tau \in \mathcal{I}$ 时该结果对 $x \to \infty$ 一致成立。

证明。在 $\partial U_1 \cap \partial\mathbb{D}$和 $\partial \hat{U}_1 \cap \partial\mathbb{D}$的每条弧上，函数 $\theta \mapsto -i\tilde{\Phi}_{21}(\tau, e^{i\theta}) = (1 - \tau\cos\theta)\sin\theta$均为实值且单调。因此，利用 [7]中介绍的方法即可得出结论；另见引理 5.1的证明。□

引理 6.1 给出了 r_1 和 $\hat{r}_1$的分解；利用对称性（4.5），我们现在推导出 r_2 和 $\hat{r}_2$的分解。令 $U_2 := \{k | \bar{k}^{-1} \in U_1\}$ 和 $\hat{U}_2 := \{k | \bar{k}^{-1} \in \hat{U}_1\}$。我们定义分解 $r_2 = r_{2,a} + r_{2,r}$ 和 $\hat{r}_2 = \hat{r}_{2,a} + \hat{r}_{2,r}$ 如下：

$$r_{2,a}(k) := \tilde{r}(k)\overline{r_{1,a}(\bar{k}^{-1})}, \quad k \in U_2, \qquad r_{2,r}(k) := \tilde{r}(k)\overline{r_{1,r}(\bar{k}^{-1})}, \quad k \in \partial U_2 \cap \partial\mathbb{D},$$

$$\hat{r}_{2,a}(k) := \tilde{r}(k)\overline{\hat{r}_{1,a}(\bar{k}^{-1})}, \quad k \in \hat{U}_2, \qquad \hat{r}_{2,r}(k) := \tilde{r}(k)\overline{\hat{r}_{1,r}(\bar{k}^{-1})}, \quad k \in \partial\hat{U}_2 \cap \partial\mathbb{D},$$

为简洁起见，我们省略了对 (x,t) 的依赖关系。

在 $\Gamma_2^{(2)}$ 上，我们将 $v_2^{(1)}$ 分解如下：

$$v_2^{(1)} = v_3^{(2)} v_2^{(2)} v_1^{(2)},$$

其中

$$v_3^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -r_{2,a}(\omega^2k)e^{-\theta_{31}}\\ r_{1,a}(\tfrac{1}{k})e^{\theta_{21}} & 1 & r_{1,a}(\omega k)e^{-\theta_{32}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ v_1^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & r_{2,a}(\tfrac{1}{k})e^{-\theta_{21}} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -r_{1,a}(\omega^2k)e^{\theta_{31}} & r_{2,a}(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1\end{pmatrix},$$

$$v_2^{(2)}=I+v_{2,r}^{(2)},\qquad v_{2,r}^{(2)}=\begin{pmatrix}r_{1,r}(\omega^2k)r_{2,r}(\omega^2k) & g_2(\omega k)e^{-\theta_{21}} & -r_{2,r}(\omega^2k)e^{-\theta_{31}}\\ g_1(\omega k)e^{\theta_{21}} & g(\omega k) & h_1(\omega k)e^{-\theta_{32}}\\ -r_{1,r}(\omega^2k)e^{\theta_{31}} & h_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 0\end{pmatrix},\tag{6.2}$$

and

$$\begin{aligned}h_1(k)&=r_{1,r}(k)+r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{2,r}(\omega k),\qquad h_2(k)=r_{2,r}(k)+r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{1,r}(\omega k),\\ g_1(k)&=r_{1,r}(\tfrac{1}{\omega^2k})-r_{1,r}(\omega k)\big(r_{1,r}(k)+r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{2,r}(\omega k)\big),\\ g_2(k)&=r_{2,r}(\tfrac{1}{\omega^2k})-r_{2,r}(\omega k)\big(r_{2,r}(k)+r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{1,r}(\omega k)\big),\\ g(k)&=r_{1,r}(k)\big(r_{1,r}(\omega k)r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})+r_{2,r}(k)\big)\\ &\quad+r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{2,r}(\omega k)\big(r_{1,r}(\omega k)r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})+r_{2,r}(k)\big)+r_{1,r}(\tfrac{1}{\omega^2k})r_{2,r}(\tfrac{1}{\omega^2k}).\end{aligned}$$

在 $\Gamma_5^{(2)}$ 上，我们将 $v_5^{(1)}$ 因式分解如下:

$$v_5^{(1)}=v_6^{(2)}v_5^{(2)}v_4^{(2)},\qquad v_5^{(2)}=\begin{pmatrix}1+r_1(k)r_2(k) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1+r_1(k)r_2(k)} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+v_{5,r}^{(2)},$$

$$v_6^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2k})e^{-\theta_{31}}\\ \hat r_{2,a}(k)e^{\theta_{21}} & 1 & -r_{2,a}(\frac{1}{\omega k})e^{-\theta_{32}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ v_4^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & \hat r_{1,a}(k)e^{-\theta_{21}} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2k})e^{\theta_{31}} & -r_{1,a}(\frac{1}{\omega k})e^{\theta_{32}} & 1\end{pmatrix},\tag{6.3}$$

其中我们用到了（4.4）。最后，在 $\Gamma_8^{(2)}$ 上，我们将 $v_8^{(1)}$ 因式分解如下:

$$v_8^{(1)}=v_7^{(2)}v_8^{(2)}v_9^{(2)},\quad v_8^{(2)}=I+v_{8,r}^{(2)},\quad v_{8,r}^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & -r_{1,r}(k)e^{-\theta_{21}} & h_2(\omega^2k)e^{-\theta_{31}}\\ -r_{2,r}(k)e^{\theta_{21}} & r_{1,r}(k)r_{2,r}(k) & g_2(\omega^2k)e^{-\theta_{32}}\\ h_1(\omega^2k)e^{\theta_{31}} & g_1(\omega^2k)e^{\theta_{32}} & g(\omega^2k)\end{pmatrix}$$

$$v_7^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -r_{2,a}(k)e^{\theta_{21}} & 1 & 0\\ r_{1,a}(\omega^2k)e^{\theta_{31}} & r_{1,a}(\frac{1}{\omega k})e^{\theta_{32}} & 1\end{pmatrix},\qquad v_9^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & -r_{1,a}(k)e^{-\theta_{21}} & r_{2,a}(\omega^2k)e^{-\theta_{31}}\\ 0 & 1 & r_{2,a}(\frac{1}{\omega k})e^{-\theta_{32}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{6.4}$$

We 无需写出 $v_{5\,r}^{(2)}$ 的冗长表达式. 但请注意，引理 6.1 给出 s

$$\|v_{j,r}^{(2)}\|_{(L^1\cap L^\infty)(\Gamma_j^{(2)})}=O(x^{-N})\qquad \text{as } x\to\infty,\ j=2,5,8.$$

设 $\Gamma^{(2)}$ 为图 7中所示的轮廓线。函数 $n^{(2)}$ 定义为

$$n^{(2)}(x,t,k)=n^{(1)}(x,t,k)G^{(2)}(x,t,k),\qquad k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(2)},\tag{6.5}$$

其中， $G^{(2)}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(2)}$中解析。它在 $k\in$ S上定义为

$$G^{(2)}=\begin{cases}v_3^{(2)}, & k\text{ on the }-\text{ side of }\Gamma_2^{(2)},\\ (v_1^{(2)})^{-1}, & k\text{ on the }+\text{ side of }\Gamma_2^{(2)},\\ v_6^{(2)}, & k\text{ on the }-\text{ side of }\Gamma_5^{(2)},\\ (v_4^{(2)})^{-1}, & k\text{ on the }+\text{ side of }\Gamma_5^{(2)},\end{cases}\quad G^{(2)}=\begin{cases}v_7^{(2)}, & k\text{ on the }-\text{ side of }\Gamma_8^{(2)},\\ (v_9^{(2)})^{-1}, & k\text{ on the }+\text{ side of }\Gamma_8^{(2)},\\ I, & \text{otherwise},\end{cases}\tag{6.6}$$

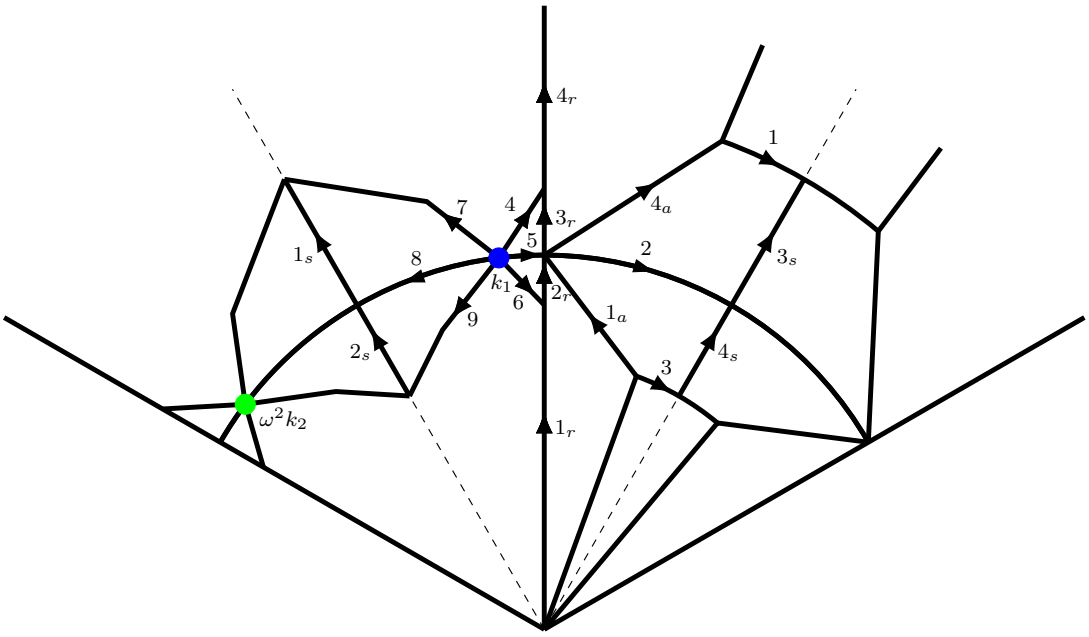

图 7。 轮廓线 $\Gamma^{(2)}$ （实线）、S 的边界（虚线），以及鞍点 k_1（蓝色）和 $\omega^2 k_2$ （绿色）。

并借助对称性将其延拓至 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(2)}$

$$G^{(2)}(x,t,k)=\mathcal{A}G^{(2)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}G^{(2)}(x,t,k^{-1})\mathcal{B}. \tag{6.7}$$

下一个引理可由引理6.1 以及图中的符号表得出 3.

引理 6.2。 $G^{(2)}(x,t,k)$ 和 $G^{(2)}(x,t,k)^{-1}$ 关于 $k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(2)}$、 $x\geq 1$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$ 一致有界。此外，对于所有足够大的 $|k|$， $G^{(2)}(x,t,k)=I$。

利用 (6.5)，我们得到 $n_+^{(2)}=n_-^{(2)}v_j^{(2)}$ 在 $\Gamma_j^{(2)}$ 上，其中 $v_j^{(2)}$ 由 (6.2) 对 $j=1$、2、3 给出；由 (6.3) 对 $j=4$、5、6 给出；由 (6.4) 对 $j=7$、8、9 给出，并且

$$v_{1_r}^{(2)}=v_{1_r}^{(1)},\qquad v_{2_r}^{(2)}=v_{1_r}^{(1)}v_6^{(2)},\qquad v_{3_r}^{(2)}=v_{4_r}^{(1)}(v_4^{(2)})^{-1},\qquad v_{4_r}^{(2)}=v_{4_r}^{(1)},$$
$$v_{1_a}^{(2)}=(v_3^{(2)})^{-1}v_{1_a}^{(1)},\qquad v_{4_a}^{(2)}=v_1^{(2)}v_{4_a}^{(1)},$$
$$v_{1_s}^{(2)}=G_-^{(2)}(k)^{-1}G_+^{(2)}(k)=v_7^{(2)}(k)^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}v_9^{(2)}(\tfrac{1}{\omega k})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\(v_{1_s}^{(2)})_{31}&0&1\end{pmatrix},$$

$$(v_{1_s}^{(2)})_{31}:=-\big(r_{1,a}(\omega^2k)+r_{2,a}(k)r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega k})+r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k})\big)e^{\theta_{31}}.$$

我们省略 的显式表达式 v_{2_s},v_{3_s},v_{4_s}，它们与 v_{1_s} 的表达式相似。

7. The $n^{(2)}\to n^{(3)}$ transformation

对于第三次变换，我们将向上和向下变形轮廓线（见下文（7.3））， 使用以下因式分解：

$$v_4^{(2)}=v_4^{(3)}v_{4u}^{(3)},\quad v_4^{(3)}=\begin{pmatrix}1&\hat r_{1,a}(k)e^{-\theta_{21}}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad v_{4u}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2k})e^{\theta_{31}}&-r_{1,a}(\frac{1}{\omega k})e^{\theta_{32}}&1\end{pmatrix},$$

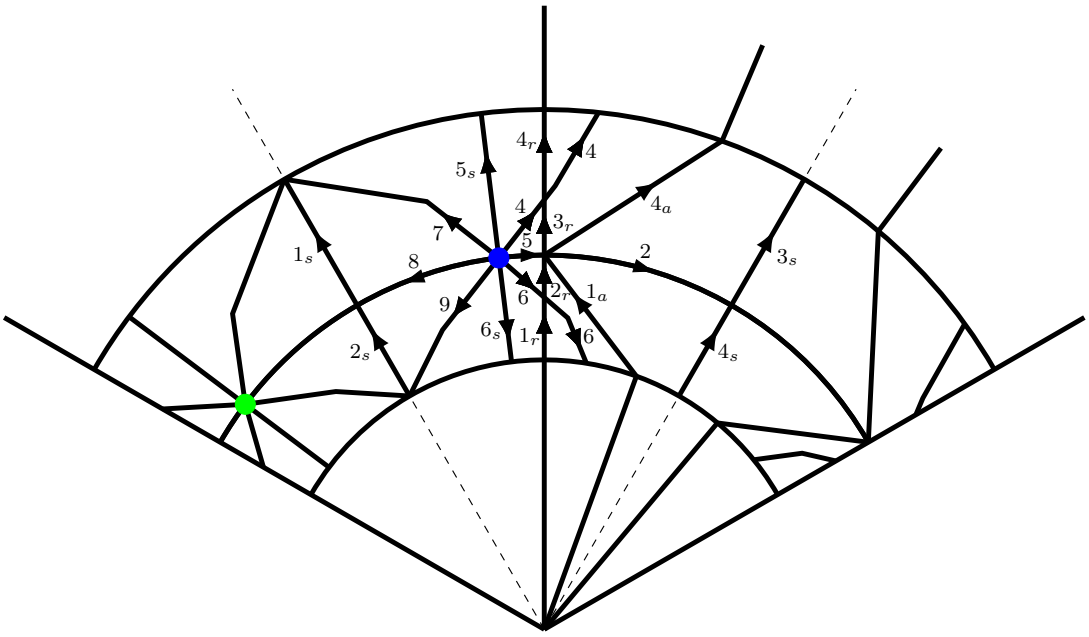

图 8。 轮廓线 $\Gamma^{(3)}$ （实线）、S 的边界（虚线），以及鞍点 k_1（蓝色）和 $\omega^2 k_2$ （绿色）。

$$v_6^{(2)} = v_{6d}^{(3)} v_6^{(3)}, \quad v_{6d}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & -r_{2,a}(\frac{1}{\omega k}) e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_6^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat{r}_{2,a}(k) e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_7^{(2)} = v_{7u}^{(3)} v_7^{(3)}, \quad v_7^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -r_{2,a}(k) e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_9^{(2)} = v_9^{(3)} v_{9d}^{(3)}, \quad v_9^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -r_{1,a}(k) e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{7u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (r_{1,a}(\omega^2 k) + r_{1,a}(\frac{1}{\omega k}) r_{2,a}(k)) e^{\theta_{31}} & r_{1,a}(\frac{1}{\omega k}) e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{9d}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (r_{2,a}(\omega^2 k) + r_{1,a}(k) r_{2,a}(\frac{1}{\omega k})) e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & r_{2,a}(\frac{1}{\omega k}) e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

设 $\Gamma^{(3)}$ 为图中所示的轮廓线8。我们将 $n^{(3)}$ 定义为

$$n^{(3)}(x,t,k) = n^{(2)}(x,t,k) G^{(3)}(x,t,k), \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^{(3)}, \tag{7.2}$$

其中 $G^{(3)}$ 由 $k \in$S 给出:

$$G^{(3)}(x,t,k) = \begin{cases} (v_4^{(2)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_{4_a}^{(3)}, \\ v_6^{(2)}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_{1_a}^{(3)}, \\ (v_{4u}^{(3)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_4^{(3)}, \\ v_{6d}^{(3)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_6^{(3)}, \\ v_{7u}^{(3)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_7^{(3)}, \\ (v_{9d}^{(3)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_9^{(3)}, \\ I, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{7.3}$$

且 $G^{(3)}$ 定义为 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(3)}$，使用 $\mathcal{A}$- 和 $\mathcal{B}$-对称性（如式（5.13）所示）。由引理 6.1和图 3可推出以下引理。

引理 7.1. $G^{(3)}(x,t,k)$ 和 $G^{(3)}(x,t,k)^{-1}$ 对于 $k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(3)}$、$\tau\in\mathcal{I}$ 和 $x\geq 1$ 一致有界。此外，对于所有足够大的 $|k|$，$G^{(3)}(x,t,k)=I$。

跳跃矩阵 $v_j^{(3)}$ 在 $j=4,6,7,9$ 上由 (7.1) 给出，且由下式给出

$$\begin{aligned}
&v_j^{(3)}:=v_j^{(2)},\ j=2,5,8,1_s,2_s,3_s,4_s, \qquad v_{5_s}^{(3)}:=v_{4u}^{(3)}v_{7u}^{(3)}, \qquad v_{6_s}^{(3)}:=v_{9d}^{(3)}v_{6d}^{(3)},\\
&v_{1_r}^{(3)}=(v_{6d}^{(3)})^{-1}v_{1_r}^{(2)}v_{6d}^{(3)}, \quad v_{2_r}^{(3)}=(v_6^{(2)})^{-1}v_{2_r}^{(2)}, \quad v_{3_r}^{(3)}=v_4^{(2)}v_{3_r}^{(2)}, \quad v_{4_r}^{(3)}=v_{4u}^{(3)}v_{4_r}^{(2)}(v_{4u}^{(3)})^{-1},\\
&v_{1_a}^{(3)}=v_{1_a}^{(2)}v_6^{(2)}, \qquad v_{4_a}^{(3)}=v_{4_a}^{(2)}(v_4^{(2)})^{-1}.
\end{aligned}\tag{7.4}$$

在 $\Gamma^{(3)}\cap\mathsf{S}$ 的图 8中未标注的子轮廓线上，矩阵 $v^{(3)}$ 接近 I，当 $x\to\infty$时，因此我们省略其显式表达式。在 $\Gamma^{(3)}\setminus\mathsf{S}$ 上，$v^{(3)}$ 可利用 (4.2) 得到。

下一个引理表明，当 x 较大时，$\Gamma_j^{(1)}$、$j=1_r,\dots,4_r$ 上的跳跃都一致地很小。

引理 7.2。 对于任意 $1\leq p\leq\infty$ 和 $j=1_r,2_r,3_r,4_r$，$v^{(3)}-I$ 在 $\Gamma_j^{(3)}$ 上的 L^p-范数为$O(x^{-N})$，当 $\tau\in\mathcal{I}$时关于 $x\to\infty$ 一致成立。

证明。我们有

$$v_{1_r}^{(3)}-I=(v_{6d}^{(3)})^{-1}(v_{1_r}^{(1)}-I)v_{6d}^{(3)}, \qquad v_{2_r}^{(3)}-I=(v_6^{(2)})^{-1}(v_{1_r}^{(1)}-I)v_6^{(2)}.$$

矩阵 $(v_{6d}^{(3)})^{\pm1}$ 和 $(v_6^{(2)})^{\pm1}$ 分别在 $\Gamma_{1_r}^{(3)}$ 和 $\Gamma_{2_r}^{(3)}$ 上一致有界。事实上，以 $v_{6d}^{(3)}$ 的 (13) 项为例，它由 $(v_{6d}^{(3)})_{13}=r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2k})e^{-\theta_{31}}$给出。利用引理 6.1，以及 $\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{\omega^2k})=\tilde\Phi_{31}(\tau,k)$在 $k\in\Gamma_{1_r}^{(3)}$ 上实部非负这一事实，可得

$$|(v_{6d}^{(3)}(x,t,k))_{13}|\leq Ce^{\frac{x}{4}|\operatorname{Re}\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{\omega^2k})|}e^{-x\operatorname{Re}\tilde\Phi_{31}(\tau,k)}\leq Ce^{-\frac{3x}{4}|\operatorname{Re}\tilde\Phi_{31}(\tau,k)|}\leq C$$

一致地，对于 $k\in\Gamma_{1_r}^{(3)}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$，如所求。另一方面，对于任意 $1\leq p\leq\infty$，L^p范数下，矩阵 $v_{1_r}^{(1)}-I$在 $[0,i]$ 上的量级为 $O(x^{-N})$，且对 $\tau\in\mathcal{I}$一致，由引理5.1(c)得证。这证明了所需结论 $j=1_r$，2_r；对于 $j=3_r$，4_r的证明类似。□

引理 7.3。 对于任意 $1\leq p\leq\infty$，$v^{(3)}-I$ 在 $\Gamma_{1_a}^{(3)}\cup\Gamma_{4_a}^{(3)}$ 上的 L^p范数为 $O(x^{-N})$，且当 $\tau\in\mathcal{I}$时一致成立。

证明。我们给出 $v_{1_a}^{(3)}$ 的证明；$v_{4_a}^{(3)}$ 的证明类似。我们有

$$v_{1_a}^{(3)}-I=\begin{pmatrix}0&0&\big(r_{1,a}(\frac{1}{k\omega^2})+r_{2,a}(k\omega^2)\big)e^{-\theta_{31}}\\ \big(\tilde r_{1,a}(\frac{1}{k})-r_{1,a}(\frac{1}{k})+\hat r_{2,a}(k)\big)e^{\theta_{21}}&0&(v_{1_a}^{(3)})_{23}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$(v_{1_a}^{(3)})_{23}:=\Big(\big(\tilde r_{1,a}(\tfrac{1}{k})-r_{1,a}(\tfrac{1}{k})\big)r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2k})-\big(r_{1,a}(\omega k)+r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega k})+r_{1,a}(\tfrac{1}{k})r_{2,a}(\omega^2k)\big)\Big)e^{-\theta_{32}}.$$

我们先估计 $v_{1_a}^{(3)}$ 的 (21) 元。引理 5.1（将 N 替换为 $2N$）表明

$$\left|\tilde r_{1,a}(\tfrac{1}{k})-\sum_{j=0}^{2N}\frac{\partial_k^j\big(r_1(\frac{1}{k})\big)\big|_{k=i}}{j!}(k-i)^j\right|\leq C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\operatorname{Re}\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{k})|}, \qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)},$$

类似地，引理 6.1 表明

$$\left|r_{1,a}(\tfrac{1}{k})-\sum_{j=0}^{2N}\frac{\partial_k^j\big(r_1(\frac{1}{k})\big)\big|_{k=i}}{j!}(k-i)^j\right|\le C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{k})|},\qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}.\tag{7.5}$$

因此，应用三角不等式和恒等式 $\mathrm{Re}\ \tilde\Phi_{21}(\tau,\ \frac{1}{k})=-\mathrm{Re}\ \tilde\Phi_{21}(\tau,\ k)$,

$$\left|\tilde r_{1,a}(\tfrac{1}{k})-r_{1,a}(\tfrac{1}{k})\right|\le 2C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,k)|}.\tag{7.6}$$

另一方面，函数 $\hat{}r_2(k)$ 在 $k=i$ 处的各阶导数均为零，并且存在一个$c>0$ 使得 $\mathrm{Re}\ \tilde\Phi_{21}(\tau,\ k)\le -c|k-i|^2$ 对 $k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$ 一致成立。因此，利用（ 7.6 ）以及引理 6.1 推出的 $\hat{}r_{2,\ a}(k)$ 的估计，我们得到

$$|(v_{1_a}^{(3)}(x,t,k))_{21}|\le C|k-i|^{2N+1}e^{-\frac{3}{4}x|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,k)|}\le C|k-i|^{2N+1}e^{-cx|k-i|^2}\le Cx^{-N}$$

对于 $k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$，由此得到 $v_{1_a}^{(3)}-I$ 的 (21) 元所需的估计。

接下来考虑 $v_{1_a}^{(3)}$ 的 (23) 元。我们有 $(v_{1_a}^{(3)})_{23}=(g_a(k)-h_a(k))e^{-x\tilde\Phi_{32}(\tau,\ k)}$，其中

$$g_a(k):=\big(\tilde r_{1,a}(\tfrac{1}{k})-r_{1,a}(\tfrac{1}{k})\big)r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2k}),\quad h_a(k):=r_{1,a}(\omega k)+r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega k})+r_{1,a}(\tfrac{1}{k})r_{2,a}(\omega^2k).$$

Rec代入（7.6）并利用引理 6.1估计 $r_{1,\ a}(\frac{1}{\omega^2k})$ ，可得界

$$\left|g_a(k)e^{-x\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}\right|\le C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,k)|}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{\omega^2k})|}e^{-x|\tilde\Phi_{32}(\tau,k)|}.$$

由于 $-\tilde\Phi_{21}(\tau,k)+\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{\omega^2k})=\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega k)=\tilde\Phi_{32}(\tau,k)$，因此上式可改写为 s

$$\begin{aligned}\left|g_a(k)e^{-x\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}\right|&\le C|k-i|^{2N+1}e^{-x(\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{32}(\tau,k)-\frac{1}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega k)|)}\\&\le C|k-i|^{2N+1}e^{-\frac{3x}{4}\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

另一方面，考虑关系式（4.4），并将 k 替换为 $\frac{1}{\omega^2k}$，可推知函数 —

$$h(k):=r_1(\omega k)+r_2(\tfrac{1}{\omega k})+r_1(\tfrac{1}{k})r_2(\omega^2k)$$

在 $k=i$ 处消失至任意阶。因此，由于当 $k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}$ （参见图3）时，$\mathrm{Re}\ \tilde\Phi_{32}(\tau,k)\ge c|k-i|$,

$$\begin{aligned}\left|h_a(k)e^{-x\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}\right|&\le|h_a(k)-h(k)|e^{-x\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}+|h(k)|e^{-x\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}\\&\le|h_a(k)-h(k)|e^{-x\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{32}(\tau,k)}+Cx^{-N}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

为估计 $|h_a(k)-h(k)|$，注意到引理 6.1 给出

$$\left|r_{1,a}(\omega k)-\sum_{j=0}^{2N}\frac{\partial_k^j\big(r_1(\omega k)\big)\big|_{k=i}}{j!}(k-i)^j\right|\le C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega k)|},\qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)},$$

$$\left|r_{2,a}(\omega^2k)-\sum_{j=0}^{2N}\frac{\partial_k^j\big(r_2(\omega^2k)\big)\big|_{k=i}}{j!}(k-i)^j\right|\le C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega^2k)|},\qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)},$$

$$\left|r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega k})-\sum_{j=0}^{2N}\frac{\partial_k^j\big(r_2(\frac{1}{\omega k})\big)\big|_{k=i}}{j!}(k-i)^j\right|\le C|k-i|^{2N+1}e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde\Phi_{21}(\tau,\frac{1}{\omega k})|},\qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)},$$

对 $\tau\in\mathcal{I}$ 一致成立。恒等式

$$\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega k)=-\tilde\Phi_{21}(\tau,\tfrac{1}{\omega k})=\tilde\Phi_{21}(\tau,\tfrac{1}{k})-\tilde\Phi_{21}(\tau,\omega^2k),\qquad k\in\mathbb{C},$$

连同图3，可知

$$|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega k)| = |\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\tfrac{1}{\omega k})| = |\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\tfrac{1}{k})| + |\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega^2 k)|, \qquad k\in\Gamma_{1_a}^{(3)},$$

因此，同时利用（7.5）及关系式 $\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega k) = \tilde{\Phi}_{32}(\tau,k)$，

$$\begin{aligned}|h_a(k)-h(k)|e^{-x\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{32}(\tau,k)} &\le C|k-i|^{2N+1}e^{-x(|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{32}(\tau,k)|-\frac{1}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\omega k)|)}\\ &\le C|k-i|^{2N+1}e^{-\frac{3x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{32}(\tau,k)|}\end{aligned} \tag{7.9}$$

对于 $k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$。必要时缩小透镜区域的范围，便存在一个 $c>0$使得

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{32}(\tau,k)\ge c|k-i| \tag{7.10}$$

对 $k\in\Gamma_{1_a}^{(3)}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$，该结论一致成立。结合不等式（7.7）、（7.8）、（7.9）和（7.10），可得

$$|(v_{1_a}^{(3)}(x,t,k))_{23}|\le C|k-i|^{2N+1}e^{-c|k-i|}+Cx^{-N}\le Cx^{-N},$$

这就证明了 $v_{1_a}^{(3)}-I$ 的（23）元所需的估计；（13）元可用类似方法处理，因为 $r_1(\frac{1}{k\omega^2})+r_2(k\omega^2)$ 在 $k=i$ 处消失至任意阶（这可由（4.4）推出，其中将 k 替换为 ωk，并假设 $r_1(k)$ 在 $k=i$ 处消失至任意阶）。□

下一个引理的证明方法与 [4, 引理 6。3]相同。

引理 7.4。可以选择引理 *6.1* 中的解析近似，使得L^∞-范数 $v_j^{(3)}-I$ 在 $\Gamma_j^{(3)}$，$j=1_s,\dots,6_s$ 上为 $O(x^{-N})$，当 $x\to\infty$ 时关于 $\tau\in\mathcal{I}$一致成立。

利用引理7.2、7.3和7.4，我们得出 $v^{(3)}-I=O(x^{-N})$，当 $x\to\infty$时，对 $k\in\Gamma^{(3)}\setminus\big(\cup_{j=0}^{2}\cup_{\ell=1}^{2}D_\epsilon(\omega^j k_\ell)\cup\partial\mathbb{D}\big)$一致成立。

8. Global parametrix

For 对每个 $\tau\in\mathcal{I}$，令 $\delta(\tau,\cdot):\mathbb{C}\setminus\Gamma_5^{(3)}\to\mathbb{C}$ 为满足跳跃条件的函数

$$\delta_+(\tau,k)=\delta_-(\tau,k)(1+r_1(k)r_2(k)),\qquad k\in\Gamma_5^{(3)},$$

以及归一化条件 $\delta(\tau,k)=1+O(k^{-1})$，其中 $k\to\infty$。如前所述（参见（6.1）下方的正文），$1+r_1(k)r_2(k)>1$ 对所有 $k\in\Gamma_5^{(3)}$ 均成立。因此，取对数并使用普勒梅利公式，可得

$$\delta(\tau,k)=\exp\left\{\frac{-1}{2\pi i}\int_i^{k_1}\frac{\ln(1+r_1(s)r_2(s))}{s-k}ds\right\},\qquad k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_5^{(3)}, \tag{8.1}$$

其中积分路径沿单位圆逆时针方向，且对数取主值分支。

引理 8.1。函数 $\delta(\tau,k)$ 具有以下性质：

(a) $\delta(\tau,k)$ 可表示为

$$\delta(\tau,k)=e^{-i\nu\ln_{k_1}(k-k_1)}e^{-\chi(\tau,k)}, \tag{8.2}$$

$$\chi(\tau,k)=\frac{-1}{2\pi i}\int_i^{k_1}\ln_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)), \tag{8.3}$$

其中积分路径沿 $\partial\mathbb{D}$ 逆时针方向，且 $\nu\le 0$ 定义见 (2.9)。

对于 $s\in\bar{\Gamma}_5^{(3)}$，$k\mapsto\ln_s(k-s)=\ln|k-s|+i\arg_s(k-s)$ 沿着 $\{e^{i\theta}$ 有割线：$\theta\in[\frac{\pi}{2},\arg s]$，$\arg s\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]\}\cup(i,i\infty)$ 以及 $\arg_s(1)=2\pi$。

(*b*) 对于每个 h $\tau\in\mathcal{I}$, $\delta(\tau,k)$ 和 $\delta(\tau,k)^{-1}$ 是关于 $k\in\mathbb{C}\backslash\Gamma_5^{(3)}$ 的解析函数。此外，

$$\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\sup_{k\in\mathbb{C}\backslash\Gamma_5^{(3)}}|\delta(\tau,k)^{\pm1}|<\infty.$$

(*c*) 对于 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\Gamma_5^{(3)}$，

$$\operatorname{Re}\chi(\tau,k)=\frac{\pi+\arg_i k}{2}\nu+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(3)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\tag{8.4}$$

其中 $\arg_i k\in(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ 且 $\arg s\in(-\pi,\pi)$。特别地，对于 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\Gamma_5^{(3)}$，$|\delta(\tau,k)|$ 为常数，且由下式给出

$$|\delta(\tau,k)|=\exp\left(\nu\frac{\arg k_1}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(3)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))\right),\tag{8.5}$$

其中 $\arg k_1\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$。

(*d*) 当 $k\to k_1$ 沿着一条与 $\Gamma_5^{(3)}$ 非切向的路径变化时，我们有

$$|\chi(\tau,k)-\chi(\tau,k_1)|\le C|k-k_1|(1+|\ln|k-k_1||),\tag{8.6}$$

其中 C 与 $\tau\in\mathcal{I}$ 无关。

(*e*) 当 $k\to\infty$ 时，

$$\delta(\tau,k)=e^{\frac{1}{2\pi ik}\int_i^{k_1}\ln(1+r_1(s)r_2(s))ds+O(k^{-2})}.\tag{8.7}$$

证明。 为证明第 (*a*) 部分，只需对 (8.1) 进行分部积分。第 (*b*) 部分则由 (8.2) 以及 Im $\nu=0$ 这一事实得出。由 (8.3)，对于 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\Gamma_5^{(3)}$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\chi(\tau,k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(3)}}\arg_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s))\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(3)}}\frac{\pi+\arg_i k+\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\end{aligned}$$

而 (8.4) 则由假设 $r_1=0$ 在 $[0,i]$ 上以及 2.9) 中 ν 的定义得出。由 (8.2)，

$$|\delta(\tau,k)|=e^{\nu\arg_{k_1}(k-k_1)}e^{-\operatorname{Re}\chi(\tau,k)}.$$

将 (8.4) 和 $\arg_{k_1}(k-k_1)=\pi+\arg_i k+\arg_2$ k_1 代入上式后，即得 ~~(8.5)。至此，~~ 第 (*c*) 部分的证明完成。利用 (8.3) 和标准估计可得第 (*e*) 部分，而第 (8.1) 部分则由 (8.1) 直接得到。□

对于 $\tau\in\mathcal{I}$ 和 $k\in\mathbb{C}\setminus\partial\mathbb{D}$，令 $\{\Delta_{jj}(\tau,k)\}_{j=1}^3$ 定义为

$$\Delta_{33}(\tau,k)=\frac{\delta(\tau,\omega k)}{\delta(\tau,\omega^2k)}\frac{\delta(\tau,\frac{1}{\omega^2k})}{\delta(\tau,\frac{1}{\omega k})},\quad\Delta_{11}(\tau,k)=\Delta_{33}(\tau,\omega k),\quad\Delta_{22}(\tau,k)=\Delta_{33}(\tau,\omega^2k).$$

我们有 $\Delta_{33}(\tau,\frac{1}{k})=\Delta_{33}(\tau,k)$，并利用 (8.7)，

$$\begin{aligned}\Delta_{33}(\tau,k)&=e^{\frac{1}{2\pi i}(\frac{1}{\omega k}-\frac{1}{\omega^2k})\int_i^{k_1}\ln(1+r_1(s)r_2(s))(1+s^{-2})ds+O(k^{-2})}\\&=1-\frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\int_i^{k_1}\ln(1+r_1(s)r_2(s))(1+s^{-2})ds+O(k^{-2}),\qquad k\to\infty.\end{aligned}\tag{8.8}$$

我们将全局参数子的逆定义为

$$\Delta(\tau,k)=\begin{pmatrix}\Delta_{11}(\tau,k)&0&0\\0&\Delta_{22}(\tau,k)&0\\0&0&\Delta_{33}(\tau,k)\end{pmatrix},\quad\tau\in\mathcal{I},\ k\in\mathbb{C}\setminus\partial\mathbb{D}.\tag{8.9}$$

它满足以下对称性

$$\Delta(\tau,k)=\mathcal{A}\Delta(\tau,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}\Delta(\tau,\tfrac{1}{k})\mathcal{B},$$

并满足

$$\Delta_+^{-1}(\tau,k)=\Delta_-^{-1}(\tau,k)\begin{pmatrix}1+r_1(k)r_2(k) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1+r_1(k)r_2(k)} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad k\in\Gamma_5^{(3)},\tag{8.10a}$$

$$\Delta_+^{-1}(\tau,k)=\Delta_-^{-1}(\tau,k),\qquad k\in\Gamma_2^{(3)}\cup\Gamma_8^{(3)}.\tag{8.10b}$$

利用（8.9）和引理8.1，我们推导出以下结果。

引理8.2。 $\Delta(\tau,k)$ 和 $\Delta(\tau,k)^{-1}$ 对于 $k\in\mathbb{C}\setminus\partial\mathbb{D}$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$一致有界。此外， $\Delta(\tau,k)=I+O(k^{-1})$ 当 $k\to\infty$时。

9. The $n^{(3)}\to n^{(4)}$ transformation

第四次变换 $n^{(3)}\to n^{(4)}$ 的目的是使 $v^{(4)}-I$ 对于 $|k|=1$在 $x\to\infty$ 时一致地趋于零。令 $n^{(4)}$ 由下式给出

$$n^{(4)}(x,t,k)=n^{(3)}(x,t,k)\Delta(\tau,k),\qquad k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(4)},\tag{9.1}$$

其中 $\Gamma^{(4)}=\Gamma^{(3)}$。该函数在 $\Gamma^{(4)}$上满足 $n_+^{(4)}=n_-^{(4)}v^{(4)}$，其中 $v^{(4)}=\Delta_-^{-1}v^{(3)}\Delta_+$。我们定义一个以 k_1 为中心的小十字形区域 $\mathcal{X}^\epsilon:=\cup_{j=1}^4\mathcal{X}_j^\epsilon$，其中

$$\mathcal{X}_1^\epsilon=\Gamma_4^{(4)}\cap D_\epsilon(k_1),\quad \mathcal{X}_2^\epsilon=\Gamma_7^{(4)}\cap D_\epsilon(k_1),\quad \mathcal{X}_3^\epsilon=\Gamma_9^{(4)}\cap D_\epsilon(k_1),\quad \mathcal{X}_4^\epsilon=\Gamma_6^{(4)}\cap D_\epsilon(k_1),$$

从 k_1 向外定向。我们还将以 $\{\omega^jk_1,\omega^jk_2\}_{j=0}^2$ 为中心的六个小十字形区域的并集定义为 $\hat{}\mathcal{X}^\epsilon=\mathcal{X}^\epsilon\cup\omega\mathcal{X}^\epsilon\cup\omega^2\mathcal{X}^\epsilon\cup(\mathcal{X}^\epsilon)^{-1}\cup(\omega\mathcal{X}^\epsilon)^{-1}\cup(\omega^2\mathcal{X}^\epsilon)^{-1}$。

引理9.1。 $v^{(4)}$ 收敛到单位矩阵 I，当 $x\to\infty$ 时，对 $\tau\in\mathcal{I}$ 和 $k\in\Gamma^{(4)}\setminus\hat{}\mathcal{X}^\epsilon$ 一致收敛。更确切地说，对于 $\tau\in\mathcal{I}$，

$$\|v^{(4)}-I\|_{(L^1\cap L^\infty)(\Gamma^{(4)}\setminus\hat{\mathcal{X}}^\epsilon)}\le Cx^{-N}.\tag{9.2}$$

证明。 利用 6.2、6.3、6.4 和 7.4，以及 Δ 的跳跃 8.10，得到

$$v_j^{(4)}=\Delta_-^{-1}v_j^{(3)}\Delta_+=I+\Delta_-^{-1}v_{j,r}^{(3)}\Delta_+,\quad j=2,5,8.$$

利用引理 6.1 和 8.2，我们推知矩阵 $\Delta_-^{-1}v_j^{(3)}$、$_r\Delta_+$、$j=2$、5、8，当 $x\to\infty$时为 $O(x^{-N})$。再利用引理 7.2、7.3 和 7.4，我们得出， $v^{(4)}-I$ 的 L^1 范数和 L^∞ 范数，当 $x\to\infty$时为 $O(x^{-N})$，且对 $\tau\in\mathcal{I}$ 和 $k\in\mathsf{S}\cap\Gamma^{(4)}\setminus\hat{}\mathcal{X}^\epsilon$一致成立。于是 (9.2) 直接由 (4.2) 得出。□

矩阵 $v^{(4)}-I$ 在 $\hat{}\mathcal{X}^\epsilon$ 上并非一致地足够小。下一节的目标是构造一个局部参数模型，在 k_1 的邻域内近似 $n^{(4)}$。随后将利用 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 对称性，得到 $\{k_2,\omega k_1,\omega k_2,\omega^2k_1,\omega^2k_2\}$ 附近的局部参数子。

10. Local parametrix near k_1

由于 $k\to k_1$，我们有

$$\tilde\Phi_{21}(\tau,k)-\tilde\Phi_{21}(\tau,k_1)=\tilde\Phi_{21,k_1}(k-k_1)^2+O((k-k_1)^3),\qquad \tilde\Phi_{21,k_1}=\frac{4\tau-3k_1-k_1^3}{4k_1^4}.$$

设 $z=z(x,\ \tau,\ k)$ 定义为

$$z=z_\star\sqrt{x}(k-k_1)\hat z,\qquad \hat z=\sqrt{\frac{2i(\tilde\Phi_{21}(\tau,k)-\tilde\Phi_{21}(\tau,k_1))}{z_\star^2(k-k_1)^2}},$$

其中，$\hat{z}=\hat{z}(\tau,\ k)$ 取主值分支，并且

$$z_\star=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\tilde{\Phi}_{21,k_1}},\qquad -ik_1z_\star>0.$$

我们有 $\hat{z}(\tau,\ k_1)=1$，且 $x(\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\ k)-\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\ k_1))=-\frac{iz^2}{2}$。我们固定 $\epsilon>0$，并将其选得足够小，使函数 z 从 $D_\epsilon(k_1)$ 保角映射到 0 的一个邻域。当 $k\to k_1$ 时，

$$z=z_\star\sqrt{x}(k-k_1)(1+O(k-k_1)),$$

并且对于所有 $k\in D_\epsilon(k_1)$，我们有

$$\ln_{k_1}(k-k_1)=\ln_0[z_\star(k-k_1)\hat{z}]-\ln\hat{z}-\ln z_\star$$

其中 $\ln_0(k):=\ln|k|+i\arg_0 k$，$\arg_0(k)\in(0,\ 2\pi)$，且 ln 是主值对数。必要时缩小 $\epsilon>0$，则 $k\mapsto\ln\hat{z}$ 在 $D_\epsilon(k_1)$ 中解析，且当 $k\to k_1$ 时 $\ln\hat{z}=O(k-k_1)$，并且

$$\ln z_\star=\ln|z_\star|+i\arg z_\star=\ln|z_\star|+i\big(\tfrac{\pi}{2}-\arg k_1\big),$$

其中 $\arg k_1\in(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$。根据（8.2），有

$$\delta(\tau,k)=e^{-i\nu\ln_{k_1}(k-k_1)}e^{-\chi(\tau,k)}=e^{-i\nu\ln_0 z}x^{\frac{i\nu}{2}}e^{i\nu\ln\hat{z}}e^{i\nu\ln z_\star}e^{-\chi(\tau,k)}.$$

下文中，为简洁起见，我们将使用记号 $z^{-i\nu}{}_{(0)}:=e^{-i\nu\ln^0 z}$、$\hat{z}^{i\nu}:=e^{i\nu\ln\hat{z}}$ 以及 $z_\star^{i\nu}:=e^{i\nu\ln z_\star}$，于是

$$\delta(\tau,k)=z_{(0)}^{-i\nu}x^{\frac{i\nu}{2}}\hat{z}^{i\nu}z_\star^{i\nu}e^{-\chi(\tau,k)}.$$

由此得到

$$\frac{\Delta_{11}(\tau,k)}{\Delta_{22}(\tau,k)}=\frac{\delta(\frac{1}{k})^2\delta(\omega k)\delta(\omega^2k)}{\delta(k)^2\delta(\frac{1}{\omega^2k})\delta(\frac{1}{\omega k})}=z_{(0)}^{2i\nu}d_0(x,\tau)d_1(\tau,k),\tag{10.1}$$

$$d_0(x,\tau)=e^{2\chi(\tau,k_1)}x^{-i\nu}z_\star^{-2i\nu}\frac{\delta(\frac{1}{k_1})^2\delta(\omega k_1)\delta(\omega^2k_1)}{\delta(\frac{1}{\omega^2k_1})\delta(\frac{1}{\omega k_1})},\tag{10.2}$$

$$d_1(\tau,k)=e^{2(\chi(\tau,k)-\chi(\tau,k_1))}\hat{z}^{-2i\nu}\frac{\delta(\frac{1}{k})^2\delta(\omega k)\delta(\omega^2k)}{\delta(\frac{1}{\omega^2k})\delta(\frac{1}{\omega k})}\left(\frac{\delta(\frac{1}{k_1})^2\delta(\omega k_1)\delta(\omega^2k_1)}{\delta(\frac{1}{\omega^2k_1})\delta(\frac{1}{\omega k_1})}\right)^{-1}.$$

定义

$$Y(x,\tau)=d_0(x,\tau)^{-\frac{\tilde{\sigma}_3}{2}}\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{4}\tilde{\sigma}_3}e^{-\frac{x}{2}\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)\tilde{\sigma}_3},$$

其中 $\tilde{\sigma}_3=$对角矩阵 $(1,\ -1,\ 0)$ 以及 $\tilde{r}(k_1)^{\pm\frac{1}{4}}>0$。对于 $k\in D_\epsilon(k_1)$，定义

$$\tilde{n}(x,t,k)=n^{(4)}(x,t,k)Y(x,\tau).\tag{10.3}$$

设 $\tilde{v}$ 为 $\tilde{n}$的跳跃矩阵，并设 $\tilde{v}_j$ 为 $\tilde{v}$ 在 $\Gamma_j^{(4)}\cap D_\epsilon(k_1)$上的限制。根据（7.1）、（9.1）和（10.1），有

$$\tilde{v}_4=\begin{pmatrix}1&\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}\hat{r}_{1,a}(k)d_1^{-1}z_{(0)}^{-2i\nu}e^{\frac{iz^2}{2}}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \tilde{v}_7=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}}r_{2,a}(k)d_1z_{(0)}^{2i\nu}e^{-\frac{iz^2}{2}}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_9=\begin{pmatrix}1&-\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}r_{1,a}(k)d_1^{-1}z_{(0)}^{-2i\nu}e^{\frac{iz^2}{2}}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \tilde{v}_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}}\hat{r}_{2,a}(k)d_1z_{(0)}^{2i\nu}e^{-\frac{iz^2}{2}}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

定义 $q:=-\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}}r_2(k_1)$，并注意到 $-\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}r_1(k_1)=\bar{q}$，$1+r_1(k_1)r_2(k_1)=1+|q|^2$以及 $\nu=-\frac{1}{2\pi}\ln(1+|q|^2)$。我们还有 $d_1(\tau,\ k_1)=1$。因此，我们预期 $\tilde{n}$ 应当

接近于 $(1,\ 1,\ 1)Y\tilde{m}^{k_1}$，其中 $\tilde{m}^{k_1}(x,\ t,\ k)$ 对于 $k \in D_\epsilon(k_1) \setminus \mathcal{X}^\epsilon$ 是解析的，并在 $\mathcal{X}^\epsilon$ 上满足 $\tilde{m}_+^{k_1} = \tilde{m}_-^{k_1}\tilde{v}_{\mathcal{X}^\epsilon}^X$，且

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_1^\epsilon}^X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}} r_1(k_1)}{1+r_1(k_1)r_2(k_1)} z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\bar{q}}{1+|q|^2} z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_2^\epsilon}^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} r_2(k_1) z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_3^\epsilon}^X = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}} r_1(k_1) z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{q} z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_4^\epsilon}^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} r_2(k_1)}{1+r_1(k_1)r_2(k_1)} z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-q}{1+|q|^2} z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

并且满足 $\tilde{m}^{k_1}(x,\ t,\ k) \to I$ 当 $t \to \infty$ 时，关于 $k \in \partial D_\epsilon(k_1)$ 一致成立。令 m^{k_1} 为

$$m^{k_1}(x,t,k) = Y(x,\tau) m^X(q, z(x,\tau,k)) Y(x,\tau)^{-1}, \qquad k \in D_\epsilon(k_1), \tag{10.4}$$

其中 m^X 是引理 A.1 中模型RH问题的唯一解。

引理 10.1。函数 $Y(x,\tau)$ 一致有界：

$$\sup_{\tau\in\mathcal{I}} \sup_{x\geq 2} |Y(x,\tau)^{\pm 1}| \leq C. \tag{10.5}$$

此外，$d_0(x,\tau)$ 和 $d_1(\tau,k)$ 满足

$$|d_0(x,\tau)| = e^{2\pi\nu}, \qquad x \geq 2,\ \tau \in \mathcal{I}, \tag{10.6}$$

$$|d_1(\tau,k) - 1| \leq C|k-k_1|(1 + |\ln|k-k_1||), \qquad \tau \in \mathcal{I},\ k \in \mathcal{X}^\epsilon. \tag{10.7}$$

证明。不等式（10.5）和（10.7）是引理 8.1 的直接推论。现在转而证明（10.6）。回想 $\nu \in \mathbb{R}$。因此，由（10.2），

$$|d_0(x,\tau)| = e^{2\operatorname{Re}\chi(\tau,k_1)} e^{2\nu \arg z_\star} \left| \frac{\delta(\frac{1}{k_1})^2 \delta(\omega k_1)\delta(\omega^2 k_1)}{\delta(\frac{1}{\omega^2 k_1})\delta(\frac{1}{\omega k_1})} \right|. \tag{10.8}$$

还要回忆一下，$\arg z_\star = \frac{\pi}{2} - \arg k_1$。利用（8.5），得到

$$\left| \frac{\delta(\frac{1}{k_1})^2 \delta(\omega k_1)\delta(\omega^2 k_1)}{\delta(\frac{1}{\omega^2 k_1})\delta(\frac{1}{\omega k_1})} \right| = \exp\left(\nu \arg k_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_5^{(3)}} \arg s \, d\ln(1 + r_1(s) r_2(s)) \right). \tag{10.9}$$

将（8.4）（用 k 替换为 k_1）和（10.9）代入（10.8），可得（10.6）。 □

在下一个引理的陈述中以及下文中，$C_N(\tau)$ 表示 τ 的一个通用非负光滑函数，它在 $\tau = 0$ 处具有任意阶消失。

引理 *10.2.* 对每个 $x \geq 2$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$，在 *(10.4)* 中定义的 $m^{k_1}(x,t,k)$ 关于 $k \in D_\epsilon(k_1) \setminus \mathcal{X}^\epsilon$ 是解析的。此外，$m^{k_1}(x,t,k)$ 关于 $x \geq 2$，$\tau \in \mathcal{I}$ 和 $k \in D_\epsilon(k_1) \setminus \mathcal{X}^\epsilon$ 是一致有界的。在 $\mathcal{X}^\epsilon$ 上，m^{k_1} 满足 $m_+^{k_1} = m_-^{k_1} v^{k_1}$，其中跳跃矩阵 v^{k_1} 满足

$$\begin{cases} \|v^{(4)} - v^{k_1}\|_{L^1(\mathcal{X}^\epsilon)} \leq C_N(\tau) x^{-1} \ln x, \\ \|v^{(4)} - v^{k_1}\|_{L^\infty(\mathcal{X}^\epsilon)} \leq C_N(\tau) x^{-1/2} \ln x, \end{cases} \qquad x \geq 2,\ \tau \in \mathcal{I}. \tag{10.10}$$

此外，当 $x \to \infty$ 时，

$$\|m^{k_1}(x,t,\cdot) - I\|_{L^\infty(\partial D_\epsilon(k_1))} \le C_N(\tau) x^{-1/2}, \tag{10.11}$$

$$m^{k_1}(x,t,k) - I = \frac{Y(x,\tau) m_1^X(q) Y(x,\tau)^{-1}}{z_\star \sqrt{x}(k-k_1)\hat{z}(\tau,k)} + O(C_N(\tau)x^{-1}) \tag{10.12}$$

对 $\tau \in \mathcal{I}$一致成立，其中 $m_1^X(q)$ 由 (A.3) 给出，且 $q = -\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} r_2(k_1)$.

证明。由（10.3）和（10.4），可得 $v^{(4)} - v^{k_1} = Y(\tilde{v} - v^X)Y^{-1}$。因此，根据引理10.1，只要证明 10.10）中的估计成立，我们只需证明

$$\|\tilde{v}(x,t,\cdot) - v^X(x,t,z(x,\tau,\cdot))\|_{L^1(\mathcal{X}_j^\epsilon)} \le C_N(\tau) x^{-1} \ln x, \tag{10.13a}$$

$$\|\tilde{v}(x,t,\cdot) - v^X(x,t,z(x,\tau,\cdot))\|_{L^\infty(\mathcal{X}_j^\epsilon)} \le C_N(\tau) x^{-1/2} \ln x, \tag{10.13b}$$

对 $j = 1, \ldots, 4$。我们证明 10.13）对 $j = 4$成立；当 $j = 1, 2, 3$ 时，类似论证同样适用。

对于 $k \in \mathcal{X}_4^\epsilon$，矩阵 $\tilde{v} - v^X$ 只有 (21) 元非零。由引理 6.1可知，$|r_{2,a}(k)| \le C_N(\tau) e^{\frac{x}{4}|\text{实部 } \Phi_{21}(\tau,k)|}$对所有 $k \in \mathcal{X}_4^\epsilon$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$ 均成立。再利用恒等式

$$\frac{-q}{1+|q|^2} = \tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} \hat{r}_2(k_1), \qquad \left|e^{-\frac{iz_1^2}{2}}\right| = e^{-\mathrm{Re}\left(\frac{iz_1^2}{2}\right)} = e^{-\frac{|z_1|^2}{2}},$$

以及引理 6.1，我们得出，对于 $k \in \mathcal{X}_4^\epsilon$，

$$\begin{aligned}
|(\tilde{v} - v^X)_{21}| &= \left| \tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} \hat{r}_{2,a}(k) d_1 z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} - \frac{-q}{1+|q|^2} z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} \right| \\
&= \left|z_{(0)}^{2i\nu}\right| \left| (d_1 - 1)\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} \hat{r}_{2,a}(k) + \tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{r}_{2,a}(k) - \hat{r}_2(k_1)\right) \right| \left| e^{-\frac{iz^2}{2}} \right| \\
&\le C \Big(|d_1 - 1||\hat{r}_{2,a}(k)| + |\hat{r}_{2,a}(k) - \hat{r}_2(k_1)| \Big) e^{-\frac{|z|^2}{2}} \\
&\le C_N(\tau) \Big(|d_1 - 1| + |k - k_1| \Big) e^{\frac{x}{4}|\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k)|} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \\
&\le C_N(\tau) \Big(|d_1 - 1| + |k - k_1| \Big) e^{-cx|k-k_1|^2}.
\end{aligned}$$

利用（10.7），可得

$$|(\tilde{v} - v^X)_{21}| \le C_N(\tau)|k-k_1|(1 + |\ln|k-k_1||) e^{-cx|k-k_1|^2}, \qquad k \in \mathcal{X}_4^\epsilon.$$

因此

$$\|\tilde{v} - v^X\|_{L^1(\mathcal{X}_4^\epsilon)} \le C_N(\tau) \int_0^\infty u(1 + |\ln u|) e^{-cxu^2} du \le C_N(\tau) x^{-1} \ln x,$$

$$\|\tilde{v} - v^X\|_{L^\infty(\mathcal{X}_4^\epsilon)} \le C_N(\tau) \sup_{u \ge 0} u(1 + |\ln u|) e^{-cxu^2} \le C_N(\tau) x^{-1/2} \ln x,$$

这就完成了（10.13）的证明，因此也完成了（10.10）的证明。

对于 $k \in \partial D_\epsilon(k_1)$，我们有 $|z| = |z_\star|\sqrt{x}|k - k_1| \ge c\sqrt{x}$，因此变量 z 在 $x \to \infty$时趋于无穷大。因此可以利用（A.3）推得

$$m^X(q, z(x,\tau,k)) = I + \frac{m_1^X(q)}{z_\star \sqrt{x}(k-k_1)\hat{z}(\tau,k)} + O(qx^{-1}), \qquad x \to \infty,$$

对 $k \in \partial D_\epsilon(k_1)$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$一致成立。回顾 10.4 式中 m^{k_1} 的定义，可得

$$m^{k_1} - I = \frac{Y(x,\tau) m_1^X(q) Y(x,\tau)^{-1}}{z_\star \sqrt{x}(k-k_1)\hat{z}(\tau,k)} + O(qx^{-1}), \qquad x \to \infty, \tag{10.14}$$

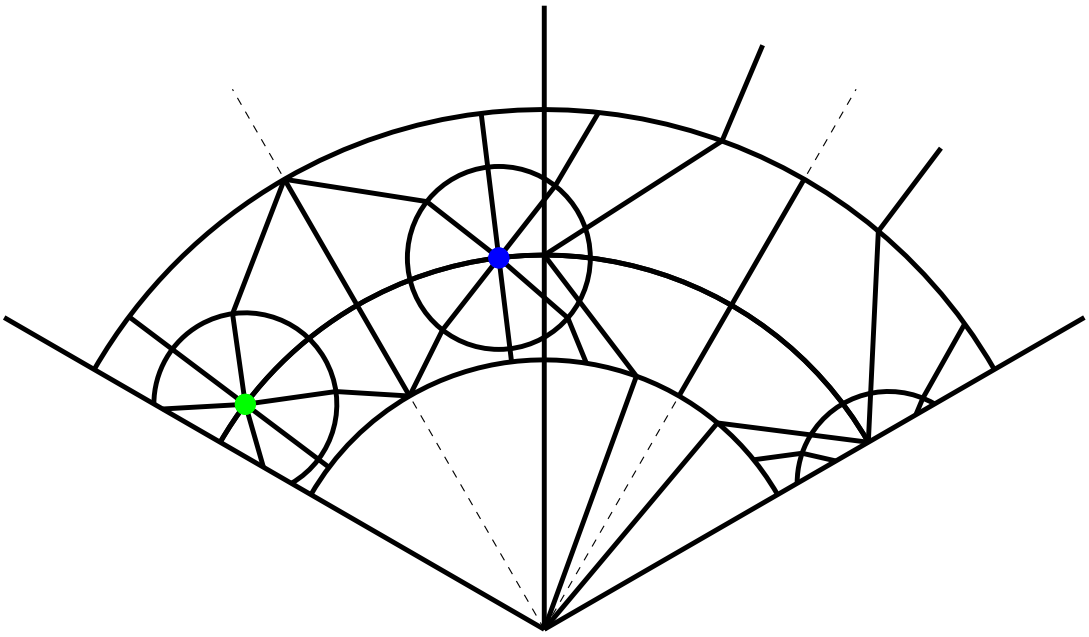

图 9. $\Gamma = \Gamma^{(4)} \cup \partial\mathcal{D}$ 的轮廓线$\hat{}$（$\arg k \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$，实线）、S 的边界（虚线），以及鞍点 k_1（蓝色）和 $\omega^2 k_2$（绿色）。

对 $k \in \partial D_\epsilon(\omega k_4)$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$ 一致成立。由于 $r_2(k)$ 在 $k = i$ 处具有任意阶零点，且 $q = -\tilde{r}(k_1)^{-\frac{1}{2}} r_2(k_1)$，可知 $|q| = O(C_N(\tau))$。由于当 $q \to 0$ 时，$m_1^X(q) = O(q)$，估计式 (10.11) 和 (10.12) 是 (10.14) 的推论。□

11. The $n^{(4)} \to \hat{n}$ transformation

对称性

$$m^{k_1}(x,t,k) = \mathcal{A} m^{k_1}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B} m^{k_1}(x,t,k^{-1})\mathcal{B}$$

这些对称性使我们能够将 m^{k_1} 的定义域从 $D_\epsilon(k_1)$ 扩展至 $\mathcal{D}$，其中 $\mathcal{D} := D_\epsilon(k_1) \cup \omega D_\epsilon(k_1) \cup \omega^2 D_\epsilon(k_1) \cup D_\epsilon(k_1^{-1}) \cup \omega D_\epsilon(k_1^{-1}) \cup \omega^2 D_\epsilon(k_1^{-1})$。如有必要，缩小 $\tau_{\max}$，我们可以假设对于所有 $\tau \in \mathcal{I}$，i 都属于 $D_\epsilon(k_1)$。我们的下一个目标是证明

$$\hat{n} := \begin{cases} n^{(4)}(m^{k_1})^{-1}, & k \in \mathcal{D}, \\ n^{(4)}, & \text{elsewhere}, \end{cases} \tag{11.1}$$

当 I 足够大时，x 且 $\tau \in \mathcal{I}$。令 $\hat{\Gamma} = \Gamma^{(4)} \cup \partial\mathcal{D}$ 为图9所示的轮廓线，并将 $\partial\mathcal{D}$ 中包含的每个圆都按顺时针方向定向。定义

$$\hat{v} = \begin{cases} v^{(4)}, & k \in \hat{\Gamma} \setminus \bar{\mathcal{D}}, \\ m^{k_1}, & k \in \partial\mathcal{D}, \\ m_-^{k_1} v^{(4)} (m_+^{k_1})^{-1}, & k \in \hat{\Gamma} \cap \mathcal{D}. \end{cases} \tag{11.2}$$

$\hat{}$ 我们将 Γ 的自交点集合记为 $\Gamma_\star$。函数 $\hat{n}$ 满足以下 Riemann–Hilbert 问题：(a) $\hat{n}: \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma} \to \mathbb{C}^{1\times 3}$ 是解析的；(b) $\hat{n}_+ = \hat{n}_- \hat{v}$ 对于 $k \in \hat{\Gamma} \setminus \hat{\Gamma}_\star$；(c) $\hat{n}(x,t,k) = (1,1,1) + O(k^{-1})$ 当 $k \to \infty$ 时，以及 (d) $\hat{n}(x,t,k) = O(1)$ 当 $k \to k_\star \in \hat{\Gamma}_\star$ 时。

引理 11.1。 设 $\hat{w} = \hat{v} - I$。以下不等式对 $x \geq 2$ 和 $\tau \in \mathcal{I}$ 一致成立：

$$\|\hat{w}\|_{(L^1\cap L^\infty)(\hat{\Gamma}\setminus(\partial\mathcal{D}\cup\hat{\mathcal{X}}^\epsilon))} \leq Cx^{-N}, \tag{11.3a}$$

$$\|\hat{w}\|_{(L^1\cap L^\infty)(\partial\mathcal{D})} \leq C_N(\tau)x^{-1/2}, \tag{11.3b}$$

$$\|\hat{w}\|_{L^1(\hat{\mathcal{X}}^\epsilon)} \leq C_N(\tau)x^{-1}\ln x, \tag{11.3c}$$

$$\|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\mathcal{X}}^\epsilon)} \leq C_N(\tau)x^{-1/2}\ln x. \tag{11.3d}$$

证明。 注意到 $\hat{\Gamma}\setminus(\partial\mathcal{D}\cup\hat{\mathcal{X}}^\epsilon) = \Gamma^{(4)}\setminus\hat{\mathcal{X}}^\epsilon$。因此，(11.3a) 是由 (11.2)、引理9.1以及 m^{k_1} 的一致有界性推出的估计 (11.3b) 由 (11.2) 和 (10.11) 得出。 不等式 (11.3c) 和 (11.3d) 是由 (11.2) 、 (10.10) 以及 m^{k_1} 的一致有界性直接推出的。 □

^ ^ 函数 h 定义在 Γ 上，其柯西变换 $\mathcal{C}h$ 定义为

$$(\hat{\mathcal{C}}h)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}}\frac{h(z')dz'}{z'-z}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\hat{\Gamma}.$$

引理11.1 中的不等式意味着

$$\begin{cases} \|\hat{w}\|_{L^1(\hat{\Gamma})} \leq Cx^{-N} + C_N(\tau)x^{-1/2}, \\ \|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Gamma})} \leq Cx^{-N} + C_N(\tau)x^{-1/2}(\ln x)^{1/2}, \\ \|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\Gamma})} \leq Cx^{-N} + C_N(\tau)x^{-1/2}\ln x, \end{cases} \qquad x\geq 2,\ \tau\in\mathcal{I}. \tag{11.4}$$

特别地，我们有 $\hat{w}\in L^2(\hat{\Gamma})\cap L^\infty(\hat{\Gamma})$，因此算子 $\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}} = \hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}(x,t,\cdot)}\colon L^2(\hat{\Gamma})+L^\infty(\hat{\Gamma}) \to L^2(\hat{\Gamma})$，$h\mapsto \hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}h := \hat{\mathcal{C}}_-(h\hat{w})$ 是良定义的。我们将作用于 $L^2(\hat{\Gamma})$ 上的有界线性算子空间记为 $\mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}))$。利用 (11.4)，我们推得存在一个 $X>0$，使得对于所有 $x\geq X$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$，$I-\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}(x,t,\cdot)}\in\mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}))$ 都可逆。因此，$\hat{n}$ 满足一个小范数 Riemann–Hilbert 问题，并可表示为

$$\hat{n}(x,t,k) = (1,1,1) + \hat{\mathcal{C}}(\hat{\mu}\hat{w}) = (1,1,1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}}\hat{\mu}(x,t,s)\hat{w}(x,t,s)\frac{ds}{s-k} \tag{11.5}$$

对于 $x\geq X$ 和 $\tau\in\mathcal{I}$，其中

$$\hat{\mu} = (1,1,1) + (I-\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}})^{-1}\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}(1,1,1) \in (1,1,1) + L^2(\hat{\Gamma}). \tag{11.6}$$

^ 此外，利用 (11.4)、(11.6)，以及 $\|\mathcal{C}_-\|_{\mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}))}<\infty$ 这一事实，我们得 nd

$$\|\hat{\mu}-(1,1,1)\|_{L^2(\hat{\Gamma})} \leq \frac{C\|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Gamma})}}{1-\|\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}))}} \leq Cx^{-N} + C_N(\tau)x^{-1/2}(\ln x)^{1/2} \tag{11.7}$$

对于所有 $\tau\in\mathcal{I}$ 以及所有足够大的 x。为了确定 $\hat{n}$ 的长时间渐近行为，将 $\hat{n}^{(1)}$ 定义为非切向极限

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) := \lim_{k\to\infty}^{\angle} k(\hat{n}(x,t,k)-(1,1,1)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}}\hat{\mu}(x,t,k)\hat{w}(x,t,k)dk.$$

引理 11.2。当 $x\to\infty$，

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) = -\frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\hat{w}(x,t,k)dk + O\big(x^{-N}+C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big). \tag{11.8}$$

证明。 只需写出

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) = -\frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\hat{w}(x,t,k)dk - \frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}\setminus\partial\mathcal{D}}\hat{w}(x,t,k)dk$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}}(\hat{\mu}(x,t,k)-(1,1,1))\hat{w}(x,t,k)dk,$$

然后使用（11.7）和引理11.1。 □

令 $\{F^{(l)}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ 由下式给出

$$F^{(l)}(x,\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(k_1)}k^{l-1}\hat{w}(x,t,k)dk=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(k_1)}k^{l-1}(m^{k_1}-I)dk.$$

利用 （10.12）和 $\hat{z}(\tau,\ k_1)=1$，并回顾一下 k_1）是顺时针定向的，我们 get

$$F^{(l)}(x,\tau)=k_1^{l-1}\frac{Y(x,\tau)m_1^X(q)Y(x,\tau)^{-1}}{z_\star\sqrt{x}}+O(C_N(\tau)x^{-1})=-ik_1^lZ(x,\tau)+O(C_N(\tau)x^{-1}) \tag{11.9}$$

当 $\tau\in\mathcal{I}$ 时， $x\to\infty$ 一致地成立，其中

$$Z(x,\tau)=\frac{Y(x,\tau)m_1^XY(x,\tau)^{-1}}{-ik_1z_\star\sqrt{x}}=\frac{1}{-ik_1z_\star\sqrt{x}}\begin{pmatrix}0&\frac{\beta_{12}}{d_0e^{x\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)}\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}}&0\\ d_0e^{x\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)}\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}\beta_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

引理 11.3。 对于 $l\in\mathbb{Z}$ 和 $j=0$，1、2，有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(k_1)}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}F^{(l+1)}(x,\tau)\mathcal{A}^j, \tag{11.10}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(k_1^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=-\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F^{(-l-1)}(x,\tau)\mathcal{B}\mathcal{A}^j. \tag{11.11}$$

证明。 这些恒等式由$\hat{w}(x,\ t,\ k)=\mathcal{A}\hat{w}(x,\ t,\ \omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}\hat{w}(x,\ t,\ k^{-1})\mathcal{B}$得出，这些式子对于 $k\in\partial\mathcal{D}$成立。在类似情形下，更详细的论证见 [4, 引理 12 的证明。4]□

由引理 11.3可知

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\hat{w}(x,t,k)dk=\sum_{j=0}^{2}\frac{-1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(k_1)}\hat{w}(x,t,k)dk-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(k_1^{-1})}\hat{w}(x,t,k)dk$$
$$=\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F^{(1)}(x,\tau)\mathcal{A}^j-\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F^{(-1)}(x,\tau)\mathcal{B}\mathcal{A}^j.$$

因此， （11.8）和（11.9）表明$\hat{n}^{(1)}=(1,\ 1,\ 1)\hat{m}^{(1)}$，其中

$$\hat{m}^{(1)}(x,t)=\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F^{(1)}(x,\tau)\mathcal{A}^j-\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F^{(-1)}(x,\tau)\mathcal{B}\mathcal{A}^j+O\big(x^{-N}+C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big)$$
$$=-ik_1\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}Z(x,\tau)\mathcal{A}^j+ik_1^{-1}\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}Z(x,\tau)\mathcal{B}\mathcal{A}^j+O\big(x^{-N}+C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big) \tag{11.12}$$

当 $x\to\infty$时，对 $\tau\in\mathcal{I}$一致成立。

12. Asymptotics of u

由 (4.1)，可得 $u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} n_3^{(1)}(x,t)$，其中 $n_3(x,t,k) = 1 + n_3^{(1)}(x,t)k^{-1} + O(k^{-2})$，当 $k \to \infty$ 时。通过利用 (5.11)、(6.5)、(7.2)、(9.1) 和 (11.1) 反演变换 $n \mapsto n^{(1)} \mapsto n^{(2)} \mapsto n^{(3)} \mapsto n^{(4)} \mapsto \hat{n}$，我们得到

$$n = \hat{n}\Delta^{-1}(G^{(3)})^{-1}(G^{(2)})^{-1}(G^{(1)})^{-1}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus (\hat{\Gamma} \cup \bar{\mathcal{D}}),$$

其中 $G^{(1)}$、$G^{(2)}$、$G^{(3)}$、Δ 分别由式（5.12）、（6.6）、（7.3）和（8.9）给出。因此

$$u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{n}_3^{(1)}(x,t) + \lim_{k\to\infty}{}^{\angle}\, k(\Delta_{33}(\tau,k)^{-1} - 1)\right),$$

其中 $\hat{n}_3^{(1)}$ 通过展开式 $\hat{n}_3(x,t,k) = 1 + \hat{n}_3^{(1)}(x,t)k^{-1} + O(k^{-2})$ 定义为 $k \to \infty$。根据式（8.8）和变量代换公式

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{t\ \text{const}} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\tau\ \text{const}} - \frac{\tau}{x}\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_{x\ \text{const}}, \tag{12.1}$$

我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\lim_{k\to\infty}{}^{\angle}\, k(\Delta_{33}(\tau,k)^{-1} - 1) = \frac{\tau}{x}\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_i^{k_1(\tau)} \ln(1 + r_1(s)r_2(s))(1 + s^{-2})ds. \tag{12.2}$$

由于 $r_1(s)\,r_2(s)$ 在 $s = i$ 处消失到所有阶，且 $k_1 = ie^{i\tau + O(\tau^3)}$ 当 $\tau \to 0$时，（12.2）右端为 $O(C_N(\tau)x^{-1})$。因此

$$u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\hat{n}_3^{(1)}(x,t) + O(C_N(\tau)x^{-1}), \qquad x \to \infty, \tag{12.3}$$

一致地对 $\tau \in \mathcal{I}$。由（11.12），可得

$$\begin{aligned}\hat{n}_3^{(1)} &= Z_{12}\big(\omega i k_1^{-1} - \omega^2 i k_1\big) + Z_{21}\big(\omega^2 i k_1^{-1} - \omega i k_1\big) + O\big(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big)\\ &= \frac{\beta_{12}(\omega i k_1^{-1} - \omega^2 i k_1)}{-ik_1 z_\star\sqrt{x}\, d_0 e^{x\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)}\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{d_0 e^{x\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)}\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}\beta_{21}(\omega^2 i k_1^{-1} - \omega i k_1)}{-ik_1 z_\star\sqrt{x}}\\ &\quad + O\big(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big)\end{aligned}$$

当 $x \to \infty$对 $\tau \in \mathcal{I}$一致成立时。恒等式 $|d_0(x,\tau)| = e^{2\pi\nu}$由引理10.1 确立，故 $\frac{\beta_{12}}{d_0} = -\bar{d}_0\bar{\beta}_{21}$。因此，同时利用 $(\omega i k_1^{-1} - \omega^2 i k_1)/\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}} = \tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 i k_1^{-1} - \omega\bar{i}k_1) \in \mathbb{R}$ 以及 $-ik_1 z_\star > 0$,

$$\hat{n}_3^{(1)} = 2i\,\mathrm{Im}\,\frac{\beta_{12}(\omega i k_1^{-1} - \omega^2 i k_1)}{-ik_1 z_\star\sqrt{x}\, d_0 e^{x\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)}\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}} + O\big(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big) \qquad \text{as } x \to \infty.$$

由于

$$\beta_{12} = \frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{\frac{3\pi\nu}{2}}}{q\Gamma(i\nu)}, \qquad d_0(x,\tau) = e^{2\pi\nu}e^{i\arg d_0(x,\tau)}, \qquad |q| = \sqrt{e^{-2\pi\nu} - 1},$$

$$|\Gamma(i\nu)| = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\nu}\sqrt{e^{-\pi\nu} - e^{\pi\nu}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\nu}e^{\frac{\pi\nu}{2}}|q|}, \qquad \frac{\omega i k_1^{-1} - \omega^2 i k_1}{\tilde{r}(k_1)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{-1 - 2\cos(2\arg k_1)},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\hat{n}_3^{(1)} = &-2i\frac{\sqrt{-\nu}\sqrt{-1 - 2\cos(2\arg k_1)}}{-ik_1 z_\star\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg q - \arg\Gamma(i\nu) - \arg d_0 - x\mathrm{Im}\,\tilde{\Phi}_{21}(\tau,k_1)\right)\\ &+ O\big(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\big) \qquad \text{as } x \to \infty,\end{aligned}$$

一致地成立于 $\tau \in \mathcal{I}$。与 [5], 类似，我们可以证明，对 x 求导不会增大误差项。因此，将上述公式代入（12.3），并利用（12.1）以及关系 $\operatorname{Im}\left(\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\ k_1) - \tau \frac{d}{d\tau}\overline{\tilde{\Phi}_{21}(\tau,\ k_1(\tau))}\right) = \operatorname{Im} k_1$，可得

$$
\begin{aligned}
u = & -2\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg q - \arg\Gamma(i\nu) - \arg d_0 - x\operatorname{Im}\tilde{\Phi}_{21}(\tau, k_1)\right)\right. \\
& \left. \times \frac{\sqrt{-\nu}\sqrt{-1-2\cos(2\arg k_1)}}{-ik_1 z_\star \sqrt{x}}\right) + O\left(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\right) \\
= & \frac{A(\tau)}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \arg q - \arg\Gamma(i\nu) - \arg d_0 - x\operatorname{Im}\tilde{\Phi}_{21}(\tau, k_1)\right) + O\left(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\right)
\end{aligned}
$$

当 $x \to \infty$ 在 $\tau \in \mathcal{I}$上均匀成立，其中 $A(\tau)$ 与定理 2.1的陈述中相同。由于 $\arg q = \pi + \arg r_2(k_1)$（模 2π），且 $\cos(-x) = \cos(x)$，因此可将其写为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{A(\tau)}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \arg r_2(k_1) + \arg\Gamma(i\nu) + \arg d_0 + x\operatorname{Im}\tilde{\Phi}_{21}(\tau, k_1)\right) \\
& + O\left(x^{-N} + C_N(\tau)x^{-1}\ln x\right)
\end{aligned}
$$

当 $x \to \infty$ 在 $\tau \in \mathcal{I}$上均匀成立。关于 $\arg$ 2.9的表达式 $d_0(x,\tau)$ 可通过使用 (10.2)、(8.2) 和 (8.3) 进行冗长但直接的计算得到。至此，定理2.1的证明完成。

Appendix A. Model RH problem

本附录中的引理是构造 k_1附近的局部参数模型所必需的。证明涉及抛物柱函数，如 [9], 中所述；类似引理的构造性证明可参见 [3, 附录A]。

令 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_4 \subset \mathbb{C}$ 为由四条射线组成的十字形轮廓

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \left\{ se^{\frac{i\pi}{4}} \,\middle|\, 0 \le s < \infty \right\}, & X_2 &= \left\{ se^{\frac{3i\pi}{4}} \,\middle|\, 0 \le s < \infty \right\}, \\
X_3 &= \left\{ se^{-\frac{3i\pi}{4}} \,\middle|\, 0 \le s < \infty \right\}, & X_4 &= \left\{ se^{-\frac{i\pi}{4}} \,\middle|\, 0 \le s < \infty \right\},
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

均取从原点向外的定向。

引理 A.1（在 $k = k_1$ 附近所需的模型RH问题）。令 $q \in \mathbb{C}$，并定义

$$
\nu = -\tfrac{1}{2\pi}\ln(1 + |q|^2) \le 0.
$$

定义跳跃矩阵 $v^X(z)$，对于 $z \in X$，定义如下：

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\bar{q}}{1+|q|^2} z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{if } z \in X_1, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{if } z \in X_2,
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & \bar{q} z_{(0)}^{-2i\nu} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{if } z \in X_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-q}{1+|q|^2} z_{(0)}^{2i\nu} e^{-\frac{iz^2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{if } z \in X_4, \tag{A.2}
$$

其中 $z_{(0)}^{i\nu}$ 的分支割线沿 $[0, +\infty)$，满足 $z_{(0)}^{i\nu} = |z|^{i\nu} e^{-\nu \text{辐角} 0(z)}$，辐角$0(z) \in (0,\ 2\pi)$。于是，*Riemann–Hilbert* 问题

(a) $m^X(q,\cdot) = m^X(q,\cdot)$: $\mathbb{C} \setminus X \to \mathbb{C}^{3\times 3}$ 解析；*(b)* 在 $X \setminus \{0\}$ 上，$m^X(q,\cdot)$ 的边界值存在、连续，并满足 $m_+^X = m_-^X v^X$；*(c)* $m^X(q,z) = I + O(z^{-1})$，当 $z \to \infty$ 时，且 $m^X(q, z) = O(1)$，当 $z \to 0$ 时；

有唯一解 $m^X(q,z)$。该解满足

$$m^X(q,z) = I + \frac{m_1^X(q)}{z} + O\left(\frac{q}{z^2}\right), \quad z \to \infty, \quad m_1^X(q) := \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

其中误差项对于 *{style id='1'>arg* $z \in [-\pi, \pi]$ 和 q 在 $\mathbb{C}$的紧子集内是一致的，并且

$$\beta_{12} := \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{3\pi\nu}{2}}}{q\Gamma(i\nu)}, \qquad \beta_{21} := \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi i}{4}} e^{-\frac{5\pi\nu}{2}}}{-\bar{q}\Gamma(-i\nu)}. \tag{A.4}$$

注 A.2。 由于 $|\Gamma(i\nu)| = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\nu}\sqrt{e^{-\pi\nu} - e^{\pi\nu}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\nu} e^{\frac{\pi\nu}{2}} |q|}$，由此可得 $\beta_{12}\beta_{21} = \nu$，并且 $m_1^X(q) = O(q)$ 当 $q \to 0$ 时成立。

致谢。 谨此感谢 Novo Nordisk基金会项目（资助编号 0064428）、欧洲研究理事会（资助协议编号 682537）、瑞典研究理事会（资助编号 2015-05430、2021-04626 和 2021-03877）、G¨oran Gustafsson 基金会以及 Ruth 和 Nils-Erik Stenb¨ack 基金会提供的支持。

References

[1] J. Boussinesq, 《关于在水平矩形运河中传播的波与涌流理论：使运河内液体从表面到底部具有大致相同的速度》，《纯粹与应用数学杂志》**17** （1872年），55–108。[2] C. Charlier 和 J. Lenells, 《关于水波的 Boussinesq 方程》，arXiv:2204.02365。[3] C. Charlier 和 J. Lenells, 《水波的 Boussinesq 方程：扇区 V 中的渐近行为》，arXiv:2301.10669。[4] C. Charlier 和 J. Lenells, 《水波的 Boussinesq 方程：扇区 IV 的孤子分解猜想》，arXiv:2303.00434。[5] C. Charlier、J. Lenells 和 D. Wang, 《“良性”Boussinesq 方程：长时间渐近行为》，《分析与偏微分方程》，即将发表，arXiv:2003.04789。[6] P. Deift、C. Tomei 和 E. Trubowitz, 《逆散射与 Boussinesq 方程》，《纯粹与应用数学通讯》**35** （1982），567–628。[7] P. Deift 和 X. Zhou, 《振荡型黎曼–希尔伯特问题的最速下降法：修正 KdV 方程的渐近行为》，《数学年刊》**137** （1993），295–368。[8] R. Hirota, 《浅水中的长波波动方程及非线性晶格的精确 N-孤子解》，《数学物理杂志》**14** （1973），810–814。[9] A. R. Its, 《非线性薛定谔方程解的渐近行为，以及线性微分方程组的等单值变形》，《苏联科学院通报》**261** （1981），14–18（俄文）；《苏联数学通报》**24** （1982），452–456（英文）。[10] V. E. Zakharov, 《关于一维非线性振荡链的随机化》，《苏联物理学 *JETP*》**38** （1974），108–110。