振幅阻尼信道中的粒子内量子关联及其稳健性

Animesh Sinha Roy,[1] Namitha C.V.,[1] Subroto Mukerjee,[2] Prasanta K. Panigrahi,[3] 和 Urbasi Sinha[1], *
[1] *Raman Research Institute, C. V. Raman Avenue, Sadashivanagar, Bengaluru, Karnataka 560080, India*[2] *Indian Institute of Science, C. V. Raman Road, Bengaluru, Karnataka 560012, India*
[3] *Department of Physical Sciences, Indian Institute of Science Educationand Research Kolkata, Mohanpur, Nadia, 741246, West Bengal, India*(日期：2024年7月8日)

同一粒子的两个或多个不同自由度之间的量子关联有时称为粒子内纠缠。在这项工作中，我们研究了各种退相干信道下两个不同自由度之间的粒子内关联，即振幅阻尼、退极化和相位阻尼信道。我们主要关注振幅阻尼信道，并为任意初始纯态得到了并发度的精确解析表达式。在该信道中，我们观察到一个独特现象：纠缠可以从可分初态中产生。我们还表明，随着阻尼参数增大，该信道允许纠缠复活，甚至并发度可以从零开始复活。我们还研究了振幅阻尼信道对粒子间纠缠的影响，并表明它不具备上述任何有趣特征。此外，在参数相当的情况下，粒子间系统中的纠缠衰减远强于粒子内系统；我们发现，相位阻尼和退极化信道中也有同样的情况。因此，受阻尼影响的粒子内纠缠比粒子间纠缠稳健得多。

arXiv:2303.01238v2 [quant-ph] 4 Jul 2024

I. 引言

由于希尔伯特空间中的态不可分离，两个空间上分离的粒子之间，或同一粒子的两个不同自由度之间，都可能产生纠缠。粒子间纠缠指单个自由度中两个或多个空间上分离的粒子之间的量子关联 [1], ，而粒子内纠缠则指同一粒子的两个或多个自由度之间的量子关联 [2, 3]。粒子内纠缠已在各种量子系统中得到实验验证 [4–8]。它是检验量子情境性的一项重要性质，也可应用于量子密钥分发协议 [9, 10], 、量子隐形传态协议 [11–13], 、纠缠交换协议 [14]等多个领域。

纠缠在任何现实应用中都会受到与噪声环境相互作用的影响。因此，要实现现实应用，必须研究噪声通道中粒子内纠缠的性质。此外，为了评估其效能，还应将其与噪声通道对粒子间纠缠造成的退相干效应进行对照和比较；后者已得到系统研究 [15–17]。研究噪声通道中的粒子内纠缠并将其与粒子间纠缠相比较，将有助于研究人员开发更稳健的量子协议和系统。这项研究对于推进量子密钥分发、量子隐形传态和纠缠交换等应用至关重要，可确保这些应用在现实场景中有效运行。

在本研究中，我们考察噪声信道，即振幅阻尼、相位阻尼和退极化信道，对单个粒子的各自由度之间共享的粒子内关联的影响。我们通过计算并发度随信道参数和输入态参数的变化，研究两个自由度之间的纠缠。我们主要关注振幅阻尼信道，并由此得到并发度的精确解析表达式，揭示了一个十分有趣的现象：纠缠会随信道参数变化而重生。这表明，噪声增加（以信道参数量化）反直觉地可能有利于产生纠缠。这是本研究的核心结果，清楚地揭示了阻尼对粒子内纠缠的影响与更常见的非马尔可夫噪声下粒子间纠缠情形之间的差异 [18]。我们通过对并发度进行全面分析，考察其随信道参数和输入态参数变化的规律，以解释粒子内纠缠的行为。最后，我们研究粒子内纠缠在相位阻尼信道和退极化信道中的退相干，并将其与粒子间纠缠情形进行比较，以展示粒子内纠缠的鲁棒性。

我们使用 Kraus 算子形式体系对阻尼进行建模 [19], ，其中初始态 ρ 的演化由保迹映射 $\rho \to \rho^{'} = \sum_i M_i \rho M_i^{\dagger}$ 描述。M_i 为满足完备性关系 $\sum_i M_i^{\dagger} M_i = \mathcal{I}$的 Kraus 算子。

我们考虑单个量子系统 S的一个纯态，该系统具有两个不同的自由度： A 和 B ，其

* usinha@rri.res.in

状态分别属于二维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_A$ 和$\mathcal{H}_B$ ，其正交归一基分别为 $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ 和 $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$:

$$|\psi\rangle_{in} = a|a_1b_1\rangle + b|a_1b_2\rangle + c|a_2b_1\rangle + d|a_2b_2\rangle \quad (1)$$

具有复系数 a、 b、 c 和 d ，其中 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$。我们注意到，这与两个空间分离粒子的纯态形式完全相同，其中每个粒子的态分别属于独立的二维希尔伯特空间。因此，我们同样可以将为计算此类系统并发度而建立的形式应用于我们的系统[20]。对于任意双部量子态 ρ，并发度定义为

$$C(\rho) = max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (2)$$

其中， λ_i 是以下矩阵的特征值，并按递减顺序排列:

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (3)$$

这里， ρ^* 是表示输入态 ρ 的矩阵的复共轭，而 σ_y 是泡利矩阵,

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

式 1 中纯态的两个自由度之间的粒子内纠缠为 $C = 2|ad - bc|$ 。

并发度的演化可能会因相应通道的退相干而表现出显著差异。对于粒子间纠缠态，环境局部作用于每个粒子 [17, 21]。因此，系统的 Kraus算子是每个粒子 Kraus算子的张量积，其维数分别等于相应粒子局部希尔伯特空间的维数。对于粒子内纠缠态，两个自由度属于同一个粒子，因此自然应考虑同时作用于这两个自由度的环境。一般而言，Kraus算子不能分解为分别作用于每个自由度的算子，其维数等于该粒子的全希尔伯特空间的维数。

对于粒子内纠缠，由于两个自由度属于同一个粒子，我们考虑这样一种噪声模型：噪声将粒子视为一个整体，并将粒子的状态视为该整体的量子态来作用。由于这个整体的状态属于一个更高维的四维系统，即一个量子比特组（d=4），噪声也作用于该量子比特组。在这一模型中，噪声无法分别探测每个自由度。因此，我们考虑Kraus算子属于更高维系统的噪声模型。另一方面，如果噪声模型能够分别探测每个自由度，那么作用于各自由度的噪声维度就与各自由度状态的维度相同。在这种情况下，作用于系统的总噪声不过是作用于每个自由度的噪声的张量积。

在这种情况下，噪声对粒子内纠缠态和粒子间纠缠态的影响将相同。在我们的研究中，我们不考虑这类噪声模型，而采用一种更符合物理实际的情形，即噪声作用于整个粒子。

II. 振幅阻尼信道 EL

振幅阻尼信道描述了一种物理过程：系统通过相互作用将能量耗散到环境中。振幅阻尼噪声对由式 1 定义的粒子内纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$ 的影响，可由以下 Kraus算子 [22, 23] 表示

$$\begin{aligned} M_0 &= |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-P}\sum_{j=1}^{3}|j\rangle\langle j| \ , \\ M_i &= \sqrt{P}|0\rangle\langle i| \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

其中， P 是信道参数，为简便起见，态 $|0\rangle = |a_1b_1\rangle$、 $|1\rangle = |a_1b_2\rangle$、 $|2\rangle = |a_2b_1\rangle$和 $|3\rangle = |a_2b_2\rangle$ 。态 $|0\rangle$ 对应系统的基态；由于阻尼会同时影响两个自由度，我们假设它以相同的方式导致所有激发态跃迁至基态。 $|\psi\rangle_{in}$ 经振幅阻尼信道演化后，最终态为（附录 A）

$$\begin{aligned} \rho_{out} = &\big[P + (1-P)|a|^2\big]|a_1b_1\rangle\langle a_1b_1| + \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2} \\ &\times\big(a|a_1b_1\rangle\langle\phi| + a^*|\phi\rangle\langle a_1b_1|\big) + (1-P)(1-|a|^2)|\phi\rangle\langle\phi| \quad (4) \end{aligned}$$

其中， a^* 是态参数a 的复共轭，并且

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}\Big(b|a_1b_2\rangle + c|a_2b_1\rangle + d|a_2b_2\rangle\Big) \quad (5)$$

由于 ρ_{out} 可以写成两个正交态 $|a_1b_1\rangle$ 和 $|\phi\rangle$的形式，因此它具有两个非零特征值。因此，矩阵 R [式（3）]也具有两个非零特征值，分别为

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(S \pm \sqrt{S^2 - T^2}) \quad (6)$$

其中（附录 A）

$$\begin{aligned} S &= 4|b|^2|c|^2(1-P)^2 - 4(1-P)^{3/2}[adb^*c^* + bca^*d^*] \\ &\quad +2|d|^2(1-P)[P + (1-P)|a|^2], \\ T &= 2P(1-P)(1-|a|^2)|d|^2 \quad (7) \end{aligned}$$

将 S 和 T 的表达式代入 $\lambda_\pm$并经过一些代数运算后，可得输出态的并发度为（附录 A）

$$C = 2\big|bc\sqrt{(1-P)} - ad\big|\sqrt{1-P} \quad (8)$$

上述表达式是本文的关键结果之一。如果没有噪声（即 $P=0$），则如初始纯态所预期的那样，$C=2|bc-ad|$。对于 $P\neq 0$ 的并发度，相当于代入 $\{a,b,c,d\}\to\{a,b\sqrt{1-P},c\sqrt{1-P},d\sqrt{1-P}\}$，这反映了振幅阻尼使粒子以概率 $1-P$ 保持在激发态 $|1\rangle$、$|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 中的事实。

为了更好地理解并发度的行为，我们将其写为

$$C = 2\Big[|b|^2|c|^2(1-P)+|a|^2|d|^2 - 2|a||b||c||d|\sqrt{1-P}\cos(\Delta\theta)\Big]^{1/2}\sqrt{1-P} \quad (9)$$

用系数a、b、c 和 d的振幅与相位表示，其中 $\Delta\theta=\theta_b+\theta_c-\theta_a-\theta_d$。因此，并发度也可以从几何角度解释为 $2\sqrt{1-P}$ 乘以两个向量 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$ 之差的长度，这两个向量的长度分别为 $|b||c|\sqrt{1-P}$ 和 $|a||d|$，夹角为 $\Delta\theta$，如图1所示。可以看出，当

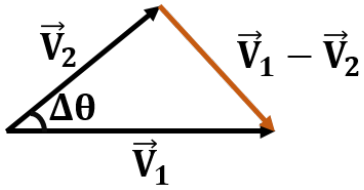

图1。本图展示了 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$、$\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$ 和 $\Delta\theta$。

$P=1$ 或

$$P=1-\left(\frac{|a||d|}{|b||c|}\right)^2 \quad \text{and} \quad \Delta\theta=0,\pm 2\pi. \quad (10)$$

条件 $\Delta\theta=0,\ \pm 2\pi$ 成立，是因为各个角度（θ_a、θ_b、θ_c、θ_d）$\in[0,2\pi]$。需要注意的是，对于系数 a、b、c 和 d的固定值，并发度只能在 P的某个特定值处降至零，而不是在一段取值范围内降至零。这是因为末态密度矩阵 ρ_{out} 的两个特征值等于零，因此，用于计算并发度的公式3中定义的矩阵 R 也有两个特征值为零。当 R 剩余的两个非零特征值变得简并时，并发度便会变为零。这对应于能级交叉，而能级交叉只能发生在参数空间中的孤立点，因此，并发度不可能在 P的一段取值范围内为零。这种行为是粒子内振幅阻尼信道所特有的，与其他通道中观察到的情况形成鲜明对比，后文将对此进行说明。对于其他通道，R 的四个特征值通常都不为零，因此，并发度可以在 P 的一段取值范围内保持为零，而不会出现复活。只有满足公式10中的条件时，并发度才会降至零。在图2中，可以观察到并发度的三种不同演化

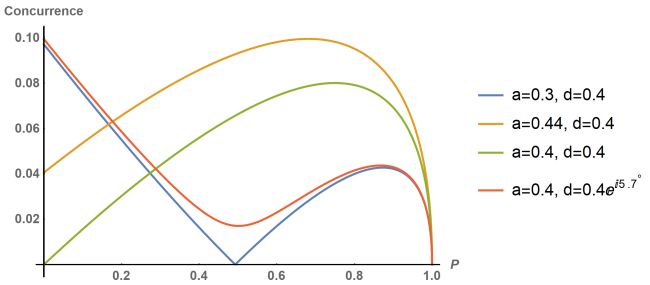

图2。蓝色、黄色和绿色曲线分别表示三个不同输入态的并发度随 P的变化，这些输入态的态参数为 $|a|=0.3$、0.44和0.4。这三个输入态的其他态参数为 $|c|=0.2$、$|d|=0.4$ $\Delta\theta=0$ 和。红色曲线表示态参数为$|a|=0.3$、$|b|=0.84$、$|c|=0.2$、$d=0.4$、$\theta_a=\theta_b=\theta_c=0$ 和$\theta_d=5.7°$ 的输入态的并发度随信道参数 P的变化。蓝色曲线所代表的态满足条件（i）$|a||d|<|b||c|$，其并发度先出现纠缠猝死，随后发生纠缠重生，最终渐近衰减至零。观察到纠缠猝死时的 P 值由公式10给出。黄色曲线所代表的态满足条件（ii）$|a||d|>|b||c|$，其并发度先出现纠缠生成，最终渐近衰减至零。绿色曲线所代表的态初始为可分态，满足条件（iii）$|a||d|=|b||c|$；随着 P增大，并发度先变为非零，随后逐渐增大，最终渐近衰减至零。在情形（i）、（ii）和（iii）下，$\Delta\theta=0$。如果我们令$\theta_d=5.7°$，同时 $\theta_a=\theta_b=\theta_c=0$，即 $\Delta\theta\neq 0\pm 2\pi$，那么会观察到并发度达到其最小非零值 C_-，随后达到最大值 C_+，最终渐近衰减至零。

分别由蓝色、黄色和绿色曲线表示。这些演化对应于三种不同的输入态，其态参数满足公式10。对于其他参数组合，并发度仍可能在某个值 $P\neq 1$处达到最小值。这也是一种复活，尽管并非从零值开始。出现这种最小值的条件是 $\cos\Delta\theta\geq 0$ 和 $|\sin\Delta\theta|\leq 1/3$ [?]。由于并发度必须在 $P=1$ 处降至零，且是关于 P的平滑函数，因此它也必然会经过一个最大值。最小值和最大值出现时的 P 值（分别为 P_- 和 P_+）见（附录 A）。

$$P_\pm=1-\frac{|a|^2|d|^2}{16|b|^2|c|^2}\Big[3\cos\Delta\theta\mp\sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2-8}\Big]^2 \quad (11)$$

其中 $P_+>P_-$ 正如预期。并发度的相应最小值和最大值（分别为 C_- 和 C_+）见（附录 A）

$$C_\pm = \frac{|a|^2|d|^2}{2\sqrt{3}|b||c|}\Big[1-\frac{\{3\cos\Delta\theta\mp\sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2-8}\}^2}{16}\Big]^{1/2} \times\Big[3\cos\Delta\theta\mp\sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2-8}\Big] \quad (12)$$

图2中的红色曲线展示了一个具有.....的粒子内纠缠态的并发度演化

其态参数不符合方程（10），即 $\Delta\theta \neq 0,\ \pm 2\pi$。并发度随 P 变化呈现的非单调行为是振幅阻尼信道所特有的，可用 $\tilde{C} = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}$ 量化。这可以作为衡量该信道在恢复并发度方面有效性的指标。 $\tilde{C}$ 在 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$ 时达到最大值。图3展示了 $\tilde{C}$ 随 $\Delta\theta$ 的变化情况。图3表明， $\tilde{C}$ 在 $\Delta\theta = 0$ 时达到最大值，并随着 $\Delta\theta$ 的增加而减小。在 $\Delta\theta = \cos^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 19.47^\circ$ 处的 $\tilde{C} = 0$ 。

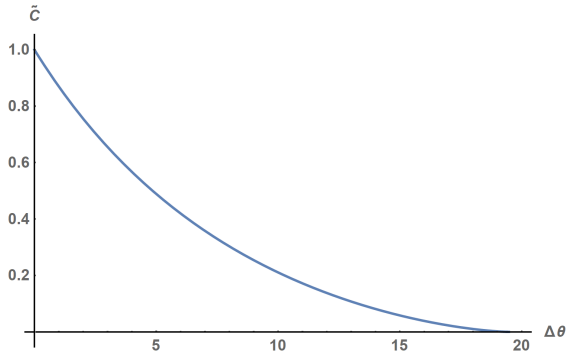

图3. 振幅阻尼信道作用下， $\tilde{C}$ 随 $\Delta\theta$ 的变化。这里， $\tilde{C}$ 在 $\Delta\theta = 0$处达到最大值。随着 $\Delta\theta$增加， $\tilde{C}$， 逐渐减小，并在 $\Delta\theta = 19.47^\circ$处变为零。

粒子间纠缠：接下来，为了进行比较，我们考察振幅阻尼信道导致的粒子间纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$ 的退相干。假设两个粒子 A 和 B 各自具有二维希尔伯特空间，且彼此在空间上相距较远。假设环境以相同的方式局部作用于每个粒子。因此，系统的每个 Kraus算子都是作用于各个粒子的局部 Kraus算子的张量积。局部 Kraus算子为 [17]

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P} \end{pmatrix} \quad , \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{P} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

我们考虑一个与方程1形式相同的纯输入态。输出态的并发度为

$$C = max\left[0, \sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha-\beta} - 2d^2P(1-P)\right] \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(ad-bc)^2(1-P)^2 + d^4P^2(1-P)^2, \\ \beta &= 2(ad-bc)^2(1-P)^2\sqrt{1 - \frac{d^4}{(ad-bc)^2}P^2} \end{aligned} \tag{15}$$

其中 P 是信道参数。粒子间振幅阻尼的作用与粒子内阻尼截然不同。由于局部算子无法在 [24, 25], 一个初始未纠缠态中产生纠缠

在粒子间振幅阻尼信道的作用下仍保持未纠缠状态。此外，如图4所示，如果并发度在 $P < 1$降为零，就不会出现复活。从数学上看，这与矩阵 R的全部四个特征值通常都不为零有关，正如前文所述。此外，并发度似乎不会出现极小值，而是始终单调递减，这表明阻尼程度增加会对并发度产生不利影响。

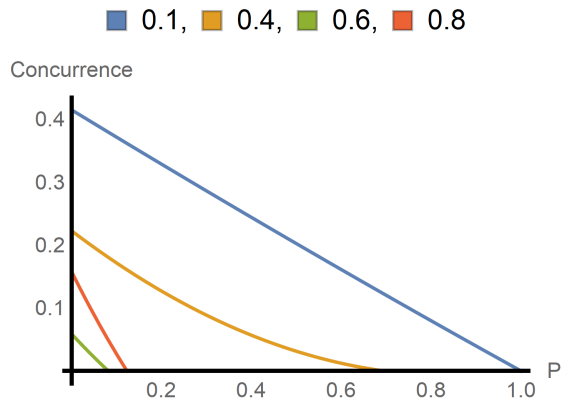

图4。在本图中，绘制了四种不同粒子间纠缠态的并发度与 P 的函数关系，这些态的输入态参数为 $d = 0.1$，0。4，0。6和0。8。对于这四种态，其他输入态参数为 $a = c = \frac{1}{4}$。

接下来，我们比较具有相同系数a、 b、 c和 d的粒子内纠缠态与粒子间纠缠态的并发度。代表性取值下的结果如图5所示。粒子内情形表现出纠缠的复活，而粒子间情形则没有，正如前文所述。最后可以看出，在相同信道强度下，粒子间情形的并发度低于粒子间情形，这表明前者对量子关联的抑制作用强于后者。

在特殊情况下，粒子间纠缠可能复活。在 [18], 中，作者展示了非马尔可夫耗散振幅阻尼信道下粒子间纠缠的复活，其中信道参数具有一种特殊形式

$$P = e^{-\Gamma t}\left(\cos(\frac{dt}{2}) + \frac{\Gamma}{d}\sin(\frac{dt}{2})\right)^2 \tag{16}$$

其中 $d = \sqrt{2\gamma\Gamma - \Gamma^2}$和 t 是时间参数。不过请注意，与我们所考虑的粒子内情形不同，初始未纠缠态会始终保持未纠缠。要使粒子间纠缠复活，需要指定信道参数的具体模型；而粒子内纠缠即使不考虑信道参数的任何具体模型，也能复活。因此，振幅阻尼信道下粒子内纠缠的复活与模型无关，而粒子间纠缠的复活则只能在振幅阻尼信道具有特定的、依赖于模型的形式时观察到

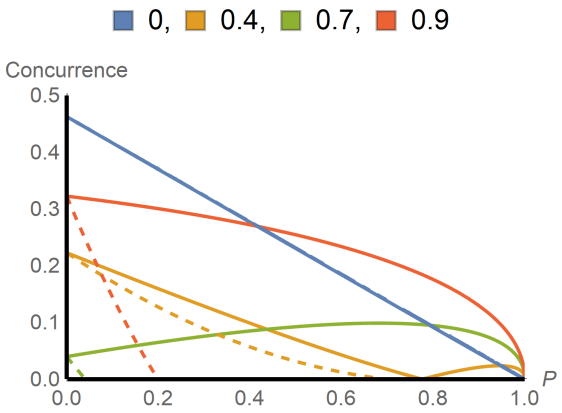

图5. 本图绘出了四种不同的 $d = 0$取值（0.4、0.7 和 0.9）下，粒子内纠缠态和粒子间纠缠态的并发度随 P 的变化关系。对于这四种状态，其他输入态参数为 $a = c = \frac{1}{4}$。图中，实线表示粒子内纠缠态的并发度，虚线表示粒子间纠缠态的并发度。从曲线可以清楚看出，只有粒子内纠缠表现出复活和纠缠生成。

只有在振幅阻尼通道具有特定的依赖于模型的形式时，粒子间纠缠才得以生成。

文献 [26–29] 中有一些关于退相干下粒子间纠缠复活的有趣研究。仔细观察可以发现，在这些研究中，环境是一个维数非常大的量子系统。这些情况与我们的情况截然不同；在我们的研究中，环境希尔伯特空间的维数与系统希尔伯特空间的维数相当。

III. 其他阻尼通道

我们分别研究了相位阻尼信道和退极化信道对式 1 所描述的纯粒子内纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$ 的影响。详细研究见附录 B 和附录 C。在这两种阻尼信道作用下，我们没有观察到纠缠猝死后粒子内纠缠的再生，也没有观察到粒子内纠缠的产生。我们还计算了纯粒子间纠缠态在相位阻尼信道和退极化信道作用下并发度的衰减，并将其与粒子内纠缠态的衰减进行了比较。我们发现，在这些信道作用下，粒子间纠缠的衰减远快于粒子内纠缠的衰减，这与振幅阻尼信道的情形相似。

IV. 未来展望

本研究从理论上考察了纯一般粒子内纠缠态的退相干行为。具体而言，我们分析了三种不同类型的量子噪声信道对该态的影响：振幅阻尼信道、相位阻尼信道和退极化信道。值得注意的是，我们的分析并不局限于任何特定的粒子内纠缠系统物理实现。相反，无论具体物理系统的细节如何，我们的研究结果都广泛适用于此类系统。

我们的理论分析旨在对退相干机制提供普遍性的理解，而不受特定系统特殊性的限制。这种普适性使我们的结果具有广泛的适用性。

未来，我们可以考虑任何发生粒子内态退相干的物理系统，并验证针对不同阻尼通道所得的结果。我们的研究有助于理解态参数，并对降低退相干效应的实验进行建模。这有助于将粒子内纠缠态作为一种高效资源来实现，使研究人员能够更有效地设计量子系统，最大限度地减少信息损失，从而确保顺利完成量子信息任务。

V. 结论

总之，我们通过计算并发度，研究了振幅阻尼信道下粒子内纠缠的生成与衰减。我们得到了任意初始纯态下并发度的精确解析表达式。并发度随阻尼参数变化呈现出纠缠复现这一有趣现象。我们还计算了较为常见的粒子间纠缠情形下并发度随信道参数的变化，并表明纠缠不会复现，实际上也不会随信道参数呈现任何非单调变化。因此，粒子内系统表现出一种违反直觉的现象：随着阻尼强度增加，纠缠反而增强。我们从输出密度矩阵的非零特征值数量角度对此作出解释。此外，对于相同的输入态和信道参数，粒子间纠缠的衰减远大于粒子内纠缠。我们还研究了相位阻尼和退极化信道对粒子内及粒子间情形的影响，发现两者均无纠缠复现的迹象。然而，对于相当的参数，粒子间纠缠的衰减始终大于粒子内纠缠，这与我们对振幅阻尼信道的观察一致。因此，总体而言，粒子内纠缠比粒子间纠缠更稳健

纠缠。

致谢

US 和 PKP 感谢 DST-ITPAR资助 IMT/Italy/ITPAR-IV/QP/2018/G 提供的部分支持。US 感谢 Min- 提供的部分支持

电子与信息技术部（MeitY）、印度政府依据量子技术卓越中心资助项目（参考编号：4(7)/2020 – ITEA）以及印度政府的QuEST-DST项目Q-97提供的支持。SM感谢印度政府QuEST-DST项目Q-34的支持。US和PKP感谢Dipankar Home，PKP感谢Abhinash K Roy，感谢他们进行的许多有益讨论。

[1] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki和K. Horodecki，《现代物理评论》**81**，865（2009）。[2] S. Azzini、S. Mazzucchi、V. Moretti、D. Pastorello和L. Pavesi，《先进量子技术》**3**，2000014（2020）。[3] S. Basu、S. Bandyopadhyay、G. Kar、D. Home，《物理快报A辑》**279,** 281（2001）。[4] M. Michler、H. Weinfurter、M. Zukowski，《物理评论快报》**84,** 5457（2000）。[5] B. R. Gadway、E J Galvez、F. De. Zela，《物理学杂志B：原子、分子与光物理》**42,** 015503（2009）。[6] J. Barreiro、N. K. Lankford、N. A. Peters、P. G. Kwiat，《物理评论快报》**95,** 260501（2005）。[7] Y. Hasegawa、R. Loidl、G. Badurek、M. Baron、H. Rauch，《自然》**425,** 45（2003）。[8] J. Shen、S. J. Kuhn、R. M. Dalgliesh、V. O. de Haan、N. Geerits、A. A. M. Irfan、F. Li、S. Lu、S. R. Parnell、J. Plomp、A. A. van Well、A. Washington、D. V. Baxter、G. Ortiz、W. M. Snow和R. Pynn，《自然·通讯》**11,** 930（2020）。[9] Y. Sun、Q.-Y. Wen、Z. Yuan，《光学通讯》**284,** 527（2011）。[10] S. Adhikari、D. Home、A. S. Majumdar、A. K. Pan、Akshata Shenoy H、· R. Srikanth，《量子信息处理》**14,** 1451（2015）。[11] J. Heo、C.-H. Hong、J.-I. Lim、H.-J. Yang，《中国物理B》**24,** 050304（2015）。[12] T. Pramanik、D. Home、S. Adhikari、A. Pan，《物理快报A辑》**374,** 1121（2010）。[13] J. Heo、C.-H. Hong、J.-I. Lim、H.-J. Yang，《国际理论物理学杂志》**54,** 2261（2015）。[14] S. Adhikari、A. Majumdar、D. Home、A. Pan，《欧洲物理快报》**89,** 10005（2010）。[15] T. Yu、J. Eberly，《科学》**323,** 598（2009）。[16] M. P. Almeida、E. De MELO、M. Hor-Meyll、A. Salles、S. P. Walborn、P. H. Souto Ribeiro和L. Davidovich，《科学》**316,** 579（2007）。[17] A. Salles、F. de Melo、M. P. Almeida、M. Hor-Meyll、S. P. Walborn、P. H. Souto Ribeiro 和 L. Davidovich，《物理评论A辑》**78,** 022322（2008）。[18] B. Bellomo、R. Lo Franco 和 G. Compagno，《物理评论快报》**99,** 160502（2007）。[19] K. Kraus，*States, Effects, and Operations: Fundamen-tal Notions of Quantum Theory*（施普林格出版社，柏林、海德堡，1983）。[20] William K. Wootters，《物理评论快报》**80**，2245（1998）。[21] K. Kraus，《量子理论的基本概念：态、效应与操作》施普林格出版社，柏林（1983）。[22] A Dutta、J Ryu、W Laskowski 和 M Zukowski，《物理快报A辑》**380,** 2191（2016）。[23] A Fonseca，《物理评论A辑》**100,** 062311（2019）。[24] C. H. Bennett、D. P. DiVincenzo、J. A. Smolin 和 W. K. Wootters，《物理评论A辑》**54,** 3824（1996）。[25] G. Vidal，《现代光学杂志》**47,** 355（2000）。[26] D. Braun，《物理评论快报》**89** 277901（2002）。[27] Y. Hamdouni、M. Fannes 和 F. Petruccione，《物理评论B辑》**73** 245323（2006）。[28] Z.Ficek 和 R. Tanas，《物理评论A辑》**74** 024304（2006）。[29] Z. Sun、X. Wang 和 C. P. Sun，《物理评论A辑》**75** 062312（2007）。[30] J. Preskill，《量子信息与计算》，加州理工学院，1998（讲义）。[31] P. Gokhale、J. M. Baker、C. Duckering、N. C. Brown、K. R. Brown 和 F. T. Chong，*Proceedings of the 46th International Symposium on Computer Architecture* 19 2019 554 566 —ISCA '（ACM，纽约，），第–页。[32] P. Imany、J. A. Jaramillo-Villegas、M. S. Alshaykh、J. M. Lukens、O. D. Odele、A. J. Moore、D. E. Leaird、M. Qi 和 A. M. Weiner，《npj量子信息》**5,** 59（2019）。[33] R. A. Bertlmann 和 P. Krammer，，《物理学杂志A辑》**41,** 235303 2008（）。

附录 A：振幅阻尼信道

我们的输入粒子内纠缠态为

$$|\psi\rangle_{in} = a|a_1b_1\rangle + b|a_1b_2\rangle + c|a_2b_1\rangle + d|a_2b_2\rangle = a|a_1b_1\rangle + \sqrt{1-|a|^2}|\phi\rangle \tag{A1}$$

其中， a、 b、 c 和 d 是复数输入态参数，并且

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}(b|a_1b_2\rangle + c|a_2b_1\rangle + d|a_2b_2\rangle) \tag{A2}$$

这里， $|a|$ 是复输入态参数 a的振幅。两个态 $|a_1b_1\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 构成一组标准正交基： $\langle a_1b_1|\phi\rangle = 0 \ \ and \ \ \langle a_1b_1|a_1b_1\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1$。因此，态 $|\psi\rangle_{in}$ 看起来像一个量子比特态。

表示振幅阻尼信道的 Kraus算子为 [22, 23]

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-P}\sum_{j=0}^{3}|j\rangle\langle j| \ \ , \ \ M_i = \sqrt{P}|0\rangle\langle j| \ \ , \ \ j = 1,2,3$$

其中， P是信道参数，为简洁起见，将状态 $|0\rangle = |a_1b_1\rangle$、 $|1\rangle = |a_1b_2\rangle$、 $|2\rangle = |a_2b_1\rangle$ 和 $|3\rangle = |a_2b_2\rangle$ 记作 $|0\rangle$ 。状态 $|0\rangle$ 对应于系统的基态。由于阻尼同时影响两个自由度，我们假设它以相同的方式使所有激发态跃迁至基态。振幅阻尼信道作用下的输出态为

$$\begin{aligned}\rho = \sum_{i=0}^{3} M_i\rho_{in}M_i^{\dagger} \ &= \ [P + (1-P)|a|^2]|a_1b_1\rangle\langle a_1b_1| + \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}(a|a_1b_1\rangle\langle\phi| + a^*|\phi\rangle\langle a_1b_1|) \\ &+ \ (1-P)(1-|a|^2)|\phi\rangle\langle\phi| \end{aligned} \tag{A3}$$

其中， a^* 是输入态参数 a 的复共轭， $\rho_{in} = |\psi\rangle_{in}\langle\psi|$ 是输入态。用密度矩阵表示时，输出态为:

$$\rho = \begin{pmatrix} P + (1-P)|a|^2 & \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}a^* \\ \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}a & (1-P)(1-|a|^2) \end{pmatrix}$$

由于 ρ 是一个 2×2 矩阵，因此它有两个特征值:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \alpha \ \ , \ \ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \alpha \ \ , \ \ \text{where} \ \ \alpha = \sqrt{\frac{1}{4} - P(1-P)(1-|a|^2)^2} \tag{A4}$$

相应的特征向量为

$$|u_1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|a_1b_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\xi}|\phi\rangle \ \ , \ \ |u_2\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|a_1b_1\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\xi}|\phi\rangle \tag{A5}$$

其中

$$\cos\theta = \frac{1}{\alpha}[P + (1-P)|a|^2 - \frac{1}{2}] \ \ , \ \ \sin\theta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}|a| \ \ and, \ \ a = |a|e^{i\xi} \tag{A6}$$

现在考虑,

$$\rho^* = [P + (1-P)|a|^2]|a_1b_1\rangle\langle a_1b_1| + \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}(a^*|a_1b_1\rangle\langle\phi^*| + a|\phi^*\rangle\langle a_1b_1|) + (1-P)(1-|a|^2)|\phi^*\rangle\langle\phi^*| \tag{A7}$$

其中

$$|\phi^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}(b^*|a_1b_2\rangle + c^*|a_2b_1\rangle + d^*|a_2b_2\rangle)$$

定义 $U = \sigma_y \otimes \sigma_y$。在基 $\{|a_1b_1\rangle, |a_1b_2\rangle, |a_2b_1\rangle, |a_2b_2\rangle\}$ 下，它具有如下形式

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U是一个酉矩阵。因此， $\rho^{'} = U\rho^*U$是作用于 ρ^*上的酉变换。此外，鉴于 ρ是厄米的， $\implies \rho^{'}$也是厄米矩阵，且具有与 ρ相同的特征值。 U对状态 $|a_1b_1\rangle, |a_1b_2\rangle, |a_2b_1\rangle, |a_2b_2\rangle$的作用为

$$U|a_1b_1\rangle = -|a_2b_2\rangle \ , \ U|a_1b_2\rangle = |a_2b_1\rangle \ , \ U|a_2b_1\rangle = |a_1b_2\rangle \ , \ U|a_2b_2\rangle = -|a_1b_1\rangle$$

因此,

$$\rho^{'} = [P + (1-P)|a|^2]|a_2b_2\rangle\langle a_2b_2| - \sqrt{1-P}\sqrt{1-|a|^2}(a^*|a_2b_2\rangle\langle\phi^{'}| + a|\phi^{'}\rangle\langle a_2b_2|) + (1-P)(1-|a|^2)|\phi^{'}\rangle\langle\phi^{'}| \tag{A8}$$

其中

$$|\phi^{'}\rangle = U|\phi^{*}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}(b^{*}|a_2b_1\rangle + c^{*}|a_1b_2\rangle - d^{*}|a_1b_1\rangle) \tag{A9}$$

不难看出，$\langle a_2b_2|\phi^{'}\rangle = 0$ 和 $\langle\phi^{'}|\phi^{'}\rangle = 1$。比较式 (A3) 和式 (A8)，显然 ρ和 $\rho^{'}$ 具有相同的特征值。与式 (A5) 对比可得，$\rho^{'}$ 的特征向量为

$$|v_1\rangle = -\cos\frac{\theta}{2}|a_2b_2\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\xi}|\phi^{'}\rangle \quad , \quad |v_2\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|a_2b_2\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\xi}|\phi^{'}\rangle \tag{A10}$$

请注意，尽管 $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$和 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$各自都是由两个正交归一向量构成的集合，但它们之间不存在 2×2酉变换。这是因为这些向量嵌入在一个更高维（四维）的空间中。

由式 (A2) 和式 (A9)，我们得到

$$\langle a_1b_1|\phi^{'}\rangle = -\langle\phi|a_2b_2\rangle = -\frac{d^{*}}{\sqrt{1-|a|^2}} \text{ and, } \langle\phi|\phi^{'}\rangle = \frac{2b^{*}c^{*}}{1-|a|^2} \tag{A11}$$

利用这些结果可以得到

$$\begin{aligned}
\langle u_1|v_1\rangle &= -\frac{d^{*}e^{i\xi}\sin\theta}{\sqrt{1-|a|^2}} + \frac{b^{*}c^{*}e^{i2\xi}(1-\cos\theta)}{1-|a|^2} \\
\langle u_2|v_2\rangle &= \frac{d^{*}e^{i\xi}\sin\theta}{\sqrt{1-|a|^2}} + \frac{b^{*}c^{*}e^{i2\xi}(1+\cos\theta)}{1-|a|^2} \\
\langle u_1|v_2\rangle &= \langle u_2|v_1\rangle = \frac{d^{*}e^{i\xi}\cos\theta}{\sqrt{1-|a|^2}} - \frac{b^{*}c^{*}e^{i2\xi}\sin\theta}{1-|a|^2}
\end{aligned} \tag{A12}$$

现在考虑矩阵 $R = \rho(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^{*}(\sigma_y\otimes\sigma_y) = \rho U\rho^{*}U = \rho\rho^{'}$，它用于计算输出态 ρ的并发度。我们已在正文第 2 页给出了 R 的定义。请注意，R 不是厄米矩阵。将 R 表示在正交归一向量 $|v_1\rangle$、$|v_2\rangle$、$|v_3\rangle$ 和 $|v_4\rangle$构成的基下。$|v_1\rangle$、$|v_2\rangle$、$|v_3\rangle$ 和 $|v_4\rangle$ 是 $\rho^{'}$的特征值。$|v_1\rangle$ 和 $|v_2\rangle$ 在式 (A10) 中定义，$|v_3\rangle$ 和 $|v_4\rangle$ 是对应于 $\rho^{'}$的两个零特征值所在子空间的特征向量。$|v_3\rangle$ 和 $|v_4\rangle$ 的具体形式并不重要，但我们需要它们才能将 R 形式化地写成 4×4 矩阵。因此，$\rho^{'}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$、$\rho^{'}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle$、$\rho^{'}|v_3\rangle = 0$ 和$\rho^{'}|v_4\rangle = 0$。矩阵 R 的元素为 $R_{ij} = \langle v_i|\rho\rho^{'}|v_j\rangle$。因此

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & 0 & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R 的特征值可由行列式方程求得

$$\begin{vmatrix} R_{11}-\lambda & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22}-\lambda & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & -\lambda & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \left[(\lambda-R_{11})(\lambda-R_{22}) - R_{12}R_{21}\right]\lambda^2 = 0$$

这立即表明，R 的两个特征值为零。两个非零特征值是该二次方程的根

$$(\lambda-R_{11})(\lambda-R_{22}) - R_{12}R_{21} = 0$$

由于 $R = \rho\rho^{'}$、$\rho^{'}|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$ 和 $\rho^{'}|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle$，我们得到方程

$$(\lambda-\lambda_1\rho_{11})(\lambda-\lambda_2\rho_{22}) - \lambda_1\lambda_2\rho_{12}\rho_{21} = 0$$

其中,

$$\rho_{ij} = \langle v_i|\rho|v_j\rangle \quad , \quad \text{for}, i,j\in\{1,2\} \tag{A13}$$

因此，两个非零特征值为

$$\lambda_{\pm}=\frac{1}{2}\Big[\lambda_1\rho_{11}+\lambda_2\rho_{22}\pm\sqrt{(\lambda_1\rho_{11}+\lambda_2\rho_{22})^2-4\lambda_1\lambda_2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})}\Big] \tag{A14}$$

定义如下，

$$\begin{aligned} S &= \lambda_1\rho_{11}+\lambda_2\rho_{22} \\ T &= 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})} \end{aligned} \tag{A15}$$

Then

$$\lambda_{\pm}=\frac{S\pm\sqrt{S^2-T^2}}{2} \tag{A16}$$

并发度为

$$C=\sqrt{\lambda_+}-\sqrt{\lambda_-}\implies C^2=\lambda_++\lambda_--2\sqrt{\lambda_+\lambda_-}=S-T \tag{A17}$$

只需计算 S 和 T 即可得到并发度。现在，

$$S=\lambda_1\rho_{11}+\lambda_2\rho_{22}$$

其中 $\rho_{ij}=\langle v_i|\rho|v_j\rangle$，但 $\rho=\lambda_1|u_1\rangle\langle u_1|+\lambda_2|u_2\rangle\langle u_2|$ 满足 u_1，u_2 由式（A5）给出。将 ρ 代入 ρ_{ij}，得到

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \langle v_1|\rho|v_1\rangle=\lambda_1|U_{11}|^2+\lambda_2|U_{12}|^2 \\ \rho_{22} &= \langle v_2|\rho|v_2\rangle=\lambda_1|U_{21}|^2+\lambda_2|U_{22}|^2 \end{aligned} \tag{A18}$$

其中，对于 i，$U_{ij}=\langle u_i|v_j\rangle$，$j\in\{1,2\}$。因此

$$S=\lambda_1^2|U_{11}|^2+\lambda_2^2|U_{22}|^2+\lambda_1\lambda_2(|U_{12}|^2+|U_{21}|^2)$$

将 λ_1 和 λ_2 用式（A4）中的 α 表示，

$$S=\frac{1}{4}\big[|U_{11}|^2+|U_{22}|^2+|U_{12}|^2+|U_{21}|^2\big]+\alpha^2\big[|U_{11}|^2+|U_{22}|^2-|U_{12}|^2-|U_{21}|^2\big]+\alpha\big[|U_{11}|^2-|U_{22}|^2\big] \tag{A19}$$

由公式 (A12)，

$$\begin{aligned} |U_{11}|^2 &= \frac{|b|^2|c|^2(1-\cos\theta)^2}{(1-|a|^2)^2}+\frac{|d|^2\sin^2\theta}{1-|a|^2}-\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta(b^*c^*de^{i\xi}+bcd^*e^{-i\xi})}{(1-|a|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ |U_{22}|^2 &= \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-|a|^2)^2}+\frac{|d|^2\sin^2\theta}{1-|a|^2}+\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta(b^*c^*de^{i\xi}+bcd^*e^{-i\xi})}{(1-|a|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ |U_{12}|^2 &= |U_{21}|^2=\frac{|b|^2|c|^2\sin^2\theta}{(1-|a|^2)^2}+\frac{|d|^2\cos^2\theta}{1-|a|^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta(b^*c^*de^{i\xi}+bcd^*e^{-i\xi})}{(1-|a|^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{A20}$$

将 $|U_{11}|^2$、$|U_{12}|^2=|U_{21}|^2$、$|U_{22}|^2$ 的这些表达式代入公式 (A19) 并化简，可得

$$S=4|b|^2|c|^2(1-P)^2-4(1-P)^{3/2}\big[adb^*c^*+bca^*d^*\big]+2|d|^2(1-P)[P+(2-P)|a|^2] \tag{A21}$$

由式 (A15) 可得 $T=2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})}$。我们已在式 (A18) 中计算出 ρ_{11} 和 ρ_{22}。同理，我们也可以计算 ρ_{12} 和 ρ_{21}:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \langle v_1|\rho|v_2\rangle=\lambda_1\langle v_1|u_1\rangle\langle u_1|v_2\rangle+\lambda_2\langle v_1|u_2\rangle\langle u_2|v_2\rangle \\ \rho_{21} &= \langle v_2|\rho|v_1\rangle=\lambda_1\langle v_2|u_1\rangle\langle u_1|v_1\rangle+\lambda_2\langle v_2|u_2\rangle\langle u_2|v_1\rangle \end{aligned}$$

Then

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21}=\lambda_1\lambda_2|\langle u_1|v_1\rangle\langle u_2|v_2\rangle-\langle u_2|v_1\rangle\langle u_1|v_2\rangle|^2$$

将上述 $\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21}$ 的表达式代入 T的表达式（式 (A15)），并利用式 (A12)，可得：

$$T = 2P(1-P)(1-|a|^2)|d|^2 \tag{A22}$$

由方程 (A17)、方程 (A21) 和方程 (A22)，我们得到

$$C^2 = S - T = 4|bc\sqrt{1-P} - ad|^2(1-P)$$

因此，并发度的表达式变为

$$C = 2|bc\sqrt{1-P} - ad|\sqrt{1-P} \tag{A23}$$

这是在振幅阻尼信道作用下，具有复数输入态参数 a、 b、 c 和 d 的输出粒子内纠缠态（方程 (A3)）的并发度的精确解析表达式。为了更好地理解并发度，我们将输入态参数设为

$$a = |a|e^{i\theta_a} \quad , \quad b = |b|e^{i\theta_b} \quad , \quad c = |c|e^{i\theta_c} \quad , \quad d = |d|e^{i\theta_d} \tag{A24}$$

代入这些参数，我们得到

$$C = 2\left||b||c|\sqrt{1-P}e^{i(\theta_b+\theta_c)} - |a||d|e^{i(\theta_a+\theta_d)}\right|\sqrt{1-P}$$

化简上式，我们得到

$$C = 2\left[|b|^2|c|^2(1-P) + |a|^2|d|^2 - 2|a||b||c||d|\sqrt{1-P}\cos(\Delta\theta)\right]^{1/2}\sqrt{1-P}$$

其中 $\Delta\theta = \theta_b + \theta_c - \theta_a - \theta_d$。值得注意的是，并发度取决于 $\theta_b+\theta_c$ 与 $\theta_a+\theta_d$ 之差。如果改变某个单独的角度，同时保持差值不变，则并发度也保持不变。现在让我们尝试对并发度进行一些几何表示。设 V_1 和 V_2 是由下式给出的两个向量

$$\vec{V}_1 = |b||c|\sqrt{1-P}e^{i(\theta_b+\theta_c)} \quad , \quad \vec{V}_2 = |a||d|e^{i(\theta_a+\theta_d)}$$

那么，并发度的表达式为

$$C = 2|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|\sqrt{1-P} = 2|\vec{V}|\sqrt{1-P}$$

其中 $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$。因此，并发度为向量 $\vec{V}$的模再乘以 $2\sqrt{1-P}$。当

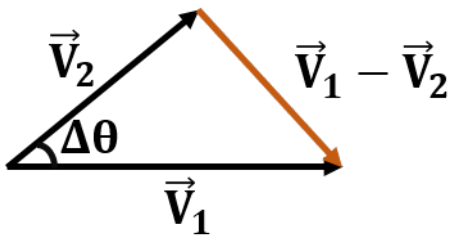

图6. 此图显示了 $\vec{V}_1$、 $\vec{V}_2$、 $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ 和 $\Delta\theta$ 。

向量 V 的模为零时，粒子内纠缠态的并发度也变为零。这发生在

$$|b||c|\sqrt{1-P} = |a||d| \quad , \quad \text{and} \quad \Delta\theta = 0, \pm 2\pi \tag{A25}$$

式 (A25) 意味着

$$|b||c|\sqrt{1-P} = |a||d| \Longrightarrow P = 1 - \left(\frac{|a||d|}{|b||c|}\right)^2 \tag{A26}$$

条件 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$ 是因为各个角度 $(\theta_a、\ \theta_b、\ \theta_c、\ \theta_d) \in [0, 2\pi]$。只要 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$ 且 $|a||d| \leq |b||c|$，即 $P \leq 1$，我们就能得到发生纠缠猝死时 P 的物理取值。当$|a||d| > |b||c|$时，$P > 1$，这是非物理的。因此，如果 $|a||d| > |b||c|$，我们将不会观察到纠缠猝死。图7中的蓝色曲线、黄色曲线和绿色曲线分别表示三个不同输入态的并发度随信道参数 P 的变化，这些输入态的态参数分别满足条件 (i) $|a||d| < |b||c|$、(ii) $|a||d| > |b||c|$ 和 (iii) $|a||d| = |b||c|$。蓝色曲线表明，若某个状态满足条件 (i)，我们会观察到纠缠在纠缠猝死后重生，最终渐近衰减至零。黄色曲线表明，若某个状态满足条件 (ii)，纠缠最初会产生，随后最终渐近衰减。绿色曲线表明，若某个状态满足条件 (iii)，可分态首先会变为纠缠态，纠缠量最初增加，最终渐近衰减。

值得注意的是，对于系数 a、b、c 和 d 的固定取值，并发度仅会在 P 的某个特定取值处降为零，而不会在一段取值范围内为零。这是因为末态密度矩阵 ρ 的两个特征值等于零，因此矩阵 R 也有两个特征值为零。并发度根据矩阵 R 的两个非零特征值计算，如公式（A14）所定义。当 R 的这两个非零特征值简并时，并发度为零。这对应于能级交叉，而能级交叉只会发生在参数空间中的孤立点，因此，并发度不可能在 P 的一段取值范围内为零。这是粒子内振幅阻尼信道所独有的行为，与后文所示其他通道中的情况形成鲜明对比。对于其他通道，R 的四个特征值通常均非零；因此，并发度可以在 P 的一段取值范围内保持为零，而不会出现复活。

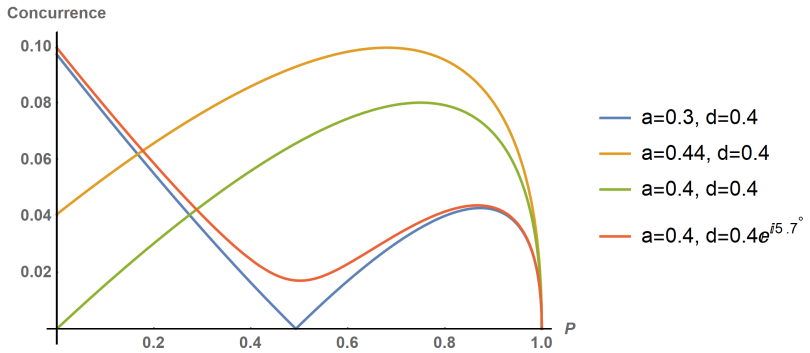

图7. 对于三个不同的输入态，其态参数分别为 $|a| = 0.3$、0.44和0.4，蓝色曲线、黄色曲线和绿色曲线表示并发度随 P 的变化。三个输入态的其他态参数分别为 $|c| = 0.2$、$|d| = 0.4$ 和 $\Delta\theta = 0$。对于态参数为 $a = 0.3$、$b = 0.84$ $c = 0.2$ $d = 0.4e^{i5.7^\circ}$ 的输入态，并发度随信道参数 P 的变化由红色曲线表示。蓝色曲线所代表的态满足条件 (i) $|a||d| < |b||c|$：该态先表现出纠缠猝死，随后出现纠缠重生，最终渐近衰减至零。黄色曲线所代表的态满足条件 (ii) $|a||d| > |b||c|$：该态先表现出纠缠生成，最终渐近衰减至零。绿色曲线所代表的态满足条件 (iii) $|a||d| > |b||c|$：该态的并发度先变为非零，随后逐渐增大，最终渐近衰减至零。在上述三种情况下，$\Delta\theta = 0$。如果我们令 $\theta_d = 5.7^\circ$，同时 $\theta_z = \theta_b = \theta_c = 0$，即 $\Delta\theta \neq 0, \pm 2\pi$，则观察到并发度达到其最小非零值 C_-，随后达到最大值 C_+，最终渐近衰减至零。

假设我们只考虑条件 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$，即使 $\theta_a、\ \theta_b、\ \theta_c、\ \theta_d$ 均非零，它们也满足关系 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$。在这种情况下，并发度的表达式变为

$$\begin{aligned} C &= 2\Big[|b|^2|c|^2(1-P) + |a|^2|d|^2 - 2|a||b||c||d|\sqrt{1-P}\Big]^{1/2}\sqrt{1-P} \\ &= 2\Big|\big[|b||c|\sqrt{1-P} - |a||d|\big]\Big|\sqrt{1-P} \end{aligned} \tag{A27}$$

接下来，我们考虑 $\Delta\theta \neq 0, \pm 2\pi$ 的情况。令 $\sqrt{1-P} = x$, $|b||c| = \alpha$, $|a||d| = \beta$，并发度的表达式变为

$$C = 2\Big[\alpha^2 x^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta x\cos(\Delta\theta)\Big]^{1/2} x \tag{A28}$$

So,

$$C^2 = 4\Big[\alpha^2 x^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta x\cos(\Delta\theta)\Big] x^2$$

对于给定的一组 α, β 和 $\Delta\theta$ 的取值（即给定的一组 $|a|, |b|, |c|$ 和 $|d|$ 的取值），并发度在以下条件下取得最小值

$$\frac{dC^2}{dx} = 8x\left[2\alpha^2x^2 + \beta^2 - 3\alpha\beta x\cos\Delta\theta\right] = 0$$

由于我们并不 关注 $x = 0$ 的情况（因为 $x = 0 \Rightarrow P = 1$，此时并发度始终为零 .）

$$\frac{dC^2}{dx} = 0 \Rightarrow 2\alpha^2x^2 + \beta^2 - 3\alpha\beta x\cos\Delta\theta = 0 \tag{A29}$$

求解上述方程，可得 x 的解为

$$x = \frac{\beta}{4\alpha}[3\cos\Delta\theta \pm \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}]$$

由于 α 和 β 均为正数，要使 x 为正，cos $\Delta\theta$ 必须为正；要使 x 为实数，$\cos^2\Delta\theta \geq \frac{8}{9}$，即 $\cos\Delta\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$。因此， $\Delta\theta$ 必须位于以下范围内:

$$0 < \Delta\theta \leq 19.47^\circ \text{ or } 340.53^\circ < \Delta\theta \leq 360^\circ \tag{A30}$$

在 $\Delta\theta$ 的此范围内， x 的可接受解为

$$x = \frac{\beta}{4\alpha}[3\cos\Delta\theta \pm \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}] \tag{A31}$$

当并发度取最大值或最小值时，方程（A29）成立。将方程（A29）代入方程（A28），可将并发度的最优值写为

$$C_{\mp} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\beta^2 - \alpha^2x^2\right]^{1/2}x \tag{A32}$$

为验证 x 的这个值是否确实使并发度达到最小值或最大值，我们考虑

$$\frac{d^2C^2}{dx^2} = 48\alpha^2x^2 + 8\beta^2 - 48\alpha\beta x\cos\Delta\theta$$

利用式（A29），我们可以写出

$$\frac{d^2C^2}{dx^2} = 16\alpha^2x^2 - 8\beta^2$$

要使并发度达到最小值,

$$\frac{d^2C^2}{dx^2} > 0 \Longrightarrow x > \frac{\beta}{\sqrt{2}\alpha} \tag{A33}$$

要满足式（A33）， x 的表达式必须满足

$$\frac{\beta}{4\alpha}\left[3\cos\Delta\theta \pm \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\right] > \frac{\beta}{\sqrt{2}\alpha}$$
$$\Rightarrow \left[3\cos\Delta\theta \pm \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\right] > 2\sqrt{2}$$

我们可以很容易地验证，只有带有 $+$ 符号的左侧才能满足这一条件。因此，使并发度达到最小值的 x 唯一可接受的解为

$$x_- = \frac{\beta}{4\alpha}\left[3\cos\Delta\theta + \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\right] \tag{A34}$$

以及相应的 信道参数的取值 P，此时并发度达到最小值 is

$$P_- = 1 - \frac{\beta^2}{16\alpha^2}\left[3\cos\Delta\theta + \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\right]^2 \tag{A35}$$

将 x_- 的表达式代入方程（A28），即可得到并发度的最小值:

$$C_- = \frac{\beta^2}{2\sqrt{3}\alpha}\Big[1 - \frac{(3\cos\Delta\theta + \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8})^2}{16}\Big]^{1/2}\Big[3\cos\Delta\theta + \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\Big] \tag{A36}$$

当 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$ 时，则

$$C_-^{\Delta\theta=0,\pm 2\pi} = 0 \tag{A37}$$

另一方面，要使并发度达到最大值,

$$\frac{d^2C^2}{dx^2} < 0 \Longrightarrow x < \frac{\beta}{\sqrt{2}\alpha} \tag{A38}$$

因此，满足上述条件的 x 的表达式为

$$x_+ = \frac{\beta}{4\alpha}\Big[3\cos\Delta\theta - \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\Big] \tag{A39}$$

因此， 上述 x 的值使并发度达到最大值，相应的 P 值为 is

$$P_+ = 1 - \frac{\beta^2}{16\alpha^2}\Big[3\cos\Delta\theta - \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\Big]^2 \tag{A40}$$

对于给定的输入粒子内纠缠态， P_- 小于 P_+。将 x_+ 的表达式代入方程（A28），可得并发度的最大值:

$$C_+ = \frac{\beta^2}{2\sqrt{3}\alpha}\Big[1 - \frac{(3\cos\Delta\theta - \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8})^2}{16}\Big]^{1/2}\Big[3\cos\Delta\theta - \sqrt{(3\cos\Delta\theta)^2 - 8}\Big] \tag{A41}$$

当 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$，则

$$C_+^{\Delta\theta=0,\pm 2\pi} = \frac{\beta^2}{2\alpha} \tag{A42}$$

为了估算振幅阻尼信道导致的纠缠生成量，我们定义一个量$\tilde{C} = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}$。显然， $\tilde{C}$ 仅是 $\Delta\theta$的函数。图 A 展示了 $\tilde{C}$ 随 $\Delta\theta$ 变化的行为。当$\Delta\theta = 0$ °时， $\tilde{C} = 1$。随着 $\Delta\theta$增加， $\tilde{C}$ 逐渐减小，并在 $\Delta\theta$ =$\cos^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 19.47$ °时变为零。我们已在方程（A30）中看到过这个 $\Delta\theta$ 值。方程（A30）明确指出，在 19.47 ° 和 340.53 °之间， $\Delta\theta$ 没有 物理上可接受的值。当 $\Delta\theta = 340.53$ °时， $C = 0$。如果进一步增大 $\Delta\theta$， C 便逐渐增大，并在 $\Delta\theta = 360$ °时达到 其最大值 $C = 1$。因此，显然 C 在 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$时最大。上述分析表明，当 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$时，纠缠重生量达到最大。当 $\Delta\theta = 0,\ \pm 2\pi$时，纠缠重生的最大量为

$$C_{creation} = C_+^{\Delta\theta=0,\pm 2\pi} - C_+^{\Delta\theta=0,\pm 2\pi} = \frac{\beta^2}{2\pi} = \frac{|a|^2|d|^2}{2\pi}. \tag{A43}$$

附录 B：相位阻尼信道

当量子系统与环境相互作用时，在能量未损失的情况下丢失量子信息，这一过程称为相位阻尼。在相位阻尼过程中，系统本征态之间的相对相位会丢失。相位阻尼信道的 Kraus算子为：-

$$M_0 = \sqrt{1-P}\sum_{j=0}^{3}|j\rangle\langle j| \quad , \quad M_{i+1} = \sqrt{P}|i\rangle\langle i|, (i = 0, 1, 2, 3) \tag{B1}$$

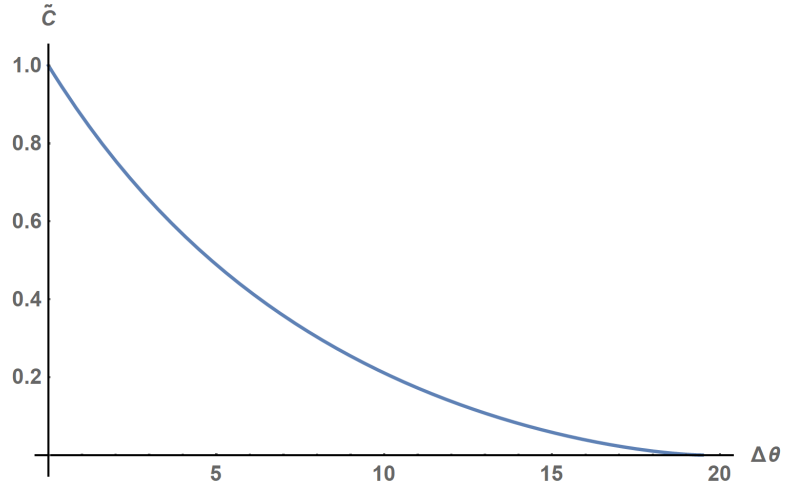

图8. 振幅阻尼信道作用下， $\tilde{C}$ 随 $\Delta\theta$ 的变化。这里， $\tilde{C}$ 在 $\Delta\theta = 0$处达到最大值。随着 $\Delta\theta$增加， $\tilde{C}$ 逐渐减小，并在 $\Delta\theta = 19.47°$处变为零。

首先考虑一个输入粒子内纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$ ，其中输入态参数 a、 b、 c 和 d 均为实数。 $|\psi\rangle_{in}$ 经过相位阻尼信道演化后，最终态变为

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} a^2 & ab(1-P) & ac(1-P) & ad(1-P) \\ ab(1-P) & b^2 & bc(1-P) & bd(1-P) \\ ac(1-P) & bc(1-P) & c^2 & cd(1-P) \\ ad(1-P) & bd(1-P) & cd(1-P) & d^2 \end{pmatrix} \tag{B2}$$

接下来，我们计算矩阵 R ，并求出该矩阵的全部四个特征值。我们已在主文稿第2页给出了 R 的定义。 R 的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha + |(ad-bc)|(2-P)\sqrt{\beta}\right] \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha - |(ad-bc)|(2-P)\sqrt{\beta}\right] \quad , \quad \lambda_3 = a^2d^2P^2 \quad , \quad \lambda_4 = b^2c^2P^2 \tag{B3}$$

其中

$$\alpha = (a \quad d-bc)^2(2-P)^2 + 2abcdP(4-3P) \quad , \quad \text{and} \quad \beta = (ad-bc)^2(2-P)^2 + 4abcdP(4-3P) \tag{B4}$$

考虑如下情况　　其中 $P = 0$，即不受相位阻尼噪声影响。此时，特征值变为

$$\lambda_1 = 4(ad-bc)^2 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

因此，只有 λ_1 对并发度的表达式有贡献，即 $C = \sqrt{\lambda_1} = 2|(ad-bc)|$，而其余三个特征值对并发度没有贡献。逐渐增大信道参数 P 时，我们发现，随着 P 增大，特征值 λ_1 始终是最大的特征值，而其余三个特征值先变为非零，随后逐渐增大。因此，随着信道参数 P 的增大，并发度逐渐减小。现在，我们来求并发度变为零时的信道参数 P 值。当$C = 0$时，满足以下条件：

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3} + \sqrt{\lambda_4}$$

将所有 λ_i 的表达式代入上述方程，并对 P 求解，可得 P 的以下可接受解：

$$P = \begin{cases} \frac{ad-bc}{ad} & \text{if } ad > bc \\ \frac{bc-ad}{bc} & \text{if } bc > ad \end{cases} \tag{B5}$$

对于 $ad > bc$，若 $bc = 0$，我们只观察到纠缠的渐近衰减。同样，对于 $bc > ad$，若 $ad = 0$，我们只观察到纠缠的渐近衰减。因此，在相位阻尼信道中，对于 ad 和 bc 均非零的输入态，我们会观察到纠缠猝死。这意味着，当所有输入态参数均

非零时，只会发生纠缠猝死。如果一个或多个输入态参数为零，我们只会观察到纠缠的渐近衰减。

通过这一分析，我们发现，对于所有输入态参数 a、 b、 c 和 d， λ_1 都是最大的特征值，并且在 P 的整个取值范围内始终最大。令最大特征值的平方根为 λ_{max}，其余三个特征值的平方根之和为λ_{rest}： $\lambda_{max}=\sqrt{\lambda_1}$、 $\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}=\lambda_{rest}$。根据输入态参数的取值，当所有输入态参数均不为零时，存在一个物理上允许的信道参数值 P，此时会出现纠缠猝死（ESD）。在纠缠猝死点以下，即 $\lambda_{max}>\lambda_{rest}$ 时，并发度非零；在纠缠猝死点以上，即 $\lambda_{max}<\lambda_{rest}$ 时，并发度为零。若在纠缠猝死点之后满足条件 $\lambda_{max}>\lambda_{rest}$，则可认为粒子内纠缠会重生。然而，相位阻尼信道中不会发生这种情况。

在上述分析中，我们考虑了一个粒子内纠缠态，其态参数 a、 b、 c 和 d 均为实数。现在考虑一个输入粒子内纠缠态，其态参数均为复数，即 $a=a_i+ia_2$、 $b=b_i+ib_2$、 $c=c_i+ic_2$ 和 $d=d_i+id_2$。在这种情况下，矩阵 R 的四个特征值变为

$$\lambda_1^{'}=\frac{1}{2}\Big[\alpha^{'}+\sqrt{\beta^{'}}\Big]\ ,\ \lambda_2^{'}=\frac{1}{2}\Big[\alpha^{'}-\sqrt{\beta^{'}}\Big]\ ,\ \lambda_3^{'}=(a_1^2+a_2^2)(d_1^2+d_2^2)P^2\ ,\ \lambda_4^{'}=(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)P^2 \tag{B6}$$

这里，上标（′）表示这些是复数输入态参数情况下的特征值。 $\alpha^{'}$ 的表达式为

$$\alpha^{'}=|ad-bc|^2(2-P)^2+2\Big\{(a_1d_1-a_2d_2)(b_1c_1-b_2c_2)+(a_1d_2+a_2d_1)(b_1c_2+b_2c_1)\Big\}P(4-3P) \tag{B7}$$

其中

$$|ad-bc|^2=\Big[\Big\{(a_1d_1-a_2d_2)-(b_1c_1-b_2c_2)\Big\}^2+\Big\{(a_1d_2+a_2d_1)-(b_1c_2+b_2c_1)\Big\}^2\Big] \tag{B8}$$

并且 $\beta^{'}$ 变为

$$\beta^{'}=\alpha^{'2}-4\beta^{''} \tag{B9}$$

其中

$$\beta^{''}=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)(d_1^2+d_2^2)P^2(4-3P)^2=|a|^2|b|^2|c|^2|d|^2P^2(4-3P)^2 \tag{B10}$$

根据特征值的表达式，我们可以很容易地得出， $\lambda_1^{'}$ 是最大的特征值。当 $P=0$ 时， $\beta^{''}=0$ 和 $\beta^{'}=\alpha^{'2}$。因此， $\lambda_1^{'}=4|ad-bc|^2$ 和 $\lambda_2^{'}=\lambda_3^{'}=\lambda_4^{'}=0$。所以，只有 λ_1 对并发度有贡献，即 $C=\sqrt{\lambda_1}=2|\ (ad-bc)\ |$。如果我们逐渐增大信道参数 P，可以观察到，随着 P 的增大，特征值 λ_1 始终是最大的特征值，而另外三个特征值先变为非零值，然后逐渐增大。因此，并发度随着 P 的增大而逐渐减小。所以，在这种情况下，很明显，在相位阻尼信道下，我们不会得到任何纠缠重生或纠缠生成。

接下来，考虑粒子间纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$ 在相位阻尼信道下的退相干。以下三个 Kraus算子可以描述相位阻尼信道 [30],造成的噪声效应

$$M_0=\sqrt{1-P}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\ M_1=\sqrt{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ M_2=\sqrt{P}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$|\psi\rangle_{in}$ 经过相位阻尼信道演化后，最终态变为

$$\rho_{out}=\begin{pmatrix}a^2&ab(1-P)&ac(1-P)&ad(1-P)^2\\ab(1-P)&b^2&bc(1-P)^2&bd(1-P)\\ac(1-P)&bc(1-P)^2&c^2&cd(1-P)\\ad(1-P)^2&bd(1-P)&cd(1-P)&d^2\end{pmatrix} \tag{B11}$$

为了研究粒子间纠缠态退相干的性质，我们考虑输入态参数$a=c=\frac{1}{4}$。图 9 展示了不同输入态参数 d取值下，并发度随 P的变化情况。当$d=0$时，并发度在 $P=1$时降为零。对于所有非零的 d取值，当 $P<1$时，并发度均变为零。

图10展示了粒子内纠缠和粒子间纠缠随信道参数 P 变化时的退相干情况。这里，实线和虚线分别表示粒子内纠缠态和粒子间纠缠态的并发度。从图10可以很容易看出，粒子间纠缠的衰减速度快于粒子内纠缠。

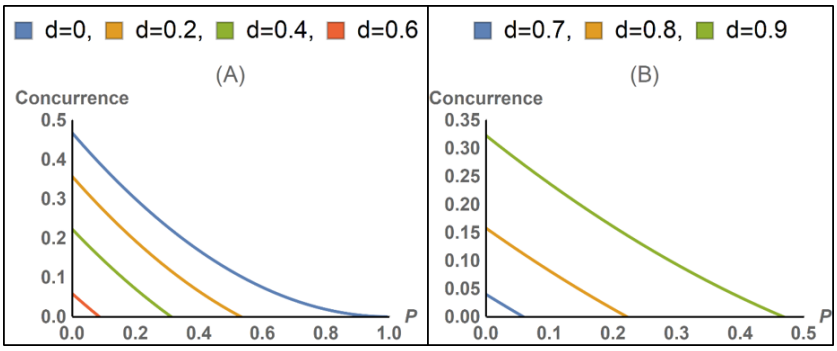

图9. 该图展示了相位阻尼信道作用下，纯粒子间纠缠态的并发度随信道参数 P的演化情况，其中 $a = c = \frac{1}{4}$，且 d取不同值。图9(A)和图9(B)中， d分别取值为 0，0。2，0。4，0。6 和 0。7，0。8，0。9。这表明，并发度会随着 P的增加而非线性衰减。当 $d = 0$时，并发度降为零。当 d取任意非零值时，$P < 1$时并发度变为零。

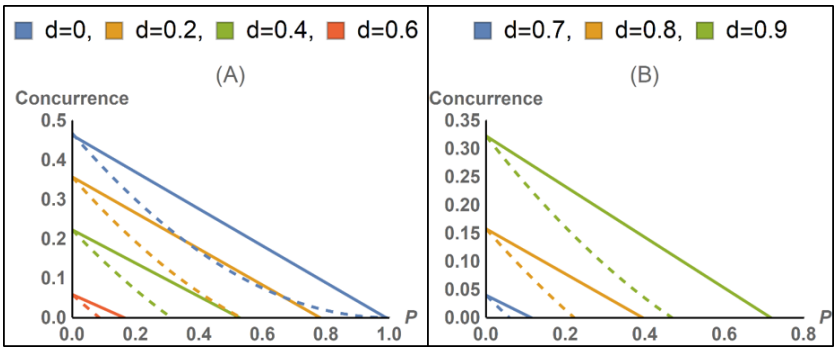

图10. 该图展示了相位阻尼信道作用下，纯粒子内纠缠态和纯粒子间纠缠态的并发度随信道参数 P的演化情况，其中 $a = c = \frac{1}{4}$，且 d 取不同值。实线表示粒子内纠缠态的并发度，点线表示粒子间纠缠态的并发度。图10(A)和图10(B)中，d分别取值为 0，0。2，0。4，0。6 和 0。7，0。8，0。9。图10(A)和图10(B)均表明，在相位阻尼信道作用下，粒子间纠缠比粒子内纠缠衰减得更快。

附录 C：退极化信道

在退极化信道作用下，d 级量子系统以有限概率 P 变为最大混合态 $\mathcal{I}/d$。对应于该信道的 Kraus 算子为 [23, 31, 32]

$$M_{00} = \sqrt{1 - \frac{d^2-1}{d^2}P}\,\hat{U}_{00} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}P}\;\hat{U}_{00},$$
$$M_{ij} = \frac{\sqrt{p}}{4}\hat{U}_{ij}\ ,\ 0 \le i,j \le 3\ \ and\ \ (i,j) \neq (0,0)$$

其中，$\hat{}\,U_{ij}$ 是 Weyl 算符。在 d 维希尔伯特空间中，Weyl 算符$\hat{}\,U_{mn}$ 是一组 d^2 算符，定义为 [23, 33]

$$\hat{U}_{mn} = \sum_{j=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d}jm}|j\rangle\langle j+n \mod d| \tag{C1}$$

Weyl 算符是酉算符，并构成希尔伯特空间的一组标准正交基，称为 Weyl 算符基。在我们当前的情形中， $d=4$。因此

$$\begin{aligned}\hat{U}_{mn} &= \sum_{j=0}^{3} e^{\frac{2\pi i}{d}jm}|j\rangle\langle j+n \mod 4| \\ &= |0\rangle\langle n| + e^{i\frac{m\pi}{2}}|1\rangle\langle n+1| + e^{im\pi}|2\rangle\langle n+2| \\ &+ e^{i\frac{3m\pi}{2}}|3\rangle\langle n+3|\end{aligned} \tag{C2}$$

四维希尔伯特空间中有 16 个 Weyl 算符。

在退极化信道的作用下，d 级量子系统以有限概率 $\mathcal{I}/d$ 变为最大混合态。首先，我们考虑输入粒子内纠缠态 $|\psi\rangle_{in}$，其中输入态参数 a、 b、c 和 d 均为实数。经过退极化信道演化后， $|\psi\rangle_{in}$ 的最终态变为

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} a^2q+\frac{P}{4} & abq & acq & adq \\ abq & b^2q+\frac{P}{4} & bcq & bdq \\ acq & bcq & c^2q+\frac{P}{4} & cdq \\ adq & bdq & cdq & d^2q+\frac{P}{4} \end{pmatrix} \tag{C3}$$

其中 $q=1-P$。接下来，我们计算矩阵 R，并求出该矩阵的全部四个特征值。主文第 2 页给出了 R 的定义。 R 的特征值为

$$\lambda_1 = \alpha+\beta\ ,\ \lambda_2=\alpha-\beta\ ,\ \lambda_3=\lambda_4=\frac{P^2}{16} \tag{C4}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha &= 2(ad-bc)^2(1-P)^2+\frac{P}{4}(1-\frac{3P}{4}), \\ \beta &= 2|(ad-bc)|(1-P)\sqrt{(ad-bc)^2(1-P)^2+\frac{P}{4}(1-\frac{3P}{4})}\end{aligned} \tag{C5}$$

四个特征值中， λ_3 和 λ_4 与输入态参数无关，仅取决于信道参数P。当 $P=0$时， $\lambda_3=\lambda_4=0$。随着 P增大，它们也随之增大，并在$P=1$处达到最大值 $1/16$ 。对于 a、 b、 c 和 d 取正值或负值的情况， α 和 β 始终为正。因此，特征值 λ_1 始终大于 λ_2。在 $P=0$时，不存在退极化噪声的影响。此时， $\alpha=\beta=2(ad-bc)^2$ 和$\lambda_1=4(ad-bc)^2$， $\lambda_2=0$。因此，只有 λ_1 对并发度的表达式有贡献，即$C=\sqrt{\lambda_1}=2|(ad-bc)|$，而其余三个特征值对并发度没有贡献。若逐渐增大信道参数 P，我们会发现，随着 P 增大，特征值 λ_1 仍为最大特征值，而其余三个特征值先变为非零，随后逐渐增大。当 $C=0$时，满足以下条件：

$$\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}$$

代入所有表达式 λ_i 代入上述方程并求解 P，我们得到 P的以下可接受解 ：

$$P=\frac{4|(ad-bc)|}{1+4|(ad-bc)|} \tag{C6}$$

由于 $\frac{4|\ ad-bc\ |}{1+4|\ ad-bc}$（）（）$|<1$，因此在这种情况下总会发生纠缠猝死。 P 在初始态为最大纠缠纯贝尔态时达到最大，此时发生纠缠猝死时 $P=\frac{2}{3}$。对于非最大纠缠纯态 $P<\frac{2}{3}$。

根据上述分析，我们观察到，对于所有可能的输入态参数和信道参数，特征值 λ_1 始终大于其他三个特征值中的任何一个。当信道参数 P 取某个物理可取值时，$\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}$，此时我们观察到纠缠猝死。在纠缠猝死点以下，即 $\sqrt{\lambda_1}>\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}$时，并发度非零；在纠缠猝死点以上，即 $\sqrt{\lambda_1}<\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}$ 时，并发度为零。如果在纠缠猝死点之后观察到条件 $\sqrt{\lambda_1}>\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}$，则可以说粒子内纠缠会重生。不过，退极化信道中不会出现这种情况。

在上述分析中，我们考虑了一个粒子内纠缠态，其态参数 a、 b、 c 和 d均为实数。现在来考虑一个输入粒子内纠缠态，其态参数均为复数，即 $a = a_i + ia_2$、 $b = b_i + ib_2$、 $c = c_i + ic_2$ 和 $d = d_i + id_2$。在这种情况下，矩阵 R 的四个特征值均变为

$$\lambda_1^{'} = \alpha^{'} + \beta^{'} \quad , \quad \lambda_2^{'} = \alpha^{'} - \beta^{'} \quad , \quad \lambda_3^{'} = \lambda_4^{'} = \frac{P^2}{16}$$

这里， $\alpha^{'}$ 和 $\beta^{'}$ 的表达式变为

$$\begin{aligned} \alpha^{'} &= 2|ad-bc|^2(1-P)^2 + \frac{P}{4}\Big(1-\frac{3P}{4}\Big) \\ \beta^{'} &= 2|ad-bc|(1-P)\sqrt{|ad-bc|^2(1-P)^2 + \frac{P}{4}\Big(1-\frac{3P}{4}\Big)} \end{aligned} \tag{C7}$$

其中，

$$|ad-bc| = \Big[\Big\{(a_1d_1 - a_2d_2) - (b_1c_1 - b_2c_2)\Big\}^2 + \Big\{(a_1d_2 + a_2d_1) - (b_1c_2 + b_2c_1)\Big\}^2\Big]^{1/2} \tag{C8}$$

这里，$\lambda_3^{'}$ 和$\lambda_4^{'}$ 的特征值与 λ_3 和 λ_4 相同，因为这些特征值与输入态参数无关。如果我们仔细比较方程 (C5) 和方程 (C7)，就会清楚地发现，如果将 $|ad-bc|^2$替换为一个简单的平方（$ad-bc$）^{2}，就可以从 $\alpha^{'}$ 得到 α。 $\beta^{'}$ 到 β的情况类似。现在，在发生纠缠猝死的点处，

$$\sqrt{\lambda_1^{'}} = \sqrt{\lambda_2^{'}} + \sqrt{\lambda_3^{'}} + \sqrt{\lambda_4^{'}}$$

将所有 $\lambda_i^{'}$ 的表达式代入上述方程，并对 P求解，可得到 P的以下物理上可接受的解：

$$P = \frac{4|(ad-bc)|}{1+4|(ad-bc)|} \tag{C9}$$

该 P 的值看起来与方程 (C6) 中 P 的值相同，后者表示实数输入态参数情形。对于实数输入态参数情形， |($ad-bc$)| 是两个项 ad 和 bc之差的绝对值，而在本情形下， |($ad-bc$)| 由方程 (C8) 给出。由于 $\frac{4|\ ad-bc\ |}{1+4|\ ad-bc\ ()()|} < 1$，在本情形下也总会发生纠缠猝死。因此，并发度随 P 的衰减将与实数输入态参数情形类似。

接下来，考虑退极化信道作用下的粒子间纠缠态。在粒子间纠缠情形中，粒子 A 和 B 彼此空间分离，且环境分别作用于每个粒子。因此，作用于每个粒子状态的 Kraus 算子是二维的。它们为[17]:

$$M_0 = \sqrt{1-P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_i = \sqrt{\frac{P}{3}}\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{C10}$$

其中 $i = 1$，2，3 分别对应三个泡利算子 σ_x、 σ_y 和 σ_z。我们认为粒子 A 和 B 的信道参数相同，均为 P。$|\psi\rangle_{in}$ 经过退极化信道演化后，末态的并发度成为 a、 c、 d和 P的函数，其中我们利用关系式 $b^2 = 1 - a^2 - c^2 - d^2$替换了 b。为考察退极化信道作用下粒子间纠缠的衰减，取 a 和 c的特定值为 $a = c = \frac{1}{4}$。在这种情况下，不同 D 取值下，并发度随信道参数 P 变化的衰减情况如图11所示。从图11可以看出，并发度随信道参数 P的增大而线性衰减。对于 D的所有允许取值，当 $P < 1$时，并发度变为零。因此，对于 D的所有取值，都会发生纠缠猝死。初始并发度越高，在噪声作用下衰减至零所需的时间就越长。

接下来，我们比较退极化信道下粒子内纠缠态与粒子间纠缠态的退相干。因此，我们考虑初始并发度相同的粒子内纠缠态和粒子间纠缠态，并考察这两种纠缠在退极化信道下的衰减特性。图12展示了这两种纠缠的退相干情况。在图12中，实线表示粒子内纠缠态的并发度，虚线表示粒子间纠缠态的并发度。从图12可以很容易看出，与粒子内纠缠相比，粒子间纠缠衰减得更快。因此，在退极化信道的作用下，粒子内纠缠比粒子间纠缠更具鲁棒性。

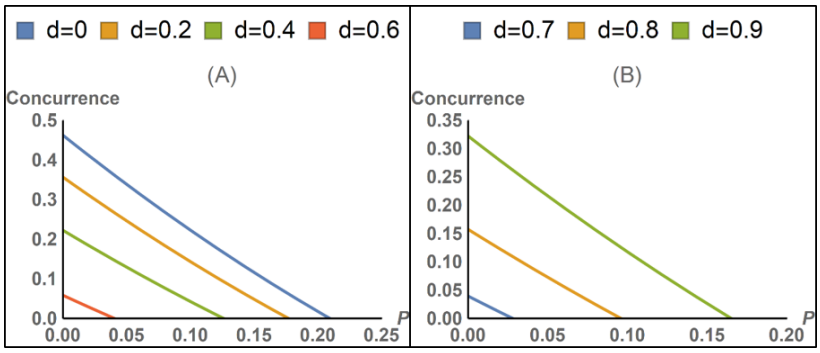

图11. 该图展示了退极化信道作用下，纯粒子间纠缠态的并发度随信道参数 P（$a = c = \frac{1}{4}$时）以及差值 d 的演化。图11(A)和图11(B)中，d分别取值为0，0.2，0.4，0.6和0.7，0.8，0.9。该图表明，并发度随 P的增加而线性衰减。对于 d的所有可能取值，都会发生纠缠猝死。

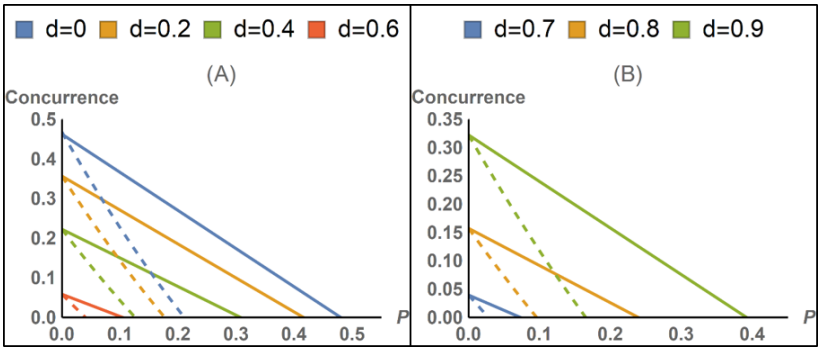

图12. 该图展示了退极化信道作用下，纯粒子内纠缠态和纯粒子间纠缠态的并发度随信道参数 P（$a = c = \frac{1}{4}$时）以及差值 d 的演化。实线表示粒子内纠缠态的并发度，虚线表示粒子间纠缠态的并发度。图12(A)和图12(B)中，d分别取值为0，0.2，0.4，0.6和0.7，0.8，0.9。图12(A)和图12(B)均表明，在退极化信道作用下，粒子间纠缠的衰减速度远快于粒子内纠缠。