arXiv:2303.01246v1 [math.CO] 2 Mar 2023

有界度图的列表装箱数

Stijn Cambie* Wouter Cames van Batenburg† Ewan Davies‡ Ross J. Kang§

2023年3月3日

摘要

我们研究图的列表装箱数，即当为顶点关联的列表的大小均为 k 时，总能找到 k 个彼此不相交的正常列表着色所需的最小 k 。我们关注列表装箱数的表现与列表色数之间的差异，尤其是在有界度图的背景下。我们探讨的主要问题是：每个最大度为 Δ 的图是否都具有至多为 $\Delta+1$ 的列表装箱数。我们的结果凸显了列表打包的微妙之处，以及例如研究列表装箱数的 Brooks 型定理时所面临的障碍。

1 引言

列表着色是图着色的一种广为人知的推广：我们希望找到一个图的正常着色，但由对手为每个顶点提供一个颜色列表，而我们必须从其列表中为每个顶点选择一种颜色。这一概念的重要性在于其在归纳方法中的灵活作用，例如迭代随机着色过程 [22]。尽管列表着色领域已经存在大量重要的挑战（这些挑战与图论中的代数、概率、极值和结构性主题密切相关），但在这里，我们给自己设定了一个更加困难的任务：同时处理多个列表着色。我们在 [5] 中开始了对这一主题的研究。

形式化地说，图 G 的列表赋值 L 是一个函数 $L\colon V(G)\to 2^{\mathbb{N}}$，而图 G 的 L-着色是一个着色 $c\colon V(G)\to\mathbb{N}$，满足对于每个顶点 v，$c(v)\in L(v)$。按照惯例，我们在本文中考虑的 L-着色通常被假定为正常着色，即对于任意边 vv'，$c(v)\neq c(v')$。如果一个列表赋值对所有 v 都满足 $|L(v)|=k$，我们称其为 k-列表赋值。回顾一下，图 G 的列表色数（记作 $\chi_\ell(G)$）是满足以下条件的最小 k：对于每个 k-列表赋值 L，G 都存在一个 L-着色。我们的工作受到这样一个想法的启发：寻找多个互不相交的列表着色。具体而言，给定图 G 的一个 k-列表赋值 L，我们称一个由 k 个两两不相交的 L-着色组成的集合为一个大小为 k 的L-打包，或不太具体地称为列表打包。图 G 的列表装箱数 $\chi_\ell^\star(G)$ 是满足以下条件的最小k：对于图 G 的任意 k-列表赋值 L，G 都存在一个大小为 k 的 L-打包。显然，始终有 $\chi_\ell^\star(G)\geqslant\chi_\ell(G)$，注意这意味着对于任意满足$k\geqslant\chi_\ell^\star(G)$ 的 k-列表赋值 L，都存在一个列表打包（通过迭代提取 L-着色）。

上述定义可以很容易地推广到一种称为对应着色的更一般框架。我们暂且不展开这一更技术性的概念的细节，因为这里我们只需知道，将上述定义中的列表着色替换为对应着色，就得到对应打包以及我们记作 $\chi_c^\star(G)$ 的对应打包数 。始终有$\chi_c^\star(G)\geqslant\chi_\ell^\star(G)$。

*基础科学研究院（IBS）极值组合与概率组（ECOPRO），韩国大田。由 IBS-R029-C4 资助。电子邮箱：stijn.cambie@hotmail.com。

†代尔夫特理工大学代尔夫特应用数学研究所，荷兰。电子邮箱：w.p.s.camesvanbatenburg@tudelft.nl。

‡科罗拉多州立大学计算机科学系，美国柯林斯堡。电子邮箱：research@ewandavies.org。§阿姆斯特丹大学科特韦赫–德弗里斯数学研究所，荷兰。获荷兰科学研究组织（NWO）Vidi 资助（639.032.614）。电子邮箱：r.kang@uva.nl。

列表装箱数是列表色数的自然延伸，其关系类似于色数与独立数之间的关系；关于这一点，我们将在第 1.1 小节中进一步讨论。事实上，列表打包和对应打包早已在先前的研究中有所预示——例如见 [2, 7, 18, 20, 26]——因此，早期的研究 [5] 竟是首次系统探讨这一概念，着实令人意外；该研究也揭示了它在（色）图论各个领域中的潜力。

在我们先前的论文 [5], 中，除其他内容外，我们还探讨了列表色数和对应色数界的打包版本，这些界以底层图的顶点数或退化度为参数。

考虑到色数与独立数之间往往存在深刻的联系，一个问题便自然而然地浮现出来：与列表着色相比，列表打包究竟“差”多少？对这个问题的一种理解是，我们在 [5], 中大胆提出、并命名为列表装箱猜想 的猜想：列表装箱数与列表色数之比是否总能被某个固定常数所界定？这个谜题至今仍令我们着迷。

尽管还有许多值得探讨的方向（我们将在后文提及其中更多内容），本文将注意力限定在两个最基本的情形。我们刻画了列表打包数或对应打包数为 2 的图，并在有界度图方面取得了进展，尤其是度较小的图。在这项研究中，打包数的近似形式自然地浮现出来。这些情形帮助我们发现了寻找单个列表着色与对这些着色进行完整打包之间的一些有趣差异，也为检验更一般的直觉提供了试验场。

厄尔多斯、Rubin和Taylor关于列表着色的早期重要工作 [9] 为我们探索列表打包和对应打包的结果指明了方向。特别是，厄尔多斯等人利用所谓的θ图刻画了列表色数为2的图。在这里，我们给出了关于打包的一个刻画，并发现相应的图类自然更小、更简单。

定理1。 图 G 的列表打包数为*2*，当且仅当它是至少含有一条边的森林。对应打包数也有相同结论。

据此，接下来要考虑的自然是圈。我们用 C_n 表示一个有 n 个顶点的圈。在这里我们发现，结果与 n的奇偶性无关，这与相应的着色定义不同。

定理2。 $\chi_\ell^\star(C_n) = 3$ 和 $\chi_c^\star(C_n) = 4$。

这些结果为研究最大度有界图上的列表打包和对应打包这一更难的问题奠定了基础。在讨论我们在这一情形下的结果之前，我们提出一个猜想，它应当成为未来研究的重点。该猜想给出了图 G的最大度 $\Delta(G)$所对应的列表打包数和对应打包数的预期上界。

猜想3。对于任意图 G,

(i) $\chi_\ell^\star(G) \leqslant \Delta(G) + 1$*; and*

(ii) $\chi_c^\star(G) \leqslant 2\left\lfloor \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rfloor$.

对于 $\Delta(G) \geqslant 2$ 的每一种取值，这两个界都可以通过考虑完全图而达到。为此，请注意，$\chi_c^\star(K_n) \geqslant \chi_\ell^\star(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$ （第一个等式已在 [5] 中证明），而 Catlin 的一个构造 [7] （例如见 [26]）表明，当 $n \geqslant 3$ 为奇数时，$\chi_c^\star(K_n) = n + 1 = \Delta(K_n) + 2$。在 [5], 中，我们证明了与猜想界相差约一个因子2的界（不过我们将在下文中对这一早期结果略作改进）。在 K_n的特殊情形下，Yuster [26] 证明了对于所有充分大的 n，其界与因子1.78以内。我们注意到，猜想3是 [26],中猜想1.1的广泛推广，而后者又与所谓的“修正的 Fischer 猜想”有关（见 [18]）。

As 作为支持我们猜想的证据，我们已经彻底解决了最初的几个情形。

定理 4。

(i) Conjecture 3(i) holds for $\Delta(G) = 2$ *and* $\Delta(G) = 3$.

(ii) 对于 $\Delta(G) = 2$、 $\Delta(G) = 3$ 和 $\Delta(G) = 4$，猜想*3(ii)*成立。

我们指出，最后一种情况意味着 $\chi_c^\star(K_5) = 6$，这是朝着 [26] 中的猜想1.1迈出的一小步。它还意味着所谓的强着色猜想 的一些自然特例（见 [1]）。我们部分借助计算机辅助，分若干部分证明了定理 4；具体而言，它由下文的定理 13–15 和定理 6 综合得出。

如前所述，我们此前 [5] 得到了一个约为猜想最优界两倍的界。事实上，我们证明了以下关于 G 的退化度 $\delta^\star(G)$ 的上界。

定理 5 ([5, 定理 3 和 9，命题 24])。 对于任意图 G, $\chi_\ell^\star(G) \leqslant \chi_c^\star(G) \leqslant 2\delta^\star(G)$。第二个不等式可以取等号。

这意味着一个上界 $2\Delta(G)$。事实证明，要显著改进这一结果普遍而言困难得令人沮丧。尽管下述结果带来的改进幅度不大，尤其是对于较大的 $\Delta(G)$，但我们指出，对于 $\Delta(G) = 4$，该界是最佳可能的（见上文定理 4(ii)）。

定理 6. 对于任意图 G，其中 $\Delta(G) \geqslant 4$，$\chi_\ell^\star(G) \leqslant \chi_c^\star(G) \leqslant 2\Delta(G) - 2$.

对于更大的 $\Delta(G)$，尽管上述界仍比我们的猜想大约高出因子2，但事实证明，在对列表打包数和对应打包数作轻微松弛后，我们仍能找到支持猜想3的合理依据。稍后我们会更正式地定义图 G 的分数列表装箱数 $\chi_\ell^\bullet(G)$ 和分数对应打包数 $\chi_c^\bullet(G)$。它们自然源于这样一种想法：我们可以不采用整数打包，而允许对图 G 的列表着色或对应着色进行分数加权。因此，以下结果证实了猜想3的一个分数松弛版本。

定理 7. 对于任意图 G，$\chi_\ell^\bullet(G) \leqslant \chi_c^\bullet(G) \leqslant \Delta(G) + 1$。

这些分数参数本身或许也值得关注。本文以及第 1.1 小节将讨论它们的一些基本性质，并与其整数对应项进行比较。

以下列表装箱猜想的分数形式及其对应的类比版本值得进一步研究。

猜想 8。

(i) 存在 $C > 0$，使得 $\chi_\ell^\bullet(G) \leqslant C \cdot \chi_\ell(G)$ 对任意图 G 均成立。

(ii) 存在 $C > 0$，使得 $\chi_c^\bullet(G) \leqslant C \cdot \chi_c(G)$ 对任意图 G 均成立。

处理列表打包的一项挑战在于，我们必须面对着色带来的惯常直觉。在研究分数松弛时，我们希望重新找回部分这种直觉，并在定理 7 中取得了一定成果。以下是我们还需进一步考虑的一些障碍和微妙之处。

定理 9。

(i) 对每个 $d \geqslant 2$，都存在一个图 G，满足 $\delta^\star(G) = d$ 且 $\chi_\ell^\bullet(G) \geqslant d + 2$。

(ii) 对每个 $k \geqslant 2$，都存在一个图 G，满足 $\chi_c^\bullet(G) = k + 1$ 且 $\chi_c^\star(G) = 2k$。

(iii) 存在一个连通的3-正则图 $G \neq K_4$，使得 $\chi_\ell^\star(G) \geqslant \chi_\ell^\bullet(G) = 4$。

定理 9(i) 表明，无法通过用退化度替代最大度来改进定理 7；而定理 9(iii) 表明，即使是列表打包类比的分数松弛，也必然不同于通常的布鲁克斯定理。我们在第 5 节证明 (i) 和 (ii)，并在第 6.2 小节证明 (iii)。

我们以审视另一个颇具诱惑性的直觉来结束本引言部分：既然有足够多的列表着色，构造一个列表打包岂不是很容易？在第 6.1 小节中，我们将说明这种思路还需要额外条件。对于每个整数 $n \geqslant 2$，我们都给出一个有 n^2 个顶点的图 G，以及一个 n-列表赋值 L，使得 G 具有

- 列表色数为 n,
- n^{n^2} 不一定是正常的 L着色，且
- $n^{n^2(1+o(1))}$ 正常的 L着色,

但它仍不允许进行 L打包。

1.1 记号、定义与预备知识

读者会注意到，我们使用了多种标准图论记号，包括用$\Delta(G)$表示最大度，用 $\omega(G)$表示团数，用 $\delta^\star(G)$表示退化度，以及用 $\chi(G)$表示图 G的色数。

下面给出一些与我们的列表装填参数最直接相关的较为正式的记号和定义。设 G 和 H 为图。若一对 $\mathscr{H} = (L,\ H)$是图 G 的对应覆盖，则图 H 和映射 L：$V(G) \to 2^{V(H)}$ 满足:

(i) L 将 $V(H)$划分为

(ii) 二部 图 H 中由 $L(u)$与 $L(v)$之间诱导的子图在 $uv \notin E(G)$时为空,

(iii) 二部 图 H 中由 $L(u)$与 $L(v)$之间诱导的子图在 $uv \in E(G)$时为一个匹配 ,

(iv) H 中由 $L(v)$诱导的子图对于每个 $v \in V(G)$都是一个团。

有时省略记号中的 $\mathscr{H}$ 和 L 会更方便，例如说，若对应覆盖作为图 H 具有某个性质，则该性质成立。若对图 G的每个顶点 v，都有$|L(v)| = k$，则对应覆盖是 k重 的。

注意，图 G 的列表赋值 L，自然会导出一个对应覆盖（设定 $L(v) = x_v$，并在这些顶点上构造 H：加入必要的团，并对每种颜色 $x \in \bigcup_{v\in V(G)} L(v)$ 加入形如 $x_u x_v$ 的边，以及加入边 $uv \in E(G)$。我们称以这种方式由列表赋值导出的对应覆盖为图 G的列表覆盖 。

我们指出，在文献中，覆盖的概念比对应覆盖更一般，即省略了条件 (iii)。此外，覆盖可以用多种方式定义，其中一种特别之处是可以省略列表上的团。为方便起见，本文采用包含这些团的定义。采用这种定义，上文给出的列表装箱数 $\chi_\ell^\star(G)$~等价于满足以下条件的最小 k：对于每个 k-列表赋值 L，相应的覆盖（L，H）的色数为 k。在这种等价关系下，H 的适当 k-着色中的每个颜色类，恰好是 G的一个 L-着色。

现在可以直接定义对应着色和打包。给定图 G 的一个对应覆盖 $\mathscr{H} = (L,\ H)$，我们称 G 的一个 $\mathscr{H}$-着色为 H 中大小为 $|V(G)|$的独立集，并称 G 的一个大小为 k 的 $\mathscr{H}$-打包为将 H 划分为 G 的 k $\mathscr{H}$-着色。G 的 对应色数 $\chi_c(G)$ 是满足以下条件的最小 k：G 的每个 k-重对应覆盖 $\mathscr{H}$ 都有一个大小为 $|V(G)|$的独立集。类似地，对应打包数 $\chi_c^\star(G)$ 是满足以下条件的最小值k：G 的每个 k-重对应覆盖 $\mathscr{H}$ 的色数为 k（即，G 的每个 k-重对应覆盖 $\mathscr{H}$都允许一个 $\mathscr{H}$-打包）。

可以将 G（大小为 k）的列表打包或对应打包理解为：为相应覆盖中每个可能的、大小为 $|V$（G）的独立集分配 {0,1} 权重，使得每个覆盖顶点恰好由某个包含它的独立集分配一次权重（并且恰有 k 个独立集被分配了非零权重）。于是，正如组合学和优化中常见的做法，我们可以自然地对权重必须为整数这一约束作“分数”松弛（因此权重可以取区间 $[0,1]$ 内的值），同时要求分配给每个覆盖顶点的总权重为 1（且独立集的权重之和恰为 k）。在研究关于 χ_ℓ 和 χ_c 的已知结果能否推广到打包变体 $\chi_\ell^\star$ 和 $\chi_c^\star$ 时，我们特别关注打包数的分数松弛。G 的分数列表装箱数

记作 $\chi_\ell^\bullet(G)$，它是满足以下条件的最小整数 k： G 的每个 k 重列表覆盖都具有分数色数 k。类似地， G 的分数对应打包数记作 $\chi_c^\bullet(G)$，它是满足以下条件的最小整数 k： G 的每个 k 重对应覆盖都具有分数色数 k。

请注意，分数打包数只能取整数值；其分数性质体现在权重如何分配到各个独立集上，而不体现在权重之和中。我们指出，分数打包数还有其他可行的定义方式，但我们认为上述定义最为自然。

由于每个列表覆盖都是对应覆盖，因此有

$$\chi_\ell(G) \leqslant \chi_c(G), \qquad \chi_\ell^\bullet(G) \leqslant \chi_c^\bullet(G), \qquad \chi_\ell^\star(G) \leqslant \chi_c^\star(G);$$

又由于分数色数是色数的下界，根据上述定义可立即得出以下不等式:

$$\chi_\ell(G) \leqslant \chi_\ell^\bullet(G) \leqslant \chi_\ell^\star(G), \qquad \chi_c(G) \leqslant \chi_c^\bullet(G) \leqslant \chi_c^\star(G).$$

我们将在第 5 节末证明，最后这些不等式可以是严格不等式。

命题 n 10. 对于以下四个不等式中的每一个，都存在满足该不等式的某个图 G ：

$$\chi_\ell(G) < \chi_\ell^\bullet(G), \qquad \chi_\ell^\bullet(G) < \chi_\ell^\star(G), \qquad \chi_c(G) < \chi_c^\bullet(G), \qquad \chi_c^\bullet(G) < \chi_c^\star(G).$$

下一个结果表明，分数打包比存在一种着色更强：这种着色能够延伸每一种将颜色赋给顶点的可能赋值；此外，分数打包必须是图的完整列表着色上的概率分布，也就是说，它们不能给覆盖图中的非最大独立集赋予正权重。

命题 11. 设 G 是一个图，且 $k \geqslant \chi_\ell^\bullet(G)$。那么，对于 G的任意 k-列表赋值 L，对于任意$v \in V(G)$ 和 $x \in L(v)$，存在 G 的一个正常 L-着色 c，满足 $c(v) = x$。

类似地，对于 G 的任意 k-重列表覆盖 H，以及权重为 k的 H 的分数着色 c， c仅对 H的最大独立集赋予正权重，这些独立集的大小为 $|V(G)|$。

这些结论对 $\chi_c^\bullet$ 和对应覆盖也同样成立，只需作相应调整。

证明。 第一个结论由第二个结论推出；若存在一个仅以最大独立集为支撑的分数着色，则意味着每个顶点都包含在某个最大独立集中。

第二个陈述是界 $\chi_f(H) \geqslant N/\alpha$的一个简单推论；该界适用于任何独立数为 α的 N 阶图 H。 G 的每个 k 重列表覆盖 H 都满足 $|V(H)| = k|V(G)|$，且 $\alpha(H) \leqslant |V(G)|$，当且仅当 $k \geqslant \chi_\ell(G)$时取等号。因此，如果 $\chi_f(H) = k = |V(H)|/\alpha(H)$，我们就有等号。现在，若 c 是 H 的一个分数着色，其权重为 k，我们将其解释为 H 的独立集 I 上的概率分布，使得对每个 $x \in V(H)$，都有 $\mathbb{P}_c(x \in I) \geqslant 1/k$，则有

$$|V(G)| = \alpha(H) \geqslant \mathbb{E}_c\,|I| = \sum_{v \in V(H)} \mathbb{P}_c(v \in I) \geqslant |V(H)|/k = |V(G)|,$$

因此，每个具有正概率的 I 的大小都是 $|V(G)|$。

同样的证明也完全适用于对应打包。 □

根据前面的内容，不难看出，下面是分数列表装箱数的另一种等价定义。

定义。 给定一个 k-列表赋值 L，其对应于 G， G 的一个分数 L-打包是（对某个 $m \in \mathbb{Z}^+$ 而言）由 mk 个（不一定互不相同的） L-着色 c_1，.....， c_{mk} 组成的集合，其中每个着色都是 G 的适当着色，并且对于每个$v \in V$和 $c \in L(v)$，都存在 m 个值 $i \in [mk]$，使得 $c_i(v) = c.$。对于每个 k-列表赋值 L （对应于 G），若存在 G 的分数 L-打包，则使其成立的最小 k 值称为分数列表装箱数 $\chi_\ell^\bullet(G)$。

使用显式覆盖时，我们常会考虑集合的排列，例如 {1，2，3，4} 和 $\{1_x, 2_x, 3_x\}$；这些集合带有自然顺序，我们假定该顺序显而易见。省略下标有时会更方便，通常我们将集合的一个置换写成由逗号分隔的值构成的有序序列，例如 $f = (2, 1, 3)$，表示置换 f，其中 $f(1) = 2$、$f(2) = 1$、$f(3) = 3$。我们确实会使用对换的标准循环表示法，例如，(1 2) 是任意包含 {1，2} 的基集上的一个置换，它交换 1 和 2。基集由上下文即可确定。

我们将采用以下形式的霍尔婚姻定理 [15]。

霍尔婚姻定理 ([15])。 设 $\mathcal{F}$ 是基集 X中有限子集构成的一个族，其中子集按重数计数。假设$\mathcal{F}$ 满足婚配条件，即对于每个子族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$

$$|\mathcal{F}'| \leqslant \left| \bigcup_{A \in \mathcal{F}'} A \right|.$$

那么存在一个单射函数 $f: \mathcal{F} \to X$，使得 $f(A)$ 对于每个$A \in \mathcal{F}$，都是集合 A 的一个元素；也就是说，像 $f(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$的一个互异代表系 。

这也可以用二分图中匹配的术语来表述。

定理 12 (霍尔婚姻定理的图论表述)。 如果 $G = (A \cup B, E)$ 是一个二分图，并且对于每个 $A_1 \subseteq A$，都有 $|N(A_1)| \geqslant |A_1|$，那么 G 存在一个大小为 $|A|$的（最大）匹配。

1.2 论文概要

最大度为 2、3 和 4 的图的打包数上界证明分别见第 2、3 和 4 节。第 5 节给出一些关于分数打包数的结果。最后，第 6 节总结了关于边着色列表打包、布鲁克斯定理可能变体以及算法方面的若干观察和讨论。

2 路径和圈

本节确定最大度为 2 的图的列表打包数和对应打包数；这类图中的连通图是路径和圈。主要工作针对圈。对于列表打包数，我们证明，对于一条特定的边 uv，对 $C_n \setminus uv$ 的部分列表打包可以同时扩展到 u 和 v。对于对应打包数，我们通过给出一种构造，证明其严格大于 3。

定理13. 对于 $n \geqslant 2$， n 顶点路径 P_n 的列表打包数为 2。对于 $n \geqslant 3$，圈 C_n 的列表打包数为 3。

Proof. 第一个结论由定理 5 推出，因为 $2 = \chi(P_n) \leqslant \chi_\ell^\star(P_n) \leqslant 2\delta^\star(P_n) = 2$.

对于圈，我们首先证明 $\chi_\ell^\star(C_n) \geqslant 3$。当 n为奇数时，我们有 $\chi_\ell^\star(C_n) \geqslant \chi(C_n) = 3$。当 n为偶数时，我们给出一个 C_n 的 2-列表赋值 L，它不允许存在 L-打包。设圈上从 v_1 到 v_n 的连续顶点的列表依次为 $L_1, L_2, \ldots, L_n$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n-2$ 的列表为 $L_i = \{1, 2\}$，$L_{n-1} =$ 的列表为 $L_n = \{1, 3\}$，而 L 的列表为 L {2, 3}。要排除 c -打包，只需注意到，不存在满足 $c(v_1) = 2$ 的正常 L-着色 c。若一个 c-着色 v_1 满足 $= 2$ (c) v_i，那么对于每个满足 $1 \leqslant i \leqslant n-3$ 的奇数 $= 2$，都必须有 i (c) v_i；对于每个满足 $1 \leqslant i \leqslant n-2$ 的偶数 $= 1$，都必须有 i (c) v_{n-1}。继续着色， v_1 (c) 必须为 3；从 v_n 反向推理可知， c ($\chi_\ell^\star$) 也必须为 3，因此 C_n 不可能是正常着色。由于这种情况下不存在列表打包，我们有 $\geqslant 3(L)$ H。或者，可以用这些列表构造 的覆盖 ($\hat{}$ C_n,)，并注意到其中包含一个奇圈。因此，这个 2 重列表覆盖的色数严格大于 2。

现在我们证明上界：对于 C_n 的每个列表赋值 L，只要列表大小为 3，就存在一个 L-打包。如果所有列表都相同，这一点显然成立，因为我们可以任取一个正常着色，再取它的两个平移。剩下的情况涉及相邻顶点 u 和 v，使得$L(u) \neq L(v)$，因此 $|L(u) \cap L(v)| \leqslant 2$。最难证明的是交集的大小恰好为 2 的情况。不失一般性，此时可以设 $L(u) = \{1, 2, 3\}$，且 $L(v) = \{1, 2, 4\}$。首先，在 $C_n \setminus \{u, v\}$ 上任取一个 L-打包 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$（该图同构于一条路径 P_{n-2}）。最坏的情况是， $C_n \setminus \{u, v\}$ 中 u 的邻点 w 具有与 u 相同的列表 $L(w) = \{1, 2, 3\}$；如果不是这样，将会有更多方法把 L-打包扩展到 u。于是，不失一般性，可以假设 c 按顺序赋予 w 颜色 $(c_1(w)\ c_2(w)\ c_3(w)) = (1, 2, 3)$，因此 $\vec{c}(u) = (3, 1, 2)$ 和 $\vec{c}(u) = (2, 3, 1)$ 都是将 c 扩展到 u 的有效扩展。同样，将 c 扩展到 v 至少有两种可能的选择。如果将 c 同时扩展到 u 和 v，所得至少四种可能的扩展中有一种在边 uv 上有效，我们就完成了。容易看出，在 $\{1, 2, 4\}$ 的所有排列中，只有选择 $\vec{c}(v) = (2, 1, 4)$ 会导致无法扩展到 u。因此，总能为 $\vec{c}(v)$ 找到一种选择，使L-打包得以完成。

□

定理14。 对于 $n \geqslant 2$， n-顶点路径 P_n 的对应打包数为2。对于 $n \geqslant 3$，圈 C_n 的对应打包数为4。

证明。 第一个陈述成立，因为 $2 = \chi(P_n) \leqslant \chi_c^\star(P_n) \leqslant 2\delta^\star(P_n) = 2$。上界$\chi_c^\star(C_n) \leqslant 2\delta^\star(C_n) = 4$ 也由定理5得出。剩下的工作是，对于每个 $n \geqslant 3$，给出一个 3 重对应覆盖 $\mathscr{H} = (L, H)$，使得不存在 C_n 的 $\mathscr{H}$-打包。

令 xy 为 C_n的任意一条边，并且对于每个 $v \in C_n$，令 $L(v) = \{1_v, 2_v, 3_v\}$。通过对每条边 $uv \in E(C_n) \setminus \{xy\}$连接 i_u 与 i_v，构造覆盖 H。在 $L(x)$ 与 $L(y)$ 之间，我们将 2_x 连接到 3_y，将 3_x 连接到 2_y，并将 1_x 连接到 1_y。图1展示了 C_4 和 C_5 的这一构造。假设存在一个 $\mathscr{H}$-打包，即存在一个向量 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$，使得 c_i 是一个独立横截集，且 $c_i(v) \in L(v)$，同时对于 $i \neq j$，有 $c_i(v) \neq c_j(v)$。对于每个 v，我们有$\vec{c}(v) = (c_1(v)\ c_2(v)\ c_3(v))$ 是 $(1_v, 2_v, 3_v)$ 的一个排列。此外，对于除xy之外的任意边 uv，去掉下标，并将 $\vec{c}(u)$ 和 $\vec{c}(v)$ 视为 $\{1, 2, 3\}$ 的排列时，它们不会将某个指标映射到相同的值。也就是说， $\vec{c}(v)\vec{c}(u)^{-1}$ 是一个错位排列。特别地，$\vec{c}(v)\vec{c}(u)^{-1}$ 是一个偶置换，因为 $\{1, 2, 3\}$ 的唯一错位排列是偶置换 $(2, 3, 1)$ 和 $(3, 1, 2)$。另一方面，对于边 xy，我们必须有 $\vec{c}(x)\vec{c}(y)^{-1}$ 是一个奇置换。由此产生如下矛盾。必要时置换标签，我们可以假设 $\vec{c}(x) = (1_x, 2_x, 3_x)$ 是恒等置换。上述论证表明，按顺序沿圈行进，从 x 开始并远离 y时，每个 $\vec{c}(v)$ 都必须是偶置换，包括 $\vec{c}(y)$。但为了防止打包包含使 xy 成为单色的着色，我们必须有 $\vec{c}(y)$ 是一个奇置换，于是产生矛盾。

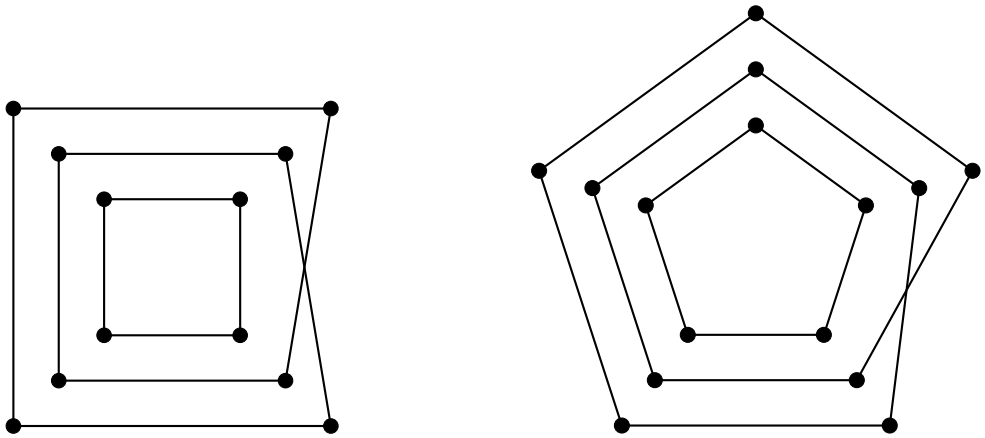
□

关于圈的打包数的定理2是定理13和定理14的直接推论。利用这一点，我们还可以刻画打包数为2的图。

定理*1*的证明。 至少含有一条边的森林是1-退化的，因此根据定理 5，其对应打包数至多为2。由于 $\chi(K_2) = 2$，列表打包数和对应打包数实际上都恰好为2。反之，如果一个图不是森林，那么它包含一个圈，而根据定理2，这会迫使其列表装箱数大于2。

□

顺便指出，定理 1 和定理 2 意味着不存在这样的图 G： $\chi_c^\star(G) = 3$. 在 [6],中证明了，3 是对应打包数无法取到的唯一正整数。



(a) C_4的覆盖　　(b) C_5的覆盖

图1：定理14证明中使用的圈的对应覆盖。为清晰起见，我们省略集合 $L(v)$ 上的团。

3 次三次图

本节证明，次三次图的列表打包数和对应打包数均至多为 4。这里，只需考虑三次图，因为非 3-正则的连通次三次图的退化度至多为 2，此时结论可由定理 5 得出。像第 2 节中那样扩展 $G \setminus \{u,\ v\}$ 的 L-打包，在 3-正则图中并非总是可行。因此，我们需要做大量额外工作。首先，我们通过计算机搜索 K_4 的所有 4重对应覆盖，单独验证情形 K_4。对于不是 K_4 的 3-正则图，我们可以选取一条不属于任何三角形的边 uv，然后考虑比 $G \setminus \{u,\ v\}$ 更小的子图的部分打包，因为在打包 u 和 v 的某些邻点时也必须格外谨慎。完成证明需要采用与定理13证明类似的论证：我们证明存在对 u 和 v 都有效、且对边 uv 也有效的扩展；不过，需要检查的情形非常多，因此借助计算机辅助验证更为方便。

定理15。 对于每个最大度为 $\Delta(G) \leqslant 3$的图 G，有 $\chi_\ell^\star(G) \leqslant \chi_c^\star(G) \leqslant 4$。

证明。只需证明：对于每个最大度为 3 的图 G 以及其任意一个 4重对应覆盖 $\mathscr{H} = (L,\ H)$ G，存在一个对应打包。显然，只需检查这样的 4重对应覆盖：对于每条边 uv，在 $L(u)$ 与 $L(v)$ 之间取完全匹配。只需检查连通图 G；根据定理 5，我们只需考虑三次图。简言之，在 G 含有一个度至多为 2 的顶点 v 的情况下，可以通过霍尔婚姻定理，按照定理 5 的证明（记作 [5, 定理 9]）所示，在 $G\setminus\{v\}$ 上扩展一个对应打包。

对于完　全图 K_4，已知 $\chi_c^\star(K_4) = 4$。这可以通过穷举法验证，正如我们所做的那样，以及 Yuster 在 [26, 附录 A] 中所做的那样。

设 $G = (V,\ E)$ 是一个任意的连通三正则图，其有 n 个顶点，且 G 不是 K_4。根据以下论断，G 有一条边 uv 不属于任何三角形。

断言 16. 每个不等于 K_4 的连通三正则图 G 都有一条不属于任何三角形的边 uv。

证明。反设。设 $a \in G$ 是一个有 3 个邻点 b、c 和 d 的顶点。边 ab, ac 和 ad 都属于某个三角形。这意味着至少有 2 个三角形包含 a，且不可能

[1] https://github.com/StijnCambie/ListPackII，文档 chic(K4).py

有 3 个三角形包含 a，否则 $G[\{a,b,c,d\}]$ 将与 K_4 同构。不失一般性，假设 abc 和 acd 是三角形，而边 bd 是唯一缺失的边。设 e 是 d 的第三个邻点。由于 a 和 c 的度已经是 3，因此它们不是 e 的邻点。因此，d 和 e 没有公共邻点，这意味着 de 是一条不属于任何三角形的边。♦

根据该断言，设 uv 是 G 中不属于任何三角形的一条边，并设 $\mathscr{H} = (L, H)$ 是 G的一个 4 重对应覆盖。我们令 u_1, u_2 和 v_1, v_2 分别为 u 和 v除 u 和 v 自身之外的两个邻点。根据边 uv 的选取，顶点 $X = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 两两不同。由于边 $F = \{uu_1, uu_2, uv, vv_1, vv_2\}$ 在 X上构成一棵树，我们不失一般性地可以“解开”覆盖 F 的 H 中的（完全）匹配。也就是说，我们可以对每个 $x \in X$ 标记$L(x) = \{1_x, 2_x, 3_x, 4_x\}$，使得对于每个 $xy \in F$， H中 $L(x)$ 与 $L(y)$ 之间的匹配是将 i_x 与 i_y 相连的“恒等”匹配，其中 $1 \leqslant i \leqslant 4$。设 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ 是 $G\setminus\{u, v, u_2, v_1, v_2\}$ 的一个对应打包；根据定理 5，它存在。不失一般性，我们可以假设 $\vec{c}(u_1) = (c_1(u_1)\ c_2(u_1)\ c_3(u_1)\ c_4(u_1)) = (1_{u_1}, 2_{u_1}, 3_{u_1}, 4_{u_1})$，因此只需证明该打包 $\vec{c}$ 可以扩展为 G的一个对应打包。我们可以省略下标，并将向量 $\vec{c}(x)$ 视为 {1, 2, 3, 4} 的排列；对于 {78}\ $\{u_1\}$，我们必须定义这些向量。

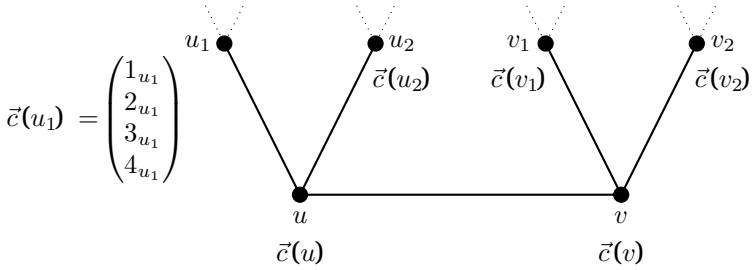


图2： G的局部结构。注意，{u_1、 u_2、 v_1、 v_2}之间可能存在边，我们没有尝试将其绘出。

从 $\vec{c}$（ $G\setminus\{u$、 v、 u_2、 v_1、 $v_2\}$的部分打包）开始，我们现在进行如下操作。

1. 选择一个不同于(2, 3, 4, 1)、(2, 4, 1, 3)、(3, 1, 4, 2)和(4, 1, 2, 3)的置换 $\vec{c}(u_2)$，使得 $\vec{c}$是 $G\setminus\{u, v, v_1, v_2\}$的一个适当打包。利用计算机，我们证明，对于 $G\setminus\{u, v, v_1, v_2\}$中边的任意可能放置方式，以及覆盖与 u_2关联的边的匹配的任意选择，这都可以做到；这里利用了 u_2 在 $V\setminus\{u, v, v_1, v_2\}$中至多有两个邻点这一事实。

2. 排除四种特殊情况后，还剩下 20 种可能的排列可供 $\vec{c}(u_2)$选择。我们证明，这 20 种选择可按如下方式划分。

(i) 有 10 种“极佳”选择，对这些选择，打包可以贪心地扩展到 v_1，然后扩展到 v_2，此时 $(\vec{c}(u)\ \vec{c}(v))$ 仍有有效选择。(ii) 有 8 种“良好”选择，只要避开恰好一个问题集合 $\{\vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2)\}$，$(\vec{c}(u)\ \vec{c}(v))$ 就仍有有效选择（至少一种）。避开一个问题集合总是可行的，因为将部分打包扩展到一个至多有 2 个邻点已着色/已打包的顶点时，至少有两种可用排列。(iii) 有 2 种“糟糕”选择，对这些选择，必须避开另外 8 个问题集合 $\{\vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2)\}$。在这种情况下，能否选择避开这些问题集合并非显而易见，但我们验证了打包仍可完成。

给出了扩展部分列表打包的步骤思路后，我们现在详细说明它为何有效。借助计算机程序[2]，我们可以列出所有可能的选择（共 112 种），对于这些选择，

[2] https://github.com/StijnCambie/ListPackII，文档 chic(Delta=3).py

$(\vec{c}(u_2)\ \vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2))$ 的列表打包无法同时扩展到 u 和 v，也就是说，无法扩展为 G 的完整适当列表打包。在代码中，这通过注释“在 [1] 中”标出。直观地说，由于 $112 \ll (4!)^3$，$(\vec{c}(u_2)\ \vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2))$ 只有少数几种有问题的选择，我们可以避开这些选择，下面将对此加以说明。

无论 u_2 除 u 以外的邻点如何着色，我们都可以选择不同于 (2，3，4，1)、(2，4，1，3)、(3，1，4，2) 和 (4，1，2，3) 的 $\vec{c}(u_2)$。为此，我们注意到，到目前为止，u_2 至多有两个邻点可以被 $\vec{c}$ 打包。这一操作在代码中标注为“In [4]”的注释处完成。检查“In [3]”处的 112 个坏三元组后，可以得出：$\vec{c}(u_2)$ 有 6 种“坏”选择，涉及 16 个不可扩展三元组；而 $\vec{c}(u_2)$ 有 8 种“好”可能性，仅涉及 2 个不可扩展三元组。后一种情况下，只有一个集合 $\{\vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2)\}$ 会导致扩展无法实现（因为交换这两项会得到相同的障碍）。在这些情况下，我们总能选择 $\vec{c}(v_1)$ 和 $\vec{c}(v_2)$，使它们不等于这样的坏集合；因为一旦选定 v_2 两个邻点的错位排列，v_2 至少有两种可能的扩展（见“In [2]”）。

也就是说，在情况良好时，确实可以完成打包。

我们可以将 6 种“坏”情况缩减为 2 种，因为有足够的灵活性，可以让 $\vec{c}(u_2)$不同于 6 种坏选择中的 4 种。也就是说，我们预先选择 $\vec{c}(u_2)$，使其不同于这些坏选择：(2, 3, 4, 1)、(2, 4, 1, 3)、(3, 1, 4, 2) 和 (4, 1, 2, 3)。剩下的坏情况是 $\vec{c}(u_2)$等于 (3, 4, 2, 1) 或 (4, 3, 1, 2)。但在这最后两种情况下，可以扩展部分（对应）着色到 v_1 和 v_2，使得 $\vec{c}(v_1)$和 $\vec{c}(v_2)$不会取自集合 {(1, 3, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (4, 2, 3, 1), (1, 4, 3,2)}（见“在 [5]”）。在这种情况下，我们在“在 [6]”中验证，三个选择 $(\vec{c}(u_2)\ \vec{c}(v_1)\ \vec{c}(v_2))$ 确实允许将 $\vec{c}$扩展到 u和 v，正如所要求的那样。因此，我们得出结论：总能选择 $\{\vec{c}(x) \mid x \in \{u_1, u_2, v_1, v_2\}\}$，使对应打包也能扩展到 u 和 v，也就是说，我们得到了 G的对应打包。 □

4 更大的最大度

在本节中，当 $\Delta(G) \geqslant 4$ 时，我们改进上界 $\chi_{\vec{c}}^{\star}(G) \leqslant 2\Delta(G)$（该上界由定理 5 推出）。所采用的方法是对霍尔婚姻定理进行更为细致的分析，这是证明定理 5 的主要技巧。对于 $\Delta(G) = 4$，这将得到对应打包数的紧上界。

我们首先陈述霍尔婚姻定理的一些具体推论。第一个版本只是为了完整起见，同时也说明了当霍尔婚姻定理中的条件几乎满足时，反例所具有的良好结构。

引理 17。设 $G = (A \cup B, E)$ 是一个二分图，具有 $|A| = |B| = 2m + 1$，且最小度为 $m \geqslant 1$。那么对于每个 $A_1 \subseteq A$，都有 $|N(A_1)| \geqslant |A_1|$，除非 G 具有两个不相交的诱导子图 $K_{m,\ m+1}$ 作为子图，具体如下：存在集合 A_1、A_2、B_1、B_2，使得 $A = A_1 \cup A_2$、$B = B_1 \cup B_2$，并且 $|A_1| = |B_2| = m + 1$ 和 $|A_2| = |B_1| = m$ 满足 $G[A_1, B_1]$，且 $G[A_2, B_2]$ 都同构于 $K_{m,\ m+1}$，而 $G[A_1, B_2]$ 是一个空图。

证明。由于最小度为 m，每个满足 $|A_1| \leqslant m$ 的 $A_1 \subseteq A$ 都满足 $|N(A_1)| \geqslant |A_1|$。另一方面，由于 B 中的所有顶点的最小度也为 m，每当 $|A_1| \geqslant m + 2$ 时，便有 $|A \setminus A_1| < m$；因此，B 中的每个顶点在 A_1 中都有一个邻点，故 $N(A_1) = B$ 的大小也为 $\geqslant |A_1|$。因此，唯一的例外情况是 $|A_1| = m + 1$ 且 $|N(A_1)| = m$。在这种情况下，记 $A_2 = A \setminus A_1$、$B_1 = N(A_1)$ 和 $B_2 = B \setminus B_1$。根据最小度条件和定义，我们得出 $G[A_1, B_2]$ 为空图，而 $G[A_1, B_1]$ 和 $G[A_2, B_2]$ 是完全二部图。图 3 给出了示例，其中蓝色虚线边可以存在，也可以不存在。 □

接下来，我们考虑最小度为 $m - 1$ 且划分类的大小为 $2m$ 的情况。

引理 18。设 $G = (A \cup B, E)$ 是一个二分图，其 $|A| = |B| = 2m$ 且最小度为 $m - 1$，其中 $m \geqslant 2$。那么对于每个 $A_1 \subseteq A$，有 $|N(A_1)| \geqslant |A_1|$，但以下情况除外

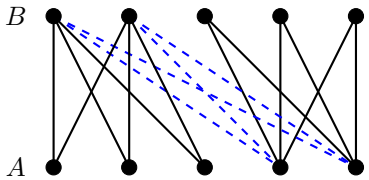


图 3: 一个最小度为二且没有完美匹配的二分图 $G \subset K_{5,\ 5}$.

1. $|A_1| = m$ *and* $|N(A_1)| = m - 1$
2. $|A_1| = m + 1$ *and* $|N(A_1)| = m - 1$
3. $|A_1| = m + 1$ *and* $|N(A_1)| = m$

设 $A_2 = A \setminus A_1$, $B_1 = N(A_1)$, 且 $B_2 = B \setminus B_1$。那么 $G[A_1, B_2]$ 是空图，并且分别有以下结论：

1. $G[A_1, B_1] \cong K_{m,m-1}$,
2. $G[A_1, B_1] \cong K_{m+1,m-1}$ *and* $G[A_2, B_2] \cong K_{m-1,m+1}$,
3. $G[A_2, B_2] \cong K_{m-1,m}$

证明。取任意子集 $A_1 \subseteq A$。如果 $|A_1| \leqslant m - 1$，那么根据最小度条件$\delta(G) \geqslant m - 1$，显然有 $|N(A_1)| \geqslant m - 1 \geqslant |A_1|$。若 $|A_1| \geqslant m + 2$，因此$|A \backslash A_1| < m-1 = \delta(G)$，则 B 中的每个顶点在 A_1 中都有一个邻点，因此 $N(A_1) = B$，故定理 12 中的条件再次成立。因此，只有当 $|A_1| \in \{m,\ m + 1\}$ 且 $m - 1 \leqslant |N(A_1)| \leqslant |A_1| - 1$ 时，该条件才不成立。将最小度条件分别应用于 A_1, A_1 和 B_2, 以及 B_2 ，即可得到极值图的部分刻画。 □

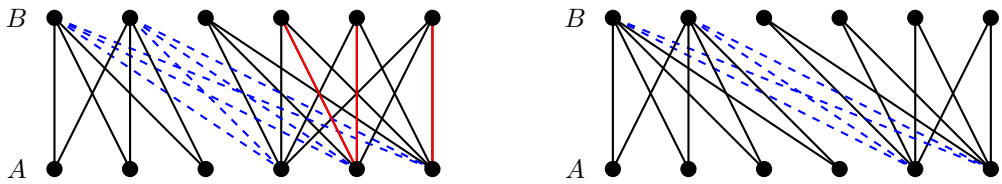


图4：有完美匹配和无完美匹配的二分图示例$G \subset K_{6,\ 6}$ 其中 $\delta(G) = 2 = m - 1$ 以及不含完美匹配的图。红色边表示$K_{m,\ m+1}$中可能缺失的边。蓝色边表示可以添加的候选边。

现在我们可以证明定理 6。回顾一下，该定理指出，对于 $\Delta \geqslant 4$，若 G 是最大度为 Δ 的图，则 $\chi_c^\star(G) \leqslant 2\Delta(G) - 2$。

定理 6 的证明。我们可以假设 G 是连通的。若 G 不是 Δ-正则的，则 $\delta^\star(G) \leqslant \Delta - 1$，因此由 [5, 定理 9] 可知定理成立。所以我们可以假设 G 是 Δ-正则的，其中 $\Delta \geqslant 4$固定。令 $m = \Delta - 1 \geqslant 3$，且 $k = 2m = 2\Delta - 2$。令 H 为 G的一个 k重对应覆盖，其对应赋值为 $L\colon V(G) \to 2^{V(H)}$。具体来说，对于每个 $v \in V(G)$，我们将 $L(v)$ =标记为$\{1_v, 2_v, \ldots, k_v\}$，并在方便时省略下标。任取 G的一条边 uv 。不失一般性（必要时可以重新命名颜色），我们假设H 中 $L(u)$与 $L(v)$之间的匹配是“恒等”匹配，即对 $1 \leqslant i \leqslant k$，将 i_u 与 i_v 相连。

令 $\vec{c}$为覆盖图 $H \setminus (L(u) \cup L(v))$ 上 $G \setminus \{u, v\}$ 的一个对应打包；根据定理的非正则情形，此打包存在。只需将 $\vec{c}$ 扩展到 u 和 v即可。我们将先

通过对选择施加至多两个额外约束来选取 $\vec{c}(u)$，然后选取 $\vec{c}(v)$。对每个$1 \leqslant i \leqslant k$，令 $U_i = L(u) \setminus (\bigcup_{w \in N_G(u) \setminus \{v\}} N_H(c_i(w))$，并类似地定义 V_i。注意，集合 U_i收集了 $L(u)$ 的所有可能元素，这些元素可用于在将 $\vec{c}$ 适当扩展到 u 时作为 $c_i(u)$；对于 V_i，情况也相同。然而，某些配对选择 $c_i(u) \in U_i$ 和 $c_i(v) \in V_i$ 仍可能相互冲突，因此不能同时用于扩展 $\vec{c}$。

我们首先证明以下断言，它将有助于证明适当扩展是可能的 .

断言 19. 设 $G = (A \cup B, E)$ 是一个二分图，满足 $|A| = |B| = 2m$ 且最小度为 m，其中 $m \geqslant 3$。设 $A = A_1 \cup A_2$ 和 $B = B_1 \cup B_2$ 是划分，满足 $|A_1| = m, |B_1| = m-1, G[A_1, B_1] \cong K_{m,m-1}$，且 $G[A_1, B_2] \cong mK_2 + K_1$。那么，对于一个至多包含 $m-2$ 条 $G([A_1, B_2])$ 中边的匹配 M，$G \setminus M$ 满足定理 *12* 的条件。

证明。在此证明中，所有邻域均指图 $G \setminus M$ 中的邻域；也就是说，这里 N 指的是 $N_{G \setminus M}$。设 b 是 B 中唯一一个在属于 A_1 的 G 中没有邻点的顶点。

取 $B' \subseteq B$。由于 $G \setminus M$ 的最小度为 $\geqslant m-1$，因此如引理 18 的证明中所述，当 $|B'| \notin \{m, m+1\}$ 时，我们有 $|B'| \leqslant |N(B')|$。所以现在假设 $|B'| \in \{m, m+1\}$。我们分三种情况讨论。

如果 $|B' \cap B_1| \geqslant 2$，那么 $A_1 \subseteq N(B')$，且 $B' \cap B_2$ 中的每个顶点在 A_2中至少有 $m-2 \geqslant 1$ 个邻点。因此 $|N(B')| \geqslant |A_1| + 1 = m+1 \geqslant |B'|$。

如果 $b \in B' \subseteq B_2$，那么 $|N(b) \cap A_2| \geqslant m-1$且 $|N(B') \cap A_1| \geqslant |B'| - 1 - (m-2)$（根据 M的选取）。因此我们得出 $|N(B')| \geqslant |N(b) \cap A_2| + |N(B') \cap A_1| \geqslant |B'|$。

如果 $b \notin B' \subseteq B_2$（因此 $B' = B_2 \setminus b$），那么 $|N(B') \cap A_2| \geqslant m-2$，且 $|N(B') \cap A_1| \geqslant m - (m-2) = 2$（匹配中 A_1 与 B' 之间至多有 $m-2$ 条边被删除），结论再次成立。

在剩余情形下，$|B' \cap B_1| = 1$。顶点 $B' \cap B_1$ 在 A_1 中至少有 $m-1$ 个邻点。$B' \cap B_2$ 中的顶点在 A_2 中至少有 $m-2$ 个邻点。如果 $|B'| = m$，则由$|N(B')| \geqslant (m-1) + (m-2) \geqslant |B'|$可得结论。因此我们只需考虑 $|B'| = m+1$，于是要么 $B' \cap B_2 = B_2 \setminus b$，这意味着 $A_1 \subseteq N(B')$；要么 $b \in B'$ 且 $|N(b) \cap A_2| \geqslant m-1$。在这两种情况下，我们都有$|N(B')| \geqslant 2m-2 \geqslant m+1 = |B'|$。♦

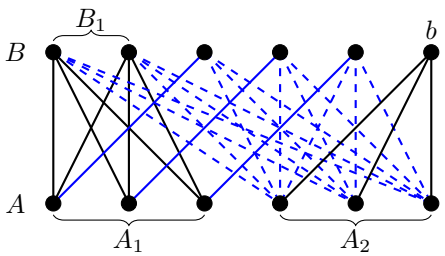


图 5：断言 19 的示意图，G的可能边。

构造二分图 G_v，其二分划分为 $A = (V_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2m}$ 和 $B = [k]$；当且仅当 $j_v \in V_i$时，V_i 和 $j \in [k]$ 之间有一条边。类似地定义二分图 G_u。由于 u 只有$\Delta - 1$ 个邻点尚未被打包，G_u 的最小度至少为 $2m - (\Delta - 1) = m$，因此G_u 满足霍尔婚姻定理，即 G_u 包含一个完美匹配。这个匹配对应于对 $\vec{c}(u)$ 的一种选择，它将打包 $\vec{c}$ 扩展到 u。然而，我们希望以稍微复杂一些的方式作出这一选择，因为之后还需要将 $\vec{c}$ 扩展到 v。也就是说，我们不仅要在 G_v中找到一个完美匹配，还要在 $G_v \setminus M$中找到一个完美匹配，其中匹配 M 由对 u的选择确定。

如果不存在匹配 M，使得 $G_v \setminus M$ 不满足霍尔婚姻定理，那么根据假设，可以选择 $\vec{c}(u)$，继而选择 $\vec{c}(v)$，因为后者对应于在 $G_v \setminus M$ 中寻找匹配，而该匹配由某个 M 确定，该 M 由 $\vec{c}(u)$确定。

如果存在匹配 M，使得 $G_v \setminus M$ 不满足霍尔婚姻定理，那么$G_v\backslash M$是一个最小度为 $m-1$ 的二分图，并且满足引理 18 中的三种情形之一。对 A 和 B重新命名后，在这三种情形中，都存在满足断言 19 条件的划分 $A = A_1 \cup A_2$ 和 $B = B_1 \cup B_2$。从 $G_v[A_1, B_2]$ 中选取两条特定的边（它们构成一个匹配$mK_2 + K_1$），分别对应于数对 (V_i, x_v) 和 (V_j, y_v)。我们可以对 $\vec{c}(u)$ 的选取施加两个额外约束：$c_i(u) \neq x_u$ 以及 $c_j(u) \neq y_u$，其中 x_u、$y_u \in [k]$ 和指标 $1 \leqslant i < j \leqslant k$满足相应条件。对于 $[k]$ 中的其余指标，取 $U_i' = U_i \setminus x$和 $U'_j = U_j \setminus y$和 $U'_\ell = U_\ell$即可实现这些约束。等价地说，我们删除了 G_u的边 $e_1 = (U_i, x)$ 和 $e_2 = (U_j, y)$。这意味着在 G_u的两个划分类中，度等于 $m-1$的顶点至多各有 2 个。由于在引理 18 的三种不良情形中，某个划分类里度为 $m-1$的顶点至少有 $m \geqslant 3$ 个，因此我们得出结论：G_u 总是包含一个完美匹配。也就是说，可以选取 $\vec{c}(u)$，使得对于每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，$c_i(u) \in U_i'$ 彼此不同。根据 U_i的定义，这就是对部分打包的扩展。按此方式选定 $\vec{c}(u)$ 后，可以再次对 $V'_i = V_i \backslash N(c_i(u))$ $1 \leqslant i \leqslant k$应用霍尔定理，以找到 $\vec{c}(v)$。对于 $i \in [k]$，边 $(V_i, N(c_i(u))) \cap L(v))$ 构成一个匹配 M，由断言 19 可知，$G_v \backslash M$ 包含一个完美匹配。这个完美匹配对应于选取 $\vec{c}(v)$，从而将部分打包扩展为G上的对应打包 $\vec{c}$。

□

Yuster [26] 研究了图中独立横截集的因子，并提出了一个猜想 [26,猜想 1.1]，该猜想等价于我们的猜想3(ii)在完全图情形下的结论。Yuster 通过$\chi_c^\star(K_4) = 4$ 计算机验证证明了这一点，并指出，建立关于 $\chi_c^\star(K_n)$ 的紧上界的一般情形仍然是一个悬而未决的问题。定理 6 立即给出了 $n = 5$ 的紧上界。也就是说，我们现在通过一个不涉及计算机验证的证明，知道了 $\chi_c^\star(K_5) = 6$。

至此，我们已经完成了定理 4 各部分的证明。结合此前的结果，我们可以验证最大度较小时的猜想 3。

定理 *4* 的证明。对于 $\Delta = 1$，上界和下界由定理 5 得出。对于 $\Delta \in \{2,3\}$，我们需要定理 13、14 和 15。最后，当 $\Delta = 4$ 时，定理 6 给出了 $\chi_c^\star(G)$ 6 6 的上界。由于完全图 $K_{\Delta+1}$，所有这些界都是紧的。

□

5 分数结果

现在我们证明定理 7，建立猜想3的分数版本，并在其中的 (ii) 部分发现无需进行舍入。定理 7 是下面这个推广的直接推论，该推广以带局部需求的分数着色来表述；这一概念由 [17] 引入。这里我们不必详细讨论带局部需求的分数着色，但要指出，权重为 k 的分数着色等价于图的独立集上的一个概率分布，使得对于每个顶点，该顶点属于独立集的边缘概率至少为 $1/k$。施加局部需求是对这一概念的推广，等价于允许所要求的边缘概率下界随顶点而变化，如下述陈述所示。我们指出，归纳证明确实需要这一更强的假设，并注意到用退化度替代最大度无法奏效。事实上，我们将在命题 21 中证明，将陈述中的最大度替换为退化度后，结论不成立。

引理 20。设 G 是一个图。考虑 G 的一个对应覆盖 (L, H)，满足对 G 的每个顶点 v，都有 $|L(v)| \geqslant \deg(v) + 1$。那么，存在 H 的独立集上的一个概率分布 I，使得对 G 的每个顶点 v 以及 H 的每个顶点 $x \in L(v)$，都有 $\mathbb{P}(x \in I) \geqslant 1/|L(v)|$。

证明。如有必要，通过向覆盖 H 添加边，我们可以假设，对于 G 的每条边 uv，$L(u)$ 与 $L(v)$ 之间的匹配都是最大匹配，即其大小为 $\min\{|L(u)|, |L(v)|\}$。我们对 G 的顶点数进行归纳。基例 $G = \varnothing$ 显然成立。

在归纳步骤中，我们取 G 中的一个顶点 v，其列表 $L(v)$ 在 G 的所有顶点中大小最大。均匀随机地选取一个顶点 $x \in L(v)$。根据归纳法，存在一个随机独立

集 I_x，它在 $H - N[x]$ 中满足关于缩减列表 $(L(w) - N[x])_{w\in V(G)}$的引理；这些列表是在移除 $N[x]$ 后得到的。注意，通过映射 L， $H-N[x]$ 是 $G-v$ 的一个有效对应覆盖，并且每个顶点的列表都足够大，因为任何列表若大小减少，都恰好减少 1；而列表大小减少的顶点失去了邻点 v。也就是说，对于 v 的每个邻点 w，条件 $|L(w) - N[x]| \geqslant |L(w)| - 1 \geqslant \deg(w) = \deg_{G-v}(w) + 1$ 都成立；同时，对于 v 的每个非邻点 w，条件 $|L(w) - N[x]| = |L(w)| \geqslant \deg(w) + 1 = \deg_{G-v}(w) + 1$ 仍然成立。

x 与 I_x 的并集就是所声称的随机独立集 I。我们来验证三类顶点的情况：

- 对于每个 $y \in L(v)$，根据定义，我们有 $\mathbb{P}(y \in I) = \mathbb{P}(y = x) = 1/|L(v)|$。
- 若 $u \in V(G) - N[v]$ 且 $y \in L(u)$，则 $\mathbb{P}(y \in I) \geqslant 1/|L(u)|$ 显然成立，因为无论如何选择 x，在该条件下这个不等式都成立。
- 最后，设 $u \in N(v)$，并设 $y \in L(u)$。注意，此时 $|L(u)| \geqslant \deg(u) + 1 \geqslant 2$。
  关于 x，我们分三种情况讨论：它与自身相邻；它与$L(u)\setminus\{y\}$中的某个颜色相邻；或者它在 $L(u)$ 中没有邻点。若 $x \sim y$，则 y 不可能属于 I。若 x 与 $L(u)\setminus\{y\}$中的某个颜色相邻，则 y 属于 I_x，因此其概率至少为 $1/(|L(u)| - 1)$；而在 x 在 $L(u)$ 中没有邻点的情况下，y 属于 I 的概率为 $1/|L(u)|$。根据假设，$L(u)$ 与 $L(v)$ 之间的匹配是最大匹配，且 $L(v)$ 是一个最大大小的列表，因此我们有 $|L(v) - N(L(u))| = |L(v)| - |L(u)|$。这意味着第三种情况的概率满足

$$\mathbb{P}(x \notin N(L(u))) = \frac{|L(v)| - |L(u)|}{|L(v)|},$$

  它不会太大。结合这些条件概率，我们得出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(y \in I) &= \frac{1}{|L(u)| - 1}\,\mathbb{P}(x \in N(L(u) - y)) + \frac{1}{|L(u)|}\,\mathbb{P}(x \notin N(L(u)))\\ &\geqslant \frac{1}{|L(u)| - 1} \cdot \frac{|L(u)| - 1}{|L(v)|} + \frac{1}{|L(u)|} \cdot \frac{|L(v)| - |L(u)|}{|L(v)|}\\ &= \frac{1}{|L(u)|}.\end{aligned}$$

由此，我们证明了所需的下界：对于 H 的每个顶点，$\mathbb{P}(y \in I)$ 都满足该下界。 □

在 [5, 命题 24], 中，我们给出了一个二分图 G 的构造，其退化度为 d，但 $\chi_c^\star(G) = 2d$。命题 22 表明，对于同一个图 G，$\chi_c^\bullet(G) \leqslant d + 1$，由此引出了一个问题：在退化度为 d 的图中，分数对应打包数能否超过 $d + 1$？我们给出了一个例子，表明分数列表装箱数甚至也能超过它。该构造与我们在 [5, 定理 25], 中给出的相同，但我们加强了分析，证明实际上对于同一个图，$\chi_\ell^\bullet(G) \geqslant d + 2$。为方便起见，我们在此重述该构造。

命题 21. 对于每个 $d \geqslant 2$，都存在一个退化度为 d 的图 G，使得 $\chi_\ell^\bullet(G) \geqslant d + 2$。

证明。我们将迭代地构造一个图 G，使其具有 $\delta^\star(G) = d$，并构造一个 $(d+1)$-列表赋值 L，使覆盖图 H满足 $\chi_f(H) > d+1$，从而推出 $\chi_\ell^\bullet(G) \geqslant d+2$。具体而言，我们将构造一个子图序列 G_1，G_2，$\ldots$，G，使得 $V(G_1) \subset V(G_2) \subset \ldots \subset V(G)$。

我们首先选择 $G_1 = (V_1, E_1) = K_{d+1}$，并令所有顶点的关联列表均等于 $[d+1]$。现在，我们通过为每个与 $V_1 \setminus\setminus v$ 中所有顶点都连通的 $v \in V_1$ 添加一个副本 v'，来构造 G_2。令 $V_2 = V(G_2) \setminus\setminus V_1$ 和 $L(v') = ([d+1] \setminus\setminus \{1\}) \cup \{d+2\}$，其中每个 $v' \in V_2$ 均如此。重复此过程，在第 m 步中，我们为每个 $v \in V_m$ 添加副本 v'，并将其与 $V_m \setminus\setminus \{v\}$ 中的所有顶点相连，将所添加顶点的集合记为 V_{m+1}。对于 $v' \in V_{m+1}$，令 $L(v') = s_{ij}(L(v)) = (L(v) \setminus\setminus \{i\}) \cup \{j\}$，其中 i、$j \in [d+2]$ 为某些值；也就是说，对列表应用了 (i, j)-移位。此处我们设 $V_m = \{v_1^m, \ldots, v_{d+1}^m\}$，其中

v_i^{m+1} 表示 v_i^m 的副本。我们在前三步中选择移位分别为 $s_{1,\ d+2}$，$s_{2,1}$,$s_{d+2,\ 2}$。在一般情况下，对于一个对换（$i\ j$），我们关联移位 $s_{i,\ d+2}$，$s_{j,\ i}$，$s_{d+2,\ j}$。

我们重复该过程，并通过依次应用与（1 2），（1 3）.....相对应的关联对换，构造置换（$d,\ 1,\ 2,\ 3,\ .....,\ d-1$）

按顺序应用与（1 2），（1 3）.....，（1 d）相对应的关联对换。现在，再完全相同地继续进行 $3(d-1)$ 次对换，重复 $d-2$ 次。最后，添加一个顶点 w，并将其与每个 $0 \leqslant p \leqslant d-1$ 相连；同时令 $L(w) = [d+1]$。在所有步骤中，我们都将新顶点恰好连接到 d 个已有顶点，因此该构造的退化度满足 $\delta^\star(G) = d$。图6给出了 $d=2$ 的构造。

我们现在分析这一构造，证明所声称的分数色数下界。$G[V_1]$ 的合理 L着色给出 $[d+1]$的一个置换。固定V_1 的这样一种着色，并将其视为 G的部分 L着色。V_2 中有一个顶点，其在 V_1 中的邻点都着有 $[d+1]\setminus\{1\}$，因此它必须着有 $d+2$。V_2中的其他顶点有两种可能的颜色：$d+2$ 和某个 $i \in [d+1]\setminus\{1\}$。

G 的一个分数 L打包，是与 L相关联的 G覆盖图的一个权重为 $d+1$ 的分数着色；它对应于 G 的一个随机 L着色 c，满足对于G 的每个顶点 v 以及每个 $x \in L(v)$，$\mathbb{P}(c(v) = x) = 1/(d+1)$。由于 L 为 V_2 中的每个顶点赋予相同的列表，对于每种颜色 $x \neq d+2$，V_2 中满足 $c(v) = x$ 的顶点的期望数至少为 1，因此 V_2 中未着有颜色 $d+2$ 的顶点的期望数至少为 d。这意味着 V_2 中着有颜色 $d+2$ 的顶点的期望数至多为1。由于 G 的每种 L着色都至少有一个 V_2 中的顶点着有 $d+2$，我们由此得出，事实上，分数打包中每种 L着色（即以正概率出现的着色）在 V_2 中恰有一个顶点着有颜色 $d+2$。这意味着，对于分数打包中的每种着色，将着色限制在 V_1 上即可确定 V_2的着色。更具体地说，若 $c(v_i^1) \neq 1$，则 $c(v_i^2) = c(v_i^1)$；若$c(v_i^1) = 1$，则 $c(v_i^2) = d+2$；等价地，对每个 $i \in [d+1]$，$c(v_i^2) = s_{1,\ d+2}c(v_i^1)$。此外，将 V_m 与 V_{m-1}的部分 L着色进行比较时，这一观察同样成立。因此，对于分数打包中的任意着色 c，$c\left(v_i^{3p(d-1)+1}\right)$（对于 $0 \leqslant p \leqslant d-1$）要么包含 $[d]$中的所有颜色，要么这些颜色全都等于 $d+1$。由此可得，$c(w) = d+1$ 或 $c(w) \in [d]$，相应地，即$c(v_1^1) = d+1 \Leftrightarrow c(w) \neq d+1$。后一种情况意味着，颜色 $d+1$ 在$\{v_1^1, w\}$上出现一次，而它在这两个顶点上的平均出现次数应为$\frac{2}{d+1}$。由于 $d \geqslant 2$，这就产生了矛盾。因此，不存在分数 L打包，从而 $\chi_\ell^\bullet(G) > d+1$。 □

我们的下一个正面结果是二分图的一个贪心界版本：允许取二分划分两侧各部分顶点的最大度中的较小者。在 [5, 引理 33],中，我们证明了 $\chi_\ell^\star$的类似上界。在此，我们的界同样适用于对应打包的分数变体，尽管对应打包的类似结论并不成立。在 [5,推论 34], 中，我们证明，对于每个完全二部图 $K_{a,\ b}$ 满足 $a > b^b$，都有 $\chi_\ell^\star(K_{a,\ b}) = b+1$，而 $\chi_c^\star(K_{a,\ b}) = 2b$。这说明列表打包数与对应打包数之间存在常数因子间隙。下面的命题意味着，对于这样的 a 和 b，$\chi_\ell^\bullet(K_{a,\ b}) = \chi_c^\bullet(K_{a,\ b}) = b+1$，这表明，在该构造中列表打包与对应打包之间引人注目的因子2差异，在分数松弛中消失了。

命题 22。设 $G = (A \cup B、E)$ 是一个二分图，其两个部分分别为 A 和 B，最大度分别为 Δ_A 和 Δ_B，其中 $\Delta_A \leqslant \Delta_B$。则 $\chi_\ell^\bullet(G) \leqslant \chi_c^\bullet(G) \leqslant \Delta_A + 1$。

证明。考虑 G 的一个对应覆盖 (L, H)，使得对于 G 的所有顶点 v，$|L(v)| = \Delta_A + 1$。只需在对应覆盖中的每个匹配都是完美匹配的假设下证明该命题。为了给 H 的分数色数设定上界，我们按如下方式构造一个随机（极大）独立集 $I = I_B \cup I_A$：令 I_B 对每个顶点 $b \in B$ 包含一个均匀随机颜色 $x_b \in L(b)$，并独立选取。固定 I_B 的选取后，我们现在选择I_A。B 中的每个顶点 $a \in A$ 至多有 $\Delta_A = k-1$ 个邻点，因此 $L(a)$ 中至少有一个颜色与 I_B 不相邻。于是我们可以从 $L(a) \setminus N(I_b)$ 中均匀随机地选取一个颜色 x_a，并将其加入 I_A。

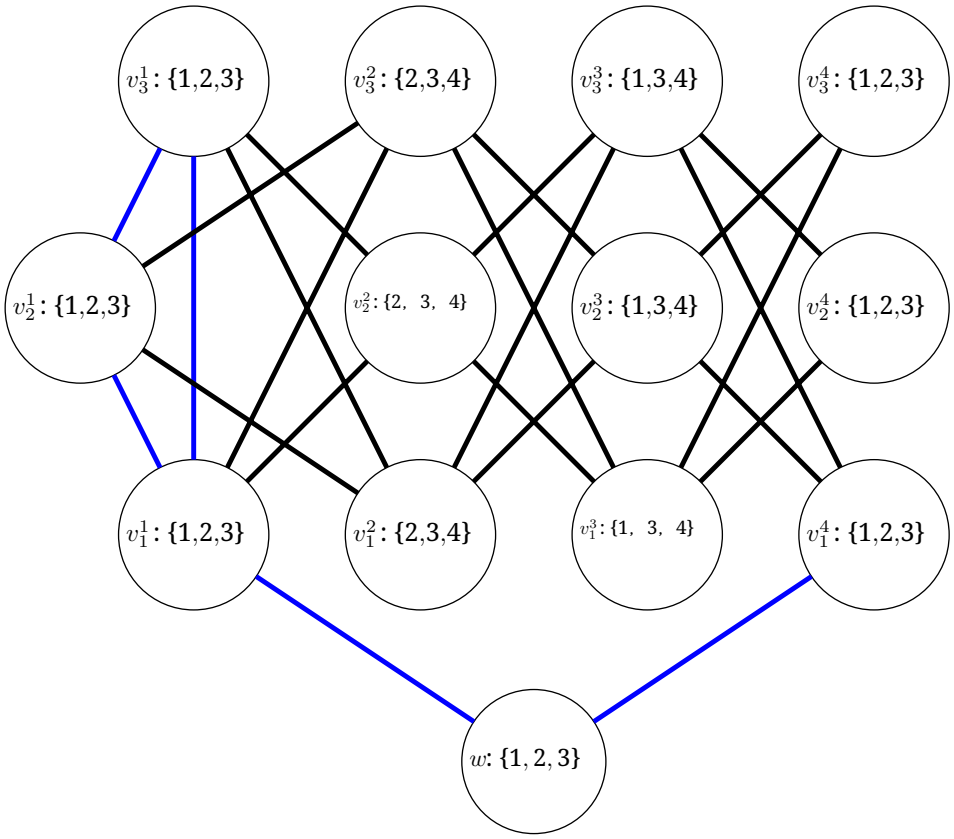


图6：命题 21 对 $d = 2$ 的构造。

注意，对于任意 $a \in A$，由 H 的 $L(a)$ 和 $\bigcup_{b \in N(a)} L(b)$ 所诱导的子图，同构于一个完全图 K_k 与一个有 $|N(a)|$ 个叶子的星图的笛卡尔积。由该图的对称性以及 I_b 的随机选取方式可知，对于每个 $a \in A$，每个 $x_a \in L(a)$ 以相同的概率属于 I。由于交集 $|I_A \cap L(a)|$ 的大小始终恰好为 1，取期望可得，对于所有 $a \in A$ 和 $x_a \in L(a)$，$\mathbb{P}(x_a \in I) = 1/k$。由此可知，$H$ 的每个顶点属于 I 的概率恰为 $\frac{1}{k}$，因此 $\chi_f(H) \leqslant k = \Delta_A + 1$。

□

我们在本节最后指出，这两个分数打包数可能与色数和整数装箱数都不相同。

命题*10*的证明。我们针对各种可能出现不同数量的情形分别给出示例。

- 每个偶圈 C_{2n} 都满足

$$\chi_\ell(C_{2n}) = 2 < 3 = \chi_\ell^\bullet(C_{2n}) = \chi_\ell^\star(C_{2n}).$$

偶圈的列表色数自最初研究以来便已为人所知 [9]。根据定理13，$\chi_\ell^\star(C_{2n}) = 3$。此外，通过定理13证明中给出的列表赋值对 C_{2n} 作二重覆盖，会得到一个奇圈，因此其分数色数严格大于 2；这证明了 $3 \leqslant \chi_\ell^\bullet(C_{2n})$。

- 扇图 F_7（通过向含 6 个顶点的路径添加一个全邻顶点而形成）满足

$$\chi_\ell(F_7) = \chi_\ell^\bullet(F_7) = 3 < 4 = \chi_\ell^\star(F_7).$$

注意到 K_3 是 F_7 的子图，由此可得 $3 \leqslant \chi_\ell(F_7) \leqslant \chi_\ell^\bullet(F_7)$。穷举验证[3] 表明，$\chi_c^\bullet(F_7) = 3$，从而得到上界 $\chi_\ell^\bullet(F_7) 6 3$。
图11.1和表11.1]中给出了一个列表赋值及其验证，表明 $\chi_\ell^\star(F_7) \geqslant 4$ 。

- 完全二部图$K_{3,\ 3}$ 是一个例子，其中

$$\chi_c(K_{3,3}) = 3 < 4 = \chi_c^\bullet(K_{3,3}) = \chi_c^\star(K_{3,3}).$$

注意，$3 = \chi_c(C_4) \leqslant \chi_c(K_{3,\ 3}) 6 3$，因为最后一个不等式成立：一个划分类的27种可能着色中，至多有$3 \cdot 3! = 18$种无法扩展到另一个划分类（这也可由对应着色的布鲁克斯定理推出）。不等式 $3 < \chi_c^\bullet(K_{3,\ 3})$ 由计算机验证证明，[4] 而上界 $\chi_c^\star(K_{3,\ 3}) 6 4$ 见定理15。

- 任意圈 C_n 都满足

$$\chi_c(C_n) = \chi_c^\bullet(C_n) = 3 < 4 = \chi_c^\star(C_n).$$

等式 $\chi_c(C_n) = 3$ 由 Dvořák 和 Postle 在 [8] 中提出。等式 $\chi_c^\bullet(C_n) = 3$由定理 7 得出。等式 $\chi_c^\star(C_n) = 4$ 出自定理14。 □

6 总结

本文的一个主要目标，是在基本情形下更深入地分析列表装箱数，以便加深我们对列表装箱猜想的理解；这自然促使我们提出猜想3。我们首先通过验证猜想3对最大度较小的图成立，为其提供了一些佐证。对于完全图，猜想3(ii)与 [26], 中的猜想1.1一致；该猜想总体上仍未解决，但此前已验证其对顶点数不超过4的情形成立。在此，我们通过更一般的结果，验证了它对5个顶点的完全图成立，即 $\chi_c^\star(G) \leqslant 2\Delta - 2$ 对任意最大度为 $\Delta \geqslant 4$的图 G 均成立。

我们还通过定理 7，并引入列表打包数和对应打包数的分数版本，证明了猜想3的一个近似版本。更一般地，在组合学中，分数打包往往是证明相应整数装箱问题渐近匹配界的关键环节。然而，在对应打包的背景下，我们注意到（见上文及命题 22 下方的评述），分数值与整数值实际上可能相差因子2，这为这一方法设置了一道耐人寻味的障碍。

我们认为，确定 $\chi_c^\bullet(G)$ 本身可能就是一个有趣的问题。与列表打包的原始整数形式一样，有几个问题值得探讨，尤其是我们主要猜想的分数版本 [5], ，我们已在上文的猜想 8 中明确提出。解决这类分数问题，或许能让我们对列表装箱猜想有更深入的认识。一个尤其引人关注的问题是，确定平面图的分数列表装箱数的最优上界。

猜想23. $\chi_\ell^\bullet(G) \leqslant 5$ 对于任意平面图 G。

虽然我们已经给出了满足 $\chi_c^\star(G) \sim 2\chi_c(G)$ [5, 命题 24], 的图 G 的例子，但实际上我们还不知道有任何图的列表装箱数比其列表色数大 2。因此，下面是一个很自然的挑战。

问题24. 找出满足 $\chi_\ell^\star(G) > \chi_\ell(G) + 1$ 的图 G 的例子。

在接下来的三个小节中，我们将就一些可能有助于进一步理解列表装箱数的有趣方向，提出一些相关见解。

[3] https://github.com/StijnCambie/ListPackII, 文档 F7.py

[4] https://github.com/StijnCambie/ListPackII, 文档 K3-3.py

6.1 列表着色很多，但没有列表打包，即使对于线图也是如此

根据 Hall 关于 K_k 的 k-列表赋值 L 的定理，至少存在 $k!$ 个适当的 L-着色K_k。由于 K_k 有如此多的 L-着色，因此存在一个由互不相交的 k -着色组成的打包，似乎并不特别令人惊讶。然而，着色数量很多并不一定意味着着色打包的存在。

考虑拉丁方 $K_n \square K_n$，将其视为一个图：网格 $n \times n$ 的单元格是其顶点，若两个顶点位于同一行或同一列，则它们相邻。将 n^2 的顶点记为 $K_n \square K_n$ 中的数对，其中 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。设 $K_n \square K_n$ 的列表赋值 L 为：对每个 $i \in [n]$，赋值 $L((1,i)) = [n+1] \setminus \{1\}$；对每个 $2 \leqslant j \leqslant n$，赋值 $L((j,1)) = [n+1] \setminus \{2\}$；对每个 $2 \leqslant i, j \leqslant n$，赋值 $L((j,i)) = [n]$。$K_4 \square K_4$ 的这一赋值见表 1，而 $n = 3$ 的示例及一般情形也见图 4.9、图 5.1。

$[5] \setminus 1$	$[5] \setminus 2$	$[5] \setminus 2$	$[5] \setminus 2$
$[5] \setminus 1$	$[4]$	$[4]$	$[4]$
$[5] \setminus 1$	$[4]$	$[4]$	$[4]$
$[5] \setminus 1$	$[4]$	$[4]$	$[4]$

表 1：$K_4 \square K_4$ 上不存在着色打包的列表。

扩展 Levit 的一个观察 [19, 引理。 42], 我们证明如下结论。

命题 25。存在 $n^{n^2(1-o(1))}$ L-着色的 $K_n \square K_n$ 个，用于上文的 n-列表赋值 L。然而，对于每个 $n \geqslant 2$，$K_n \square K_n$ 都不是分数 L-可打包的，因此 $\chi_\ell^\star(K_n \square K_n) \geqslant \chi_\ell^\bullet(K_n \square K_n) > n$。

证明。我们首先证明，$K_n \square K_n$至少有 $\frac{n-1}{n} N(n)$ 个 proper L-着色，其中$N(n) = n^{n^2(1-o(1))}$ 表示阶为 n 的拉丁方数量（见 [25, 定理 17.2]）。一个拉丁方对应于 $K_n \square K_n$的一个 proper n-着色。任取一个满足 (1,1) 未被着色为 1 的此类 proper n-着色。将第一列中着色为 1 的顶点和第一行中着色为 2 的顶点（如果它不等于 $(1,1)$）重新着色为 $n+1$。根据定义，我们得到 $K_n \square K_n$ 的一个 proper L- 着色；下界随即成立，因为这种重新着色给出了一个单射：从左上角单元格中没有 1 的拉丁方集合到 $K_n \square K_n$的 proper L-着色集合。

接下来，我们证明 $K_n \square K_n$不是分数 L-可装箱的（即相应覆盖的分数色数严格大于 n）。根据命题 11，只需证明不存在一种恰当的 L-着色，能用 $n+1$ 给 $(1,1)$ 着色。注意，如果存在这样的着色，那么第一列中的其他顶点将用遍 $[n] \setminus \{1\}$ 中的每种颜色，而第一行中的其他顶点将用遍 $[n] \setminus \{2\}$ 中的每种颜色。因此，$[n]$ 中的每种颜色在顶点子集 $([n] \setminus 1) \times ([n] \setminus 1)$ 上至多能使用 $n-2$ 次。由于 $(n-1)^2 > n(n-2)$，这意味着无法扩展这种着色。

□

因此，尽管图的恰当 L-着色数量已接近所能期望的上限，该图仍不是分数 L-可装箱的。

注意，$K_n \square K_n$ 是完全二部图 $K_{n,\,n}$的线图。显然，$K_n \square K_n$ 的色数为 n。正如 Dinitz 提出并由 Galvin 证明的（见 [10]），该图的列表色数也等于 n。然而，命题 25 表明，Dinitz 问题的打包版本与着色版本表现不同，因为 $K_n \square K_n$ 的列表装箱数大于 n。我们由此提出一个问题。

C猜想 26（Dinitz 问题的打包版本）。对于 $n \geqslant 3$，$\chi_\ell^\star(K_n \square K_n) = n+1$.

一种可能的方法与 [23], 中采用的方法类似，即证明

$$\chi_\ell(K_n \square K_n \square K_{n+1}) = n+1.$$

这将蕴　　利用这一结果，因为观察到 $\chi_\ell(G \square K_m) = m$ 意味着 $\chi_\ell^\star(G) \leqslant m$　　.
后一个蕴　只需为某个顶点的 m 个副本选取相同的列表，便可立即得到这一推论　　.

6.2 布鲁克斯定理的变体

一种自然的列表打包 Brooks 型定理并不成立。菱形图 K_4^- 是从完全图 K_4 中删去一条边得到的。由两个 K_4^- 构成的 K_4^--项链 G 中，两个图的度为 2 的顶点两两相连；它是一个 3-正则图（但不是 K_4），满足 $\chi_\ell^\bullet(G) = \chi_\ell^\star(G) = 4$。图 7 展示了一个不允许分数 L-打包的 3-列表赋值 L。用计算机[5], 可以轻松验证这一点，当然手动验证也可行。这个例子有一个有趣之处：存在一种 L-着色，它扩展了任意单个映射 $c(v) = x$，其中 $x \in L(v)$。

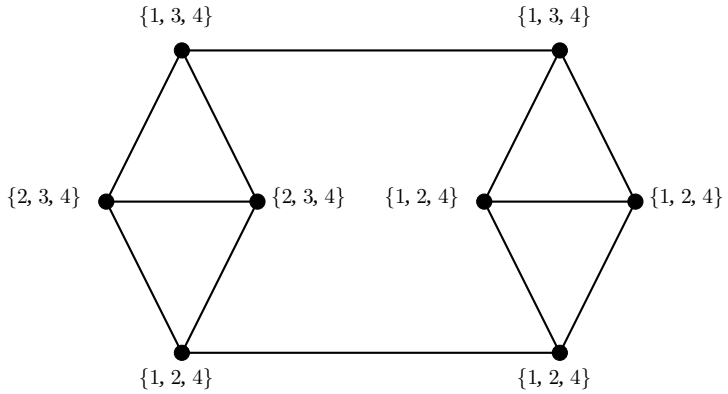


图 7:　K_4^--项链，以及一个无法实现（分数）列表打包的列表赋值　　le.

虽然我们排除了命题 $\chi_\ell^\bullet(G) 6 \max\{3, \omega(G)\ \Delta(G)\}$，这个表述看起来颇为诱人，因为圈的列表装箱数为 3，但 Brooks 型定理仍可能在一组更为特殊的例外情形下成立。例如，我们尚未排除形如 $\chi_\ell^\bullet(G) 6 \max\{4, \omega(G)\ \Delta(G)\}$ 的界，也未排除存在一组易于描述的图 G（包括圈和 K_4^--项链），使得对连通图 $G \notin$ G，有 $\chi_\ell^\star(G) 6 \max\{\omega(G)\ \Delta(G)\}$。我们提出以下问题。

问题27。 刻画最大度为3 且列表装箱数为4的图。

对于对应打包，布鲁克斯定理和Reed猜想的类似版本需要进行显著修改。我们指出，Petersen图$P_{5,\ 2}$ 满足 $\chi_c^\star(P_{5,\ 2}) \geqslant 4$，尽管它是无三角形图且最大度为3。猜想3的偶数度情形给出的上界为 $\chi_c^\star(G) \leqslant \Delta + 2$，我们想知道 K_5 是否是 $\Delta(G) = 4$唯一的紧例。

问题28。 刻画最大度为4 且对应打包数为6的图。

要寻求列表着色的打包，需要列表大小统一的列表赋值，但列表打包的分数变体自然推广到列表大小任意的列表赋值。对于 L 的列表赋值 G，我们可以考虑在与之关联的列表覆盖˜　　˜的独立集 I 上定义一个概率分布L，H，其中 $L(v) = \{i_v : i \in L(v)\}$，使得对于每个 $v \in V(G)$和 $i \in L(v)$，$\mathbb{P}(i_v \in I) \geqslant 1/|L(v)|$（关于具有局部需求的分数着色的一般理论，参见 [17]）。据此，研究分数度列表可打包性作为度可选择性的一个更具结构性的版本便有了意义。如果对于任意满足 $|L(v)| = \deg(v)$的列表赋值 L，图 G 都可进行 G着色,

[5] https://github.com/StijnCambie/ListpackII，文档 K4-Necklace.py
[6] https://github.com/StijnCambie/ListpackII，文档 Petersen.py

G 可以进行 L着色。Erdős、Rubin和Taylor [9], 以及独立地，博罗丁 [3] 将度可选图刻画为非盖莱树的图。这里我们指出，对于满足 $|L(v)|$ =deg(v)的列表赋值，也可以按上述方式定义分数度列表可打包性；但要注意，度可选择性的证明并不能推广到这一概念，因为存在K_4^--项链。构造非正则示例也并不太难，例如图K_4^-本身，给各点赋予列表{1，2}、{1，3}、{1，2，3}、{1，2，3}；以及 K_5^-，其列表为{1，2，3}、{1，2，4}，再加上三份{1，2，3，4}。我们对前一个示例给出了计算机验证[7]，稍作调整即可用于后一个示例。

问题 29. 刻画哪些图是分数度列表可打包的。

6.3 算法与复杂性

许多组合问题的核心都存在一些本质上困难的算法任务（反之亦然）。列表打包问题也不例外。此外，对于相应的图着色问题，我们可以成功采用的许多直观的算法策略，在寻找列表打包时却会变得难以施展。尤其是，对某个特定顶点或其邻域所采用的选择进行局部修改，会更难分析。因此，我们认为列表打包的算法方面是一条很有前景的研究方向；在此，我们基于研究结果提出一些基本看法。进一步研究将很有意义；特别是，列表打包数的性质使得考察各种图类成为顺理成章的选择，这也是算法图论中常见的做法。

与列表着色相关的判定问题是“图 k-列表着色”，其一个实例是图 G，我们必须判定 $\chi_\ell(G) \leqslant k$。我们可以定义类似的问题“图 k-列表打包”，并将其复杂性与列表着色问题联系起来。众所周知，对于 $k \geqslant 3$，“图 k-列表着色”是复杂性类 Π_2^{p} =coNP^{NP} （多项式层次的第二层）中的完备问题；对于这类问题，能够访问 NP 预言机的图灵机可以在多项式时间内验证“否”实例的证书 [9, 13]。根据用量化布尔公式描述语言的分类Π_2^{p}，也就是说，$L \in \Pi_2^{\mathrm{p}}$ 当且仅当存在常数 c 和语言 $R \in$P，使得

$$L = \{x : \forall y \exists z : |y|, |z| \leqslant |x|^c, \text{ and } (x, y, z) \in R\},$$

容易看出，图 k-列表打包属于同一个复杂性类 Π_2^{p}。也就是说，尽管从组合角度看，寻找一个打包似乎比单个列表着色更难，但在计算复杂性上（就当前分辨率而言）并无差别。我们提出完备性问题；对于密切相关的“强 k-着色”判定问题，其 Π_2^{p} -完备性仍未解决 [24]。

问题 30。是否存在某个 k_0，使得对所有 $k \geqslant k_0$，图 k-列表打包都是复杂性类 Π_2^{p} 的完备问题？$k_0 = 3$ 是否成立？

[9] 中列表色数为 2 的图的分类表明，图的 2-列表着色属于 P。类似地，定理1表明，图的 2-列表打包属于 P。以类似方式，由定理 1 和定理 2 可知，对所有 k，限制在最大度为 2 的实例上的图 k-列表打包属于 P。上述问题的对应版本也很自然。

能够在多项式时间内构造列表着色、列表打包，以及独立横截集和强着色等更一般对象的算法，早已得到研究（例如 [11, 12, 16]）。我们首先指出，我们的许多结果都给出了线性时间构造。

注释 31. 第 *2*、*3* 和 *4* 节中的证明给出了构造所需打包的方法，其算法的运行时间为线性（相对于 n 的阶数 G 而言，并假设最大度固定）。注意，断言 *16* 实际上意味着，在每个顶点附近，任何非 K_4 的 *3* 正则图中都存在一条不属于三角形的边。已知确实存在可在线性时间内（同样假设最大度固定）求出 $G \setminus v$ 的退化序的算法，而且寻找贪心打包也只需线性时间，因此很容易得出结论。完成打包是一个局部过程。

[7] https://github.com/StijnCambie/ListpackII，文档 K4-Necklace.py

Graf 和 Haxell 的一项最一般的算法结果 [12, Cor. 26], 可用于构造最大度为 Δ 的图的列表打包和对应打包，其中列表大小至少为 $3\Delta+1$（关于给出这一结果非构造性版本的关键方法，见 [1]）。他们的结果实际上适用于强着色，其一般性远超对应打包，例如见 [5]。这里，只需注意，为最大度为 G 的图 k的 L, H重对应覆盖找到一个 k着色，是为最大度为 $H^\star$ 的图 Δ找到强 k着色的一个特例。这是通过移除 H 中列表上的团，并针对 L诱导的划分寻找强着色来实现的。我们此前在 [5, Thms. 3 和 10] 中证明， [1] 的方法应用于列表打包和对应打包时可得到以下界

$$\chi_\ell^\star(G) \leqslant 1+\Delta(G)+\chi_\ell(G), \qquad \chi_c^\star(G) \leqslant 1+\Delta(G)+\chi_c(G),$$

尽管我们没有给出这些界的构造性证明。值得注意的是，定理 5 给出了列表打包和对应打包的多项式时间构造，其中列表大小为 2Δ。也就是说，我们显著降低了 [12], 的一项结果中对划分类大小（等价于列表大小）的所需下界，但代价是要求我们着色的图必须是某个有界度图的覆盖。

开放获取。 为实现开放获取，本次投稿产生的任何作者接受稿（AAM）均适用知识共享署名许可公共版权许可。

参考文献

[1] R. Aharoni、E. Berger 和 R. Ziv。加权图中的独立代表系。*Combinatorica*，27(3):253–267，2007。doi:10.1007/s00493-007-2086-y。[2] N. Alon、M. R. Fellows 和 D. R. Hare。支配顶点横截集。*J. Graph Theory*，21(1):21–31，1996。doi:10.1002/(SICI)1097-0118(199609)23:1<21::AID-JGT2>3.0.CO;2-M。[3] O. V. Borodin。度规定的可着色性判据。载于第四届全联盟理论控制论会议（新西伯利亚），第127–128页，1977。[4] S. Cambie。图中距离与着色的极值方面。博士论文，拉德堡德大学，2022。[5] S. Cambie、W. Cames van Batenburg、E. Davies 和 R. J. Kang。列表着色打包。*RS&A*，即将出版。arXiv: 2110.05230，arXiv:2110.05230。[6] S. Cambie 和 R. Hämäläinen。完全二部图中的着色打包与对应打包的逆问题。即将出版。[7] P. A. Catlin。关于不相交团的海纳尔-塞梅雷迪定理。*Utilitas Math.*，17:163–177，1980。[8]Z. Dvořák 和 L. Postle。对应着色及其在无4至8长圈平面图列表着色中的应用。组合理论杂志*B*辑，129:38–54，2018。doi:10.1016/j.jctb.2017.09.001。[9] P. Erdős、A. L. Rubin 和 H. Taylor。图的可列表着色性。载于西海岸组合学、图论与计算会议论文集（洪堡州立大学，阿克塔，加利福尼亚州，*1979*），Congress. Numer.，XXVI，第125–157页。Utilitas Math.，温尼伯，马尼托巴省，1980。[10] F. Galvin。二部多重图的列表色指数。组合理论杂志*B*辑，63(1):153–158，1995年1月。doi:10.1006/jctb.1995.1011。

[11]A. Graf、D. G. Harris 和 P. Haxell。加权独立横截集与强着色算法。*ACM* 算法汇刊，18(1):1:1–1:16，2021年12月。doi:10.1145/3474057。[12] A. Graf 和 P. Haxell。高效寻找独立横截集。组合学、概率与计算，29(5):780–806，2020年9月。doi:10.1017/S0963548320000127。[13] S. Gutner 和 M. Tarsi。关于(a:b)-可选择性的一些结果。离散数学，309(8):2260–2270，2009年4月。doi:10.1016/j.disc.2008.04.061。[14] M. Hall, Jr.。子集的不同代表元。美国数学会通报，54:922–926，1948。doi:10.1090/S0002-9904-1948-09098-X。[15]P. Hall。关于子集的代表元。伦敦数学会杂志，10(1):26–30，1935。doi:10.1112/jlms/s1-10.1.128。[16] D. G. Harris。Moser-Tardos 框架中的偏依赖：超越偏斜 Lovász 局部引理。*ACM* 算法汇刊，13(1):1–26，2016年12月。doi:10.1145/3015762。[17]T. Kelly 和 L. Postle。具有局部需求的分数着色。*arXiv* 预印本，页码 arXiv:1811.11806，2018年11月，arXiv:1811.11806。doi:10.48550/arXiv.1811.11806。[18] D. Kühn 和 D. Osthus。完美图打包的最小度阈值。*Combinatorica*，29(1):65–107，2009。doi:10.1007/s00493-009-2254-3。[19] M. Levit。Galvin 定理的扩展。硕士论文，滑铁卢大学，2018。[20] K. MacKeigan。独立覆盖与正交着色。离散数学，344(8):112431，2021年8月。doi:10.1016/j.disc.2021.112431。[21] D. W. Matula 和 L. L. Beck。最小度优先排序、聚类与图着色算法。*J. Assoc. Comput. Mach.*，30(3):417–427，1983。doi:10.1145/2402.322385。[22] M. Molloy 和 B. Reed。图着色与概率方法，第23卷，算法与组合学。施普林格出版社，柏林，2002。doi:10.1007/978-3-642-04016-0。[23] J. A. Mudrock。任意图的列表装箱数定义良好的一个简短证明。*arXiv* 预印本，页码 arXiv:2207.11868，2022年7月，arXiv:2207.11868。[24] M. Schaefer 和 C. Umans。多项式时间层次中的完全性：汇编。*SIGACT* 新闻，33(3):32–49，2002。[25] J. H. van Lint 和 R. M. Wilson。组合学课程。剑桥大学出版社，剑桥，1992。[26] R. Yuster。 k部图中独立横截集的因子。电子组合学杂志，28(4):论文编号4.23，18页，2021。doi:10.37236/10529。