arXiv:2303.01269v1 [math.DS] 2 Mar 2023

带边噪声的度量图上的反应扩散方程

ESZTER SIKOLYA

摘要。我们研究有限度量图上的随机反应扩散方程。图中的每条边上都给定一个由乘性柱状高斯噪声驱动的反应扩散方程。每个顶点处的顶点条件均为标准连续性条件以及广义的非局部诺依曼–基尔霍夫型定律。假设每条边上的反应项都是奇数次多项式，各边上的多项式次数不必相同，系数可以是随机的，且首项为负。该模型推广了 [14] 中的问题；在那里考虑的多项式所满足的假设严格得多，且未涉及一阶微分算子。我们采用 [15] 中的半群方法，证明解的存在性与唯一性，并且解的样本路径属于图上的连续函数空间。

1. 引言

全文中，G 表示一个有限度量图。我们的术语遵循 [4，第 1]，章，这里仅列出最重要的概念。图 G 由有限个顶点组成的集合 V = {v} 和连接这些顶点的有限条边组成的集合 E ={e} 构成。我们用 $m = |\mathsf{E}|$ 表示边的数量，用 $n = |\mathsf{V}|$ 表示顶点的数量。通常，假设度量图具有有向边，即具有起点和终点的边。在本文中，由于模型的确定性部分涉及自伴算子，我们只需考虑无向边。每条边都赋予一个正长度 $\ell_{\mathsf{e}} \in (0, +\infty)$，并用 $x \in [0, \ell_{\mathsf{e}}]$ 表示图 G 的坐标。我们假设 G 是简单图，即任意两个顶点之间都没有重边，且 G 中不存在环。

度量图的结构使我们能够讨论定义在 G 上的函数 u，它们沿着各条边定义，使得对于任意坐标 x，函数取值为 $u(x)$。若要强调 x取自边 e，我们记作 $u_{\mathsf{e}}(x)$。因此，定义在 G 上的函数 u可以视为由定义在各条边上的函数组成的向量，所以我们也将其写作

$$u = (u_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}},$$

并将其视为乘积函数空间中的一个元素。

为了将顶点条件写成方程的形式，对于图 G 上给定的函数u 以及每个 v ∈V，我们引入以下记号。对于任意 v ∈ V，记 E_{v} 为与顶点 v 关联的边集，并用 $d_{\mathsf{v}} = |\mathsf{E}_{\mathsf{v}}|$ 表示其度

日期：2023年3月3日。2010 数学主题分类。主要分类：60H15、35R02；次要分类：35R60、47D06。关键词和短语。度量图；反应扩散方程；维纳型噪声。作者获得了OTKA第135241号资助。

。设 $u_{\mathsf{e}}(\mathsf{v})$ 表示当 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathsf{v}}$ 时， u 沿边 e 在 v 处的取值。设 $\mathsf{E}_{\mathsf{v}}=\{\mathsf{e}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathsf{e}_{d_{\mathsf{v}}}\}$，并定义

$$U(\mathsf{v})=(u_{\mathsf{e}}(\mathsf{v}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathsf{v}}}=\begin{pmatrix}u_{\mathsf{e}_1}(\mathsf{v})\\ \vdots\\ u_{\mathsf{e}_{d_{\mathsf{v}}}}(\mathsf{v})\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d_{\mathsf{v}}},\tag{1.1}$$

顶点 v 处的函数值向量。

令 I_{v} 为双对角矩阵

$$I_{\mathsf{v}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(d_{\mathsf{v}}-1)\times d_{\mathsf{v}}}.$$

容易看出，若设

$$I_{\mathsf{v}}U(\mathsf{v})=0_{\mathbb{R}^{d_{\mathsf{v}}-1}},\tag{1.2}$$

这意味着所有函数值在 v 处相同。若是这种情况，我们就用 $u(\mathsf{v})$ 表示这个共同的顶点值。

定义 1.1。 如果函数 u 在各边上连续，即 u_{e} 在每条e 上连续，其中$\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ ，并且对每个顶点$\mathsf{v}\in\mathsf{V}$，条件(1.2) 都成立，那么我们称函数 u 在 G 上连续。

我们定义定义域由 G 上连续函数组成的算子如下:

$$\begin{aligned}D(L)&\coloneqq\left\{u\in\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}C[0,\ell_{\mathsf{e}}]\colon I_{\mathsf{v}}U(\mathsf{v})=0,\ \mathsf{v}\in\mathsf{V}\right\},\\ Lu&\coloneqq(u(\mathsf{v}))_{\mathsf{v}\in\mathsf{V}}\in\mathbb{R}^n\text{ for }u\in D(L).\end{aligned}\tag{1.3}$$

也就是说， L 将 G 上每个连续函数 u 映射为由 u在各顶点处的取值组成的（n 维）向量。

给定 $T>0$ 后，我们将随机系统形式化地写为

$$\begin{cases}\dot{u}_{\mathsf{e}}(t,x)=(c_{\mathsf{e}}u'_{\mathsf{e}})'(t,x)+d_{\mathsf{e}}(x)\cdot u'_{\mathsf{e}}(t,x)\\ \qquad\quad -p_{\mathsf{e}}(x)u_{\mathsf{e}}(t,x)+f_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x))\\ \qquad\quad +h_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x))\dfrac{\partial w_{\mathsf{e}}}{\partial t}(t,x), & x\in(0,\ell_{\mathsf{e}}),\ t\in(0,T],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E},\ (a)\\ 0=I_{\mathsf{v}}U(t,\mathsf{v}), & t\in(0,T],\ \mathsf{v}\in\mathsf{V},\ (b)\\ 0=MLu(t)+Cu(t), & t\in(0,T],\ (c)\\ u_{\mathsf{e}}(0,x)=u_{0,\mathsf{e}}(x), & x\in[0,\ell_{\mathsf{e}}],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}.\ (d)\end{cases}\tag{1.4}$$

这里， $\dot{u}_{\mathsf{e}}$ 和 u'_{e} 分别表示 u_{e}的时间导数和空间导数。

函数 c_{e} 是（可变的）扩散系数或传导系数，并且我们假设

$$0<c_{\mathsf{e}}\in C[0,\ell_{\mathsf{e}}],\quad \mathsf{e}\in\mathsf{E}.$$

我们假设

$$d_{\mathsf{e}}\in\mathrm{Lip}[0,\ell_{\mathsf{e}}],\quad \mathsf{e}\in\mathsf{E}.$$

函数 p_{e} 均为非负有界函数，因此

$$0 \le p_{\mathsf{e}} \in L^{\infty}(0, \ell_{\mathsf{e}}), \quad \mathsf{e} \in \mathsf{E}. \tag{1.5}$$

假设反应项 f_{e} 为奇数次多项式，在不同边上其次数可能不同，并且其系数可能为随机系数，首项为负，见 (3.16)。假设系数 h_{e} 局部利普希茨连续，并根据边上多项式 f_{e} 的最高和最低次数满足适当的增长条件 (3.19)。当不同边上多项式 f_{e} 的次数一致时，这些条件便成为线性增长条件。$(w_{\mathsf{e}}(t))_{t\in[0,T]}$ 是在希尔伯特空间 $L^2(0, \ell_{\mathsf{e}})$ 上定义的相互独立的柱状维纳过程，$\mathsf{e} \in \mathsf{E}$。

对于每个 $t \in [0,T]$，以 $u(t)$ 表示

$$u(t) = u(t,\cdot) = (u_{\mathsf{e}}(t,\cdot))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$$

定义在 G 上的函数，其在边 e 上为 $u_{\mathsf{e}}(t,\cdot)$。

在 (2.1b) 中，对于 $\mathsf{v} \in \mathsf{V}$，0 表示维数为 $d_{\mathsf{v}} - 1$ 的常数零向量，而$U(t, \mathsf{v})$ 对函数 $u(t)$ 按照 (1.1) 定义。因此，这些方程表示，对于每个 $t \in (0, T]$，$u(t)$ 在 G 上连续，参见定义 1.1。

在（1.4c）中，0 表示维数为 n 的常零向量，M 是一个满足我们稍后规定的某些条件的 $n \times n$ 矩阵，参见假设 2.1；L 是公式（1.3）中的算子。

为定义所谓的反馈算子 C，对于每个 $\mathsf{v} \in \mathsf{V}$，我们设

$$C_{\mathsf{v}}u := \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathsf{v}}} c_{\mathsf{e}}(\mathsf{v}) \cdot u'_{\mathsf{e}}(\mathsf{v}),$$

其中，导数取远离顶点 v 的方向（即指向边的方向），参见 [4,第 1.4 节。] 现在令

$$D(C) := \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} C^1[0, \ell_{\mathsf{e}}],$$
$$Cu := (C_{\mathsf{v}}u)_{\mathsf{v}\in\mathsf{V}} \in \mathbb{R}^n \text{ for } u \in D(C).$$

因此，方程（1.4c）在顶点处表示一种（广义的）诺伊曼–基尔霍夫型条件。

根据定义显然，（1.4b）由

$$\sum_{\mathsf{v}\in\mathsf{V}} (d_{\mathsf{v}} - 1) = 2m - n$$

个方程组成。同时，（1.4c）由 n 个方程组成。因此，在顶点处总共有 $2m$ 个（边界或顶点）条件。

在方程（1.4d）中，我们在边上给定初始条件。

文献中已有研究网络上的随机（反应）扩散方程，例如见 [5], [6], [8], [9] 和 [15]。前四篇论文在希尔伯特空间框架下采用了半群方法。近期工作 [15] 研究了一个更为一般的问题，在边以及顶点上均考虑了乘性维纳型噪声，并假设扩散系数为满足适当增长条件的局部利普希茨连续函数。本文采用了完全不同的工具集，其基础是巴拿赫空间中随机演化方程的半群方法，来自

[7], [16], [17] 和 [24]。这种方法还使得可以在不同的边上考虑具有不同度数的多项式非线性项。

本文研究 [14] 中度量图上随机反应—扩散问题的一种推广。在 [14] 中，相关结果是在对多项式非线性项相当严格的条件下证明的：也就是说，各边上的多项式非线性项次数相同，且其系数应属于图 G 上连续函数组成的空间 B，见 (3.6)。现在我们考虑由奇数次多项式构成的一般非线性项，不同边上的次数可以不同，系数也可以是随机的，见 (3.16)。此外，我们还在 $(1.4a)$ 中加入一阶项，并考虑不同的边长度。

我们的方程与 [15] 中的方程不同，因为我们没有动力学，相应地也没有顶点噪声。因此，与 [15], 相反，本问题的状态空间由定义在各边上的函数构成，不包含边界空间。为了在这一新框架下开展研究，我们必须引入由各边上的连续函数组成的乘积空间 E^c，见 (3.5)，并验证有关该空间的结果。一个关键点是证明命题 3.9，即生成元 A_p 的分数阶定义域空间（见 (2.8)）连续且稠密地嵌入空间 B。与 [15, 引理 4.2], 不同，这里并非等距同构。借助 [15] 中的技术和结果，我们可以在定理 3.14 中证明，对于来自 E^c 的任意初值，问题 (1.4) 都存在唯一温和解，其轨道属于空间 B 。这比 [14, 定理 3.15] 中针对 Allen–Cahn 型非线性项所得的结果更为一般。

本文组织如下。第 2 节汇总关于式 (1.4) 的线性确定性版本的已知半群结果，并将其推广到边长度不同的情形。第 3 节是本文的核心。第 3.1 小节回顾 [15] 关于巴拿赫空间上随机抽象柯西问题 (SCP) 的一个抽象结果。第 3.2 小节在定义 3.5 和 3.7 中引入空间 E^c和 B ，并证明嵌入结果命题 3.9 和推论 3.10。命题 3.6 说明，支配线性确定性问题的半群在 E^c上是解析的，而命题 3.8 声称该半群在 B上强连续。在第 3.3 小节中，我们首先对式 (3.16) 中的反应项以及式 (3.19) 中的扩散系数作出必要的假设。随后，我们将式 (1.4) 改写为随机抽象柯西问题 (SCPn) 的形式，并在定理 3.14 中证明主要的存在唯一性结果，在定理 3.16 中证明一个时空正则性结果。

记号 1.2. 本文中以下记号均与 $\ell_{\mathrm{e}} > 0$ 一同使用。

- 用 $C[0,\ell_{\mathrm{e}}]$ 表示定义在（紧）区间$[0,\ell_{\mathrm{e}}]$,上的连续函数空间，用 $C^1[0,\ell_{\mathrm{e}}]$ 表示定义在 $C[0,\ell_{\mathrm{e}}]$ 上且在 $[0,\ell_{\mathrm{e}}]$上连续可微的函数空间。这些都是赋予通常最大范数的巴拿赫空间。对于 $\lambda \in (0,1)$，我们用 $C^\lambda[0,\ell_{\mathrm{e}}]$ 表示由 *λ-H¨older* 连续函数构成的空间，并赋予通常范数。
- 用 $L^p(0,\ell_{\mathrm{e}})$表示满足绝对值的 p 次幂勒贝格可积的可测函数所构成的巴拿赫空间（将几乎处处相等的函数视为相同函数），并赋予通常的 L^p 范数。$L^\infty(0,\ell_{\mathrm{e}})$ 表示几乎处处有界的可测函数空间，并赋予上确界范数。

- 对于 $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $W^{k,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 定义为函数 u在 $L^p(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 中的子集，其中 u 及其直到 k 阶的弱导数具有有限的L^p范数。

$$\|u\|^p_{W^{k,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})} := \sum_{0\le j\le k} \left\|u^{(j)}\right\|^p_{L^p(0,\ell_{\mathsf{e}})},$$

其中， $u^{(j)}$ 表示 u的 j阶导数。令 $H^k(0,\ell_{\mathsf{e}}) := W^{k,2}(0,\ell_{\mathsf{e}})$。

- 记 $W^{k}_{,0}{}^{p}(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 为在$W^{k,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})$-范数下，具有紧支集的无穷次可微函数空间的闭包，其中紧支集包含于$(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 内。定义 $H^k_0(0,\ell_{\mathsf{e}}) := W^{k,2}{}_0(0,\ell_{\mathsf{e}})$。

- 对于 $s>0$， $1\le p<\infty$，我们定义

$$W^{s,p}(0,\ell_{\mathsf{e}}) := \left\{ u \in W^{\lfloor s\rfloor}(0,\ell_{\mathsf{e}}) \colon \left|u^{(\lfloor s\rfloor)}\right|_{\theta,p,(0,\ell_{\mathsf{e}})} < \infty \right\},$$

其中 $\lfloor s\rfloor$ 表示 s的整数部分， $\theta = s - \lfloor s\rfloor$ 并且

$$|u|^p_{\theta,p,(0,\ell_{\mathsf{e}})} := \int_0^{\ell_{\mathsf{e}}}\int_0^{\ell_{\mathsf{e}}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+\theta\cdot p}}\,dx\,dy.$$

此外，

$$\|u\|_{W^{s,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})} := \|u\|_{W^{\lfloor s\rfloor,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})} + \left|u^{(\lfloor s\rfloor)}\right|_{\theta,p,(0,\ell_{\mathsf{e}})}.$$

$H^s(0,\ \ell_{\mathsf{e}}) := W^{s,\ 2}(0,\ \ell_{\mathsf{e}})$。

- 与上文类似，我们可以定义 $W^{s}_{,0}{}^{p}(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 为在 $s>0$和 $1\le p<\infty$的意义下，具有紧支集于$(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 的无穷次可微函数空间的闭包，其中所用的范数为 $W^{s,p}(0,\ell_{\mathsf{e}})$-范数；并且$H^s_0(0,\ell_{\mathsf{e}}) := W^{s,2}(0,\ell_{\mathsf{e}})$。

2. 确定性问题的适定性

我们从确定性问题开始

$$\begin{cases} \dot{u}_{\mathsf{e}}(t,x) = (c_{\mathsf{e}}u'_{\mathsf{e}})'(t,x) - p_{\mathsf{e}}(x)u_{\mathsf{e}}(t,x), & x\in(0,\ell_{\mathsf{e}}),\ t>0,\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}, \quad (a)\\ 0 = I_{\mathsf{v}}U(t,\mathsf{v}), & t>0,\ \mathsf{v}\in\mathsf{V}, \quad (b)\\ 0 = MLu(t) + Cu(t), & t>0, \quad (c)\\ u_{\mathsf{e}}(0,x) = u_{0,\mathsf{e}}(x), & x\in[0,\ell_{\mathsf{e}}],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}, \quad (d) \end{cases} \tag{2.1}$$

另见 [19], [20]。

在本文余下部分，我们对矩阵 M作如下假设。

假设 2.1. 矩阵 $M=(b_{ik})_{n\times n}$ 满足

（*1*）实数、对称；（*2*）对于 $i\neq k$、 $b_{ik}\ge 0$，即 M 具有正非对角元；（*3*）

$$b_{ii} + \sum_{k\neq i} b_{ik} < 0, \quad i=1,\dots,n.$$

我们希望将我们的系统改写为抽象柯西问题的形式。首先，我们考虑希尔伯特空间

$$E_2 := \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} L^2(0,\ell_{\mathsf{e}})$$

作为边的状态空间，并赋予其自然内积

$$\langle u, v\rangle_{E_2} := \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \int_0^{\ell_{\mathsf{e}}} u_{\mathsf{e}}(x) v_{\mathsf{e}}(x)\, dx, \qquad u, v \in E_2.$$

在 E_2 上，我们定义算子

$$A_{\max} := \operatorname{diag}\left(\frac{d}{dx}\left(c_{\mathsf{e}}\frac{d}{dx}\right) - p_{\mathsf{e}}\right)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$$

其最大定义域为

$$D(A_{\max}) := \left\{ u \in \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} H^2(0,\ell_{\mathsf{e}}) : 0 = I_{\mathsf{v}} U(\mathsf{v}),\ \mathsf{v}\in\mathsf{V} \right\} \tag{2.2}$$

其定义域中仅包含连续性条件。

采用这些记号，我们可以像 [14, (2.8)] 中那样，将 (2.1) 改写为一个抽象柯西问题。定义

$$\begin{aligned} A_2 &:= A_{\max} \\ D(A_2) &:= \{u \in D(A_{\max}) \colon 0 = MLu + Cu\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

利用这一点，(2.1) 可写为

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A_2 u(t),\ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $u_0 = (u_{0,\,\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$。

下文中，半群及其生成元的概念均按 [3, 定义 3.2.5] 的意义理解。也就是说，这是一个强连续函数 $T\colon (0,\ \infty) \to \mathcal{L}(E)$，其中 E 是巴拿赫空间，$\mathcal{L}(E)$ 表示 E 上的有界线性算子，并满足

(a) $T(t+s) = T(t)T(s)$，$s,\ t > 0$；(b) 存在 $c > 0$，使得对于所有 $t \in (0,1]$，均有 $\|T(t)\| \le c$；(c) 对所有 $t > 0$，$T(t)x = 0$ 蕴含 $x = 0$

称为一个半群。根据 [3, 定理 3.1.7] 的证明，存在常数 M，$\omega \ge 0$，使得对于所有 $t > 0$，均有 $\|T(t)\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}$。由 [3, 命题 3.2.4] 可知，存在唯一算子 A，使得 $(\omega,\ \infty) \subset \rho(A)$，并且

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\, dt \quad (\lambda > \omega),$$

并称 $(A, D(A))$ 为 T 的生成元。半群 T 是强连续的，即 C_0，也就是说 $T\colon [0,\infty) \to \mathcal{L}(E)$ 是一个满足以下性质的强连续函数

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad s, t \ge 0, \\ T(0) &= Id \end{aligned}$$

当且仅当其生成元是稠密定义的，见 [3, 推论 3.3.11.]。根据[3, 定义 3.7.1], , 若存在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$，使得 T 可全纯延拓到扇形，则称该半群为解析的 或全纯的

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon |\arg z| < \theta\}$$

且该延拓在 $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ 上对所有 $\theta' \in (0, \theta)$ 都有界。若在正实半轴上考虑的半群算子是压缩算子，则称解析半群是压缩的 。若半群具有到 $\Sigma_{\theta'}$ 的有界全纯延拓，对所有 $\theta' \in (0, \theta)$ 都成立，则称其为角度为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 的有界解析 或有界全纯 半群。

此外，若存在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$，使得

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(A) \text{ and } \sup_{\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta-\varepsilon}} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty \text{ for all } \varepsilon > 0.$$

根据 [3, 定理 3.7.11]，有界解析半群的生成元恰好是扇形算子。

与 [14] 中相同，我们可以证明以下重要结果。

命题 2.2. 式 (2.3) 中的算子 $(-A_2, D(A_2))$ 是与下述型相关联的算子

$$D(\mathfrak{a}) = \left\{ u \in \prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} H^1(0, \ell_\mathsf{e})\colon I_\mathsf{v} U(\mathsf{v}) = 0,\ \mathsf{v} \in \mathsf{V} \right\},$$
$$\mathfrak{a}(u, v) = \sum_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \int_0^{\ell_\mathsf{e}} c_\mathsf{e} \cdot u'_\mathsf{e} \cdot v'_\mathsf{e} + \sum_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \int_0^{\ell_\mathsf{e}} p_\mathsf{e} \cdot u_\mathsf{e} \cdot v_\mathsf{e} - \langle MLu, Lv \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

其意义如下：

$$D(A_2) = \{u \in D(\mathfrak{a})\colon \exists\, h \in E_2 \ s.t.\ \mathfrak{a}(u, v) = \langle h, v \rangle_{E_2} \ for\ all\ v \in D(\mathfrak{a})\},$$
$$-A_2 u = h.$$

型 $(\mathfrak{a}, D(\mathfrak{a}))$ 是对称、稠密定义、连续、闭且增生的。算子 $(A_2, D(A_2))$ 是稠密定义的、耗散的、扇形的且自伴的，其中 $(0, +\infty) \subset \rho(A_2)$。由 $(A_2, D(A_2))$ 生成的强连续半群 $(T_2(t))_{t \geq 0}$ 是有界解析的、正的且压缩的。

证明。我们可以直接应用 [19, 引理 3.4] 和 [20, 引理 3.3]，得到该命题的第一部分。根据 [19, 命题 3.2 和推论 3.3] 以及 [20, 引理 3.2], 的证明，利用假设 2.1 和 (1.5)，可得 $\mathfrak{a}$ 的性质。[21, 命题 1.51 和定理 1.52] 说明了由 $(A_2, D(A_2))$ 生成的半群 $(T_2(t))_{t \geq 0}$的性质。根据 [21, 命题 1.24], ， A_2 是自伴的；其余性质可由标准半群理论推出，参见例如 [3, 定理 3.4.5 和定理 3.7.11]。□

对于关于 (1.4) 的结果，我们需要 (2.4) 不仅在希尔伯特空间 E_2 上适定，在 L^p-空间上也适定。因此，我们引入以下概念。令

$$E_p := \prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} L^p(0, \ell_\mathsf{e}), \quad p \in [1, \infty], \tag{2.5}$$

赋予范数

$$\|u\|_{E_p}^p := \sum_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \|u_\mathsf{e}\|_{L^p(0,\ell_\mathsf{e})}^p, \quad u \in E_p,\ p \in [1, \infty)$$
$$\|u\|_{E_\infty} := \max_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \|u_\mathsf{e}\|_{L^\infty(0,\ell_\mathsf{e})}, \quad u \in E_\infty.$$

命题 2.3. 半群 $(T_2(t))_{t\geq 0}$ 可扩展为一族解析的、压缩的、正的单参数半群 $(T_p(t))_{t\geq 0}$，作用于 E_p，其中 $1 \leq p \leq \infty$，由 $(A_p, D(A_p))$生成。当 $p \in [1,\infty)$ 时，这些半群是强连续的，并且在以下意义下相容：若 q、$p \in [1,\infty]$ 和 $q \geq p$，则

$$T_p(t)u = T_q(t)u \text{ for } u \in E_q. \tag{2.6}$$

证明。 证明过程与 [15, 命题 2.4.2] 的证明类似。为获得所需的半群族 $(T_p(t))_{t\geq 0}$，主要工具是证明 $(T_2(t))_{t\geq 0}$ 是次马尔可夫的，并且具有高斯上界。前一性质可按照 [15, 引理 B.1]，证明中使用假设 2.1 和 𝔞 命题 2.2 中型的性质的方法，以同样方式加以验证。对于高斯上界的存在性，我们利用假设 2.1 得到 $-M$ 是正定的，因此可以直接应用 [10,定理 4.1] □

我们还可以证明，$(A_p,\ D(A_p))$ for $p \in [2,+\infty)$ 的生成元实际上与 A_2 在 E_2 上具有相同的型，并带有适当的定义域。令

$$\begin{aligned} A_{p,\max} &:= \operatorname{diag}\left(\frac{d}{dx}\left(c_{\mathsf{e}}\frac{d}{dx}\right) - p_{\mathsf{e}}\right)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \\ D(A_{p,\max}) &:= \left\{ u \in \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W^{2,p}(0,\ell_{\mathsf{e}}) : 0 = I_{\mathsf{v}}U(\mathsf{v}),\ \mathsf{v}\in\mathsf{V} \right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

引理 2.4。 对于所有 $p \in [2,\infty)$，半群生成元 $(A_p, D(A_p))$ 由下式给出

$$\begin{aligned} A_p &= A_{p,\max}, \\ D(A_p) &= \{u \in D(A_{p,\max}) \colon 0 = MLu + Cu\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

证明。 对于 $p = 2$，由 (2.3) 可得该结论。令 $2 < p < +\infty$。由 (2.6) 可知，$(T_2(t))_{t\geq 0}$ 使 E_p 保持不变，且 $T_p(t) = T_2(t)|_{E_p}$。由于 $E_p \hookrightarrow E_2$ 成立且这些半群是强连续的，我们可以应用 [11, 命题 II.2.3]，并得出 A_p 是 A_2 在 E_p中的部分算子。因此，直接计算可得 (2.8)。□

3. 度量图上的随机反应扩散方程

3.1. 随机反应扩散方程的一个抽象结果。设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，配备右连续滤过$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$，其中给定 $T > 0$。设 $(W_H(t))_{t\in[0,T]}$是定义在某个希尔伯特空间 H上的柱状维纳过程，定义于 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$，且相对于滤过 $\mathbb{F}$；也就是说，$(W_H(t))_{t\in[0,T]}$是 $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-适应的，并且对所有 $t > s$，$W_H(t) - W_H(s)$ 与 $\mathscr{F}_s$独立。

我们将引用 [15]，中关于以下抽象方程的一个结果

$$\begin{cases} dX(t) = [AX(t) + F(t,X(t)) + \widetilde{F}(t,X(t))]dt + G(t,X(t))dW_H(t) \\ X(0) = \xi. \end{cases} \tag{SCP}$$

在下文中，设 E 为一个实巴拿赫空间。有时——虽未特别强调——当我们使用扇形性论证时，必须转而考虑适当的复化（例如参见 [18]）。

如果我们假设 $(A, D(A))$ 在巴拿赫空间 E 上生成一个强连续解析半群S，且 $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$ 对某些 $M \geq 1$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$成立,

那么对于 $\omega' > \omega$，分数幂 $(\omega' - A)^\alpha$ 对所有 $\alpha \in (0,1)$。特别地，分数阶定义域空间

$$E^\alpha := D((\omega' - A)^\alpha), \quad \|u\|_\alpha := \|(\omega' - A)^\alpha u\|, \quad u \in D((\omega' - A)^\alpha) \tag{3.1}$$

是巴拿赫空间。众所周知（例如参见 [11, §II.4–5.]），除相差等价范数外，这些空间与 ω'. 的选择无关

对于 $\alpha \in (0, 1)$，我们将外推空间 $E^{-\alpha}$ 定义为 E在范数 $\|u\|_{-\alpha} := \|(\omega' - A)^{-\alpha} u\|$, $u \in E$下的完备化。这些空间除相差等价范数外与$\omega' > \omega$ 无关。

我们固定 $E^0 := E$。

注 3.1. 若 $\omega = 0$ （因此，半群 S 有界），则根据 *[12,* 命题 *3.1.7]*，我们可以取 $\omega' = 0$。也就是说，

$$E^\alpha \cong D((-A)^\alpha), \quad \alpha \in [0, 1),$$

当 $D((-A)^\alpha)$赋予图范数时。

设 Z 为巴拿赫空间。对于 $u \in Z$，我们将范数在u处的次微分定义为集合

$$\partial\|u\| := \{u^* \in Z^* \colon \|u^*\|_{Z^*} = 1 \text{ and } \langle u, u^* \rangle = 1\} \tag{3.2}$$

根据赫恩-巴拿赫定理，当 $u \neq 0$ 时，该集合非空。

现在我们为 (SCP) 中的算子引入以下假设，见 [15,假设 3.7]。除非另有说明，$\|\cdot\|$ 表示 Z 的范数。

假设 3.2。

(1) 设 E 为一个 *2* 型 *UMD* 巴拿赫空间，且 2 *and* $(A, D(A))$ 是 E 上一个稠密定义的闭扇形算子。*(2)* 对某个 $\theta \in (0, 1)$，我们有连续（但不一定稠密）的嵌入

$$E^\theta \hookrightarrow Z \hookrightarrow E.$$

(3) 由 $(A, D(A))$ 在 E 上生成的强连续解析半群 S 限制为 Z 上的解析压缩半群，记为 $\mathcal{S}^z$，其生成元为 $(\mathcal{A}^z, D(\mathcal{A}^z))$。

(4) 映射 $F\colon [0,T] \times \Omega \times Z \to Z$ 关于第一个变量连续，关于第三个变量局部利普希茨连续，具体而言，对所有 $r > 0$，存在常数 $L_F^{(r)}$ 使得

$$\|F(t, \omega, u) - F(t, \omega, v)\| \leq L_F^{(r)} \|u - v\|$$

对所有$\|u\|$、$\|v\| \leq r$ 以及$(t, \omega) \in [0,T] \times \Omega$，存在常数 $C_{F,0} \geq 0$使得

$$\|F(t, \omega, 0)\| \leq C_{F,0}, \quad t \in [0,T],\ \omega \in \Omega.$$

此外，对于所有 $u \in Z$，映射$(t, \omega) \mapsto F(t, \omega, u)$ 是强可测且适应的。

最后，对于适当的常数 a'、$b' \geq 0$ 和 $N \geq 1$，有

$$\langle Au + F(t, \omega, u + v), u^* \rangle \leq a'(1 + \|v\|)^N + b'\|u\|$$

对于所有 $u \in D(A|_Z)$、$v \in Z$、$\omega \in \Omega$ 和 $u^* \in \partial\|u\|$，参见 (3.2)。

(5) 存在常数 a''、 b''、 k、 $K > 0$，满足 $K \geq k$，使得函数F： $[0,T] \times \Omega \times Z \to Z$满足

$$\langle F(t,\omega,u+v) - F(t,\omega,v), u^* \rangle \leq a''(1+\|v\|)^K - b''\|u\|^k$$

对所有 $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$、 $u, v \in Z$ 和 $u^* \in \partial\|u\|$，以及

$$\|F(t,\omega,v)\| \leq a''(1+\|v\|)^K$$

对所有 $v \in Z$, , $\omega \in \Omega$。

~(6) 对某个常数 $\kappa_{\widetilde{F}} \geq 0$，映射 $F\colon [0,T] \times \Omega \times Z \to E^{-\kappa_{\widetilde{F}}}$ 关于第三个变量是全局利普希茨连续的，且一致于第一个~和第二个变量。此外，对所有 $u \in Z$，映射 $(t,\omega) \mapsto F(t,\omega,u)$ 是强可测且适应的。

最后，对某个 $d' \geq 0$，有

$$\left\|\widetilde{F}(t,\omega,u)\right\|_{E^{-\kappa_{\widetilde{F}}}} \leq d'\,(1+\|u\|)$$

对所有 $(t,\omega,u) \in [0,T] \times \Omega \times Z$.

(7) 令 $\gamma(H, E^{-\kappa_G})$ 表示从希尔伯特空间 H 到 $E^{-\kappa_G}$ 的 γ-径向化算子空间，其中某个 $0 \leq \kappa_G < \frac{1}{2}$ （例如参见 [16, 第 3.1] 节）。那么映射 $G\colon [0,T] \times \Omega \times Z \to \gamma(H, E^{-\kappa_G})$ 是局部利普希茨连续的，具体而言，对所有 $r > 0$，存在常数 $L_G^{(r)}$，使得

$$\|G(t,\omega,u) - G(t,\omega,v)\|_{\gamma(H,E^{-\kappa_G})} \leq L_G^{(r)}\|u-v\|$$

对所有 $\|u\|, \|v\| \leq r$ 以及 $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$。此外，对于所有 $u \in Z$和$h \in H$，映射 $(t,\omega) \mapsto G(t,\omega,u)h$ 是强可测且适应的。

最后，对于适当的常数 c',

$$\|G(t,\omega,u)\|_{\gamma(H,E^{-\kappa_G})} \leq c'\,(1+\|u\|)^{\frac{k}{K}}$$

对于所有 $(t,\omega,u) \in [0,T] \times \Omega \times Z$.

注 3.3。 在假设 3.2(3)中，我们利用了以下事实：由于 S 在 E上是解析的，且根据假设 3.2(2)， $D(A) \subset E^\theta \hookrightarrow Z$ 成立，因此 S 保持 Z 不变。因此， S 在 Z 上的限制 $\mathcal{S}^z$ 是有意义的，并且根据假设， $\mathcal{S}^z$ 是 Z上的解析压缩半群。注意，由于 $\mathcal{S}^z$ 不一定是强连续的，$\mathcal{A}^z$ 不一定是稠密定义的。然而，可以证明 $(\mathcal{A}^z, D(\mathcal{A}^z))$ 是部分算子$(A, D(A))$ 在 Z中的部分算子，参见 [15, 注 3.4]。

我们回顾一下，(SCP) 的温和解是以下积分方程的解

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\left(F(s,X(s)) + \widetilde{F}(s,X(s))\right) ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)G(s,X(s))\, dW_H(s) \\ &=: S(t)\xi + S * F(\cdot,X(\cdot))(t) + S * \widetilde{F}(\cdot,X(\cdot))(t) + S \diamond G(\cdot,X(\cdot))(t) \quad (3.3) \end{aligned}$$

其中

$$S * f(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds$$

表示“通常的”卷积，且

$$S \diamond g(t) = \int_0^t S(t-s)g(s)\, dW_H(s)$$

表示关于 W_H. 的随机卷积。我们也隐含地假设，(3.3) 右端的所有项都有定义。

现在我们引用 [15, 定理 3.10] 的结论，它对证明我们的结果至关重要。对于固定的 $T > 0$ 和 $q \geq 1$，定义空间

$$V_{T,q} := L^q\left(\Omega; C((0,T]; Z) \cap L^\infty(0,T; Z)\right) \tag{3.4}$$

这是一个赋范为如下范数的巴拿赫空间

$$\|u\|_{V_{T,q}}^q := \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^q, \quad u \in V_{T,q}.$$

定理 3.4 （ [15] 的定理 3.10）。设 $T > 0$、 $2 < q < \infty$ ，并假设假设 *3.2* 满足

$$\theta + \kappa_{\tilde{F}} < 1, \quad \theta + \kappa_G < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}.$$

那么，对于所有 $\xi \in L^q(\Omega\ \mathscr{F}_0、\ \mathbb{P};\ Z)$ ，都存在一个全局温和解 $X \in V_{T,\ q}$ ，它是 (SCP)的解。此外，对于某个常数 $C_{q,\ T} > 0$ ，有

$$\|X\|_{V_{T,q}}^q \leq C_{q,T}\left(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^q\right).$$

3.2. **预备结果**。为了验证我们的主要结果，我们需要证明一些关于第 2 节所设情形的预备结果。我们利用这样一个事实：此处涉及的半群都保持相应实空间的不变性，见 [15, 第 4.1] 节。

定义 3.5. 我们记

$$E^c := \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} C[0, \ell_{\mathsf{e}}] \tag{3.5}$$

为边上的连续函数的乘积空间（按定义 *1.1* 的意义，函数不一定在顶点处连续）。范数按通常方式定义，其中

$$\|u\|_{E^c} := \max_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \|u_{\mathsf{e}}\|_{C[0,\ell_{\mathsf{e}}]}, \quad u \in E^c.$$

在我们的设定中，该空间将扮演空间 Z 的角色。

在本文余下部分，我们假设

$$p \geq 2$$

成立。这是合理的，因为我们将应用定理 3.4，且在假设 3.2(1) 中， E 被假设为 2 型 UMD 巴拿赫空间。

我们首先需要半群 $(T_p(t))_{t\geq 0}$ 在 E^c 上限制为同一个解析压缩半群。

命题 3.6。 对于所有 $p \in [2, +\infty]$，半群 T_p 保持 E^c 不变，且限制 $T_p|_{E^c}$ 全部相同，记为 $\mathcal{S}^c$。半群 $\mathcal{S}^c$ 在 E^c上是解析且压缩的。其生成元 $(\mathcal{A}^c, D(\mathcal{A}^c))$ 与算子 $(A_p, D(A_p))$ 在 E^c 中的部分算子$(A_p|_{E^c}, D(A_p|_{E^c}))$ 相同，对任意 $p \in [2, \infty]$均成立。

证明。 首先证明，对所有 $p \in [2, +\infty]$， $D(A_p) \subset E^c$ 成立。根据引理 2.4和Sobolev嵌入可知，若 $p \in [2, +\infty)$，则 $D(A_p) \subset E^c$ 成立。包含关系$D(A_\infty) \subset D(A_2) \subset E^c$，证明的其余部分可按命题 [15, Prop. 4.4] 的证明以同样方式完成。□

我们指出，半群 $\mathcal{S}^c$ 在 E^c 上不是强连续的，因为 $D(A^c) \subset D(A_2)$，且 $D(A_2)$在 E^c中不稠密，见 (2.2) 和 (2.3)。

在我们的主要结果中， E^c 的以下闭子空间起着根本作用。

定义 3.7. 我们用

$$B := \left\{ u \in \prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} C[0, \ell_\mathsf{e}] \colon I_\mathsf{v} U(\mathsf{v}) = 0,\ \mathsf{v} \in \mathsf{V} \right\}, \tag{3.6}$$

表示 G 上连续函数的空间，见定义 *1.1*。空间 B 显然是 E^c的闭子空间，因此在范数下是一个巴拿赫空间

$$\|u\|_B = \max_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \|u_\mathsf{e}\|_{C[0,\ell_\mathsf{e}]} = \|u\|_{E^c}, \quad u \in B. \tag{3.7}$$

命题 3.8. 生成元 $(A_p, D(A_p))$ 在 B 上的部分算子对每个 $p \in [2, +\infty]$ 都是同一个算子，并且该算子是 B上的一个正的、强连续的解析压缩半群的生成元。

证明. 采用与命题 3.6 证明类似的方法，可以验证$D(A_p) \subset B$ 对 $p \in [2, +\infty]$成立。利用半群 $(T_p(t))_{t \geq 0}$的解析性，可得空间 B 是 $T_p(t)$-不变的。利用命题 2.2 中型$\mathfrak{a}$ 的性质，以及半群 $(T_p(t))_{t \geq 0}$ 在空间 E_p 上的解析性和相容性（见命题 2.3），仿照命题 2.1] 的证明可知，生成元 $(A_p, D(A_p))$ 在 B上的部分算子对每个 $p \in [2, +\infty]$ 都是同一个算子，并且它在 B上生成一个强连续压缩半群。注意到 B 是 E^c的闭子空间，且 $\mathcal{S}^c$ 在 E^c上是解析的，即可得到解析性。□

我们回顾一下，对于 $p \in [2, +\infty)$，算子 $(A_p, D(A_p))$ 是空间 E_p （定义见 (2.5)）上的强连续解析半群的生成元（参见命题 2.3）。

对于 $0 \leq \theta < 1$，令 E_p^θ 按照 (3.1) 在空间 E_p. 上的算子 A_p 定义

(3.8)

我们将需要以下关于分数阶定义域空间和空间 B 的嵌入结果。

命题 3.9。 令 E_p^θ 定义于 (3.8) 中。则对于 $p \in [2, \infty)$ 和 $\theta > \frac{1}{2p}$，满足以下连续、稠密嵌入:

$$E_p^\theta \hookrightarrow B \hookrightarrow E_p. \tag{3.9}$$

证明。按照 [14,引理 3.6], 中类似的方法，可以验证

$$B \cong \left(\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} C_0[0, \ell_\mathsf{e}] \right) \times \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

其中 $C_0[0,\ell_{\mathsf{e}}]$ 表示定义在 $[0,\ell_{\mathsf{e}}]$ 上且在区间端点处取值为 0 的连续函数空间。根据命题 2.3，算子 $(A_p, D(A_p))$ 在 E_p 上生成一个正压缩半群。由 [2, §4.7 中的定理 3] 和 [2, §4.4 中的命题10] 可知，对于复插值空间

$$D((\lambda - A_p)^\theta) \cong [D(\lambda - A_p), E_p]_\theta \tag{3.11}$$

对任意 $\lambda > 0$ 均成立。由 [14, 引理 3.5] 可直接得出

$$D(A_{p,\max}) \cong \left(\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W_0^{2,p}(0,\ell_{\mathsf{e}}) \right) \times \mathbb{R}^n, \tag{3.12}$$

见 (2.7)。注意，由引理 2.4，对于 $p \geq 2$, $D(A_p) \hookrightarrow D(A_{p,\max})$ 成立。因此，由 (3.11)、(3.12) 和一般插值理论（例如参见 [22, 第 4.3 节3], ），我们可以按照证明 [13, 推论 3.1] 的相同方法得到，对于 $\theta > \frac{1}{2p}$

$$E_p^\theta = D((\lambda - A_p)^\theta) \hookrightarrow \left(\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W_0^{2\theta,p}(0,\ell_{\mathsf{e}}) \right) \times \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

成立。因此，由 (3.10) 和 Sobolev嵌入可得

$$\left(\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W_0^{2\theta,p}(0,\ell_{\mathsf{e}}) \right) \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow B, \tag{3.14}$$

thus

$$E_p^\theta \hookrightarrow B$$

在连续嵌入意义下成立。命题 3.8 意味着 $D(A_p)$，因此 $E_p^\theta \cong D((-A_p)^\theta)$ 在 B 中稠密。由于 $\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} C_0[0,\ell_{\mathsf{e}}] \subset B$ 是 E_p 的稠密子空间，我们得到 B 连续且稠密地嵌入于 E_p。□

由此可得包含空间E^c的以下嵌入链。需要特别指出的是，这些嵌入都是连续的，但第一个嵌入不是稠密的。

推论 3.10. 对于 $p \in [2,\infty)$ 和 $\theta > \frac{1}{2p}$，以下连续嵌入成立：

$$E_p^\theta \hookrightarrow E^c \hookrightarrow E_p.$$

证明. 由于根据定义， $B \subset E^c$ 是一个（闭）子空间，且（3.9）成立，

$$E_p^\theta \hookrightarrow E^c$$

满足连续嵌入。通过观察到 $E^c \hookrightarrow E_p$具有连续稠密嵌入即可得出该结论。□

3.3. 主要结果。 现在，我们将前几节的结果应用于以下基于（2.1）的随机演化方程。我们在网络的边上施加随机噪声，并在（2.1）的第一个方程中添加一个非线性项和一阶项。

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，配备右连续滤过 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$，其中 $T > 0$ 为某个给定值。我们考虑问题

$$\begin{cases} \dot{u}_{\mathsf{e}}(t,x) = (c_{\mathsf{e}}u'_{\mathsf{e}})'(t,x) + d_{\mathsf{e}}(x)\cdot u'_{\mathsf{e}}(t,x) \\ \qquad\qquad - p_{\mathsf{e}}(x)u_{\mathsf{e}}(t,x) + f_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x)) \\ \qquad\qquad + h_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x))\dfrac{\partial w_{\mathsf{e}}}{\partial t}(t,x), \qquad x\in(0,\ell_{\mathsf{e}}),\ t\in(0,T],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}, \ (a) \\ 0 = I_{\mathsf{v}}U(t,\mathsf{v}), \qquad\qquad t\in(0,T],\ \mathsf{v}\in\mathsf{V}, \ (b) \\ 0 = MLu(t) + Cu(t), \qquad\qquad t\in(0,T], \ (c) \\ u_{\mathsf{e}}(0,x) = u_{0,\mathsf{e}}(x), \qquad\qquad x\in[0,\ell_{\mathsf{e}}],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}. \ (d) \end{cases} \tag{3.15}$$

项 $\frac{\partial w_{\mathsf{e}}}{\partial t}$是定义在 $[0,\ell_{\mathsf{e}}]$ 上、$\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 中相互独立的时空白噪声，写作相互独立的柱状维纳过程 $(w_{\mathsf{e}}(t))_{t\in[0,T]}$ 的形式导数。这些过程定义在希尔伯特空间 $L^2(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 上的 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 中，并相对于滤过 $\mathbb{F}$。

假设 3.11。 函数 $f_{\mathsf{e}}\colon [0,T]\times\Omega\times[0,\ell_{\mathsf{e}}]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以下形式的多项式

$$f_{\mathsf{e}}(t,\omega,x,\eta) = -a_{\mathsf{e}}(t,\omega,x)\eta^{2k_{\mathsf{e}}+1} + \sum_{j=0}^{2k_{\mathsf{e}}} a_{\mathsf{e},j}(t,\omega,x)\eta^j, \quad \eta\in\mathbb{R},\ \mathsf{e}\in\mathsf{E} \tag{3.16}$$

其中 k_{e}、$\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 为正整数。对于这些系数，我们假设存在常数 $0 < c \le C < \infty$，使得

$$c \le a_{\mathsf{e}}(t,\omega,x) \le C,\ |a_{\mathsf{e},j}(t,\omega,x)| \le C,\ \textit{for each}\ \mathsf{e}\in\mathsf{E},\ j = 0,\dots,2k_{\mathsf{e}},$$

对所有 $(t,\omega,x)\in[0,T]\times\Omega\times[0,\ell_{\mathsf{e}}]$ 均成立。此外，我们假设

$$a_{\mathsf{e}}(t,\omega,\cdot),\ a_{\mathsf{e},j}(t,\omega,\cdot)\in C[0,\ell_{\mathsf{e}}], \quad \mathsf{e}\in\mathsf{E},\ j = 0,\dots,2k_{\mathsf{e}}$$

并且系数 a_{e}、$a_{\mathsf{e},\,j}\colon [0,T]\times\Omega\times[0,\ell_{\mathsf{e}}]\to\mathbb{R}$ 是联合可测且适应的，即对于每个 e 和 j，以及每个 $t\in[0,T]$，函数$a_{\mathsf{e}}(t,\cdot)$ $a_{\mathsf{e},\,j}(t,\cdot)$ 都是 $\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{B}_{[0,\ell_{\mathsf{e}}]}$-可测的，其中 $\mathscr{B}_{[0,\ell_{\mathsf{e}}]}$ 表示 $[0,\ell_{\mathsf{e}}]$.上的博雷尔集的σ-代数

注记3.12。 在 *[14,* 假设*3.10]* 中，我们必须对 (3.16)中的多项式作出严格得多的条件假设，即对于所有$\mathsf{e}\in\mathsf{E}$，

$$(a_{\mathsf{e}}(t,\omega,\cdot))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}},\ (a_{\mathsf{e},j}(t,\omega,\cdot))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\in B$$

对于 $j = 1,\dots,2k,\ t\in[0,T]$，几乎所有 $\omega\in\Omega$ 都成立。在我们的情形下，可以省略这些假设。

现在定义

$$K := 2k_{\max}+1, \quad k := 2k_{\min}+1, \tag{3.17}$$
$$\text{where } k_{\max} = \max_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} k_{\mathsf{e}}, \quad k_{\min} = \min_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} k_{\mathsf{e}}.$$

我们假设

$h_{\mathsf{e}}\colon [0,T]\times\Omega\times[0,\ell_{\mathsf{e}}]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 是局部利普希茨连续的

in the fourth variable, uniformly with respect to the first 3 variables, (3.18)

$$|h_{\mathsf{e}}(t,\omega,x,\eta)|\le c(1+|\eta|)^{\frac{k}{K}} \text{ for all } (t,\omega,x,\eta)\in[0,T]\times\Omega\times[0,\ell_{\mathsf{e}}]\times\mathbb{R}. \quad (3.19)$$

我们进一步假设函数 h_{e} 是联合可测且适应的，具体而言，对于每个 e 和 $t\in[0,T]$，$h_{\mathsf{e}}(t,\cdot)$ 是 $\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{B}_{[0,\ell_{\mathsf{e}}]}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$-可测的，其中 $\mathscr{B}_{[0,\ell_{\mathsf{e}}]}$ 和 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 分别表示 $[0,\ell_{\mathsf{e}}]$ 和 $\mathbb{R}$ 上博雷尔集的 σ-代数。

现在我们将系统 (3.15) 改写为抽象随机柯西问题的形式，参见 [15, p. 29]。

$$\begin{cases} dX(t)=[AX(t)+F(t,X(t))+\widetilde{F}(t,X(t))]dt+G(t,X(t))dW(t)\\ X(0)=\xi. \end{cases} \quad (\mathrm{SCPn})$$

算子 $(A,\ D(A))$ 对某个较大的 $p\in[2,\infty)$ 是 $(A_p,\ D(A_p))$，其中 p 将在后文选取。因此，根据命题 2.3，A 是巴拿赫空间 E_p 上强连续解析半群的生成元，并且 E_p 是 2 型 UMD 空间，参见[1,第 6] 节。

函数 $F\colon [0,T]\times\Omega\times E^c\to E^c$ 定义为

$$F(t,\omega,u):=(f_{\mathsf{e}}(t,\omega,\cdot,u_{\mathsf{e}}(\cdot)))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}},\quad t\in[0,T],\ \omega\in\Omega,\ u=(u_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\in E^c. \quad (3.20)$$

Let

$$\begin{aligned} \widetilde{F}&\colon \prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}C^1[0,\ell_{\mathsf{e}}]\to E_p,\quad p>1,\\ \widetilde{F}u&:=(d_{\mathsf{e}}\cdot u'_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

为了定义算子 G，我们参照 [15, 第 29–30 页的论证], ，但有一点需要改变论证方式，因为在 (3.13) 中我们只有（连续）嵌入，而没有同构。我们首先定义乘法算子$\Gamma\colon [0,T]\times\Omega\times E^c\to\mathcal{L}(E_2)$ 如下

$$\Gamma(t,\omega,u)y:=\operatorname{diag}(h_{\mathsf{e}}(t,\omega,\cdot,u_{\mathsf{e}}(\cdot)))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\cdot y,\quad u\in E^c,\ y\in E_2. \quad (3.22)$$

由于关于 h_{e} 的假设，Γ 显然映射到 $\mathcal{L}(E_2)$。

令 $(A_2, D(A_2))$ 为 E_2,上的生成元，见命题 2.3，并取 $\kappa_G\in(\frac14,\frac12)$。由 (3.13) 可知，存在一个连续嵌入

$$\imath\colon E_2^{\kappa_G}\to\left(\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}H_0^{2\kappa_G}(0,\ell_{\mathsf{e}})\right)\times\mathbb{R}^n=:H_1.$$

利用 (3.14) 和 (3.9)，我们得到，对于任意的 $p\ge2$，存在一个连续嵌入

$$\jmath\colon H_1\to E_p.$$

令 $\nu>0$ 为任意值，现在定义 G 为

$$(\nu-A_p)^{-\kappa_G}G(t,\omega,u)y:=\jmath\imath(\nu-A_2)^{-\kappa_G}\Gamma(t,\omega,u)y,\quad u\in E^c,\ y\in E_2. \quad (3.23)$$

引理 3.13。

1. 设 $p > 1$ 任意。则由 (3.21) 定义的映射可扩展为一个从 E^c 到 E_p 的 $-\frac{1}{2}$ ~线性连续算子，我们也称之为 F。

2. 令 $p \geq 2$ 和 $\kappa_G \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 为任意元素。式 *(3.23)* 中定义的算子 G 将 $[0,T] \times \Omega \times E^c$ 映射到 $\gamma(E_2, E_p^{-\kappa_G})$。

证明。 1. 令 $p > 1$ 为任意元素，并定义 $q := (1 - \frac{1}{p})^{-1}$。按照引理 [15, 4.6.1] 的证明中的相同步骤，我们得到存在一个从 F 出发的连续延拓 ~

$$\widetilde{F}_1 \colon E^c \to \left(\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} W_0^{1,q}(0, \ell_{\mathsf{e}}) \right)^* .$$

由 [23, 定理 3.1.4] ，我们有

$$\left(E_q^{\frac{1}{2}} \right)^* \cong E_p^{-\frac{1}{2}}.$$

由 (3.13)

$$E_q^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow \left(\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} W_0^{1,q}(0, \ell_{\mathsf{e}}) \right) \times \mathbb{R}^n.$$

成立。因此存在一个连续嵌入

$$\imath_p \colon \left(\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} W_0^{1,q}(0, \ell_{\mathsf{e}}) \right)^* \times \mathbb{R}^n \to \left(E_q^{\frac{1}{2}} \right)^* \cong E_p^{-\frac{1}{2}}.$$

综合以上所有事实，我们得到

$$\imath_p \widetilde{F}_1 \colon E^c \to E_p^{-\frac{1}{2}}$$

~是 F 的连续线性延拓。

2. 利用 [24, 引理 2.1(4)], ，以与 [24, 推论 2.2]) 类似的方式可得 $J \in \gamma(H_1, E_p)$，因为 $2\kappa_G > \frac{1}{2}$ 成立。因此，根据 G 的定义以及 γ-辐射算子的理想性质，映射 G 的取值属于 $\gamma(E_2, E_p^{-\kappa_G})$。□

驱动噪声过程 W 定义为

$$W(t) = (w_{\mathsf{e}}(t, \cdot))_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}} \tag{3.24}$$

因此 $(W(t))_{t \in [0,T]}$ 是一个柱状维纳过程，定义在希尔伯特空间 E_2 上，定义于 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$，并相对于滤过 $\mathbb{F}$。

最后，令

$$\xi := u_0.$$

回顾一下，(SCPn) 的温和解是以下积分方程的解

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\left(F(s,X(s)) + \widetilde{F}(s,X(s))\right) ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)G(s,X(s))\, dW(s) \\ &=: S(t)\xi + S * F(\cdot,X(\cdot))(t) + S * \widetilde{F}(\cdot,X(\cdot))(t) + S \diamond G(\cdot,X(\cdot))(t) \end{aligned} \tag{3.25}$$

其中

$$S * f(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds$$

表示“通常的”卷积，而

$$S \diamond g(t) = \int_0^t S(t-s)g(s)\, dW(s)$$

表示关于 W 的随机卷积，且 $(S(t))_{t\geq 0}$ 表示由 $(A, D(A))$ 生成的强连续半群。我们还默认假设 (3.25) 右端的所有项都有定义。

为陈述关于系统 (SCPn) 的结果，对于固定的 $T > 0$ 和 $q \geq 1$，我们定义与 $V_{T,q}$（见 (3.4)）类似的

$$\widetilde{V}_{T,q} := L^q\left(\Omega; C((0,T]; B) \cap L^\infty(0,T;B)\right)$$

它是一个赋范为

$$\|u\|^q_{\widetilde{V}_{T,q}} := \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^q_B, \quad u \in \widetilde{V}_{T,q}.$$

定理 3.14. 设 F、F、G 和 W 分别如 (3.20)、(3.21)、(3.23) 和 (3.24) 中所定义。任取 $q > 4$。则对每个 $\xi \in L^q(\Omega, \mathscr{F}_0, \mathbb{P}; E^c)$，方程 (SCPn) 在 $V_{T,q}$ 中存在唯一的全局温和解。

证明。利用假设 $q > 4$，我们可以选取 $2 \leq p < +\infty$, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ 和 $\kappa_G \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，使得

$$\theta > \frac{1}{2p} \text{ and } 0 < \theta + \kappa_G < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}. \tag{3.26}$$

首先，我们将应用定理 3.4，并证明存在唯一的全局温和解

$$V^c_{T,q} := L^q\left(\Omega; C((0,T]; E^c) \cap L^\infty(0,T;E^c)\right).$$

为此，我们必须证明，采用以下设定时满足假设 3.2：$E = E_p$, $H = E_2$, $Z = E^c$, $A = A_p$，由 (3.20)、(3.21)、(3.23) 和 (3.24) 定义的算子，适当的 $\kappa_{\widetilde{F}}$，以及在 (3.26) 中选取的常数 p、θ 和 κ_G。

(a) 假设 (1) 得以满足，是因为 A_p 在 E_p 上具有生成元性质（见命题 2.3），且任意具有 $p \in [2,\infty)$ 的 L^p-空间都是 2 型。(b) 假设 (2) 得以满足，因为 (3.26) 成立，因此我们可以使用推论 3.10。(c) 假设 (3) 得以满足，因为命题 3.6。

(d) 为了证明假设 (4) 和 (5)，我们可以按照证明 [15, Thm. 4.7] 的相同方法进行，从而得到 (4) 在 $N = K$ 下成立，而 (5) 在 K 和 k（定义见 (3.17)）下成立。

(e) 为验证假设 (6)，我们参考引理 3.13。由此可得 $F\colon E^c \to E^{-\kappa_{\tilde{F}}}$，其中 $\kappa_{\tilde{F}} = \frac{1}{2}$。由于 $\tilde{F}$ 是一个连续线性算子，该陈述的其余部分也随之成立。

(f) 为验证假设 (7)，我们可以稍作修改，模仿 [15, 定理 4.7] 的证明。首先注意，根据引理 3.13，G 的取值属于 $\gamma(E_2, E_p^{-\kappa_G})$，其中 κ_G 取为上文所选的值。我们固定 $u, v \in E^c$，并令

$$R \coloneqq \max\{\|u\|_{E^c}, \|v\|_{E^c}\}.$$

此外，我们将 (3.22) 中的矩阵记为

$$\mathcal{M}_\Gamma(t,\omega,u) \coloneqq \operatorname{diag}\left(h_{\mathsf{e}}(t,\omega,\cdot,u_{\mathsf{e}}(\cdot))\right)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}, \quad \text{for } u \in E^c.$$

对于 $R > 0$，令

$$L_h(R) \coloneqq \max_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} L_{h_{\mathsf{e}}}(R),$$

其中，正的常数 $L_{h_{\mathsf{e}}}(R)$ 是函数 h_{e} 在半径为 R 的球上的利普希茨常数，见 (3.18)。根据 γ-辐射算子的右理想性质以及 (3.23)，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|(-A_p)^{-\kappa_G}\left(G(t,\omega,u) - G(t,\omega,v)\right)\right\|_{\gamma(E_2,E_p)} \\
&\le \left\|\jmath\imath(-A_2)^{-\kappa_G}\right\|_{\gamma(E_2,E_p^{-\kappa_G})} \cdot \|\Gamma(t,\omega,u) - \Gamma(t,\omega,v)\|_{\mathcal{L}(E_2)} \\
&\le \left\|\jmath\imath(-A_2)^{-\kappa_G}\right\|_{\gamma(E_2,E_p^{-\kappa_G})} \cdot \|\mathcal{M}_\Gamma(t,\omega,u) - \mathcal{M}_\Gamma(t,\omega,v)\|_{L^\infty(\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}[0,\ell_{\mathsf{e}}],\mathbb{R}^m)} \\
&\preceq \left\|\jmath\imath(-A_2)^{-\kappa_G}\right\|_{\gamma(E_2,E_p^{-\kappa_G})} \cdot L_h(R) \cdot \|u - v\|_{E^c}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 $G\colon [0,T]\times E^c \to \gamma(E_2, E_p^{-\kappa_G})$ 是局部 Lipschitz 连续的。

利用关于函数 h_{e} 的假设 (3.19)，并进行与上述类似的计算，我们得到 G 作为映射$[0,T]\times E^c \to \gamma(E_2, E_p^{-\kappa_G})$，具有假设 (7) 所要求的增长性质。

因此，我们可以对具有性质 (3.26) 的 $\kappa_{\tilde{F}} = \frac{1}{2}$、$\theta$ 和 κ_G 应用定理 3.4，从而得到 (SCPn) 在 $V_{T,q}^c$ 中存在唯一的全局温和解。

为证明关于 $V_{T,q}$ 的结论，回顾 (3.25) 可知，$V_{T,q}^c$ 中的解满足以下隐式方程：

$$X(t) = S(t)\xi + S * F(\cdot, X(\cdot))(t) + S * \widetilde{F}(X(\cdot))(t) + S \diamond G(\cdot, X(\cdot))(t), \tag{3.27}$$

其中 S 表示由 A_p 在 E_p 上生成的半群。我们只需证明，对于几乎所有 $\omega \in \Omega$，轨道

$$X(\cdot) \in C((0,T];B) \cap L^\infty(0,T;B) \tag{3.28}$$

成立。于是，由于 E^c 和 B 上的范数一致，且 $X \in V_{T,q}^c$成立，$X \in \mathcal{V}_{T,q}$ 也成立。利用命题 3.9、假设 3.2 以及来自 [24], 的技术，我们可以按照证明 [15, 定理 4.10] 的相同方式，通过分别证明 (3.27) 右端的四项都满足该结论，从而证明 (3.28)。□

注意，在上述定理中，对于来自 E^c 的初值，我们得到位于（较小空间） B中的轨道。

注 3.15. 若定理 *3.14* 中的初始条件满足 $\xi \in L^q(\Omega\ \mathscr{F}_0, \mathbb{P}; B)$，对 $q > 4$成立，则全局温和解甚至属于 $L^q(\Omega; C([0,T]; B))$，而非$\widetilde{V}_{T,q}$。这是因为根据命题 *3.8*， A_p 在 B中的部分算子在 B上生成一个强连续半群。

在下述定理中，我们将给出关于 (SCPn) 温和解的 H¨older 正则性的一个结果。

定理 3.16. 任取 $q > 4$，设 λ、$\eta > 0$ 和 $p \geq 2$ 满足 $\lambda + \eta > \frac{1}{2p}$。我们假设 $\xi \in L^{Kq}(\Omega; E_p^{\lambda+\eta})$，其中 K 定义于 (3.17)。若不等式

$$\lambda + \eta < \frac{1}{4} - \frac{1}{q} \tag{3.29}$$

成立，则定理 *3.14* 中的温和解 X *of* (SCPn) 满足

$$X \in L^q(\Omega; C^\lambda([0,T], E_p^\eta)).$$

证明。 利用连续嵌入 (3.9)，我们有

$$\xi \in L^{Kq}(\Omega; B)$$

成立。由于 $Kq > 4$，根据注 3.15，存在一个全局温和解

$$X \in L^{Kq}(\Omega; C([0,T], B)). \tag{3.30}$$

该解满足以下隐式方程（见 (3.25)）：

$$X(t) = S(t)\xi + S * F(\cdot, X(\cdot))(t) + S * \widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))(t) + S \diamond G(\cdot, X(\cdot))(t), \tag{3.31}$$

其中， S 表示由 A_p 在 E_p 上生成的半群， $*$ 表示通常的卷积， $\diamond$ 表示关于 $W.$ 的随机卷积。我们将利用 (3.31) 中的三角不等式估计 X 的 $L^q(\Omega; C^\lambda([0,T], E_p^\eta))$-范数。

对于第一项，我们以与证明 [14, 定理 3.14] 中相同的方式得到

$$\mathbb{E}\|S(\cdot)\xi\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)} \leq c \cdot \mathbb{E}\|(-A_p)^{\lambda+\eta}\xi\|^q_{E_p} < \infty \tag{3.32}$$

根据假设。

为了估计第二项的 q 次幂

$$\mathbb{E}\|S * F(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)}$$

我们选择 $\theta > \frac{1}{2p}$ 使得

$$\lambda + \eta + \theta < 1 - \frac{1}{q}.$$

使用 [24, 引理 3.6]，并将其中的 θ、 $\alpha = 1$和 q 分别替换为 p，可得存在常数 $C \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|S * F(\cdot, X(\cdot))\|_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)} \leq CT^\varepsilon \|F(\cdot, X(\cdot))\|_{L^q(0,T;E_p^{-\theta})}. \tag{3.33}$$

我们需要估计 (3.33) 右端的 q 次幂的期望。由推论 3.10 可得

$$E^c \hookrightarrow E_p \hookrightarrow E_p^{-\theta},$$

由于 $\theta > \frac{1}{2p}$ 成立，且 $(\omega' - A_p)^{-\theta}$ 对任意 $\omega' > 0$ 都是 $E_p^{-\theta}$ 与 E_p 之间的同构。利用这一点以及假设 3.2(5) 和 K （由定理 3.14 的证明可知其成立），我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|F(\cdot, X(\cdot))\|^q_{L^q(0,T;E_p^{-\theta})} &= \mathbb{E}\int_0^T \|F(s, X(s))\|^q_{E_p^{-\theta}}\, ds \\ &\lesssim \mathbb{E}\int_0^T \|F(s, X(s))\|^q_{E^c}\, ds \\ &\lesssim \mathbb{E}\int_0^T (1 + \|X(s)\|^{Kq}_{E^c})\, ds \\ &\lesssim 1 + \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|^{Kq}_B,\end{aligned}$$

其中，$\lesssim$ 表示左侧表达式小于或等于右侧表达式乘以某个常数。在最后一个不等式中，我们可以写成 $X(t)$ 的 B-范数，因为根据 (3.30)，有 $X(t) \in B$，并且在 B 上，E^c-范数与 B-范数一致，见 (3.7)。

这意味着，对于每个 $T > 0$，存在 $C_T > 0$，使得

$$\left(\mathbb{E}\|S * F(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)}\right)^{\frac{1}{q}} \le C_T \cdot \left(1 + \|X(t)\|^K_{L^{Kq}(\Omega;C([0,T],B))}\right), \tag{3.34}$$

右侧由 (3.30) 可知是有限的。

为了估计第三项的 q 次方

$$\mathbb{E}\|S * \widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)}$$

我们利用假设中的 $\frac{1}{2} > \frac{1}{2p}$ 以及

$$\lambda + \eta + \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{q}$$

成立。应用引理 3.6] ，其中用 $\theta = \frac{1}{2}$、$\alpha = 1$ 和 q 替代 p，可得存在常数 $C \ge 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$\|S * \widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))\|_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)} \le CT^\varepsilon \|\widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))\|_{L^q(0,T;E_p^{-\frac{1}{2}})}.$$

根据定理 3.14 的证明，我们将使用假设 3.2(6) 在$\kappa_{\widetilde{F}} = \frac{1}{2}$ 下成立这一事实。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))\|^q_{L^q(0,T;E_p^{-\frac{1}{2}})} &= \mathbb{E}\int_0^T \|\widetilde{F}(s, X(s))\|^q_{E_p^{-\frac{1}{2}}}\, ds \\ &\lesssim \mathbb{E}\int_0^T (1 + \|X(s)\|^q_{E^c})\, ds \\ &\lesssim 1 + \mathbb{E}\|X(t)\|^q_{C([0,T],B))},\end{aligned}$$

这里我们再次使用了 (3.30)。这意味着，对于每个 $T > 0$，都存在$C'_T > 0$ 使得

$$\left(\mathbb{E}\|S * \widetilde{F}(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)}\right)^{\frac{1}{q}} \le C'_T \cdot \left(1 + \|X(t)\|_{L^{Kq}(\Omega;C([0,T],B))}\right)^K, \tag{3.35}$$

且由 (3.30) 可知，右端有限。

为了估计 (3.31) 中的随机卷积项，我们首先固定 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$，使得

$$\lambda + \eta + \frac{1}{4} < \alpha - \frac{1}{q}$$

成立。现在我们选择 $\kappa_G \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，使得

$$\lambda + \eta + \kappa_G < \alpha - \frac{1}{q}$$

得到满足。

接下来，我们采用与证明 [14, 定理 3.14] 类似的方法。利用定理 3.14 的证明可知，假设 3.2(7) 成立，因此得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|S \diamond G(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)} &\le T^{\varepsilon q}\left(\int_0^T t^{-2\alpha}\,dt\right)^{\frac{q}{2}} \mathbb{E}\int_0^T \|G(t,X(t))\|^q_{\gamma(E_2,E_p^{-\kappa_G})}\,dt \\
&\le T^{(\frac{1}{2}-\alpha+\varepsilon)q}(c')^q \cdot \mathbb{E}\int_0^T (1+\|X(t)\|_{E^c})^{\frac{k}{K}q}\,dt \\
&\le T^{(\frac{1}{2}-\alpha+\varepsilon)q}(c')^q \cdot \mathbb{E}\int_0^T (1+\|X(t)\|_B)^q\,dt \\
&\lesssim T^{(\frac{1}{2}-\alpha+\varepsilon)q+1}(c')^q \cdot \left(1+\mathbb{E}\|X(t)\|^q_{C([0,T],B)}\right),
\end{aligned}$$

其中我们用到了由 (3.17) 可知，$\frac{k}{K} \le 1$ 上的 E^c-范数和 B-范数在 B 上一致。因此，对于每个 $T > 0$，都存在常数 $C_T'' > 0$，使得

$$\left(\mathbb{E}\,\|S \diamond G(\cdot, X(\cdot))\|^q_{C^\lambda([0,T],E_p^\eta)}\right)^{\frac{1}{q}} \le C_T'' \cdot \left(1+\|X(t)\|_{L^{Kq}(\Omega;C([0,T],B))}\right)^K < +\infty. \tag{3.36}$$

综上，由 (3.32)、(3.34)、(3.35) 和 (3.36)，我们得到

$$X \in L^q(\Omega; C^\lambda([0,T], E_p^\eta))$$

成立，因此证明完成。 □

注 3.17. 例如，对于经典 *FitzHugh-Nagumo* 问题（例如参见 *[5]*）中的函数，我们关于多项式 f_{e} 的假设是满足的

$$f_{\mathsf{e}}(\eta) \coloneqq \eta(\eta-1)(a_{\mathsf{e}}-\eta), \quad \mathsf{e} \in \mathsf{E} \tag{3.37}$$

其中 $a_{\mathsf{e}} \in (0,1)$，*Allen–Cahn* 型非线性项也满足

$$f_{\mathsf{e}}(\eta) \coloneqq -\eta^3 + \beta_{\mathsf{e}}^2\eta, \quad \mathsf{e} \in \mathsf{E} \tag{3.38}$$

对于某些（正）常数 β_{e}（见 *[14]*）。利用 *[14]* 中的理论，我们根本无法处理型如 (3.37) 的非线性项。即使要处理 (3.38)，也必须以一种巧妙的方式改写问题，见 *[14, (3.33)]*。

这里建立的理论使我们能够直接处理上述情形，甚至处理更一般的非线性项。例如，我们可以在一条边上设定一个 $3th$ 次多项式，在另一条边上设定一个 $5th$ 次多项式，并满足假设 *3.11*。

我们指出，在方程 (1.4a) 中，我们可以在图的边上指定有色噪声，而不是白噪声，见 [14, 第 3.4] 节。也就是说，我们可以设定

$$\begin{cases} \dot{u}_{\mathsf{e}}(t,x) = (c_{\mathsf{e}}u'_{\mathsf{e}})'(t,x) + d_{\mathsf{e}}(x)\cdot u'_{\mathsf{e}}(t,x) \\ \qquad\qquad - p_{\mathsf{e}}(x)u_{\mathsf{e}}(t,x) + f_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x)) \\ \qquad\qquad + h_{\mathsf{e}}(t,x,u_{\mathsf{e}}(t,x))R_{\mathsf{e}}\dfrac{\partial w_{\mathsf{e}}}{\partial t}(t,x), \qquad x\in(0,\ell_{\mathsf{e}}),\ t\in(0,T],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}, \end{cases} \tag{3.39}$$

其中 $R_{\mathsf{e}} \in \gamma(L^2(0,\ell_{\mathsf{e}});\ L^p(0,\ell_{\mathsf{e}}))$。然后我们定义

$$R \coloneqq \operatorname{diag}(R_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \in \gamma(E_2, E_p)$$

其中 $p \geq 2$ 任意。利用这一点，我们可以将算子 $G\colon [0,T]\times E^c \to \gamma(E_2,E_p)$ 定义为

$$G(t,u)y \coloneqq \Gamma(t,u)Ry, \quad y\in E_2,$$

其中算子 $\Gamma\colon [0,T]\times E^c \to \mathcal{L}(E_2)$ 在 (3.22) 中定义。容易看出，G 满足假设 3.2(7)，其中 $\kappa_G = 0$。

若将 (1.4a) 替换为 (3.39)，定理 3.14 仍按原述成立；也就是说，对于 $q > 4$，但可以使用更简单的希尔伯特空间方法；也就是说，在证明中可以令 $p = 2$。然而，在有色噪声情形下，定理 3.14 对 $q > 2$ 也成立。但这只能通过在证明中选取足够大的 $p > 2$ 来证明，因此在这种情形下，巴拿赫空间论证至关重要。

在定理 3.16 中，若取 $p = 2$（希尔伯特空间）和 $q > 4$，则对于 $\lambda + \eta > \frac{1}{4}$，以下结论成立：

$$\lambda + \eta < \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \tag{3.40}$$

用 (3.40) 代替 (3.29)。在这种情况下，R 将是一个希尔伯特–施密特算子，因此驱动过程的协方差算子是迹类的。不过，假设用 (3.40) 代替 (3.29)，定理的结论对于 $q > 2$ 也仍然成立，但仅当巴拿赫空间 E_p 满足 p 足够大，使得 $\lambda + \eta > \frac{1}{2p}$ 时才成立。

参考文献

[1] F. Albiac 和 N. J. Kalton，巴拿赫空间理论专题，数学研究生教材第233卷，施普林格，[Cham], 第2版，2016年。Gilles Godefory 作序。[2] W. Arendt，半群与演化方程：函数演算、正则性与核估计，载于《演化方程》第I卷，Handb. Differ. Equ.，北荷兰，阿姆斯特丹，2004年，第1–85页。[3] W. Arendt、C. J. K. Batty、M. Hieber 和 F. Neubrander，向量值拉普拉斯变换与柯西问题，数学专著第96卷，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，第2版，2011年。[4] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment，量子图引言，数学调查与专著第186卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013年。[5] S. Bonaccorsi、C. Marinelli 和 G. Ziglio，带脉冲噪声网络上的随机 *FitzHugh–Nagumo* 方程，Electron. J. Probab.，13（2008年），第49号，第1362–1379页。[6] S. Bonaccorsi 和 G. Ziglio，具有脉冲噪声的空间扩展神经网络中均方概周期解的存在性与稳定性，Random Oper. Stoch. Equ.，22（2014年），第17–29页。[7] S. Cerrai，具有乘性噪声和非利普希茨反应项的随机反应扩散系统，Probab. Theory Related Fields，125（2003年），第271–304页。

[8] F. Cordoni 和 L. Di Persio，具有动态随机边界条件的网络上的高斯估计，Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.，20（2017年），第1750001号，23页。[9] ———, 具有动态时滞边界条件的网络上的随机反应扩散方程，J. Math. Anal. Appl.，451（2017年），第583–603页。[10] L. Di Persio 和 G. Ziglio，具有最优控制应用的网络上的高斯估计，Netw. Heterog. Media，6（2011年），第279–296页。[11] K.-J. Engel 和 R. Nagel，线性演化方程的单参数半群，数学研究生教材第194卷，施普林格出版社，纽约，2000年。S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 亦有贡献。[12] M. Haase，扇形算子的函数演算，Operator Theory: Ad- vances and Applications第169卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2006年。[13] M. Kov´acs 和 E. Sikolya，对“具有乘性噪声的网络上的随机Allen-Cahn方程”的勘误 /electron. j. qual. theory differ. equ. 2021，第7号，第1–24/, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.，（2021年），论文第52号，4页。[14] ———, 具有乘性噪声的网络上的随机Allen-Cahn方程，Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.，（2021年），论文第7号，第1–24页。[15] ———, 网络上的随机反应扩散方程，J. Evol. Equ.，21（2021年），第4213– 4260页。[16] M. Kunze 和 J. van Neerven，随机反应扩散方程对系数的连续依赖性及整体存在性，J. Differential Equations，253（2012年），第1036– 1068页。[17] ———, 随机反应扩散方程对系数的连续依赖性及整体存在性。 https://arxiv.org/abs/1104.4258，2019年。[18] G. A. Mu˜noz、Y. Sarantopoulos 和 A. Tonge，实巴拿赫空间的复化、多项式和多线性映射，Studia Math.，134（1999年），第1–33页。[19] D. Mugnolo，网络上热方程的高斯估计，Netw. Heterog. Media，2（2007年），第55–79页。[20] D. Mugnolo 和 S. Romanelli，网络方程的动态及广义Wentzell节点条件，Math. Methods Appl. Sci.，30（2007年），第681–706页。[21] E.M. Ouhabaz，区域上热方程的分析，London Mathematical Society Mono- graphs Series 30，普林斯顿大学出版社，2004年。[22] H. Triebel，插值理论、函数空间、微分算子，North- Holland Mathematical Library第18卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹-纽约，1978年。[23] J. van Neerven，线性算子半群的伴随算子，数学讲义丛书第1529卷，施普林格出版社，柏林，1992年。[24] J. M. A. M. van Neerven、M. C. Veraar 和 L. Weis，UMD 巴拿赫空间中的随机演化方程，J. Funct. Anal.，255（2008年），第940–993页。

匈牙利布达佩斯，厄特沃什·罗兰大学应用分析与计算数学系电子邮件地址：
eszter.sikolya@ttk.elte.hu