arXiv:2303.01270v1 [math.PR] 2 Mar 2023

关于 (L,κ)-惰性马尔可夫链的谱半径

Li Qian 和 Zhenyao Sun

Abstract. 我们考虑对状态空间为 S 的不可约马尔可夫转移概率 P 进行 (L,κ)-惰性操作，其中 $L\subset S$ 且 $\kappa\in[0,1)$。对于每个 $x\in L$ 和 $y\in S$，该 (L,κ)-操作将转移概率 $P(x,y)$（即从 x 到 y 的转移概率）替换为 $\kappa 1_{\{x=y\}}+(1-\kappa)P(x,y)$。我们关注 L 和 κ 如何影响这一新转移概率的谱半径 ρ_κ^L。首先，我们证明 ρ_κ^L 关于 κ 单调不减且连续。接着证明：(1) 若 L 非空且有限，则 P 为 ρ-暂态，当且仅当 $(\rho_\kappa^L)_{\kappa\in[0,1)}$ 的增长呈现相变：存在一个临界值 $\kappa_c(L)\in(0,1)$，使得 $\kappa\mapsto\rho_\kappa^L$ 在 $[0,\kappa_c(L)]$ 上为常数，并在 $[\kappa_c(L),1)$ 上严格递增；(2) 对每个 $\kappa\in(0,1)$，若 $S\setminus L$ 非空且有限，则 $\rho_\kappa^L=\rho_\kappa^S$ 当且仅当 P 不是严格 ρ-常返。

1. Introduction

我们考虑状态空间S为可数无限集的不可约离散时间马尔可夫链。近年来，一些论文研究了定义在 S上的马尔可夫转移概率 P的 κ-惰性版本，其定义为 $\kappa I+(1-\kappa)P$，其中 I是单位矩阵（见[1, 2, 4, 5]）。直观地说，相应的 κ-惰性马尔可夫链是在每一步通过抛掷一枚正面概率为 κ的硬币而延迟原链：若链得到正面，则保持不动；若得到反面，则按照转移概率 P移动。

本文将考虑(L,κ)-惰性，这一概念将 κ-惰性的概念推广为仅在 S的一个子集上延迟马尔可夫链。更准确地说，对于任意 $L\subset S$和 $\kappa\in[0,1)$，我们用 P_κ^L表示转移概率 P的(L,κ)-惰性版本，其定义满足：对于任意 $x,y\in S$，

$$P_\kappa^L(x,y):=\begin{cases}\kappa+(1-\kappa)P(x,x), & \text{if } x\in L \text{ and } x=y;\\ (1-\kappa)P(x,y), & \text{if } x\in L \text{ and } x\neq y;\\ P(x,y), & \text{if } x\notin L.\end{cases}$$

我们称 $P(=P_0^L)$ 为底层转移概率。

我们尤其关注转移概率P_κ^L的谱半径如何受 L和 κ影响。转移概率 P的格林函数 $G(x,y|z)$定义为

$$G(x,y|z):=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}^x(X_n=y)z^n,\quad x,y\in S,z\in\mathbb{R},$$

2020年数学学科分类：60J10，37A30。关键词和短语：惰性马尔可夫链、谱半径、ρ-常返/暂态、相变。1

其中，$(X_n)_{n=0}^{\infty}$ 是在概率 $\mathbb{P}^x$下以 $X_0 = x$为初始值、转移概率为 P 的马尔可夫链。文献 [12, 中的引理 1.7] 证明，若 P 不可约，则格林函数 $G(x, y|\cdot)$的收敛半径与 x 和 y无关。该收敛半径的倒数称为 P 的谱半径（例如参见 [12] ）。文献 [12, 的(1.8)] 指出，

(1) 不可约转移概率的谱半径取值于 $(0, 1]$。

注意，对于 $\kappa \in [0, 1)$，如果 P是不可约的，那么 P_κ^L也是不可约的。

在本文其余部分，我们始终假设底层转移概率P是不可约的，并将 P_κ^L的谱半径记为 ρ_κ^L，其中 $\rho := \rho_0^L$。可以对底层转移概率迭代执行惰性操作。例如，我们将 (L', κ')-惰性版本的 (L, κ)-惰性版本的 P记为 $(P_\kappa^L)_{\kappa'}^{L'}$，并将 $(P_\kappa^L)_{\kappa'}^{L'}$ 的谱半径记为 $(\rho_\kappa^L)_{\kappa'}^{L'}$。

κ-惰性版本的 P 的谱半径 ρ_κ^S 已在 [12, 引理 9.2]中研究：对于 $\kappa \in [0, 1)$，有

$$\rho_\kappa^S = \kappa + (1 - \kappa)\rho. \tag{2}$$

我们的第一个结果涉及一般$L \subset S$下 $\kappa \mapsto \rho_\kappa^L$ 的单调性和连续性。

定理 1.1. 设 $L \subset S$ 和 $\kappa \in [0, 1)$。

(i) ρ_κ^L 关于 κ单调不减。(ii) ρ_κ^L 关于 κ连续。(iii) $\rho = 1 \Leftrightarrow \rho_\kappa^L = 1$，或者等价地说，$\rho < 1 \Leftrightarrow \rho_\kappa^L < 1$。(iv) 若 $L \neq \varnothing$，则 $\lim_{\kappa \uparrow 1} \rho_\kappa^L = 1$。

现在我们引入转移概率的一种分类，这对后续结果至关重要。证明见 [12, 引理 1.7] ，对于所有 x、$y \in S$， $G(x, y|1/\rho)$要么同时 $= \infty$ （或$< \infty$），相应的 P 称为 ρ-常返（或 ρ-暂态）转移概率。这些概念见于 [9] ，并在 [3, 7, 8, 10, 11] 和 [6, 第 3 节2] 中得到研究。在 [12, 第 7.B 节]中可以找到 ρ-常返/ρ-暂态马尔可夫链的具体例子。

定理 1.2。假设 $\rho < 1$。

(i) 如果 $0 < \#L < \infty$ 且 P 是 ρ-暂态的，那么存在唯一的 $\kappa_c(L) \in (0, 1)$，使得

- 对于 $\kappa \in [0, \kappa_c(L))$， $\rho_\kappa^L = \rho$ 且 P_κ^L是 ρ-暂态的；
- 对于 $\kappa \in [\kappa_c(L), 1)$， ρ_κ^L随 κ严格递增，其中 $\rho_{\kappa_c(L)}^L = \rho$，且 P_κ^L是 ρ-常返的。

(ii) 如果 $0 < \#L < \infty$ 且 P 是 ρ-常返的，那么对于每个 $\kappa \in [0, 1)$， ρ_κ^L 随 κ 严格递增，且 P_κ^L是 ρ-常返的。(iii) 如果 $\#(S \setminus L) < \infty$，那么 ρ_κ^L严格递增于 $\kappa \in [0, 1)$。

在本文中，我们将对 ρ-常返转移概率进一步分类，并在下一个结果中使用这种分类。设转移

概率 P 为幂级数:

$$U(x,y|z):=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}^x(\tau^y=n)z^n,\quad x,y\in S,z\in\mathbb{R},$$

其中 $\tau^y:=\inf\{n\geq 1\colon X_n=y\}$。令 $r(U|x,y)$ 为 $U(x,y|\cdot)$ 的收敛半径。（注意， $r(U|x,y)$ 可能依赖于 x,y。）我们将在引理 2.3 中证明，若 P 是 ρ-暂态的，则

$$r(U|x,x)=1/\rho,\forall x\in S. \tag{3}$$

若 P 是 ρ-常返的且 (3) 成立，则称 P 为临界 ρ-常返。若 P 是 ρ-常返的，但 (3) 不成立，则称 P 为严格 ρ-常返。

定理 1.3。假设 $\rho<1$ 和 $0<\#L<\infty$。

(i) 若 P 是 ρ-暂态的，则 $P^L_{\kappa_c(L)}$ 为临界 ρ-常返，其中 $\kappa_c(L)$ 如定理 1.2 (i) 中所给。此外，对于每个 $\kappa\in(\kappa_c(L),1)$， P^L_κ 都是严格 ρ-常返的。(ii) 若 P 是 ρ-常返的，则对于每个 $\kappa\in(0,1)$， P^L_κ 都是严格 ρ-常返的。

对于 $\kappa\in(0,1)$，注意到 $(P^L_\kappa)^{S\setminus L}_\kappa=P^S_\kappa$。因此，由定理 1.1 (i)， $\rho^L_\kappa\leq\rho^S_\kappa$。

定理 1.4. 假设 $\rho<1$, $\#(S\setminus L)>0$ 且 $\kappa\in(0,1)$。

(i) 若 $\#(S\setminus L)<\infty$，则 $\rho^L_\kappa=\rho^S_\kappa$ 当且仅当 P 不是严格 ρ-常返。(ii) 若 P 是严格 ρ-常返的，则 $\rho^L_\kappa<\rho^S_\kappa$。(iii) 若 $\#L<\infty$，则 $\rho^L_\kappa<\rho^S_\kappa$。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出本文中将用到的一些预备结果。定理 1.1 的证明见第 3 节。第 4 节给出定理 1.2 (i)、(ii) 和定理 1.4 (iii) 的证明。第 5 节给出定理 1.3 、定理 1.4 (i) 、 (ii) 和定理 1.2 (iii) 的证明。

致谢。部分研究工作是在第二作者于以色列理工学院担任博士后期间完成的，其博士后职位由以色列高等教育委员会提供的奖学金资助。

作者谨此感谢陈大跃的有益交流。

2. Preliminary

本节将介绍不可约马尔可夫链的一些基本结果。回顾一下，我们曾用记号 $(\mathbb{P}^x)_{x\in S}$, $G(\cdot,\cdot|\cdot)$ $\rho,U(\cdot,\cdot|\cdot)$ 和 $r(U|\cdot,\cdot)$ 分别表示马尔可夫链的概率、格林函数、谱半径、U 函数以及 U 函数的收敛半径，它们对应于 S 上的不可约转移概率 P 。在本文余下部分，我们将用记号 $(\mathbb{P}^{L,\kappa\ x})_{x\in S}, G^L_\kappa(\cdot,\cdot|\cdot)$ $\rho^L_\kappa,U^L_\kappa(\cdot,\cdot|\cdot)$ 和 $r(U^L_\kappa|\cdot,\cdot)$ 表示 P^L_κ 的相应概念，即 P 的 (L,κ)-惰性版本。

2.1. 马尔可夫链。我们首先注意到，对于任意 $x \in S$,

$$r(U|x,x) \geq 1/\rho \tag{4}$$

根据柯西-阿达马公式。因此容易看出， P 是严格 ρ-常返的当且仅当

$$\exists x \in S, r(U|x,x) > 1/\rho. \tag{5}$$

以下引理联系了格林函数、U 函数和谱半径。文献中已有一些结果（例如参见 [12, 引理 1.13] ）。为求完整起见，这里给出它们的证明。

引理 2.1。对于 $x \in S$ 和 $z > 0$,

(i) $U(x,x|z) < 1 \Leftrightarrow G(x,x|z) < \infty$.(ii) 若 $G(x,x|z) < \infty$, 则

$$G(x,x|z) = \frac{1}{1-U(x,x|z)}.$$

(iii) $U(x,x|z) > 1 \Leftrightarrow z > 1/\rho$.

(iv) $1/\rho =$最大值$\{z > 0 : \ U(x,x|z) \leq 1\}$.

证明。对于 $N \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n &= 1 + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)\mathbb{P}^x(X_{n-m} = x)z^n \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{N} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)z^m \sum_{n=m}^{N} \mathbb{P}^x(X_{n-m} = x)z^{n-m} \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{N} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)z^m \sum_{n=0}^{N-m} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n.\end{aligned}$$

注意

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n \geq 1 + \sum_{m=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)z^m \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n. \tag{6}$$

若 $G(x,x|z) < \infty$, 则令 N趋于无穷，我们有 $U(x,x|z) < 1$。在两边令 N趋于无穷

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n \leq 1 + \sum_{m=0}^{N} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)z^m \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n \tag{7}$$

并结合 (6)，得到 (ii)。

现在我们假设 $G(x,x|z) = \infty$。由 (7) 可得

$$\sum_{m=0}^{N} \mathbb{P}^x(\tau^x = m)z^m \geq \frac{\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n - 1}{\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}^x(X_n = x)z^n}.$$

令 $N\to\infty$，可得 $U(x,x|z)\geq 1$。因此，(i) 得证。

对于 (iii) 中的 $\Rightarrow$，由 $U(x,x|\cdot)$ 严格递增可知，只需证明 $U(x,x|1/\rho)\leq 1$。注意到幂级数 $U(x,x|\cdot)$ 的系数非负，由单调收敛定理可得

$$\lim_{z\uparrow 1/\rho} U(x,x|z)=U(x,x|1/\rho).$$

由 (i) 可知，对于 $z<1/\rho$，$U(x,x|z)<1$。因此，$U(x,x|1/\rho)\leq 1$，证毕。

对于 (iii) 中的 $\Leftarrow$，$z>1/\rho$ 意味着 $G(x,x|z)=\infty$，再由 (i) 可进一步推出 $U(x,x|z)\geq 1$。我们只需用矛盾法排除 $U(x,x|z)=1$：若其成立，则对于 $w\in(1/\rho,z)$，有 $U(x,x|w)<1$，这由 (i) 与 $G(x,x|w)<\infty$ 这一事实矛盾。

(iv) 可由 (iii) 直接得出。 □

因此，我们得到关于 ρ-常返和 ρ-暂态的另一个等价条件。

推论 2.2. 对任意 $x\in S$, P，P 是 ρ-常返的，当且仅当 $\Leftrightarrow U(x,x|1/\rho)=1$；并且 P 是 ρ-暂态的，当且仅当 $\Leftrightarrow U(x,x|1/\rho)<1$。

证明。由引理 2.1 (i)，我们只需证明第一个陈述中的 $\Rightarrow$。当 P 是 ρ-常返的时，由引理 2.1 (i) 可知 $U(x,x|1/\rho)\geq 1$。由引理 2.1 (iii) 可得 $U(x,x|1/\rho)\leq 1$。证毕。□

引理 2.3. 若 P 是 ρ-暂态的，则对于每个 $x\in S$，$r(U|x,x)=1/\rho$。

证明。为导出矛盾并结合 (4)，我们假设存在 $x\in S$，使得 $r(U|x,x)>1/\rho$。那么，根据收敛半径内幂级数的连续性以及推论 2.2，存在 $z>1/\rho$，使得 $U(x,x|z)<1$。现在由引理 2.1 (i)，可得 $G(x,x|z)<\infty$，这与 $1/\rho$ 是 $G(x,x|\cdot)$ 的收敛半径这一事实相矛盾。□

2.2. (L,κ)-惰性。由引理 2.1 可知，U 函数是研究谱半径的有效工具。

引理 2.4. 设 $x\in S,\kappa\in[0,1)$ 和 $z\geq 0$。

(i) If $L=\{x\}$, then

$$U_\kappa^L(x,x|z)=\kappa z+(1-\kappa)U(x,x|z).$$

(ii) 若 $x\notin L$, $L\neq\varnothing$ 和 $\kappa z<1$，则

$$U_\kappa^L(x,x|z)=\mathbb{P}^x(\tau^x=1)z+\sum_{k\geq 2,\vec{l}\in\mathcal{T}(k,x)} P(\vec{l})z^k\left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa z}\right)^{\#\vec{l}(L)},$$

其中，对于 $k\geq 2$,

$$\mathcal{T}(k,x):=\{(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k)\in S^{k+1}:\\ x_0=x;x_i\neq x,\forall i=1,\cdots,k-1;x_k=x\},$$

and for $\vec{l}=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k)\in\mathcal{T}(k,x)$,

$$P(\vec{l}):=\prod_{i=0}^{k-1}P(x_i,x_{i+1}),\ \ \#\vec{l}(L):=\#\{i:i=1,\cdots,k-1;x_i\in L\}.$$

(iii) 如果 $x\notin L$、 $L\neq\varnothing$ 和 $\kappa z\geq 1$，那么 $U_\kappa^L(x,x|z)=\infty$.

证明。对于 **(i)**，由下述内容可得:

$$\mathbb{P}_\kappa^{\{x\},x}(\tau^x=n)=\begin{cases}\kappa+(1-\kappa)\mathbb{P}^x(\tau^x=1), & \text{if } n=1;\\ (1-\kappa)\mathbb{P}^x(\tau^x=n), & \text{if } n\geq 2.\end{cases}$$

对于 **(ii)** 和 **(iii)**，注意到 $x\notin L$ 和 $L\neq\varnothing$，我们断言

$$\mathbb{P}_\kappa^{L,x}(\tau^x=n)=\begin{cases}\mathbb{P}^x(\tau^x=1), & \text{if } n=1;\\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\sum_{\vec{l}\in\mathcal{T}(k,x)}P(\vec{l})(1-\kappa)^{\#\vec{l}(L)}(-\kappa)^{n-k}\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}, & \text{if } n\geq 2,\end{cases}\tag{8}$$

其中我们使用了广义二项级数：对于 $k\in\mathbb{Z}^+$ 和任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\binom{\alpha}{k}:=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ \text{in particular}\ \binom{\alpha}{0}=1.$$

下面说明当 $n\geq 2$时的 **(8)**。一个具有转移概率 P_κ^L的马尔可夫链 X_t 可以按如下方式构造: 在每个时刻 $t\in\mathbb{Z}^+$，若 $X_{t-1}\in L$ 和 $\theta_t\leq\kappa$，则取一个 $[0,1]$, 中的独立均匀随机变量 θ_t，然后令 $X_t:=X_{t-1}$，并称马尔可夫链在时刻 t采取了一次惰性步；否则，若 $X_{t-1}\notin L$ 或 $\theta_t>\kappa$, 则根据概率 $\{P(X_{t-1},y):y\in S\}$ 对 X_t 进行抽样，并称该链采取了一次非惰性步。

我们将马尔可夫链 (X_t) 直到时刻 τ^x 的轨迹称为游程。我们将马尔可夫链 X_t 仅由非惰性步构成、直到时刻 τ^x 的轨迹称为非惰性游程。可以观察到，在事件 $\{\tau^x=n\}$ 发生时，游程取值于 $\mathcal{T}(n,x)$，而非惰性游程取值于$\cup_{2\leq k\leq n}\mathcal{T}(k,x)$。

对于给定的 $2\leq k\leq n$ 和 $l\in\mathcal{T}(k,x)$，根据初等组合学，事件 $\{\tau^x=n,l$中可能的游程数量为非惰性游程$\}$ 为 $\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}(-1)^{n-k}$，并且每个游程发生的概率均为 $P(\vec{l})(1-\kappa)^{\#\vec{l}(L)}\kappa^{n-k}$。因此，$\mathbb{P}^x(\tau^x=n,l$为非惰性游程$)=P(\vec{l})(1-\kappa)^{\#\vec{l}(L)}(-\kappa)^{n-k}\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}$。现在**(8)**成立。

根据非负级数的富比尼定理（$\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}(-1)^{n-k}$ 非负），我们有

$$\begin{aligned}U_\kappa^L(x,x|z)&=\mathbb{P}^x(\tau^x=1)z+\sum_{n\geq 2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\vec{l}\in\mathcal{T}(k,x)}P(\vec{l})(1-\kappa)^{\#\vec{l}(L)}(-\kappa)^{n-k}\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}z^n\\&=\mathbb{P}^x(\tau^x=1)z+\sum_{k\geq 2,\vec{l}\in\mathcal{T}(k,x)}P(\vec{l})(1-\kappa)^{\#\vec{l}(L)}z^k\sum_{n\geq k}\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}(-\kappa z)^{n-k}.\end{aligned}$$

对于 $\kappa z<1$，根据广义二项式定理，我们有

$$\sum_{n\geq k}\binom{-\#\vec{l}(L)}{n-k}(-\kappa z)^{n-k}=(1-\kappa z)^{-\#\vec{l}(L)}.$$

现在我们得到了（ii）。

若 $\kappa z\geq 1$，则由 $L\neq\varnothing$ 和不可约性可知，存在 $k_0\geq 2$ 和 $\vec{l_0}\in\mathcal{T}(k_0,x)$，使得 $P(\vec{l_0})>0$ 且 $\#\vec{l_0}(L)>0$。由于 $\kappa<1$ 且 $z>0$，我们有

$$P(\vec{l_0})(1-\kappa)^{\#\vec{l_0}(L)}z^{k_0}\sum_{n\geq k_0}\binom{-\#\vec{l}_0(L)}{n-k_0}(-\kappa z)^{n-k_0}=\infty.$$

因此我们得到了（iii）。 □

推论 2.5. 若 $L=\{x\}$，则对于每个 $\kappa\in[0,1)$，$r(U_\kappa^L|x,x)=r(U|x,x)$。

当 $L=S$ 时，我们再陈述两个结果。

引理 2.6（[12], 引理 9.2）。对于 $\kappa\in[0,1)$，$x\in S$ 和 $z\in[0,1/\rho_\kappa^S)$，

$$G_\kappa^S(x,x|z)=\frac{1}{1-\kappa z}G\left(x,x\middle|\frac{(1-\kappa)z}{1-\kappa z}\right).$$

引理 2.7。对于 $\kappa\in[0,1)$，$x\in S$ 和 $z\in[0,r(U_\kappa^S|x,\ x))$，

$$U_\kappa^S(x,x|z)=(1-\kappa z)U\left(x,x\middle|\frac{(1-\kappa)z}{1-\kappa z}\right)+\kappa z,$$

and

$$1/r(U_\kappa^S|x,x)=\kappa+(1-\kappa)/r(U|x,x).$$

证明。其证明与 [12], 中的引理 9.2类似，注意到由 (8) 可得

$$\mathbb{P}_\kappa^{S,x}(\tau_x=n)=\begin{cases}\kappa+(1-\kappa)\mathbb{P}^x(\tau_x=1), & n=1;\\ \sum_{k=2}^{n}\mathbb{P}^x(\tau_x=k)(-\kappa)^{n-k}(1-\kappa)^k\binom{-k+1}{n-k}, & n\geq 2.\end{cases}$$

□

引理 2.8。对于 $\kappa\in[0,1)$，P 是 ρ-暂态（分别是临界 ρ-常返或严格 ρ-常返），当且仅当 P_κ^S也是如此。

证明。由 (2) 和 (1)，$\rho_\kappa^S>\kappa$，因此 $1-\kappa/\rho_\kappa^S>0$。由单调收敛定理和引理 2.6,

$$\begin{aligned}G_\kappa^S(x,x|1/\rho_\kappa^S)&=\lim_{z\uparrow 1/\rho_\kappa^S}G_\kappa^S(x,x|z)=\lim_{z\uparrow 1/\rho_\kappa^S}\frac{1}{1-\kappa z}G(x,x|\frac{(1-\kappa)z}{1-\kappa z})\\&=\frac{1}{1-\kappa/\rho_\kappa^S}G(x,x|1/\rho).\end{aligned}$$

因此，P 是 ρ-暂态（或 ρ-常返）等价于 P_κ^S 是 ρ-暂态（或 ρ-常返）。

如果 P是临界（或严格）ρ-常返的，那么对于任意 $x \in S$、r（$U|x$、x）$= 1/\rho$（或者由 (5)，存在 x使得 r（$U|x$、x）$> 1/\rho$）。由引理 2.7 和 (2)，r（$U_\kappa^S|x$、x）$= 1/\rho_\kappa^S$（或者 r（$U_\kappa^S|x$、x）$> 1/\rho_\kappa^S$）。反方向的证明相同。至此，证明完成。□

3. Proof of Theorem 1.1

定理 1.1 的证明。(i)。给定 $0 \le \kappa < \kappa' < 1$，我们要证明 $\rho_\kappa^L \le \rho_{\kappa'}^L$。如果 $L = \emptyset$，则显然成立。如果 $L = S$，则由 (1) 和 (2) 可得结论。我们假设 $L \ne S$ and$L \ne \varnothing$，并选取 $x \in S \setminus L$。

我们声称：$\forall z \in [1, 1/\kappa')$，$U_\kappa^L(x, x|z) \le U_{\kappa'}^L(x, x|z)$。事实上，由于 $x \notin L$and $1 > \kappa' z >$$\kappa z$，根据引理 2.4 (ii)，$U_\kappa^L(x, x|z)$ 和 $U_{\kappa'}^L(x, x|z)$ 均可展开。由于 $1 > \kappa' z > \kappa z$，我们有 $\dfrac{1-\kappa}{1-\kappa z} \le \dfrac{1-\kappa'}{1-\kappa' z}$。因此，根据上述展开即可得出该断言。

由引理 2.1 (iii)，我们有 $U_{\kappa'}^L(x, x|1/\rho_{\kappa'}^L) \le 1$。于是，当 $x \notin L$and $L \ne \varnothing$时，由引理 2.4 (iii)，我们有$1/\rho_{\kappa'}^L < 1/\kappa'$。因此，根据上述断言，$U_\kappa^L(x, x|1/\rho_{\kappa'}^L) \le$$U_{\kappa'}^L(x, x|1/\rho_{\kappa'}^L) \le 1$。由引理 2.1 (iii)，$1/\rho_{\kappa'}^L \le 1/\rho_\kappa^L$。

(ii). 首先，我们将证明右连续性。令 $0 \le \kappa < \kappa' < 1$。由定理 1.1 (i)，我们有 $\rho_\kappa^L \le \rho_{\kappa'}^L$。根据夹逼定理，只需证明 (a) $\rho_{\kappa'}^L \le (\rho_\kappa^L)^S_{\kappa_1(\kappa')}$；

(b) $\lim_{\kappa' \downarrow \kappa} (\rho_\kappa^L)^S_{\kappa_1(\kappa')} = \rho_\kappa^L$，

其中 $\kappa_1(\kappa') := (\kappa' - \kappa)/(1-\kappa)$。显然，由 $\lim_{\kappa' \downarrow \kappa} \kappa_1(\kappa') = 0$ 以及 (2) 可得 (b)。注意到 $(P_\kappa^L)^S_{\kappa_1} = (P_\kappa^L)^{S\setminus L}_{\kappa_1}$，再由定理 1.1 (i)，根据 $(\rho_\kappa^L)^S_{\kappa_1} = (\rho_{\kappa'}^L)^{S\setminus L}_{\kappa_1} \ge \rho_{\kappa'}^L$ 可得 (a)。

其次，我们证明左连续性。对于 $0 \le \kappa'' < \kappa < 1$，要证明 $\lim_{\kappa'' \uparrow \kappa} \rho_{\kappa''}^L = \rho_\kappa^L$，由于 $\rho_{\kappa''}^L \le \rho_\kappa^L$，只需证明 $-\kappa_2 + (1+\kappa_2)\rho_\kappa^L \le \rho_{\kappa''}^L$，其中 $\kappa_2 := (\kappa - \kappa'')/(1-\kappa)$。由 (2)，只需证明

$$\rho_\kappa^L \le \frac{\rho_{\kappa''}^L + \kappa_2}{1+\kappa_2} = (\rho_{\kappa''}^L)^S_{\frac{\kappa_2}{1+\kappa_2}},$$

这可由 $(P_{\kappa''}^L)^S_{\frac{\kappa_2}{1+\kappa_2}} = (P_\kappa^L)^{S\setminus L}_{\frac{\kappa_2}{1+\kappa_2}}$和定理 1.1 (i) 推得。

(iii). 若 $\rho = 1$，由定理 1.1 (i)，$\rho_\kappa^L \ge 1$。由 (1)，有 $\rho_\kappa^L \le 1$。于是得出结论。若 $\rho_\kappa^L = 1$，由 (2) 和定理 1.1 (i)，$\kappa + (1-\kappa)\rho = \rho_\kappa^S \ge \rho_\kappa^L = 1$。因此$\rho \ge 1$。由 (1)，结论得证。

(iv). 由于 $L \ne \varnothing$，取 $x \in L$。由定理 1.1 (i) 和 (1)，$\rho_\kappa^{\{x\}} \le \rho_\kappa^L \le 1$。于是根据夹逼定理，只需证明 $\lim_{\kappa \uparrow 1} \rho_\kappa^{\{x\}} = 1$。由 (1)，只需证明 $\forall \epsilon \in (0, 1)$ $\exists K \in [0, 1)$ $\forall \kappa \in (K,$ 1) $1 - \rho_\kappa^{\{x\}} < \epsilon$。由引理 2.1 (iii)，$1 - \rho_\kappa^{\{x\}} < \epsilon$等价于 $U_\kappa^{\{x\}}(x, x|1/(1-\epsilon)) > 1$。由引理 2.4 (i)，$U_\kappa^{\{x\}}(x, x|1/(1-\epsilon)) = \kappa/(1-\epsilon) + (1-\kappa)U(x, x|1/(1-\epsilon))$。由于 $\lim_{\kappa \uparrow 1} U_\kappa^{\{x\}}(x, x|1/(1-\epsilon)) = 1/(1-\epsilon) > 1$，我们可以找到 K，从而得到所需结果。□

4. Proof of Theorem 1.2 (i)、(ii) and Theorem 1.4(iii)

引理 4.1。设 $0 < \#L < \infty$ 和 $0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < 1$，

(i) 如果 $P^L_{\kappa_2}$ 是 ρ-暂态，那么 $\rho=\rho^L_{\kappa_1}=\rho^L_{\kappa_2}$，且 $P^L_{\kappa_1}$ 是 ρ-暂态。因此，如果 $P^L_{\kappa_1}$ 是 ρ-常返，那么 $P^L_{\kappa_2}$ 是 ρ-常返。(ii) 如果 $P^L_{\kappa_1}$ 是 ρ-常返且 $\rho^L_{\kappa_1}<1$，那么 $\rho^L_{\kappa_1}<\rho^L_{\kappa_2}$。

证明。我们首先在 $L=\{x\}$ 的条件下证明 (i)。由于 $P^{\{x\}}_{\kappa_2}$ 是 ρ-暂态的，由 (4)、定理 1.1 (i)、引理 2.3 和推论 2.5，可得

$$r(U|x,x)\geq 1/\rho\geq 1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}\geq 1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}=r(U^{\{x\}}_{\kappa_2}|x,x)=r(U|x,x).$$

于是 $\rho=\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}=\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}$。因此，利用引理 2.1 (iii) 和引理 2.4 (i)，可得

$$1\geq U^{\{x\}}_{\kappa_1}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1})=U^{\{x\}}_{\kappa_1}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2})=\kappa_1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}+(1-\kappa_1)U(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}). \tag{9}$$

由 (1)，$1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}\geq 1$。再由 (9)，$U(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2})\leq 1$。因此，根据引理 2.4 (i) 和推论 2.2，可得

$$U^{\{x\}}_{\kappa_1}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1})\leq \kappa_2/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}+(1-\kappa_2)U(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2})=U^{\{x\}}_{\kappa_2}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2})<1.$$

于是，根据推论 2.2，$P^{\{x\}}_{\kappa_1}$ 也同样是 ρ-暂态的，证毕。

接下来，我们在 $L=\{x\}$ 的条件下证明 (ii)。利用引理 2.4 (i) 两次以及推论 2.2，

$$U^{\{x\}}_{\kappa_2}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1})=\frac{\kappa_2-\kappa_1}{1-\kappa_1}/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}+\frac{1-\kappa_2}{1-\kappa_1}U^{\{x\}}_{\kappa_1}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1})=\frac{\kappa_2-\kappa_1}{1-\kappa_1}/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}+\frac{1-\kappa_2}{1-\kappa_1}.$$

由 $\frac{1-\kappa_2}{1-\kappa_1}\in(0,1)$ 和 $1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}>1$，可知 $U^{\{x\}}_{\kappa_2}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1})>1$。由引理 2.1 (iii)，可知 $1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_1}>1/\rho^{\{x\}}_{\kappa_2}$，这正是所需结果。

最后，我们证明当 $L=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 与 $m\geq 2$ 满足条件时，(i) 和 (ii) 均成立。在这种情况下 $P^L_{\kappa_2}=(\cdots((P^L_{\kappa_1})^{\{x_1\}}_{\kappa})^{\{x_2\}}_{\kappa}\cdots)^{\{x_m\}}_{\kappa}$与 $\kappa=(\kappa_2-\kappa_1)/(1-\kappa_1)$。显然，我们可以通过归纳法得到 (i) 所需的结论。对于 (ii)，根据我们已经证明的结果以及定理 1.1 (i)，有 $\rho^L_{\kappa_1}<(\rho^L_{\kappa_1})^{\{x_1\}}_{\kappa}\leq\rho^L_{\kappa_2}$，这正是所需结果。□

定理 1.2 (i) 的证明。步骤 1。由于唯一性是显然的，我们只需考虑存在性部分。定义 $\kappa_c(L):=\sup\{\kappa\in[0,1):P^L_\kappa$ 是 ρ- 暂态 $\}$。由于 P 是 ρ- 暂态，我们知道 $\kappa_c(L)\in[0,1]$。根据引理 4.1 (i)，若 $\kappa_c(L)>0$ 且 $\kappa\in[0,\kappa_c(L))$，则P^L_κ是 ρ-暂态，且 $\rho=\rho^L_\kappa$；若 $\kappa_c(L)<1$ 且 $\kappa\in(\kappa_c(L),1)$，则 P^L_κ是 ρ-常返。此外，在后一种情形下，由于 $\rho^L_\kappa<1$，根据定理 1.1 (iii) 和引理 4.1 (ii)，我们有 ρ^L_κ 关于 $\kappa\in[\kappa_c(L)$ 严格递增，1)。

步骤 2. 让我们证明 $\kappa_c(L)<1$ 和 $\rho^L_{\kappa_c(L)}=\rho$。为导出矛盾，假设 $\kappa_c(L)=1$。那么根据步骤 1，对于 $\kappa\in[0,1)$，有 $\rho^L_\kappa=\rho$。由于 $\rho<1$，这与定理 1.1 (iv) 矛盾。因此 $\kappa_c(L)<1$。现在根据定理 1.1 (ii) 和步骤 1，我们有$\rho^L_{\kappa_c(L)}=\rho$。

步骤 3. 让我们证明 $P^L_{\kappa_c(L)}$ 是 ρ-常返的，并且当 $L=\{x\}$ 时 $\kappa_c(L)>0$。根据引理 2.4 (i)，

$$U^{\{x\}}_{\kappa}(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa})=\kappa/\rho^{\{x\}}_{\kappa}+(1-\kappa)U(x,x|1/\rho^{\{x\}}_{\kappa}),\quad \kappa\in[0,1). \tag{10}$$

由定理 1.1 (i)、(ii)、推论 2.2 以及单调收敛定理可验证，(10) 的右侧关于 κ 连续。因此，根据步骤 1、2 和

推论 2.2， $P_{\kappa_c}^{\{x\}}(\{x\})$ 是 ρ-常返。因此， $\kappa_c(\{x\}) > 0$，否则就会与 P 是 ρ-暂态这一条件矛盾。

步骤 4. 让我们证明，当 $L = \{x_1, \cdots, x_m\}$ 且 $m \geq 2$时， $\kappa_c(L) > 0$。注意，$P_\kappa^L = (\cdots((P)_\kappa^{\{x_1\}})_\kappa^{\{x_2\}}\cdots)_\kappa^{\{x_m\}}$。根据步骤 1、3 和定理 1.1 (iii)，我们知道，对于任意 $x \in S$，

(11) 如果 Q是定义在 S 上的、谱半径为 < 1的 ρ-暂态不可约转移概率，那么对于某个 $\kappa \in \in(0,1)$， $Q_\kappa^{\{x\}}$也具有这一性质。

现在重复应用这一结论，可以验证，对于某些 κ_1、κ_2、$\cdots$、$\kappa_m \in \in(0,1)$，$(\cdots((P)_{\kappa_1}^{\{x_1\}})_{\kappa_2}^{\{x_2\}}\cdots)_{\kappa_m}^{\{x_m\}}$ 是 ρ-暂态的。根据引理 4.1 (i)，可以验证 $P^{L_{最小值\{\kappa_i:\ i=1,\ \cdots,\ m\}}}$是 ρ-暂态的。于是， $\kappa_c(L) \geq$最小值 $\{\kappa_i:\ i = 1、\cdots、m\} > 0$，如所需。

步骤 5。最后，我们证明当 $L = \{x_1, \cdots, x_m\}$ with$m \geq 2$ 时， $P_{\kappa_c(L)}^L$ 是 ρ-常返的。为导出矛盾，假设 $P_{\kappa_c(L)}^L$ 是 ρ-暂态的。由步骤 2 可知， $\rho_{\kappa_c(L)}^L = \rho < 1$。由步骤 1、4 以及定理 1.1 (iii)，可得 (11) 在将 $\{x\}$ 替换为 L 后仍成立。将其应用于 $P_{\kappa_c(L)}^L$，可知对于某个 $\kappa \in (0,1)$， $(P_{\kappa_c(L)}^L)_\kappa^L$ 是 ρ-暂态的。这与步骤 1 中 $\kappa_c(L)$ 的定义矛盾。证毕。□

定理 1.2 (ii) 的证明。由 $\rho < 1$ 和定理 1.1 (iii)，对每个 $\kappa \in [0,1)$， $\rho_\kappa^L < 1$。由于 P 是 ρ-常返的，根据引理 4.1 (i)，对每个 $\kappa \in [0,1)$， P_κ^L 是 ρ-常返的。现在由引理 4.1 (ii)，对每个 $0 \leq \kappa < \kappa' < 1$， $\rho_\kappa^L < \rho_{\kappa'}^L$。□

定理 1.4 (iii) 的证明。若 $L = \varnothing$，则由 (2) 得 $\rho_\kappa^L = \rho < \rho_\kappa^S$。若 $L \neq \varnothing$ 且 P_κ^L 是 ρ-常返的，则取 $x \in S\setminus L$，由定理 1.2 (ii) 和定理 1.1 (i)， $\rho_\kappa^L < (\rho_\kappa^L)_\kappa^{\{x\}} \leq \rho_\kappa^S$。若 $L \neq \varnothing$ 且 P_κ^L 是 ρ-暂态的，则由引理 4.1 (i) 和 (2)， $\rho_\kappa^L = \rho < \rho_\kappa^S$。□

5. Proof of Theorem 1.3, （i）、（ii） and Theorem 1.2 （iii）

定理 1.3 的证明。步骤 1。假设 P 是 ρ-常返的，下面证明对于每个 $\kappa \in (0,1)$， P_κ^L 都是严格 ρ-常返的。由引理 4.1 (i)， P_κ^L 是 ρ-常返的。假设 P_κ^L 不是严格 ρ-常返的。因此，对于任意固定的 $x \in L$，我们有

$$r(U_\kappa^L|x,x) = 1/\rho_\kappa^L. \tag{12}$$

由于 $\kappa > 0$，存在 $\kappa', \kappa_1 \in (0,\kappa)$ 使得 $((P_\kappa^{L\setminus\{x\}})_{\kappa'}^{\{x\}})_{\kappa_1}^{\{x\}} = P_\kappa^L$。令 $P_{(1)} := (P_\kappa^{L\setminus\{x\}})_{\kappa'}^{\{x\}}$。由于 P 是 ρ-常返的，根据引理 4.1 (i)， $P_{(1)}$ 是 ρ-常返的。记 $\rho_{(1)}$、$U_{(1)}$ 和 $r(U_{(1)}|x, x)$ 分别为 $P_{(1)}$ 的谱半径、U 函数及 U 函数的收敛半径。于是根据 (4)、推论 2.5、(12) 以及定理 1.1 (i)， $1/\rho_{(1)} \leq r(U_{(1)}|x,x) = r(U_\kappa^L|x,x) = 1/\rho_\kappa^L \leq 1/\rho_{(1)}$。因此有 $1/\rho_{(1)} = 1/\rho_\kappa^L$。由于 P_κ^L 是 ρ-常返的且 $(P_{(1)})_{\kappa_1}^{\{x\}} = P_\kappa^L$，根据推论 2.2 和引理 2.4 (i)，

$$1 = U_\kappa^L(x,x|1/\rho_\kappa^L) = (U_{(1)})_{\kappa_1}^{\{x\}}(x,x|1/\rho_\kappa^L) = \kappa_1/\rho_\kappa^L + (1-\kappa_1)U_{(1)}(x,x|1/\rho_\kappa^L)$$

其中，我们用 $(U_{(1)})_{\kappa_1}^{\{x\}}$表示 $P_{(1)}$ 的 $(\{x\},\kappa_1)$-惰性版本的 U 函数。由 $\rho < 1$和定理 1.1 (iii)， $1/\rho_\kappa^L > 1$。结合 $\kappa_1 \in (0,1)$，可得 $1 > U_{(1)}(x,x|1/\rho_\kappa^L) = U_{(1)}(x,x|1/\rho_{(1)})$。现在由推论 2.2， $P_{(1)}$ 是 ρ-暂态的，这与假设矛盾。

步骤 2. 假设 P 是 ρ-暂态的。由定理 1.2 (i), $P^L_{\kappa_c(L)}$ 是 ρ-常返的。将步骤 1 中的 P 替换为 $P^L_{\kappa_c(L)}$，可验证对于 $\kappa \in (\kappa_c(L),1)$, P^L_κ 是严格 ρ-常返的。

步骤 3。现在还需证明，当 P 为 ρ-暂态时，$P^L_{\kappa_c(L)}$ 是临界 ρ-常返的。由于 $P^L_{\kappa_c(L)}$ 是 ρ-常返的（定理 1.2（i）），我们为导出矛盾，假设 $P^L_{\kappa_c(L)}$ 是严格 ρ-常返的。于是根据（5），存在 $x \in S$ 使得

$$r(U^L_{\kappa_c(L)}|x,x) > 1/\rho^L_{\kappa_c(L)}. \tag{13}$$

情形 a)：$P^L_{\kappa_c(L)}(x,x) > 0$。在此情形下，对于每个 $\kappa_2 \in [0, P^L_{\kappa_c(L)}(x,x)]$,，注意到存在转移概率 $\tilde{P}(\kappa_2)$，使得 $(\tilde{P}(\kappa_2))^{\{x\}}_{\kappa_2} = P^L_{\kappa_c(L)}$。分别记 $\tilde{P}(\kappa_2)$ 的谱半径、U 函数和 U 函数的收敛半径为 $\tilde{\rho}(\kappa_2)$ $\tilde{U}(\kappa_2)$˜、 $r(U(\kappa_2)|x,x)$。根据推论 2.5， $r(\tilde{U}(\kappa_2)|x,x) = r(U^L_{\kappa_c(L)}|x,x)$。注意

$$\tilde{P}(\kappa_2) = (\tilde{P}(P^L_{\kappa_c(L)}(x,x)))^{\{x\}}_{\frac{P^L_{\kappa_c(L)}(x,x)-\kappa_2}{1-\kappa_2}}.$$

因此，由定理 1.1 (ii)， $1/\tilde{\rho}(\kappa_2)$ 关于 κ_2 连续。由于 $\tilde{\rho}(0) = \rho^L_{\kappa_c(L)}$ 且 (13)，我们可以选取足够小的某个 $\kappa_2 \in (0, P^L_{\kappa_c(L)}(x,x))$，使得 $1/\tilde{\rho}(\kappa_2) < r(\tilde{U}(\kappa_2)|x,x)$。˜因此，由引理 2.3， $P(\kappa_2)$ 是 ρ-常返的。由于 $\rho < 1$，根据定理 1.1 (iii)， $\tilde{\rho}(\kappa_2) < 1$。然后由引理 4.1 (ii) 和定理 1.2 (i),

$$\tilde{\rho}(\kappa_2) < \rho^L_{\kappa_c(L)} = \rho. \tag{14}$$

˜这导致以下矛盾。注意，对每个 $y \in L$，都有 $P(\kappa_2)(y,y) > 0$（若 $x \neq y$，则 $\tilde{P}(\kappa_2)(y,y) = P^L_{\kappa_c(L)}(y,y) > 0$；若 $x = y$，由于 $\kappa_2 < P^L_{\kappa_c(L)}(x,x)$，˜$P(\kappa_2)(y,y) > 0$ 也成立）。因此，存在 $\kappa_3 \in (0,1)$ 和转移概率 $P_{(2)}$，使得 $(P_{(2)})^L_{\kappa_3} = \tilde{P}(\kappa_2)$。令 $\rho_{(2)}$ 为 $P_{(2)}$ 的谱半径。于是，根据定理 1.1 (i)，我们有

$$\rho_{(2)} \leq \tilde{\rho}(\kappa_2). \tag{15}$$

注意到 $P^L_{\kappa_c(L)} = ((P_{(2)})^L_{\kappa_3})^{\{x\}}_{\kappa_2} = ((P_{(2)})^{\{x\}}_{\kappa_2})^L_{\kappa_3}$。根据定理 1.2 (i)，我们有 $(P_{(2)})^{\{x\}}_{\kappa_2}$是 ρ-暂态的，且其谱半径为 ρ。于是由引理 4.1 (i)，$\rho_{(2)} = \rho$。这与 (14) 和 (15) 一起构成矛盾。

情形 b)：$P^L_{\kappa_c(L)}(x,x) = 0$。固定任意一个 $\kappa \in [0,1)$，并定义 $Q := P^S_\kappa$。由引理 2.8 以及关于 P 和 $P^L_{\kappa_c(L)}$ 的假设， Q 是 ρ- 暂态的，而 $Q^L_{\kappa_c(L)} = (P^L_{\kappa_c(L)})^S_\kappa$ 是严格 ρ-常返的。根据 (2) 和引理 2.8，我们可以验证， $\kappa_c(L)$ 也是定理 1.2 (i) 中相对于底层转移概率 Q 和惰性状态 L 的临界值。现在，由于对于每个 $y \in S$, $Q^L_{\kappa_c(L)}(y,y) > 0$ 都成立，我们可以像情形 a) 中那样进行论证，并得到矛盾。□

定理 1.4 (i) 的证明。由引理 2.8 可知，若 P 是 ρ-暂态或临界 ρ-常返，则 P^S_κ 也如此。注意到 $P^S_\kappa = (P^L_\kappa)^{S\setminus L}_\kappa$。因此， P^S_κ 是 P^L_κ 的 $(S\setminus L,\kappa)$-惰性版本。对于$\kappa \in (0,1)$，若 P^S_κ 是 ρ-暂态或临界 ρ-常返，则由定理 1.3

和定理 1.2 (i)，我们有 $\rho_\kappa^L = \rho_\kappa^S$。若 P_κ^S 是严格 ρ-常返，则由定理 1.3、定理 1.2 (i) 和 (ii)，我们有 $\rho_\kappa^L < \rho_\kappa^S$。□

定理 1.4 (ii) 的证明。由引理 2.8，P_κ^S是严格 ρ-常返。由于 $\#(S \setminus L) > 0$，我们可以选择 $x \in S \setminus L$。由定理 1.1 (i)，$\rho_\kappa^L \le \rho_\kappa^{S\setminus\{x\}}$。由于 $(P_\kappa^{S\setminus\{x\}})_\kappa^{\{x\}} = P_\kappa^S$，根据定理 1.3 以及定理 1.2 (i) 和 (ii)，$\rho_\kappa^{S\setminus\{x\}} < \rho_\kappa^S$。证毕。□

定理 1.2 (iii) 的证明。取 $x \in L$ 和 $0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < 1$。首先假设 $P_{\kappa_1}^L$ 是 ρ-常返的。由 $\rho < 1$ 和定理 1.1 (iii)，我们有 $\rho_{\kappa_1}^L < 1$。由引理 4.1 (ii) 和定理 1.1 (i)，我们有 $\rho_{\kappa_1}^L < (\rho_{\kappa_1}^L)_\kappa^{\{x\}} \le \rho_{\kappa_2}^L$，其中 $\kappa := \frac{\kappa_2-\kappa_1}{1-\kappa_1}$。现在假设 $P_{\kappa_1}^L$ 是 ρ-暂态的。由引理 2.8，$(P_{\kappa_1}^L)_\kappa^S$也是 ρ-暂态的。由于 $(P_{\kappa_1}^L)_\kappa^S = (P_{\kappa_2}^L)_\kappa^{S\setminus L}$，根据 (2)，$(P_{\kappa_2}^L)_\kappa^{S\setminus L}$是 ρ-暂态的，且 $\rho_{\kappa_1}^L < (\rho_{\kappa_1}^L)_\kappa^S = (\rho_{\kappa_2}^L)_\kappa^{S\setminus L}$。由于 $\#(S \setminus L) < \infty$，由引理 4.1 (i)，$(\rho_{\kappa_2}^L)_\kappa^{S\setminus L} = \rho_{\kappa_2}^L$。证毕。□

References

[1] S. Fried，《估计与检验问题中马尔可夫链的 α惰性版本》，Stat. Inference Stoch. Process.（2022年），1–23。[2] J. Hermon，《极大不等式与混合时间》，ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2016年。博士论文——加利福尼亚大学伯克利分校。MR3697614[3] G. Kersting，《关于马尔可夫链 R常返性的一则注记》，Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 35（1976），第4期，355–358。MR407992[4] D. A. Levin 和 Y. Peres，《马尔可夫链与混合时间》，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。MR3726904[5] R. Montenegro 和 P. Tetali，《马尔可夫链混合时间的数学方面》，Found. Trends Theor. Comput. Sci. 1（2006），第3期，x+121。MR2341319[6] E. Nummelin，《一般不可约马尔可夫链与非负算子》，剑桥数学丛书，第83卷，剑桥大学出版社，剑桥，1984年。MR776608[7] W. E. Pruitt，《非负矩阵的特征值》，Ann. Math. Statist. 35（1964），1797–1800。MR168579[8] ———，《 R常返马尔可夫链的强比值极限性质》，Proc. Amer. Math. Soc. 16（1965），196–200。MR174089[9] D. Vere-Jones，《可数马尔可夫链的几何遍历性》，Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 13（1962），7–28。MR141160[10] ———，《非负矩阵的遍历性质 I》，Pacific J. Math. 22（1967），361–386。MR214145[11] ———，《非负矩阵的遍历性质 II》，Pacific J. Math. 26（1968），601–620。MR236745[12] W. Woess，《无限图与群上的随机游走》，剑桥数学丛书，第138卷，剑桥大学出版社，剑桥，2000年。MR1743100

(L. Qian) School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China电子邮箱地址：ql1995@pku.edu.cn

(Z.Sun) School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Bei-jing 100081, China电子邮箱地址：zhenyao.sun@gmail.com