arXiv:2303.01279v1 [physics.optics] 2 Mar 2023

（特邀）双色孤子超原子与分子

O. Melchert[a, b], S. Willms[a, b], I. Babushkin[a, b], U. Morgner[a, b], A. Demircan[a, b]

[a]莱布尼茨汉诺威大学，量子光学研究所，*Welfengarten 1*，汉诺威，*30167*，德国[b]莱布尼茨汉诺威大学，*PhoenixD*卓越集群，*Welfengarten 1A*，汉诺威，*30167*，德国

摘要

我们详细综述了非线性波导中双色孤子分子的物理特性，即由非相干相互作用机制维系在一起的局域光脉冲束缚态。非线性克尔效应使子脉冲相互约束（即俘获），从而使脉冲复合体得以稳定传播。我们特别从束缚机制的角度进行阐述：子脉冲通过交叉相位调制相互作用，并因其引起的折射率变化而在彼此之间形成吸引势阱。具体而言，我们讨论非线性光子学超原子，它们由强俘获脉冲和弱俘获脉冲构成；对于这类超原子，低强度束缚态可通过薛定谔型特征值问题确定。我们还探讨了这类超原子丰富的动力学行为，并表明，增大两个子脉冲的群速度失配会导致类电离的俘获-逃逸转变。我们进一步证明，当两个组成脉冲的振幅相近时，会形成类分子束缚态。我们还表明，z周期性振幅变化使这些脉冲复合体能够与色散波耦合，从而共振发射梳状多频辐射。

关键词：非线性光学、光孤子、双色孤子分子、共振辐射

目录

1 引言 **1**

2 模型与方法 **2**

3 非线性光子学超原子 **6**

3.1 束缚态的稳定传播.83.2 群速度失配导致的俘获-逃逸转变.8

4 双色孤子分子 **9**

4.1 双色孤子对.114.2 梳状多频辐射.13

5 总结与结论 **14**

1. 引言

自上世纪 80 年代以来，人们一直从各种传播情形出发，探讨两个——甚至可能更多——准共传播光脉冲的约束问题。早期研究涉及玻璃光纤中的自约束多模光脉冲 [1], 亮、暗光孤子的非线性配对 [2, 3], 以及双折射光纤中具有不同偏振分量的孤子的稳定性 [4]。标准非线性薛定谔方程（NSE）¨ [5, 6]所支持的自约束，是一个极具代表性的实例。在可积情形下，该方程具有由孤立波构成的局域场脉冲 [7]。考虑两个或更多准群速度匹配脉冲时，由它们的非相干交叉相位调制（XPM）诱导的相互作用共同决定其动力学 [1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11]。例如，在具有单个零色散点的非线性波导中，一个孤子

会形成一道强折射率屏障，位于正常色散区域的准群速度匹配波无法穿越该屏障 [12], ，因此彼此排斥。这一相互作用过程源于一种普遍的波反射机制，最初是在流体动力学中报道的 [13]。在光学中，这一过程称为推扫效应 [14], 、光学事件视界 [15, 16], 或时间反射 [17]。这种相互作用机制能够强效地控制光脉冲 [18, 19, 20], ，并已被证明会在超连续谱产生过程中自然出现 [21, 22, 23]。对于支持脉冲在彼此独立的反常色散区域中实现群速度匹配传播的波导，其相互作用则表现为另一种形式：上述交叉相位调制会产生吸引势，将脉冲束缚在一起，并通过非相干束缚机制形成双色孤子分子 [24]；所得脉冲复合体由两个中心频率相差很大的子脉冲组成。着眼于这些脉冲复合体的频域表示，可以发现孤子实际上能够充当局域俘获势，并具有离散能级谱 [24]。需要强调的是，要实现此类脉冲复合体中子脉冲之间的强吸引相互作用，群速度匹配至关重要 [25]。在加入四阶色散的修正非线性薛定谔方程框架下，这些对象被认定为广义色散克尔孤子这一庞大类别的一部分，并可借助元包络的概念加以表征 [26]。近期，这类脉冲已在锁模激光腔中得到实验验证 [27, 28, 29]。作为对参考文献 [26], 中所述多尺度分析的补充，通过将两个子脉冲均建模为耦合非线性薛定谔方程，可推导出一类特殊的双色孤子对及其元包络的闭式解 [30]。值得指出的是，孤子分子的概念此后已扩展至具有三个中心频率的脉冲复合体 [31], ，近期还扩展至包含 J 个等间隔频率分量的情形 [27, 32]。此外，在 Lugiato-Lefever方程框架下也观察到了具有类似结构的双色孤子微梳态 [33, 34]。其基本方案具有更广泛的适用性，只要求不同光脉冲之间实现准群速度匹配。这可通过不同方式实现，例如 Hasegawa 的早期研究已探讨了多模光脉冲不同分量之间强烈的非相干交叉相位调制相互作用 [1], 。此处我们还想强调，这些脉冲复合体不同于通常的孤子分子；后者可在标准非线性薛定谔方程框架下通过色散工程实现 [35], ，其特征是两个脉冲以固定的时间延迟分隔，并由两者之间的相位关系加以稳定 [36]。

在此，我们回顾双色脉冲复合体丰富的动力学行为。这些复合体由处于反常色散不同区域、群速度匹配的两个子脉冲组成，其频率位置相隔一个巨大的频率间隔。首先，我们将展示能够体现光子元原子的典型传播过程；在极限情况下，脉冲复合体由一个强俘获脉冲（即孤子）和一个弱俘获脉冲组成。随后，我们将讨论两个子脉冲振幅相近的情形，此时它们相互作用所产生的交叉相位调制（XPM）约束作用会形成一个窄带双色孤子分子。最后，我们将说明子脉冲的非定态动力学会导致共振辐射的发射，并展示新生成频率的位置如何取决于振荡孤子分子的 z 周期性振幅和宽度变化。

本文的结构如下。在第 2 节中，我们将讨论用于理论研究双色超原子和孤子分子的传播模型，并详细介绍用于其模拟与分析的数值方法。在第 3 节中，我们将展示孤子作为吸引势阱、容纳束缚态的能力，并探究所得光子元原子对于俘获孤子与俘获态之间群速度失配的稳定性。在第 4 节中，我们将推导一个简化模型，该模型可为构成双色孤子分子的子脉冲给出同时解，并展示这些解包含参考文献 [30]中推导出的双色孤子对。我们通过增大这些脉冲复合体的初始振幅对其进行扰动，从而产生周期性的振幅和宽度振荡，并触发具有复杂结构的共振多频辐射生成；其结构可以通过理论精确预测。第 5 节将以总结作结。

2. 模型与方法

传播模型。 为了研究非线性光子元原子和双色孤子分子的传播动力学，我们考虑如下形式的修正非线性薛定谔方程（NSE）

$$i\partial_z A = \left(\frac{\beta_2}{2}\partial_t^2 - \frac{\beta_4}{24}\partial_t^4\right)A - \gamma|A|^2 A, \tag{1}$$

用于描述复值场 $A \equiv A(z,t)$ 在范围为 T 的周期时间域内的单模传播，边界条件为 $A(z, -T/2) = A(z,T/2)$。方程（1）的线性部分包含高阶色散，其中 $\beta_2 > 0$ （单位为 $\mathrm{fs}^2/\mu\mathrm{m}$）为正值的群速度色散系数，$\beta_4 < 0$ （单位为 $\mathrm{fs}^4/\mu\mathrm{m}$）为负值的四阶色散系数。方程（1）的非线性部分包含正值的标量非线性系数 γ （单位为 $\mathrm{W}^{-1}/\mu\mathrm{m}$）。考虑离散的角频率失谐量 $\Omega \in {}^{2\pi}_{T}\mathbb{Z}$，傅里叶变换对为

$$A_\Omega(z) = \mathsf{F}[A(z,t)] \equiv \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(z,t)\, e^{i\Omega t}\, \mathrm{d}t, \tag{2a}$$

$$A(z,t) = \mathsf{F}^{-1}[A_\Omega(z)] \equiv \sum_{\Omega} A_\Omega(z)\, e^{-i\Omega t}, \tag{2b}$$

定义傅里叶变换 [式（2a）], 以及相应的逆变换 [式（2b）], 将场包络A（z，t）与频谱包络A_Ω（z）联系起来。

传播常数。利用谱导数的恒等式 $\partial_t^n e^{-i\Omega t} = (-i\Omega)^n e^{-i\Omega t}$,[1] 传播常数的频域表示可写为如下多项式表达式

$$\beta(\Omega) = \frac{\beta_2}{2}\Omega^2 + \frac{\beta_4}{24}\Omega^4. \tag{3a}$$

失谐为 Ω 的模式的频率相关逆群速度为

$$\beta_1(\Omega) \equiv \partial_\Omega \beta(\Omega) = \beta_2\Omega + \frac{\beta_4}{6}\Omega^3, \tag{3b}$$

其中群速度（GV）$v_g(\Omega) = 1/\beta_1(\Omega)$，群速度色散（GVD）为

$$\beta_2(\Omega) \equiv \partial_\Omega^2 \beta(\Omega) = \beta_2 + \frac{\beta_4}{2}\Omega^2. \tag{3c}$$

随后，我们采用参数值 $\beta_2 = 1\ \mathrm{fs}^2/\mu\mathrm{m}$ 和 $\beta_4 = -1\ \mathrm{fs}^4/\mu\mathrm{m}$，得到图 1 所示的模型色散特性。对于式（1）中的非线性系数，我们取 $\gamma = 1\ \mathrm{W}^{-1}/\mu\mathrm{m}$。如图 1(c)所示，群速度色散曲线式（3c）呈向下凹的形状，并有两个零色散点，由条件 $\beta_2(\Omega) != 0$定义，位置分别为 $\Omega_{Z1,Z2} = \mp\sqrt{2\beta_2/|\beta_4|} = \mp\sqrt{2}\,\mathrm{rad/fs}$。当 $\Omega < \Omega_{Z1}$以及 $\Omega > \Omega_{Z2}$时，系统呈反常色散。其间的频率范围 $\Omega_{Z1} < \Omega < \Omega_{Z2}$ 则呈正常色散。观察图 1(b)所示的逆群速度可知，有两个频率与 $\Omega = 0$群速度匹配。由于传播常数具有对称性，这两个频率构成一对 $\Omega_1 = -\Omega_2 = -\sqrt{6\beta_2/|\beta_4|} \approx -2.828\ \mathrm{rad/fs}$，由 $\beta(\Omega_1) = \beta(\Omega_2)$唯一确定，并在图 1 中以空心圆和实心圆标出。事实上，对于所考虑的传播常数，只要 AD1 和 AD2 中的频率位置落在图 1(b)红色阴影所示的频率范围内，就可以实现三个不同模式的群速度匹配。值得注意的是，尽管式（3a）所示的传播常数支持中心频率相差极大的两个光脉冲实现群速度匹配，但这种方法在原理上不同于支持频率相近的不同模式准共传播的群速度匹配方式 [1]。然而，在不同条件下，两者都能使光脉冲准共传播，并支持类似的交叉相位调制诱导传播效应。在我们的情形中，借助具有多个零色散点的定制传播常数，可以实现跨越巨大频率间隔的光脉冲准群速度匹配传播。此外，本文考虑的群速度匹配机制不同于参考文献 [39], 中的机制；后者假设两个具有相同中心频率但偏振态不同的脉冲，在充有稀有气体的空芯光子晶体光纤的反常色散区内发射。式（1）的数学结构以及上述参数选择，构成了一个非常基本的设置，可支持非线性

[1]请注意，前述恒等式右侧括号中的“-”号反映了式（2）中平面波基的符号选择。使用科学计算工具（例如 Python 的 scipy 软件包）时必须考虑这一点； [37, 38], 其中有现成的谱导数例程，它们对一对傅里叶变换所采用的符号选择与此不同。

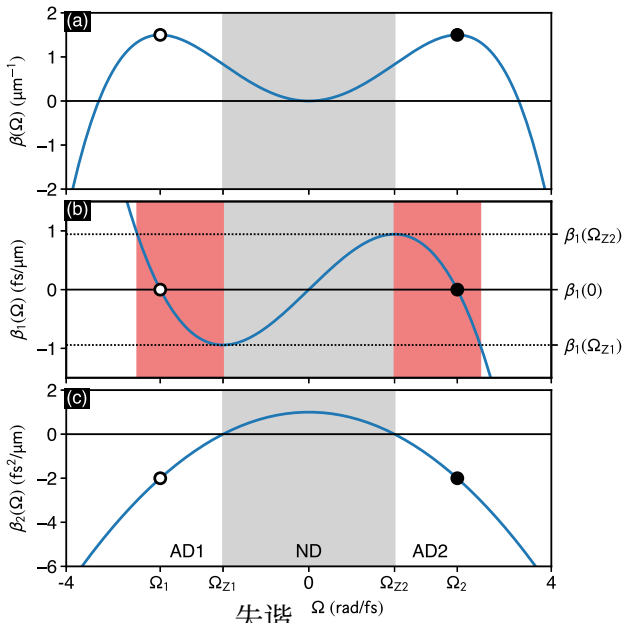

图 1：支持非线性光子超原子和双色孤子分子的频率相关传播常数的详细信息。(a) 传播常数，(b) 逆群速度，以及 (c) 群速度色散。在 (c) 中，AD1 和 AD2 标示了两个不同的反常色散区，它们之间由一个范围较宽的正常色散区（标记为 ND ）隔开。在 (a-c) 中，正常色散区以灰色阴影标示。零色散点标记为 Ω_{Z1} 和 Ω_{Z2}。在 (b) 中，红色阴影标示的频率范围内，位于 AD1 和 AD2 的两个模式可实现群速度匹配。空心圆（标记为 Ω_1）和实心圆（标记为 Ω_2）表示这样一对群速度匹配的频率。

光子元原子和双色孤子分子。事实上，图1(c)所示的双参数群速度色散曲线，是对早先参考文献 [24], 中所研究色散的简化模型；该文首次展示了双色孤子分子，其设置与参考文献 [26], 中所考虑的情形相似；后者全面阐述了广义色散克尔孤子。不过，需要指出的是，以下报告的现象并不局限于上述参数的特定选择；即使存在脉冲自陡峭 [25, 30],等扰动，这些现象仍然存在。脉冲自陡峭可通过在式（(Ω）的非线性部分中替换1）来纳入模型；此外，在一定限制下，还可考虑由拉曼效应引起的自频移效应 [31]。

传播算法。 对于以方程（1）表示的脉冲传播模拟，我们采用“守恒量误差”方法（CQE） [40, 41]。该方法可自适应调整 z 方向的传播步长 h，并利用底层传播方程的守恒律来指导步长的选择。具体而言，我们在此采用相对误差

$$\delta_E(z) = \frac{|E(z+h) - E(z)|}{E(z)}, \tag{4}$$

其中 E 为总能量，由式（1）守恒。对式（2）应用帕塞瓦尔恒等式， [42, 43], 可得时间域和频域中的总能量为

$$E(z) = \int_{-T/2}^{T/2} |A(z,t)|^2 \, \mathrm{d}t = T \sum_{\Omega} |A_\Omega(z)|^2, \tag{5}$$

瞬时功率 $|A(z,t)|^2$ (W = J/s)，以及功率谱 $|A_\Omega(z)|^2$ (W)。CQE 方法旨在使相对误差 δ_E 保持在目标误差范围 $(0.1\,\delta_G, \delta_G)$ 内，并设定局部目标误差 δ_G（在我们的数值实验中，始终取 $\delta_G = 10^{-10}$）。为此，必要时减小步长 h，条件允许时则增大 h。为将场从位置 z 推进到 $z+h$，CQE 使用“交互表象四阶龙格-库塔法”（RK4IP） [44]。当初始条件的传播导致脉冲强度在较短距离内快速变化时，该算法增大或减小步长的能力尤为宝贵

距离。不过，如果愿意接受固定步长积分方案带来的更长运行时间，通常的分步傅里叶方法 [45, 43, 46] 也能取得相近的效果。

光谱图。 为评估场 $A(z,t)$ 在选定传播距离 z 处的时频关系 ，
我们使用谱图 rogram [47, 48, 49]

$$P_S(t,\Omega;z) = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-T/2}^{T/2} A(z,t')h(t'-t)e^{-i\Omega t'}\,\mathrm{d}t'\right|^2. \tag{6}$$

为在时间上定位该场，我们使用双曲正割窗函数 $h(x) = \mathrm{sech}(x/\sigma)$，其宽度参数为 σ。

非相干耦合脉冲对。 为了以如下形式简化描述双色脉冲复合体

$$A(z,t) = A_1(z,t)\,e^{-i\Omega_1 t} + A_2(z,t)\,e^{-i\Omega_2 t}, \tag{7}$$

其中，在频率间隔 $\Omega_{\mathrm{gap}} = |\Omega_2 - \Omega_1|$处存在两个准群速度匹配子脉冲 $A_1 \equiv A_1(z,t)$ 和 $A_2 \equiv A_2(z,t)$，因此考虑两个耦合非线性薛定谔方程（CNSE）[6, 10, 11]较为方便

$$i\partial_z A_1 + \beta_0' A_1 - i\beta_1'\partial_t A_1 - \frac{\beta_2'}{2}\partial_t^2 A_1 + \gamma'\left(|A_1|^2 + 2|A_2|^2\right)A_1 = 0, \tag{8a}$$

$$i\partial_z A_2 + \beta_0'' A_2 - i\beta_1''\partial_t A_2 - \frac{\beta_2''}{2}\partial_t^2 A_2 + \gamma''\left(|A_2|^2 + 2|A_1|^2\right)A_2 = 0. \tag{8b}$$

方程（8）中的参数与方程（3）中的参数之间的关系为 $\beta_0' = \beta(\Omega_1)$、$\beta_0'' = \beta(\Omega_2)$、$\beta_1' = \beta_1(\Omega_1)$、$\beta_1'' = \beta_1(\Omega_2)$、$\beta_2' = \beta_2(\Omega_1)$、$\beta_2'' = \beta_2(\Omega_2)$ 和 $\gamma' = \gamma'' = \gamma$。两个子脉冲群速度倒数的失配量为 $\Delta\beta_1 \equiv |\beta_1'' - \beta_1'|$。对于特定的失谐量 Ω_1 和 Ω_2，，可以实现精确的群速度匹配，其标志为 $\Delta\beta_1 = 0$。与方程（1）不同，非相干耦合的方程（8）忽略了线性部分中的高阶色散，也忽略了非线性部分中快速变化的四波混频项。两个子脉冲之间的相互作用通过交叉相位调制（XPM）纳入考虑。如方程（8a）所示，脉冲 A_1 可视为暴露于形式为 $V_1 \equiv \gamma'(|A_1|^2 + 2|A_2|^2)$ 的总势场中，其中包含自相位调制（SPM）和交叉相位调制（XPM）的效应。同样，A_2 暴露于势场 $V_2 \equiv \gamma''(|A_2|^2 + 2|A_1|^2)$ 中。我们将在第（3）、（4）节中展示，势场 V_1 和 V_2 产生吸引势，使两个子脉冲得以相互俘获。随后，我们取 Ω_1 和 Ω_2，如图 1 所示，因此上述参数为 $\beta_0' = \beta_0'' = 1$。33 $\mu\mathrm{m}^{-1}$、$\beta_1' = \beta_1'' = 0$、$\beta_2' = \beta_2'' = -2$ $\mathrm{fs}^2/\mu\mathrm{m}$ 和 $\gamma' = \gamma'' = 1$ $\mathrm{W}^{-1}/\mu\mathrm{m}$。为了更一般地描述方程（7）形式的同时解，以下仍将方程（8）中的非线性系数称为 γ' [方程（8a）] 和 γ'' [方程（8b）]。此外，可通过共同的线性变换 $A_{1,2} \to A_{1,2}e^{i\beta_0 z}$ 去除标量因子 $\beta_0' = \beta_0'' \equiv \beta_0$，该变换不会影响相互作用脉冲的 z 向传播动力学。

值得注意的是，一般而言，修正非线性薛定谔方程中的高阶色散会导致孤立波发出共振辐射 [50]，，并可能改变其群速度 [50, 51]。方程（8）忽略了这类扰动；当子脉冲间隔 Ω_{gap} 较大且其频谱足够窄时，这一近似是合理的。此外，在频率相关系数函数 $\gamma(\Omega)$ 的情况下，方程（8）中的 $\gamma' = \gamma(\Omega_1)$ 和$\gamma'' = \gamma(\Omega_2)$。还应指出，在 γ 线性变化的情况下，孤立波的群速度会进一步改变 [52]，，而这一效应被方程（8）忽略了。将基于方程（8）的结果与完整模型方程（1）的数值模拟结果进行比较时，务必牢记这些扰动效应。

我们可以将上述双色脉冲复合体的俘获机制，与 Hasegawa 最早于 1980 [1]讨论的、使多模光脉冲能够在多模光纤中自约束的机制联系起来。在该研究中，Hasegawa 考虑了适用于多模脉冲的非线性 Schr¨odinger 型传播方程，其中单个模式感受到的折射率非线性变化取决于多模脉冲的总强度。这会产生描述不同模式的耦合方程，其中单个模式将总脉冲的强度视为势场。若所考虑的模式处于反常色散区，势便具有吸引性。基于这样的预期：如果给定模式与势之间的速度失配小于逃逸速度，势就能够俘获该模式，他推导出了多模脉冲自约束的条件。虽然参考文献 [1] 中的结果适用于可能由许多

模式组成的多模光脉冲，但式（8）所给出的简化建模方法仅考虑两个子脉冲。与此同时，上述方法已扩展至包含三个或更多子脉冲的脉冲复合体 [31, 53]。

给定式（7）形式的双色脉冲复合体试探形式，描述由子脉冲 $A_0(t) \equiv A(z = 0,t$构成的非线性光子元原子和双色孤子分子的初始条件，在某些方面有所不同，将在第 A_1 和 A_2 节3和第 4 节中分别讨论。随后，我们通过完整模型式（1）进行数值模拟，展示这些脉冲复合体沿 z 方向的自洽传播动力学；这一现象最初见于文献 [24, 26, 30, 54, 55], 。我们还展示，当两个子脉冲之间的群速度失配足够大时，这些脉冲复合体会发生解体；这一现象最初见于文献 [25], 。这些数值结果验证了 Hasegawa 报道的若干理论发现 [1],，并将其应用于双色脉冲复合体这一概念。

顺便强调一下，式（8）形式的耦合方程是研究相互束缚孤子时广泛使用的理论工具 [56, 57, 58, 59, 3, 60, 61, 62]。

3. 非线性光子学超原子

定态俘获态的描述。随后，我们寻找具有式（7）形式的定态解，并满足附加约束 $\max(|A_2|) \ll \max(|A_1|)$。这使得方程（8）可以解耦，并实现量子力学束缚态的直接光学类比 [63, 24, 54]。因此，我们假设所得的双色脉冲复合体由一个强俘获脉冲和一个弱俘获脉冲（TR）组成：前者是失谐为 $\Omega_S \equiv \Omega_1$, 的孤立波（S），后者的失谐为 $\Omega_{TR} \equiv \Omega_2$。对于总脉冲中的孤立波部分，我们忽略式（8a）非线性项中的交叉相位调制贡献，并假设

$$A_1(z,t) = U_S(t)\, e^{i\kappa' z}, \quad \text{with} \quad U_S(t) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t}{t_0}\right), \tag{9}$$

其中 $P_0 = |\beta_2'|/(\gamma' t_0^2)$，且 $\kappa' = \beta_0 + \gamma' P_0/2$。忽略式（8b）非线性项中的自相位调制贡献，并采用以下试探形式

$$A_2(z,t) = \phi(t)\, e^{i\kappa'' z}, \tag{10}$$

弱俘获态的包络 ϕ（t）由薛定谔型本征值问题决定

$$\left(-\frac{|\beta_2''|}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + V_S(t)\right)\phi_n(t) = \kappa_n\,\phi_n(t). \tag{11}$$

其中，孤立波表现为一个静态的吸引势阱 V_S（t） $= -2\gamma'' P_0 \mathrm{sech}^2$（$t/t_0$）。因此，正如上文所指出的，并在参考文献 [1], 关于玻璃光纤中多模光脉冲的讨论中所述，如果整个脉冲处于反常色散区域内，弱脉冲便会受到整个脉冲强度的吸引。由于 $\beta_2'' < 0$，所研究的情形满足这一条件。类比于一维量子散射理论中的 sech^2 势，我们也可以将孤立波诱导的势等价地写为 [63]

$$V_S(t) = -\nu(\nu+1)\frac{|\beta_2''|}{2t_0^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad \text{with} \quad \nu = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 4\left|\frac{\gamma''}{\gamma'}\frac{\beta_2'}{\beta_2''}\right|\right)^{1/2}. \tag{12}$$

此外，由于俘获势具有特殊形状，方程（11）中的本征值问题甚至可以精确求解 [63, 64]。方程（12）中势的束缚态数量为 $N_{TR} = \lfloor\nu\rfloor + 1$，其中 $\lfloor\nu\rfloor$ 是强度参数 ν的整数部分。根据量子力学散射问题的类比 [64], , 实值波数本征值可以直接写为

$$\kappa_n = -\frac{|\beta_2''|}{2t_0^2}(\nu - n)^2, \quad \text{for} \quad n = 0, \ldots, \lfloor\nu\rfloor. \tag{13}$$

对于给定的n值，它们与方程（10）的关系为 $\kappa'' = \beta_0 - \kappa_n$。每个本征值都对应一个特征函数 ϕ_n，它有n 个零点，表示本征值问题方程（$n + 1$）的第11个基态解。

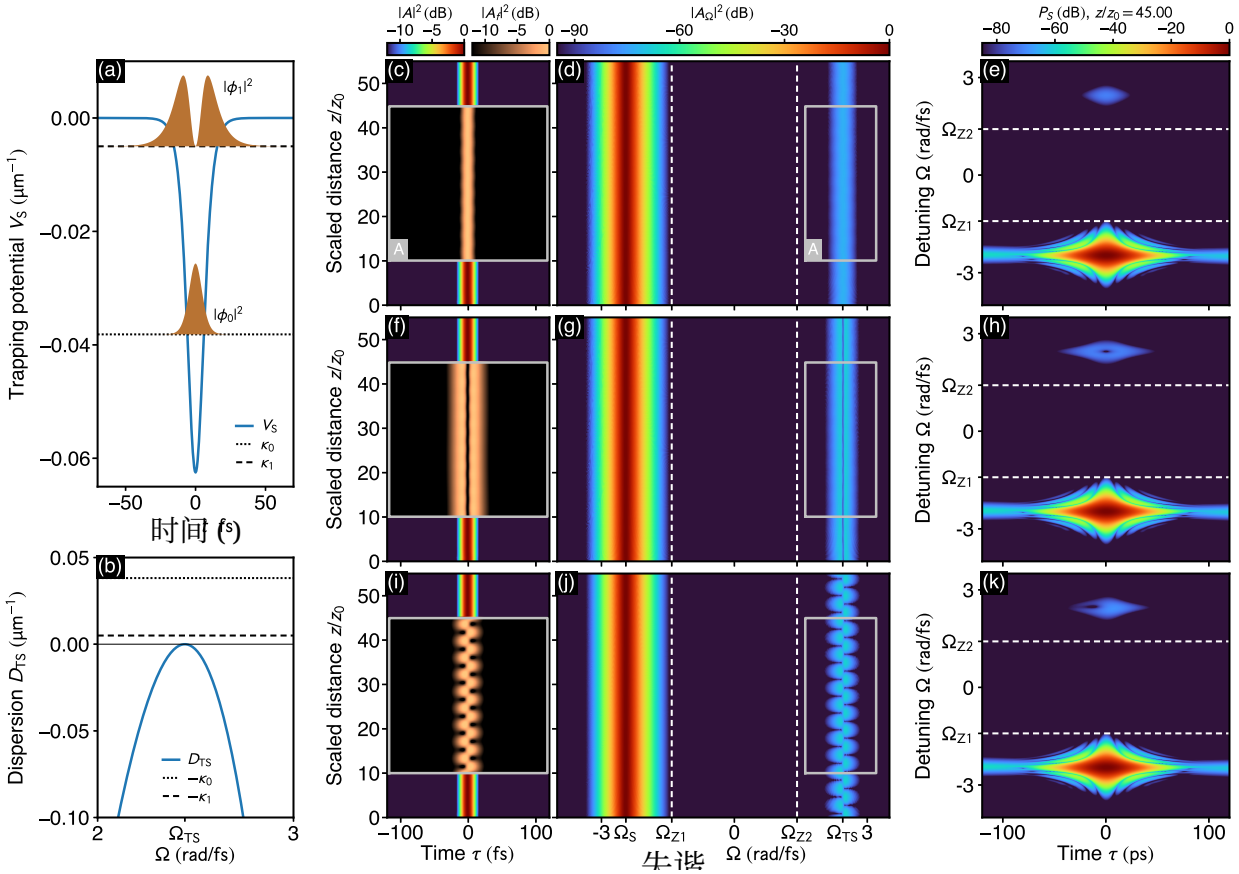

图2：孤波诱导势阱展现出两个束缚态。(a) 俘获势 V_S、波数本征值 κ_n，以及 $n = 0, 1$ 时束缚态本征函数的模平方 $|\phi_n|^2$。(b) 束缚态中心频率 Ω_{TS}附近的色散曲线 $D_{TS}(\Omega)$。(c) $n = 0$时孤子及其最低阶束缚态的时域传播动力学。传播距离以孤子周期 $z_0 = (\pi/2)(t_0^2/\beta_2')$ ≈ 50 μm 为尺度。(d) 对应的频谱。(d)中方框（标记为 A）所框定的频谱部分经傅里叶逆变换后显示于(c)中的方框（标记为 A）内，从而提供束缚态的滤波视图，同时去除总脉冲中的孤子部分。(e) $z/z_0 = 45$ 处、$\sigma = 8$ fs时总脉冲的谱图。(f、g、h) 与(c、d、e)相同，但对应于 $n = 1$的束缚态。(i、j、k) 与(c、d、e)相同，但对应于两个束缚态的叠加态。传播动力学的影片见参考文献 [66]中的补充材料。

这些解构成了势V_S的弱束缚态。将高斯超几何函数记作${}_2F_1$ [65]，并简记$a_n = \frac{1}{2}(1+n)$和$b_n = \frac{1}{2}(2\nu+1-n)$，则它们的闭式为 [64]

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \cosh^{\nu+1}\left(\frac{t}{t_0}\right) {}_2F_1\left[a_n, b_n; \frac{1}{2}; -\sinh^2\left(\frac{t}{t_0}\right)\right], & \text{for even } n, \\ \cosh^{\nu+1}\left(\frac{t}{t_0}\right) \sinh\left(\frac{t}{t_0}\right) {}_2F_1\left[a_n+\frac{1}{2}, b_n+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2\left(\frac{t}{t_0}\right)\right], & \text{for odd } n. \end{cases} \tag{14}$$

请注意，显然，从势强度参数 ν （见式（12））可知，束缚态的数量 N_{TR} 由四个参数唯一确定：β_2'、β_2''、γ'和 γ''。俘获势的持续时间 不会影响该数量；根据式（t_0 13），持续时间决定基态解的波数本征值。

与量子力学的类比。本征值问题式（11）表明，这与量子力学存在类比，其中基态解 ϕ_n 表示一个质量为$m = |\beta_2''|^{-1}$的虚拟粒子的波函数。该粒子被限制在局域化的 sech^2形俘获势V_S中。离散变量$n = 0, \ldots\ldots, \lfloor\nu\rfloor$类似于主量子数，用于标记具有不同波数的解；束缚态的数量N_{TR} 则类似于原子序数。因此，不含任何已占据束缚态的裸孤子类似于一维原子的原子核。根据这一类比，孤子及其束缚态构成一个非线性光子学超原子。

3.1. 俘获态的稳定传播

接下来，我们讨论能够容纳两个束缚态的非线性光子学超原子的传播动力学。具体而言，我们考虑一个示例，其中$\Omega_S = -2。828$ 弧度/飞秒，且$t_0 = 8$飞秒，其中Ω_{TR} =2。828 弧度/飞秒，且 $\nu \approx 1。566$。所得俘获势及其两个束缚态如图2（a）所示。在此情形下，波数本征值为（κ_0， κ_1） =（−0。0382， −0。0050）μm^{-1}，相应的基态解具有如下简洁形式：

$$\phi_0(t) = \mathrm{sech}^{\nu}\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad \text{and,} \tag{15a}$$

$$\phi_1(t) = \mathrm{sech}^{\nu-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)\tanh\left(\frac{t}{t_0}\right). \tag{15b}$$

如图 2(b) 所示，在 Ω_{TR} 附近，由于 $\kappa'' > 0$ [式 (10)], ，每个束缚态与受色散曲线 $D_{TR}(\Omega) \equiv \beta(\Omega) - \beta(\Omega_{TR}) - \beta_1(\Omega_{TR})(\Omega - \Omega_{TR}) < 0$约束的线性波之间都存在有限的波数间隙。因此，我们预计由式 (15) 构成的束缚态能够稳定传播。对于阶数为 $n = 0$的最低阶束缚态，图 2(c,d) 展示了这一点。这些图以修正非线性薛定谔方程 (1) 为基础，总结了脉冲传播模拟；所用初始条件的形式如式 (7)，其中 A_1 如式 (9)，A_2 则如式 (10)，且 $\phi(t) = \sqrt{10^{-7}P_0}\,\phi_0(t)$。在图 2(c) 所示的时域传播动力学中，由 Ω_S [附近的高阶色散引起的孤子微小漂移（见图 1], ）通过转换到移动参考系加以补偿，该参考系的时间坐标为 $\tau = t - \beta_1 z$，速度为 $\beta_1 = 0.00637$ fs/μm。在图 2(d) 中，孤子与束缚态之间巨大的频率间隔清晰可见。通过对属于束缚态的频率分量进行傅里叶逆变换 [（图 2(d) 中标记为 A 的方框）], ，即可无阻碍地观察束缚态时域传播动力学的“滤波视图” [（图 2(c) 中标记为 A 的方框）]。图 2(d) 展示了 $z/z_0 = 45$处场的谱图，提供了时频视图。对于 $\phi(t) = \sqrt{10^{-7}P_0}\,\phi_1(t)$，$n = 1$ 的束缚态稳定传播详见图 2(f-h)。最后，图 2(i-k) 展示了形式为 $\phi(t) = \sqrt{10^{-7}P_0}\,[\phi_0(t) + 5\phi_1(t)]$ 的两个束缚态叠加态同时传播的情况。图 2(i) 时域传播动力学中可见的拍频图样具有 z 周期性，这是束缚态波数本征值不同所致，其周期由 $z_p = 2\pi/|\kappa_1 - \kappa_0| \approx 189\ \mu m$ ($z_p/z_0 \approx 3.8$) 确定。因此，束缚态的相干叠加会呈现拉比型振荡，类似于波包量子复现中依赖束缚态的复现时间 [67, 68]。

需要注意的是，鉴于束缚态数目 N_{TR} 由式 (12) 中的势强度参数 ν 决定，因此也可以通过设置不同的参数获得束缚态数目不同的系统。具体而言，将 Ω_S 固定在其他可行值上，即可得到不同的群速度匹配失谐 Ω_{TR}，进而使参数 β_2'、β_2''、γ' 和 γ''取不同值。例如，保持 $t_0 = 8$ fs 不变，但选择 $\Omega_S = -2.75$ rad/fs，可得 $\nu \approx 3.1$，从而形成一个能够容纳 $N_{TR} = 4$ 个束缚态的势阱。然而，在这种情况下，束缚态向正常色散区域内色散波的相位匹配能量转移可能会很有效 [69]。

3.2. 俘获态转 因群速度失 匹配

在文献 [1], 所述玻璃光纤中的多模脉冲背景下，总脉冲产生的势阱对波包的吸引作用，可通过与该波包对应的虚拟粒子的运动方程加以说明。从经典力学的角度来看，为确保总脉冲能够俘获波包，粒子与势之间的速度失配需要小于该势的逃逸速度。基于这一观点，对于给定的速度失配，研究确定了实现自约束所需的总脉冲强度临界值 [1]。在本文中，如图 2所示的脉冲传播模拟，为研究所考虑的交叉相位调制诱导的吸引效应提供了一种互补方法。具体而言，在将孤子的失谐固定为$\Omega_S = \Omega_1$, 的同时，将俘获脉冲的失谐移至 $\Omega_{TR} = \Omega_2 + \Delta\Omega$，即可在两个脉冲之间施加群速度失配，并探究超原子的稳定性。对于 $\Delta\Omega > 0$，有 $\beta_1(\Omega_S) > \beta_1(\Omega_{TR})$，见图 1(b)。因此，在孤子静止的参考系中，俘获态最初将倾向于向较小的时间方向移动。这一点在

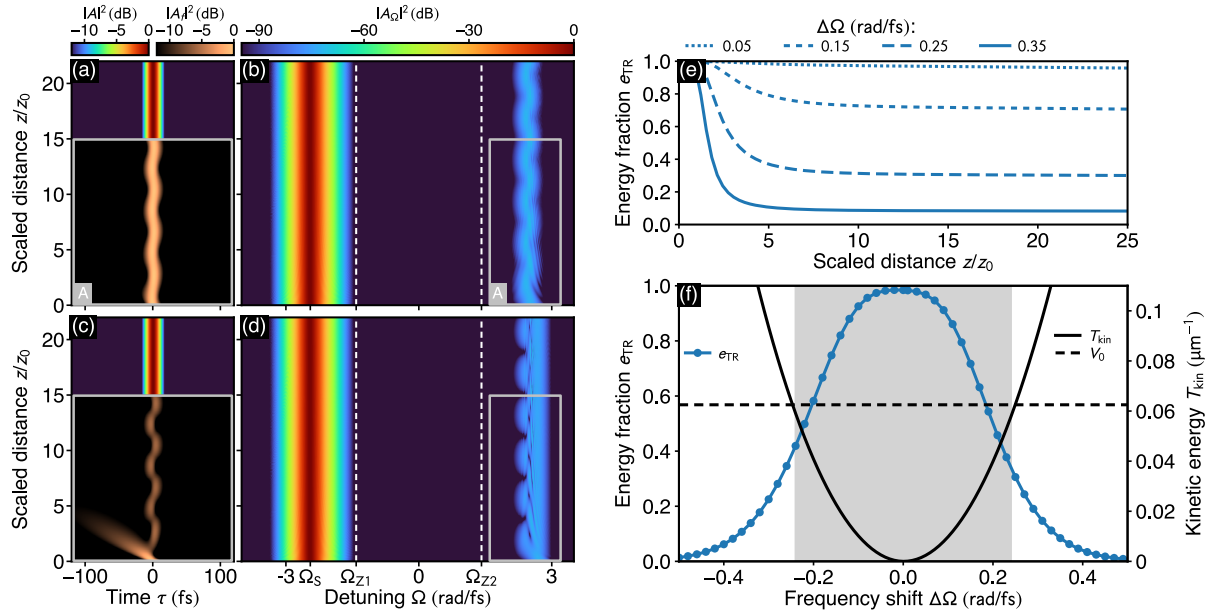

图 3：从俘获到逃逸转变的表征。(a) 孤子及其最低能级俘获态的时域传播动力学（$n = 0$）从 Ω_{TS} 移至 $\Omega_{TS} + \Delta\Omega$，当 $\Delta\Omega = 0.05$（rad/fs）。(b) 对应的频谱。(b) 中方框（标记为 A）所框出的频谱部分经傅里叶逆变换后，显示在 (a) 中的方框（标记为 A）内。这提供了俘获态的滤波视图，同时省去了总脉冲中的孤子部分。(c、d) 与 (a、b) 相同，但 $\Delta\Omega = 0.25$（rad/fs）。(e) 俘获能量占比随传播距离的变化。(f) 俘获能量占比随俘获态中心频移的变化。右侧纵轴还显示了势阱深度（V_0）以及虚构经典粒子的动能 T_{kin}。粒子无法逃出势阱的参数范围以灰色阴影标示。(a–d) 中所示传播动力学的影片作为补充材料见参考文献 [66]。

图 3(a、b)中得到了展示，对应的中心频移为 $\Delta\Omega = 0.05$ 弧度/飞秒。为评估俘获态中保留在孤子诱导势阱内的能量比例，我们考虑如下量

$$e_{TR}(z) \equiv \frac{E_{TR}(z)}{E_{TR}(0)}, \quad \text{with} \quad E_{TR}(z) = \int_{-10\,t_0}^{10\,t_0} |\phi(z,\tau)|^2 \, d\tau. \tag{16}$$

如图 3(e) 所示，当 $\Delta\Omega = 0.05$ rad/fs 时，俘获态几乎完全留在势阱内，即 $e_{TR} \approx 1$。相比之下，当 $\Delta\Omega = 0.25$ rad/fs 时，在初始传播阶段，俘获脉冲的大部分会逃逸出势阱 [Figs. 1(c,d)]，这由较小的 $e_{TR} \approx 0$ 值表明。3 [Fig. 3(e)]。需要指出的是，若将所研究的脉冲复合体视为超原子，量 $1 - e_{TR}(z)$ 表示辐射逸出的俘获能量占比，类似于量子力学原子的电离概率。图 3(f) 总结了参数研究的结果，详细展示了 e_{TR} 随中心频移 $\Delta\Omega$ 变化的关系。从俘获到逃逸的转变，也可以用一种完全经典的图像来补充说明，类似于参考文献 [1]：从经典观点来看，我们可能会预期，最初位于势阱中心的粒子，只要其“经典”动能 $T_{kin} = \frac{1}{2} m \Delta\beta_1^2 = \frac{1}{2}|\beta_2''|^{-1} [\beta_1(\Omega_S) - \beta_1(\Omega_{TR})]^2$ 不超过势阱深度 $V_0 = 2\gamma'' P_0$，就会继续被限制在势阱内。如图 3 所示，基于这一经典图像的发现，与通过修正非线性薛定谔方程（1）的直接数值模拟获得的结果非常吻合。上述结果清楚地展示了非线性光子学超原子的稳定性极限，这一极限取决于俘获孤子与俘获态之间的群速度失配。这些发现与我们此前关于双色脉冲复合体解体动力学的结果一致 [25]。

4. 双色孤子分子

紧密束缚双色脉冲复合体的播种。考虑式（7）形式的初始条件，其中 A_1 为式（9）中的基阶非线性薛定谔孤子，且 A_2 为式（10）中的俘获态，且 $\phi(t) = r\sqrt{P_0}\,\phi_0(t)$，弱俘获脉冲对俘获孤子的交叉相位调制贡献可通过增大参数 r 得到增强。

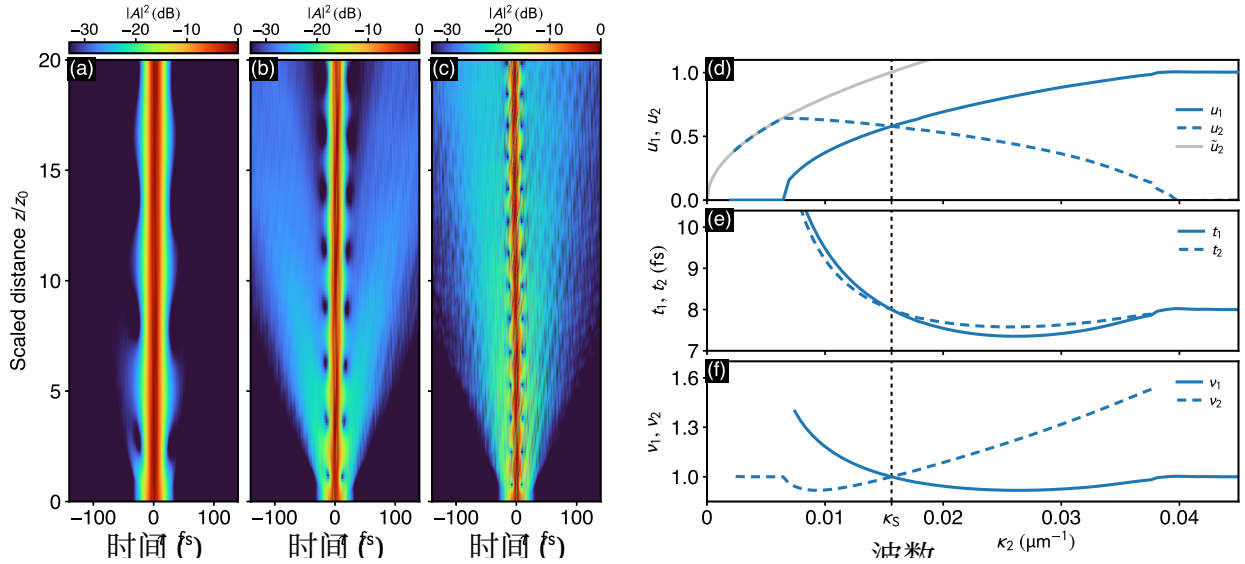

图4：从俘获到紧密束缚的类分子双色脉冲复合体的转变。(a-c) 由形式为 $\phi(t) = r\sqrt{P_0}\,\phi_0(t)$ 的初始条件（见正文）产生的时域传播动力学。(a) 振幅参数 $r = 0.3$ 时的俘获态，(b) $r = 0.7$，以及 (c) $r = 1$。(d-f) 耦合常微分方程 (18) 的解，拟合于形式为 $U_m = U0,_m \operatorname{sech}^{\nu_m}(t/t_m)$ 的函数，其中 $m = 1, 2$。(d) 缩放后的脉冲振幅 $u_n = U0,_m/\sqrt{P_0}$,；(e) 脉冲持续时间 t_n；(f) 脉冲形状指数 ν_m，$m = 1, 2$。在 (d) 中，$\tilde{u}_2$ 表示波数为 κ_2 的基阶非线性薛定谔孤子的峰值振幅。

这一点在图 4(a-c) 中得到了展示：图中给出了不同 r 值下基于修正非线性薛定谔方程（1）的脉冲传播模拟，所取 r 值显著大于前一节讨论的数值。尤其在 r 较大时 [图 4(b,c)], , 强度呈现出如下动态：交叉相位调制的相互束缚作用使两个子脉冲收缩，促成窄局域脉冲复合体的形成。Hasegawa 曾在文献 [1], 中针对玻璃光纤中的多模光脉冲提出过类似效应，他写道：“[.....] 随着越来越多的模式被俘获，脉冲包的峰值强度会以与引力不稳定性十分相似的方式增加，从而使脉冲包进一步收缩。”（文献 [1], , 第 417 页）。图 4(a-c) 所示结果展示了这一效应在具有两个零色散点的非线性光纤或波导中的双色脉冲复合体情形下的表现。值得指出的是，对于 $r \approx 1$，如上所述的初始条件会直接产生紧密束缚、相互约束的双色脉冲复合体。传播过程中，局域态会伴随辐射逸出，而这些复合体可呈现出令人联想到分子振动的内部动态 [24, 25, 70, 31]。然而，这种播种过程会以很大程度上不可控的方式产生双色脉冲复合体。作为补充，我们发现，当采用形式为 $\phi(t) = r\sqrt{P_0}\,\phi_1(t)$ 的俘获态初始条件且 r 足够大时，也会形成类似的局域脉冲复合体。

—

耦合方程的同时解。我们可以超越上述种子注入方法，直接搜索耦合非线性方程（8）的同时孤立波解，而不受第3节所讨论的线性极限约束。将两个子脉冲（标记为$m = 1, 2$）的试探形式代入，形式如下：

$$A_m(z,t) = U_m(t)\, e^{i(\beta_0+\kappa_m)z}, \quad \text{with} \quad m = 1, 2 \tag{17}$$

代入方程（8），得到两个二阶耦合常微分方程（ODE）

$$\ddot{U}_1 - \frac{2}{\beta_2'}\left[\gamma'\left(|U_1|^2 + 2|U_2|^2\right) - \kappa_1\right] U_1 = 0, \tag{18a}$$

$$\ddot{U}_2 - \frac{2}{\beta_2''}\left[\gamma''\left(|U_2|^2 + 2|U_1|^2\right) - \kappa_2\right] U_2 = 0, \tag{18b}$$

对于两个实值包络 $U_m \equiv U_m(t)$，$m = 1, 2$，其中圆点表示对时间的导数。在适当条件下，耦合非线性方程（18）的孤波解可以解析地表示为 [71, 72,

60, 73, 30]。基于参数化试探函数的近似解可以通过例如变分方法获得 [74]。为了在更一般的条件下获得同时解 $U_1(t)$ 和 $U_2(t)$，需要对方程（18）进行数值求解。例如，这可以通过谱重整化方法 [75, 76, 77, 78],、打靶法 [8, 9], 、平方算子法 [79], 、共轭梯度法 [80, 81], 、适用于z向传播的虚时间演化方法 [82, 83], 或牛顿型方法 [84]来实现。这里，为了求解常微分方程（18）的同时解，我们采用基于边值Runge-Kutta算法[85]的牛顿法。为系统地获得解 $U_1(t)$ 和 $U_2(t)$，我们将方程（18）中出现的六个参数中的五个固定下来。因此，我们将β_2'、 β_2''、 γ'和 γ'' 设为前一节中所考虑的数值，并将方程（18a）中基阶非线性薛定谔孤子的波数 $\kappa_1 = |\beta_2'|(2t_0^2)^{-1} \approx 0.0156\ \mu m^{-1}$ 预设为 $t_0 = 8$ fs。随后，我们在波数范围（0.002，0.05）μm^{-1}内扫描剩余参数 κ_2，该范围包含 κ_1的取值。我们从 $\kappa_2 = 0.05\ \mu m^{-1}$开始参数扫描，这一数值远大于最低俘获态解的波数本征值 0.0382 μm^{-1}。在该值以上，我们预计 U_2 将趋于零，而 U_1 将给出基阶孤子 $U_1(t) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}(t/t_0)$，其中 $P_0 = |\beta_2'|(\gamma' t_0^2)^{-1}$。我们为 U_1 和 U_2 设置了与孤子和最低俘获态具有相似宇称的初始试探函数，并将所得解延拓至更小的κ_2值。该参数扫描的结果总结于图4(d-f)中。我们发现，所有解均可表示为 $U_m(t) = U0,_m \mathrm{sech}^{\nu_m}(t/t_m)$的形式，其中脉冲峰值振幅为 U0,$_m$ [见图4(d)，脉冲持续时间为 t_m [见图4(e)，脉冲形状指数为 ν_m [见图4(f)，对于 $m = 1, 2$。与第3.1节报告的结果一致，我们发现，一个具有 $t_2 = 8$ fs 和 $\nu_2 \approx 1.55$ 的弱非零解 U_2 起始于 $\kappa_2 \approx 0.038\ \mu m^{-1}$。当 $\kappa_2 < 0.038\ \mu m^{-1}$时，子脉冲 $m = 1$ 的峰值振幅连续减小，而 $m = 2$ 的峰值振幅增大。当低于 $\kappa_2 \approx 0.007\mu m^{-1}$时，子脉冲 U_1 消失，而 U_2 描述一个脉冲形状参数为 $\nu_2 = 1$ 、波数为κ_2的基阶孤子。为便于直观理解，我们在图4(d)中加入了波数为 κ_2的自由孤子的振幅，即峰值振幅$\tilde{U}0,_2 = \sqrt{2\kappa_2/\gamma''}$。需要指出的是，中间参数范围 $0.007\ \mu m^{-1} < \kappa_2 < 0.038\ \mu m^{-1}$ 包含紧密耦合的脉冲复合体，其特征是子脉冲具有相近的峰值高度，见图4(d)。

4.1. 双色孤子对

仔细评估图 4(d–f) 所示的结果后，我们发现，在 $\kappa_2 = 0.0156\ \mu m^{-1}$ 处，可得到一对相匹配的解，其形状为简单的双曲正割形状 $U_m(t) = U0,_m \mathrm{sech}(t/t_0)$，$m = 1, 2$。这可追溯到对于所考虑的参数组，方程 (18a) 和 (18b) 具有相同的形式。形式上，假设 $\kappa \equiv \kappa_1 = \kappa_2$，且 $U \equiv U_1 = U_2$,，这两个方程都可写成具有修正参数的标准非线性薛定谔方程的形式

$$-\frac{\beta_2'}{2}\frac{d^2}{dt^2}U(t) + 3\gamma'|U(t)|^2U(t) = \kappa U(t), \tag{19}$$

为方便起见，此处仅使用方程 (18a) 中的参数。因此，实值脉冲包络 U 应由峰值强度 $\tilde{P}_0 = |\beta_2'|(3\gamma' t_0^2)^{-1}$ 表征，故图 4(d) 中 $u_1 = u_2 = \sqrt{1/3} \approx 0.57$。在 $\kappa_2 = 0.0156\ \mu m^{-1}$ 处，两个子脉冲均类似于真正的双色孤子对：脉冲包络 U_1 和 U_2 均对应一个基阶非线性薛定谔方程孤子；对于每个脉冲，其束缚伙伴会通过交叉相位调制改变相应非线性薛定谔方程的非线性系数，从而帮助该脉冲维持其形状。因此，两个脉冲只能作为一个结合单元共同存在。这一特殊情形与将双色脉冲复合体描述为非相干耦合脉冲 [30] 的方式一致。考虑试探形式方程 (7)，将所得脉冲包络代入 U_1 和 U_2，并重新代入第 2 节中定义传播常数的参数，即可得到

$$A(z,t) = F(z,t)\cos\left(\sqrt{\frac{6\beta_2}{|\beta_4|}}t\right)e^{-i\beta_0 z}, \quad \text{with} \quad F(z,t) = \sqrt{\frac{8\beta_2}{3\gamma t_0^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t}{t_0}\right)e^{i\kappa z}, \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{\beta_2}{t_0^2}. \tag{20}$$

需要指出的是，F 等价于参考文献 [26], 中得到的基阶元孤子；代入 $\epsilon = t_0^{-1}[3\beta_2/(2|\beta_4|)]^{-1/2}$ 和$\mu_0\epsilon^2 = \beta_2/t_0^2$后，这一点便显而易见。Tam 等人等在研究修正非线性薛定谔方程（1）的定态解时，首次提出了这一基阶元孤子；他们通过多尺度分析，着重考察场的时域表示 [26]。这揭示了一个庞大的孤子超家族，现称为广义色散克尔孤子。我们想指出，在本文提出的方法中，即着重考察双色脉冲复合体的频域表示时，可以非常轻易地推导出基阶元孤子。此外，这两种方法彼此相得益彰。还需指出

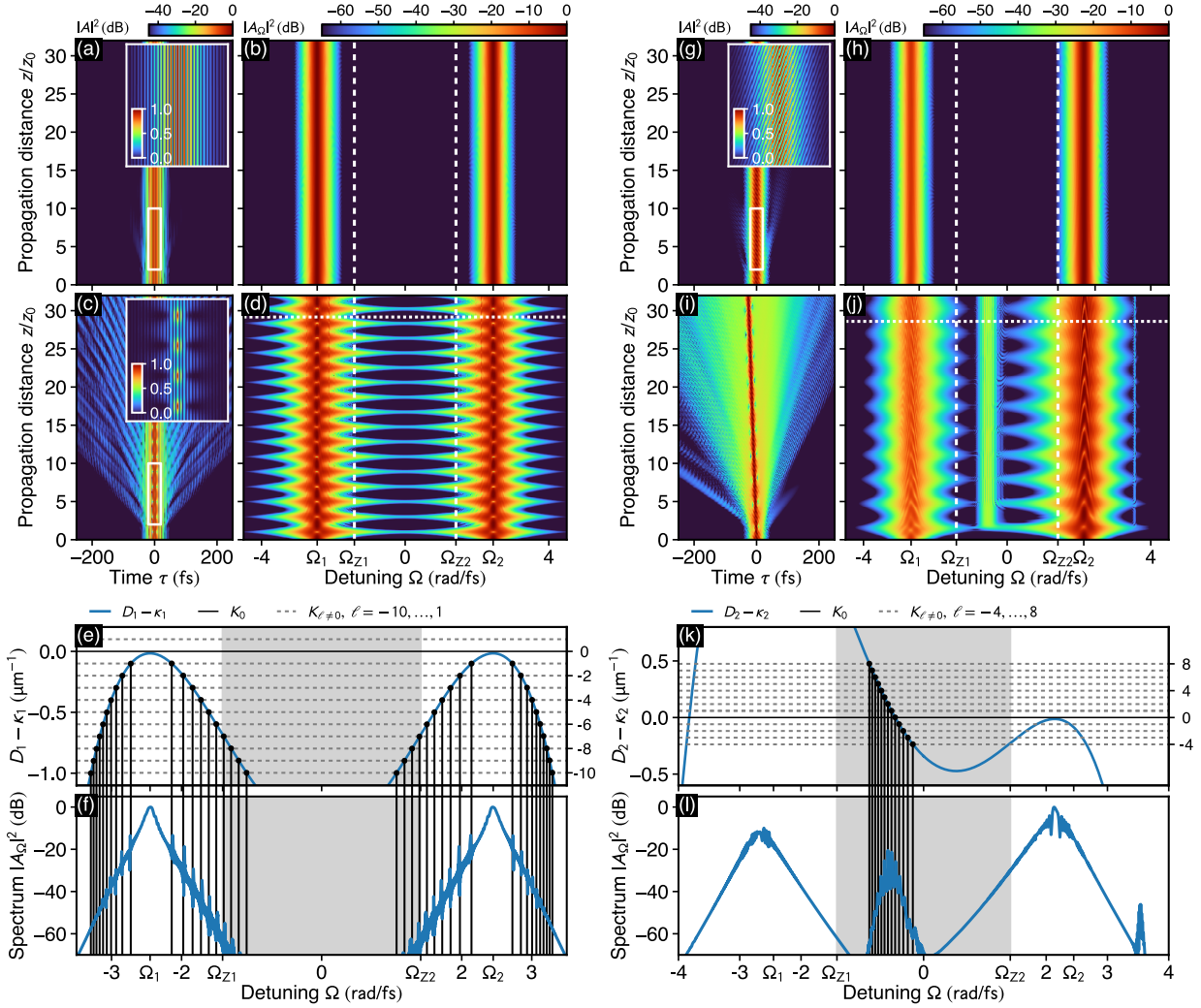

图 5：双色孤子分子的共振辐射。(a,b) 子脉冲位置为 Ω 2 828 $_1 = -\ _2 =$ $|\ \ \tau|^2$ $|\ 0\ \tau|^2$ $\tau = -20\quad 20$ Ω . rad/fs 的孤子分子的稳态传播。(a) 时域传播动力学。插图展示了在 . . . fs 和 $z/z_0 = 2 \ldots 10$ 范围内 A(z,) /max(A(,)) 的局部放大图。(b) 对应的频谱。(c,d) 与 (a,b) 相同，但孤子分子阶数为 N = 1.8。(d) 中的水平虚线表示 $z/z_0 = 29.2$。(e) 色散曲线及式 (22) 中共振条件的图解解，适用于阶数 m = −10 . . . 1 的 z 振荡周期。(f) $z/z_0 = 29.2$ 处的频谱。(g-l) 与 (a-f) 相同，但孤子分子的子脉冲位置为 $\Omega_1 = -2.674$ rad/fs 和 $\Omega_2 = 2.134$ rad/fs。(i,j) 中的孤子分子阶数为 N = 1.6。(j) 中的水平虚线表示 $z/z_0 = 28.6$。时域传播动力学是在运动参考系中展示的，其中 $\tau = t - \tilde{\beta}_1 z$。(a,c) 中 $\tilde{\beta}_1 = 0$ fs/μm。(g,i) 中 $\tilde{\beta}_1 = 0.509$ rad/fs。传播距离按 $z_0 = 32$ μm 进行缩放。(a-d) 和 (g-j) 中所示传播动力学的影片作为补充材料收录于文献 [66]。

上述双色孤子对与在双折射光纤背景下研究的矢量孤子[86, 87, 88, 61, 89, 90]相似。图 5(a,b) 展示了由修正非线性薛定谔方程（1）中方程（20）定义的双色孤子对的稳态传播。图 5(a) 的插图放大显示了局域脉冲，可见周期为 $\Delta t \approx \sqrt{|\beta_4|/(6\beta_2\pi^2)} \approx 1.3$ fs 的干涉条纹，这是由方程（20）中的余弦项引起的。这些干涉条纹呈现稳态，是因为该传播过程具有对称性 $\beta(\Omega_1) = \beta(\Omega_2)$ 和 $\kappa_1 = \kappa_2$。图 6(a) 展示了 $z/z_0 = 29.17$ 处传播过程的谱图。可以看到，少量残余辐射恰好位于曲线 $\beta_1(\Omega)z$ 上，该曲线在图 6(a) 中以短虚线表示。这些辐射由脉冲复合体在初始传播阶段发出，其成因是各个子脉冲位置处存在高阶色散；在导出方程（20）的简化描述中，这些高阶色散被忽略了。

4.2. 梳状多频辐射

此前已有研究表明，z周期性的双色孤子分子的振幅和宽度振荡，可以通过将其初始峰值振幅增大某个因子而按照N系统地激发，其中$F(z,t) \leftarrow NF(z,t)$[26, 55]。类比于通常的非线性薛定谔¨孤子，数值$N > 1$定义了高阶元孤子。最近，我们对这类高阶元孤子的振幅振荡进行了全面分析，结果表明，随着N的增加，用于表征其周期性峰值强度变化所需的空间傅里叶模数量也随之增加 [55]。换言之，随着对孤子分子的扰动强度增加，其动力学会由简谐振荡转变为非线性振荡。

简并多频辐射。为展示振幅和宽度振荡，我们在图5(c、d)中给出了基于双色孤子对（20）的N = 1.8阶对称孤子分子的传播动力学。如图5(c)的时域动力学所示，局域脉冲呈现周期性的振幅和宽度变化 [图5(c)中的放大视图], , 并沿坐标t的两个方向对称地发射辐射。利用图4(b、c)中的种子注入方法也获得了非常相似的动力学。图5(d)所示的频谱也清晰地显示出孤子分子的振荡。如图5(f)所示，在$z/z_0 \approx 29.17$处，Ω_1 和Ω_2子脉冲位置附近呈现出梳状频带。这些新生成频率的位置，可以通过将现有的共振条件推导方法 [91, 92, 93, 94, 95] 扩展至双色脉冲复合体 [70, 55]来理解。下面我们总结这些共振条件；这些条件是在假设脉冲复合体具有以下形式 [70]的动态演化情况下得到的。

$$U_m(z,t) = \sum_{\ell} C_{m\ell}(t)\, \exp\left[i\left(\kappa_m + K_\ell\right) z\right], \quad \text{with} \quad m \in (1,2),\ \ell \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

在式（21）中，$C_{m\ell}$ 是展开系数，而 κ_m 表示决定每个子脉冲沿z方向传播的波数。对于z振荡周期的高次谐波，其波数为$K_\ell = 2\pi\ell/\Lambda$，其中 Λ 表示脉冲复合体的z向振荡波长，ℓ 表示相应的阶数。基于这一试探形式，共振条件

$$D_m(\Omega_{RR}) - \kappa_m = K_\ell, \quad \text{with} \quad m \in (1,2),\ \ell \in \mathbb{Z}, \quad \text{and} \tag{22a}$$
$$D_m(\Omega_{RR}) - 2\kappa_m + \kappa_{m'} = K_\ell, \quad \text{with} \quad m, m' \in (1,2),\ m \neq m',\ \ell \in \mathbb{Z}, \tag{22b}$$

利用色散曲线 $D_m(\Omega) \equiv \beta(\Omega) - \beta(\Omega_m) - \beta_1(\Omega)(\Omega - \Omega_m)$，可推导出 $m = 1,2$ 的情形 [70]。在式（22）中，Ω_{RR} 表示激发共振辐射（RR）的频率。式（22a）定义了各子脉冲产生切伦科夫辐射的共振条件，而式（22b）则定义了额外的共振条件，表明两个子脉冲共同参与四波混频（FWM）过程。

对于所考虑的阶数为$N = 1.8$ 的孤子分子，我们发现 $\Lambda \approx 63\ \mu\text{m} \approx 2z_0$ [满足 $z_0 = 32\ \mu\text{m}$，见图5(d)]。在这种情况下，上述对称性 $\kappa_1 = \kappa_2$ 使方程（22a）和（22b）简并。从图 5（e）中方程（22）的图解可明显看出，共振条件对图 5（f）中新生成频率的预测非常准确。在图 6（b）中展示了 $z/z_0 = 29.17$ 处传播过程的谱图。其中，振荡的孤子分子辐射出的多峰谱带，其形状令人联想到传统的日本梳篦。

非简并多频辐射。需要指出的是，由于具有不同子结构的双色脉冲复合体种类繁多，其发射光谱也呈现出各种形式。例如，考虑一对群速度匹配的失谐量，其值不同于上文所考虑的情形，则方程（22）之间的简并性可以解除。接下来，我们取 $\Omega_1 = -2.674$ rad/fs 和 $\Omega_2 = 2.134$ rad/fs，此时 $\beta_1' = 0.514$ fs/μm、$\beta_1'' = 0.514$ fs/μm、$\beta_2' = -2.576$ fs^2/μm，以及 $\beta_2'' = -1.278$ fs^2/μm。根据耦合常微分方程（18），我们进而确定一对同时解，它们给出的初始条件为

$$A_0(t) = U_{0,1}\, \text{sech}^{\nu_1}\left(\frac{t}{t_1}\right) e^{-i\Omega_1 t} + U_{0,2}\, \text{sech}^{\nu_2}\left(\frac{t}{t_2}\right) e^{-i\Omega_2 t}, \tag{23}$$

参数为$U_{0,1} = 0.050\ \sqrt{W}$、$U_{0,2} = 0.141\ \sqrt{W}$、$t_1 = 7.207$ fs、$t_2 = 7.271$ fs、$\nu_1 = 0.901$，以及 $\nu_2 = 1.022$。具有非相同子脉冲的该孤子分子的稳态传播如图4（g、h）所示。作为结果

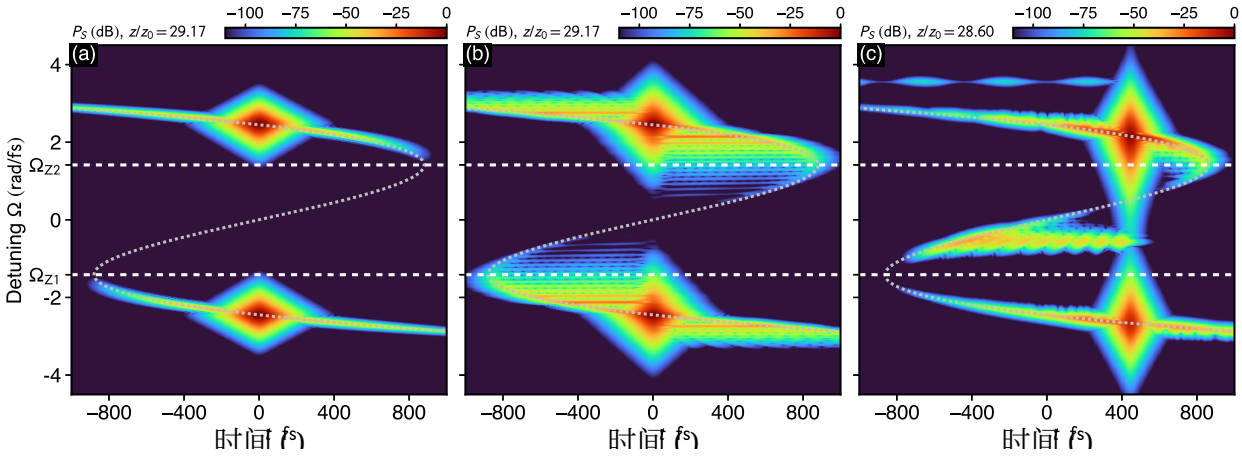

图6：所选孤子分子的谱图。(a) 图5(a、b)中的双色孤子对，在 $z/z_0 = 29.17$ 处，使用公式（6）中的 $\sigma = 30$ fs 计算得到。(b) 图5(c、d)中的振荡对称孤子分子，在 $z/z_0 = 29.17$ 处、 $\sigma = 30$ fs 时的情况，显示出许多间距很窄的共振，其形状令人联想到传统的日本梳篦。(c) 图5(i、j)中的振荡非对称孤子分子，在 $z/z_0 = 28.6$ 处、$\sigma = 20$ fs 时的情况。可以清楚地看到，与脉冲复合体的周期性振幅和宽度变化同步的逐脉冲辐射。在 (a-c) 中，短虚线显示 $\beta_1(\Omega)z$，表示失谐为 Ω 的模式在 $z = 0$ 处发射时所对应的限定时间位置。传播动力学的影片作为补充材料收录于参考文献 [66] 中。

由于子脉冲对称性被破坏，表征该脉冲复合体的干涉条纹不再保持稳态 [图5（g）中的局部放大图]。尽管其包络呈现非稳态曲线，脉冲复合体仍保持局域态，这或许正是此前采用基于时间域的牛顿共轭梯度法未能发现此类结构的原因 [26]。接下来，我们将该孤子分子的阶数提高到N = 1。6，从而得到z振荡周期为 $\Lambda \approx 106$ μm ≈ 3。$3z_0$ 的传播动力学，如图5（i、j）所示。在这种情况下，正常色散区域内的频谱带中激发出一个明显的多峰频率结构 [见图5（j、l）]。这些新生成的频率可与子脉冲在Ω处发出的多频切伦科夫辐射联系起来$_2$, ，如图5（k）所示的共振条件（22a）图形解所示。需要指出的是，局域态与连续谱之间的类似耦合现象此前已在周期性色散分布中的孤子 [93], 、双芯光纤中的振荡束缚孤子 [94], 以及非线性微环谐振腔中的耗散孤子 [95]中观察到。在Ω ≈ 3。5 rad/fs附近激发的另一频率带，可归因于方程（22b）所描述的四波混频共振。在$z/z_0 = 28$。6处传播过程的谱图如图6（c）所示，揭示出共振辐射以脉冲式方式从振荡孤子分子中发出。

5. 总结与结论

总之，我们讨论了修正非线性薛定谔方程中双色脉冲复合体沿z方向传播的若干方面。该方程具有正的群速度色散系数和负的四阶色散系数。因此，我们考察了两个脉冲在反常色散的不同区域中的相互作用动力学；尽管频率间隔很大，它们仍实现了群速度匹配。

我们已经证明，脉冲之间的相互束缚作用可以表现为不同形式，具体取决于每个脉冲所受自相位调制和交叉相位调制的相对强度。在极限情况下，所得束缚态由一个强俘获脉冲（即一个孤子）和一个弱俘获脉冲组成。我们证明，这种情况下可以实现量子力学束缚态的光学类比，其由薛定谔型本征值问题 [24] 决定。由此产生的光子元原子甚至支持其束缚态发生拉比型振荡，这与量子阱中波包的往复动力学相似 [67]。我们还通过在俘获孤子与俘获脉冲之间引入群速度失配，探究了这些元原子的稳定性极限。随着扰动强度增加，束缚态的部分成分会逃离孤子，其效果类似于量子力学原子的电离。这些发现补充了我们先前关于双色脉冲复合体解体动力学的研究 [95]。

对于脉冲间相互束缚作用主要由交叉相位调制主导的更一般情形，我们讨论了一种简化建模方法，可用于确定一对束缚脉冲的同时解。当子脉冲振幅差异很大时，所得解在极限情况下呈现出上述超原子的特征。此外，通过利用底层传播模型的对称性，我们以闭式刻画了一类特殊解，它们构成真正的双色孤子对 [30], 。这类特殊解称为广义色散克尔孤子，也已在文献 [26] 中推导得出。我们给出了数值结果，展示了此类脉冲复合体复杂的传播动力学，并将其称为双色孤子分子。具体而言，我们证明，孤子分子具有极其稳健的振动特性；在保守的非线性薛定谔方程系统中，这种行为难以实现。子脉冲这种非定常的 z 周期性动力学会触发共振辐射。利用相位匹配条件，可以精确预测由此产生的多峰谱带的位置 [70, 55]。由于孤子分子的子结构多种多样，其发射光谱也呈现出各种复杂形式。尤其是，当振荡的孤子分子由一对子脉冲组成时，内在对称性会导致共振谱出现简并，使其频谱图轨迹呈现出日本梳篦的形状。额外扰动会解除已有简并，并产生更复杂的发射光谱，其特征是不同的谱带可分别归因于共振切伦科夫辐射和额外的四波混频过程。这种多频辐射的出现，尤其是其简并形式，是具有多个零色散点的非线性波导中的一种基本现象，并有助于阐明双频脉冲复合体令人费解的传播动力学；这类动力学类似于振动分子产生辐射的过程。

最后，我们注意到，最近我们扩展了预计存在这类双色脉冲复合体的系统范围。因此，我们考察了具有单个零色散点和频率依赖非线性（且存在零非线性点）的波导 [96, 97]。在这类波导中，负非线性能够使正常色散区域内的孤子动力学得以实现 [98, 99]。在相应的简化模型（8）对脉冲复合体的描述中，若有 $\beta_2' < 0$ 和 $\beta_2'' > 0$，则要求 $\gamma' > 0$ 和 $\gamma'' < 0$，而与式（11）对应的特征值问题中的势阱由 $\gamma'' < 0$ [54]保证。我们研究了这类波导中非相干耦合双色脉冲复合体的上述束缚机制，展示了在拉曼效应中依然存在的脉冲超原子和类分子束缚态 [31, 54], ，从而有助于理解近期一项研究中观测到的复杂传播动力学；该研究考察了具有单个零色散点和频率依赖非线性的光子晶体光纤中的高阶孤子演化 [100]。

致谢

我们感谢德国研究联合会（DFG）在德国卓越战略框架下，通过卓越集群 PhoenixD（光子学、光学与工程学——跨学科创新）提供的支持（EXC 2122，项目编号 390833453）。

参考文献

[1] A. Hasegawa，《玻璃光纤中多模光脉冲的自约束》，《光学快报》5 (1980年) 416。[2] V. V. Afanas'ev、E. M. Dianov、V. N. Prokhorov、A. M.和Serkin，《亮、暗光孤子的非线性配对》，《实验与理论物理学快报》48 (1988) 588, [《JETP快报》48, 638 (1988)]。[3] V. V. Afanasjev、E. M. Dianov、V. N. Serkin，《通过相位交叉调制实现短亮、暗孤子脉冲的非线性配对》，IEEE量子电子学杂志25 (1989) 2656。[4] C. R. Menyuk，《双折射光纤中孤子的稳定性。I：相等的传播振幅》，《光学快报》12 (1987) 614。[5] F. Mitschke，《光纤：物理与技术》，施普林格，2016。[6] G. P. Agrawal，《非线性光纤光学》，学术出版社，2019。[7] P. G. Drazin、R. S. Johnson，《孤子：入门》，剑桥大学出版社，1989。[8] M. Haelterman、A. Sheppard，《各向同性克尔介质中的分岔现象与多重孤子束缚态》，《物理评论》E 149 (1994) 3376。[9] M. Mitchell、M. Segev、T. Coskun、D. Christodulides，《自陷空间非相干光束理论》，《物理评论快报》79 (1997) 4990。[10] B. Tan、J. P. Boyd，《具有交叉调制的两条三次薛定谔方程中的耦合模包络孤立波：解析解及碰撞，并应用于罗斯贝波》，《混沌、孤子与分形》11 (2000) 1113。[11] B. Tan、S. Liu，《斜压大气中孤子的碰撞相互作用》，《大气科学杂志》52 (1995) 1501–1512。

[12] A. Demircan、S. Amiranashvili、G. Steinmeyer, 《利用光学事件视界以光控光》, 《物理评论快报》106 (2011) 163901。[13] R. Smith, 《非均匀流中短重力波的反射》, 《剑桥哲学学会数学学报》78 (1975) 517。[14] C. M. de Sterke, 《光学推扫》, 《光学快报》17 (1992) 914。[15] T. G. Philbin、C. Kuklewicz、S. Robertson、S. Hill、F. K¨onig、U. Leonhardt, 《光纤事件视界类比》, 《科学》319 (2008) 1367–1370。[16] D. Faccio, 《用于引力类比和类霍金辐射的激光脉冲类比》, 《当代物理学》53 (2) (2012) 97–112。[17] B. W. Plansinis、W. R. Donaldson、G. P. Agrawal, 《光束反射与折射的时间类比是什么？》, 《物理评论快报》115 (2015) 183901。[18] A. Demircan、S. Amiranashvili、C. Br´ee、G. Steinmeyer, 《通过双脉冲碰撞产生可压缩的倍频程展宽超连续谱》, 《物理评论快报》110 (2013) 233901。[19] A. Demircan、S. Amiranashvili、C. Br´ee、U. Morgner、G. Steinmeyer, 《用于在中红外产生少周期脉冲的可调脉冲压缩方案》, 《光学快报》39 (2014) 2735。[20] I. Babushkin、S. Amiranashvili、C. Br´ee、U. Morgner、G. Steinmeyer、A. Demircan, 《啁啾对群速度视界处脉冲压缩的影响》, 《IEEE光子学杂志》8 (2016) 1。[21] R. Driben、F. Mitschke、N. Zhavoronkov, 《超连续谱产生后期光子晶体光纤中拉曼诱导孤子与色散波的级联相互作用》, 《光学快报》18 (25) (2010) 25993–25998。[22] A. Demircan、S. Amiranashvili、C. Br´ee、C. Mahnke、F. Mitschke、G. Steinmeyer, 《光学事件视界处加速孤子引发的流氓波形成》, 《应用物理B》115 (2014) 343–354。[23] D. V. Skryabin、A. V. Gorbach, 《专题综述：透过光学超连续谱的棱镜观察孤子》, 《现代物理评论》82 (2010) 1287–1299。[24] O. Melchert、S. Willms、S. Bose、A. Yulin、B. Roth、F. Mitschke、U. Morgner、I. Babushkin、A. Demircan, 《具有双频的孤子分子》, 《物理评论快报》123 (2019) 243905。[25] O. Melchert、S. Willms、U. Morgner、I. Babushkin、A. Demircan, 《从双频脉冲复合体到逃逸孤子的转变》, 《科学报告》11 (2021) 11190。[26] K. K. K. Tam、T. J. Alexander、A. Blanco-Redondo、C. M. de Sterke, 《广义色散克尔孤子》, 《物理评论A》101 (2020) 043822。[27] J. P. Lourdesamy、A. F. J. Runge、T. J. Alexander、D. D. Hudson、A. Blanco-Redondo、C. M. de Sterke, 《通过线性色散工程优化非线性增强》, 《美国光学学会杂志B辑》40 (2) (2023) 273–278。[28] D. Mao、H. Wang、H. Zhang、C. Zeng、Y. Du、Z. He、Z. Sun、J. Zhao, 《通过腔内群时延调制实现同步多波长孤子光纤激光器》, 《自然通讯》12 (2021) 6712。[29] Y. Cui、Y. Zhang、X. Yao、X. Hao、Q. Yang、D. Chen、X. Liu、X. Liu、B. Malomed, 《同步锁模光纤激光器中的双色孤子分子复合体》, 预印本见 https://arxiv.org/abs/2211.06061 (2022)。[30] O. Melchert、A. Demircan, 《非相干双色脉冲复合体》, 《光学快报》46 (2021) 5603。[31] S. Willms、O. Melchert、S. Bose、A. Yulin、I. Oreshnikov、U. Morgner、I. Babushkin、A. Demircan, 《具有双频的异核孤子分子》, 《物理评论A》105 (2022) 053525。[32] J. P. Lourdesamy、J. Widjaja、G. Hawi、S. Kesar wani、A. F. J. Runge、C. M. de Sterke, 《通过线性色散工程优化非线性增强》, 《美国光学学会杂志B辑》40 (2) (2023) 273–278。[33] O. Melchert、A. Yulin、A. Demircan, 《具有负四阶群速度色散的广义Lugiato–Lefever模型中局域耗散结构的动力学》, 《光学快报》45 (2020) 2764。[34] G. Moille、Q. Li、S. Kim、D. Westly、K. Srinivasan, 《色散工程化氮化硅谐振器中的锁相双色单孤子微梳》, 《光学快报》43 (2018) 2772–2775。[35] M. Stratmann、T. Pagel、F. Mitschke, 《时间孤子分子的实验观测》, 《物理评论快报》95 (2005) 143902。[36] A. Hause、H. Hartwig、M. B¨ohm、F. Mitschke, 《时间孤子分子的束缚机制》, 《物理评论A》78 (2008) 063817。[37] E. Jones、T. Oliphant、P. Peterson等, 《SciPy：用于科学计算的开源Python工具》, http://www.scipy.org/, [在线；访问日期：2020-03-09] (2001–2018)。[38] P. Virtanen、R. Gommers、T. E. e. a. Oliphant, 《SciPy 1.0：Python科学计算的基础算法》, 《自然方法》17 (2020) 261。[39] M. F. Saleh、F. Biancalana, 《充气光子晶体光纤中的孤子-辐射俘获》, 《物理评论A》87 (2013) 043807。[40] A. M. Heidt, 《用于模拟光纤中超连续谱产生的高效自适应步长法》, 《光波技术杂志》27 (18) (2009) 3984。[41] O. Melchert、A. Demircan, 《py-fmas：一种基于解析信号前向模型模拟超短光脉冲传播的Python软件包》, 《计算机物理通讯》273 (2022) 108257。[42] W. H. Press、S. A. Teukolsky、W. T. Vetterling、B. P. Flannery, 《Numerical Recipes》第3版：科学计算的艺术，剑桥大学出版社，美国，2007。[43] J. Weideman、B. Herbst, 《求解非线性薛定谔方程的分步傅里叶方法》, 《SIAM数值分析杂志》23 (1986) 485。[44] J. Hult, 《用于模拟光纤中超连续谱产生的四阶相互作用绘景龙格–库塔法》, 《光波技术杂志》25 (12) (2007) 3770。[45] T. Taha、M. Ablowitz, 《某些非线性演化方程的解析与数值方面。II. 数值方法：非线性薛定谔方程》, 《计算物理学杂志》55 (1984) 203。[46] P. L. DeVries, 《分裂算符傅里叶变换法在求解非线性薛定谔方程中的应用》, 《美国物理联合会会议论文集》160 (1987) 269。[47] O. Melchert、B. Roth、U. Morgner、A. Demircan, 《OptFROG——具有优化时频分辨率的解析信号谱图》, 《SoftwareX》10 (2019) 100275。[48] L. Cohen, 《时频分布——综述》, 《IEEE论文集》77 (1989) 941–981。[49] J. M. Dudley、X. Gu、L. Xu、M. Kimmel、E. Zeek、P. O'Shea、R. Trebino、S. Coen、R. S. Windeler, 《互相关频率分辨

光子晶体光纤中宽带连续谱产生的光学门控分析：模拟与实验，《光学快报》10 (2002) 1215。[50] N. Akhmediev, M. Karlsson，光纤中孤子发出的切伦科夫辐射，《物理评论A》51 (1995) 2602–2607。[51] S. Pickartz, U. Bandelow, S. Amiranashvili，色散波馈能孤子的绝热理论，《物理评论A》94 (2016) 033811。[52] H. A. Haus, E. P. Ippen，孤子的群速度，《光学快报》26 (2001) 1654–1656。[53] J. P. Lourdesamy, J. Widjaja, G. Hawi, S. Kesarwani, A. F. J. Runge, C. M. de Sterke，通过线性色散工程优化非线性增强，《美国光学学会杂志B辑》40 (2023) 273–278。[54] O. Melchert, S. Bose, S. Willms, I. Babushkin, U. Morgner, A. Demircan，具有零非线性点的波导中的双色脉冲复合体，《光学快报》48 (2023) 518–521。[55] O. Melchert, S. Willms, I. Oreshnikov, A. Yulin, U. Morgner, I. Babushkin, A. Demircan，振荡双色孤子分子的共振梳状多频辐射，《新物理学杂志》25 (2023) 013003。[56] T. Ueda, W. L. Kath，非线性光纤中耦合孤子的动力学，《物理评论A》42 (1990) 563–571。[57] C. R. Menyuk，双折射光纤中孤子的稳定性：II. 任意振幅，《美国光学学会杂志B辑》5 (1988) 392–402。[58] V. V. Afanasjev, E. M. Dianov, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin，亮、暗光孤子的非线性配对，《实验与理论物理学快报》48 (1988) 588。[59] S. Trillo, S. Wabnitz, E. M. Wright, G. I. Stegeman，由交叉相位调制诱导的光学孤立波，《光学快报》13 (10) (1988) 871–873。[60] V. V. Afanasyev, Y. S. Kivshar, V. V. Konotop, V. N. Serkin，耦合暗、亮光孤子的动力学，《光学快报》14 (15) (1989) 805–807。[61] V. K. Mesentsev, S. K. Turitsyn，光纤中矢量孤子的稳定性，《光学快报》17 (21) (1992) 1497–1499。[62] N. Akhmediev, A. Ankiewicz，多孤子复合体，《混沌》10 (3) (2000) 600–612。[63] L. D. Landau, L. M. Lifshitz，《量子力学：非相对论理论》，第三版：第3卷，爱思唯尔科学出版社，牛津，1981。[64] J. Lekner，sech势的无反射本征态，《美国物理学杂志》75 (2007) 1151。[65] M. Abramowitz, I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表与数学表》，多佛出版社，纽约，1972。[66] O. Melchert, S. Willms, I. Babushkin, U. Morgner, A. Demircan，双色孤子超原子与分子：补充材料，Zenodo 存储库，网址：https://doi.org/10.5281/zenodo.7686290 (2023)。[67] P. Bocchieri, A. Loinger，量子复现定理，《物理评论》107 (1957) 337。[68] D. F. Styer，无限深方势阱中的量子复苏与经典周期性，《美国物理学杂志》69 (2001) 56–62。[69] I. Babushkin, O. Melchert, U. Morgner, A. Demircan，以光速飞行的时间腔中的光子俘获，预印本，网址：https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1982423/v1 2022 ()。

[70] I. Oreshnikov, O. Melchert, S. Willms, S. Bose, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, A. Yulin，双色孤子对外部色散波的切伦科夫辐射与散射，《物理评论A》106 (2022) 053514。[71] M. Haelterman, A. Sheppard, A. Snyder，各向同性非线性色散介质中的束缚矢量孤波，《光学快报》18 (1993) 1406。[72] Y. Silberberg, Y. Barad，各向同性光纤中的旋转矢量孤波，《光学快报》20 (1995) 246。[73] D. Pelinovsky, Y. Kivshar，多分量孤波的稳定性判据，《物理评论E》62 (2000) 8668。[74] C. Par´e，矢量孤波的精确变分方法，《物理评论E》54 (1996) 846。[75] Z. Musslimani, J. Yang，二维光子晶格中的光自俘获，《美国光学学会杂志B辑》21 (2004) 973。[76] M. Ablowitz, Z. Musslimani，用于计算非线性系统自局域解的谱重整化方法，《光学快报》30 (2005) 2140。[77] G. Fibich, Y. Sivan, M. Weinstein，具有周期性非线性微结构的非线性薛定谔方程的束缚态，《物理学D》217 (2006) 31。[78] T. Lakoba, J. Yang，适用于任意形式非线性的标量与矢量哈密顿方程的广义 Petviashvili 迭代法，《计算物理学杂志》226 (2007) 1668。[79] J. Yang, L. T.I.，用于一般非线性波动方程孤波的普遍收敛平方算子迭代法，《应用数学研究》118 (2007) 153。[80] T. Lakoba，求解基态孤波的共轭梯度法，《物理学D》238 (2009) 2308。[81] J. Yang，用于孤波计算的牛顿-共轭梯度法，《计算物理学杂志》228 (2009) 7007。[82] M. Chiofalo, S. Succi, M. Tosi，采用显式虚时间算法求解受限相互作用玻色–爱因斯坦凝聚体的基态，《物理评论E》62 (2000) 7438。[83] J. Yang, L. T.I.，用于计算孤波的加速虚时间演化方法，《应用数学研究》120 (2008) 265。[84] N. Dror, B. Malomed，非线性势阱中的孤子与涡旋，《光学杂志》18 (2016) 014003。[85] J. Kierzenka, L. Shampine，一种基于残差控制和 MATLAB PSE 的边值问题求解器，《ACM 数学软件汇刊》27 (2001) 300。[86] M. V. Tratnik, J. E. Sipe，双折射光纤中的束缚孤波，《物理评论A》38 (1988) 2011–2017。[87] D. N. Christodoulides, R. I. Joseph，双折射非线性色散介质中的矢量孤子，《光学快报》13 (1988) 53。[88] Y. S. Kivshar，双折射光纤中的孤子稳定性：解析方法，《美国光学学会杂志B辑》(1990) 2204。[89] M. V. Tratnik，双折射光纤中的扭曲孤子，《光学快报》17 (1992) 917。[90] V. V. Afanasjev，光纤激光器中的孤子偏振旋转，《光学快报》20 (1995) 270。[91] A. V. Yulin, D. V. Skryabin, P. S. J. Russell，高阶色散光纤中线性波与孤子的四波混频，《光学快报》29 (20) (2004) 2411–2413。[92] D. V. Skryabin, A. V. Yulin，光纤中孤子与色散波混频产生新频率的理论，《物理评论E》72 (2005) 016619。[93] M. Conforti, S. Trillo, A. Mussot, A. Kudlinski，局域波包激发多重共振辐射的参量激发，《科学报告》5 (2015) 9433。

[94] I. Oreshnikov, R. Driben, A. Yulin，双芯光纤中零色散波长附近振荡束缚孤子的色散辐射与状态切换，《物理评论A》96 (2017) 013809。[95] O. Melchert, A. Demircan, A. Yulin，光纤腔中耗散孤子的多频辐射，《科学报告》10 (2020) 8849。[96] R. Driben, A. Husakou, J. Herrmann，掺银纳米粒子玻璃中的低阈值超连续谱产生，《光学快报》17 (2009) 17989–17995。[97] S. Bose, R. Chattopadhyay, S. Roy, S. K. Bhadra，掺银纳米粒子的光子晶体光纤中的非线性动力学研究，《美国光学学会杂志B辑》33 (2016) 1014–1021。[98] S. Bose, A. Sahoo, R. Chattopadhyay, S. Roy, S. K. Bhadra, G. P. Agrawal，零非线性波长对掺银纳米粒子光子晶体光纤的影响，《物理评论A》94 (2016) 043835。[99] F. R. Arteaga-Sierra, A. Antikainen, G. P. Agrawal，频率依赖克尔非线性光子晶体光纤中的孤子动力学，《物理评论A》98 (2018) 013830。[100] S. Zhao, R. Guo, Y. Zeng，频率依赖克尔非线性对具有一个零色散波长的光子晶体光纤中高阶孤子演化的影响，《物理评论A》106 (2022) 033516。