arXiv:2303.01280v2 [math.MG] 9 Sep 2023

具有变形性质的 PI 空间中等周集的拓扑正则性

Gioacchino Antonelli*、Enrico Pasqualetto†、Marco Pozzetta‡ 和 Ivan Yuri Violo§

2023年9月12日

摘要

我们证明了具有适当变形性质的 PI 空间中等周集的拓扑正则性结果。该性质规定了集合在球扰动下周长增量的控制方式。具体而言，我们证明等周集是开集，满足边界密度估计；并且在单位球体积具有一致下界的条件下，等周集是有界的。我们的结果尤其适用于可能发生塌缩的 RCD(K,N) 空间类。因此，在具有欧几里得体积增长的可能发生塌缩的 RCD$(0,N)$ 空间上，等周不等式的刚性结论无需额外假设等周集有界即可成立。即使在欧几里得情形，我们的策略也颇具价值，因为它简化了一些经典论证。

MSC（2020年）。主要分类：53C23，49Q20。次要分类：26B30，26A45，49J40。关键词：等周集、PI 空间、变形性质。

1 引言

本文研究长度 PI 空间，即度量测度空间 (X，d m)，其中 m 是一致局部倍增博雷尔测度，满足弱局部 (1，1)-庞加莱不等式（见定义 2.4），且任意两点 x，y 之间的距离等于连接 x 和 y的曲线长度的下确界。度量测度空间上的 BV 函数理论已十分成熟 [3, 35] ，因此可以在这一广义框架下处理有限周长集。由此，考虑经典等周问题是有意义的，其定义如下：求解下列极小化问题：

$$\inf\big\{P(E)\,\big|\,E\subseteq \mathrm{X}\ \text{Borel},\,\mathfrak{m}(E)=v\big\},$$

对于任意指定的体积 $v\in(0,\mathfrak{m}(\mathrm{X}))$，其中 $P(E)$ 表示 E 的周长。使前述下确界达到最小值的集合 E 称为等周集，或等周区域。

*ga2434@nyu.edu，库朗数学科学研究所（纽约大学），纽约默瑟街251号，邮编10012，美国。

†enrico.e.pasqualetto@jyu.fi，数学与统计学系，邮政信箱 35（MaD），FI-40014 芬兰于韦斯屈莱大学。

‡marco.pozzetta@unina.it，数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，Via Cintia，Monte S.Angelo，80126 意大利那不勒斯。§ivan.y.violo@jyu.fi，数学与统计学系，邮政信箱 35（MaD），FI-40014 芬兰于韦斯屈莱大学。

关于等周集的一个基本问题涉及其拓扑正则性。具体而言，我们旨在证明：在选取适当代表元后，等周集是开集、有界，并且在拓扑边界上的点处满足密度估计。在欧几里得空间中，拓扑正则性可由[25], 随后推广至 [41]。欧几里得情形下的证明还可进一步简化，参见 [34, 例 21.3、定理 21。11]。对于黎曼流形，该结果归功于 [36]。在 [6] 中，该结果被推广至 非塌缩 RCD$(K,\ N)$ 空间 $(\mathrm{X},\ \mathsf{d}\ \mathcal{H}^N)$，即 $N \in \mathbb{N}$且 $\mathfrak{m}$与豪斯多夫测度一致 $\mathcal{H}^N$。我们还提及 [31], ，该文研究了 PI 空间中拟极小集的情形。

本文旨在证明具有所谓变形性质（我们将在下文介绍，精确定义见定义3.3 ）的长度 PI 空间这一一般情形下，等周集的拓扑正则性。若度量测度空间 $(\mathrm{X},\mathsf{d}\ \mathfrak{m}$满足以下条件，我们就称其具有变形性质：给定一个有限周长集 $E \subseteq \mathrm{X}$ 和一个点 $x \in \mathrm{X}$，我们可以找到 R, $C > 0$ 使得

$$P(E \cup B_r(y)) \leq C\frac{\mathfrak{m}(B_r(y) \setminus E)}{r} + P(E) \quad \text{for every } y \in B_R(x) \text{ and } r \in (0, R). \tag{1.1}$$

具有变形性质的空间类别汇集于备注3.4中。值得注意的是，该类别包括RCD(K, N) 空间 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$, 这得益于 [6, 定理 1。1]。本文不介绍RCD 空间，读者可参阅综述文章 [4] 及其中的参考文献。

我们指出，属于 PI 空间并不意味着其满足变形性质，例子见备注3.5 和备注3.6。不过，据我们所知，尚无例子表明某个 PI 空间在对等周集 E进行检验时不满足变形性质；也没有例子表明某个等周集的本质内部在拓扑上不是开集。

在光滑情形下，局部有限周长集合的变形性质众所周知 [34, 引理 17。21], ，并且它们是若干经典论证中至关重要的工具。例如，我们可参阅[2, VI.2(3)], ，以及 [24, 引理 4。5] 和 [37, 引理 3。6] （关于次黎曼情形），以及 [21, 38] （研究带权情形下等周问题的文献）。

事实上，将等周集或某个变分问题的极小集的拓扑正则性与变形性质结合起来，往往非常有力。例如，若已知这样的集合 E 有一个开代表元，就可以在内部的点y处应用 (1.1), 此时 $\mathfrak{m}(E\cup B_r(y)) > \mathfrak{m}(E)$仅对充分大的半径 r成立，因此 (1.1)意味着可以增加 E 的体积，同时使变形后集合$E\cup B_r(y)$的周长随质量增量 $\mathfrak{m}(B_r(y)\setminus E)$线性增长。若所考虑集合的补集有开代表元，对补集应用 (1.1)也可得到类似结论。注意，只有在集合的拓扑正则性得到确立之后，才能从 (1.1)推出上述带有线性控制的改进变形性质。这与欧几里得情形形成对比：在那里，较强形式的变形性质总是成立 [34, 引理 17.21]。后一个结果是通过向量场流对有限周长集进行变形得到的；在度量情形中，这种论证无法实现。因此，在我们的框架中，最简单的欧几里得证明无法用于证明等周集的拓扑正则性 [34, 例 21.3] ，我们必须另寻论证方法。

现在我们可以陈述主要结果，它将周长的体积约束极小化者的拓扑正则性推广到更一般的层次，即相对于任何局部保持测度的有界变差扰动都使周长达到极小的集合，见定义3.1。我们将分别用 $E^{(1)}$、 $E^{(0)}$和 $\partial^e E$ 表示博雷尔集 $E \subseteq$X 的本质内部、本质外部和本质边界；其定义见第2.2 节。

定理 1.1（体积约束极小化者的拓扑正则性）。设 (X,d $\mathfrak{m}$) 是具有变形性质的长度 PI 空间。设 $E \subseteq$ X 是周长的体积约束极小化者。那么 $E^{(1)}$ =int($E^{(1)}$) 且 $E^{(0)}$ =int($E^{(0)}$)。特别地，$E^{(1)}, E^{(0)}$ 是开集，且 $\partial E^{(1)} = \partial E^{(0)} = \partial^e E$。

前述定理给出了体积约束极小化者在本质边界各点处的体积密度估计和周长测度密度估计，见定理3.9。对于等周集，我们还可以证明其有界性。具体而言：

定理 1.2。设 (X, d $\mathfrak{m}$) 是具有变形性质的长度 PI 空间。假设 $\inf_{x\in \mathrm{X}} \mathfrak{m}(B_1(x)) > 0$。设 $E \subseteq$ X 是一个等周集。那么 $E^{(1)}$ 有界。特别地，X 中的每个等周集都有一个有界代表。

由于 RCD(K,N) 空间若满足 $N < \infty$，则为长度 PI 空间（见 [39, 40] 和 [33]）；并且如上所述，它们具有变形性质。结合定理 1.1 和定理 1.2 ，可得如下结果。

推论 1.3。设 (X, d $\mathfrak{m}$) 是满足 $N < \infty$ 的 RCD(K,N) 空间。设 $E \subseteq$X 是一个等周集。则集合 $E^{(1)}$, $E^{(0)}$ 是开集，且 $\partial^e E = \partial E^{(1)} = \partial E^{(0)}$。此外，若还有 $\inf_{x\in \mathrm{X}} \mathfrak{m}(B_1(x)) > 0$，则 $E^{(1)}$ 有界。

对于非塌缩的 RCD(K,N) 空间，上述结果此前已在 [6,定理 1 中证明。4]。

作为推论 1.3 的一个应用，我们可以改进 RCD$(0,N)$ 空间 (X, d $\mathfrak{m}$上尖锐等周不等式中刚性部分的结论，其中这些空间具有欧几里得体积增长。我们回顾一下，“欧几里得体积增长”是指渐近体积比

$$\mathrm{AVR}(\mathrm{X},\mathrm{d},\mathfrak{m}) := \lim_{R\to\infty} \frac{\mathfrak{m}(B_R(p))}{\omega_N R^N}, \quad \text{for some } p \in \mathrm{X},$$

该空间的渐近体积比严格为正。回顾一下，上述极限的存在性由 $(0,+\infty) \ni r \mapsto \mathfrak{m}(B_r(p))/\omega_N r^N$ 的单调性保证，而这一单调性又源自 Bishop–Gromov 不等式（例如见 [40]）。注意，条件 AVR(X, d $\mathfrak{m}$) > 0意味着 $\inf_{x\in \mathrm{X}} \mathfrak{m}(B_1(x)) > 0$。这些空间上的尖锐等周不等式见下文 (1.2)，其在不同一般性层次下于 [1, 7, 9, 13, 16, 17] 中得到证明。在 [7] 中，作者证明了非塌缩 RCD$(0,N)$ 空间上等周不等式的刚性。最近的 [17, 定理 1.5], 中，作者证明了所有具有欧几里得体积增长的 RCD$(0,N)$ 空间上的该不等式的刚性，另需假设达到等号的集合有界。应用我们的推论 1.3 可以去除上述有界性要求，从而得到以下无条件的刚性结论。

定理 1.4（具有欧几里得体积增长的 RCD(0, N) 空间上的尖锐刚性等周不等式）。设 (X, d $\mathfrak{m}$) 是具有 $1 < N < \infty$ 欧几里得体积增长的 RCD(0, N) 空间。那么对于每个有限周长集 $E \subseteq$X，若 $\mathfrak{m}(E) < +\infty$，则有

$$P(E) \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} \mathrm{AVR}(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m})^{\frac{1}{N}} \mathfrak{m}(E)^{\frac{N-1}{N}}. \tag{1.2}$$

此外，(1.2) 对于某个有限周长集 $E \subseteq$X 满足 $\mathfrak{m}(E) \in (0, +\infty)$ 中的等号成立，当且仅当 X 与某个 RCD$(N-2, N-1)$ 空间上的欧几里得度量测度锥等距同构，并且 E 除零测集外，与以 X的某个锥尖为中心的球一致。

在前述定理中，我们所说的 X 是某个 RCD$(N-2, N-1)$ 空间上的欧几里得度量测度锥，是指存在一个紧的 RCD$(N-2, N-1)$ 度量测度空间 $(Z, \mathrm{d}_Z, \mathfrak{m}_Z)$，使得 (X, d $\mathfrak{m}$) 作为度量测度空间与度量测度锥 $(C(Z), \mathrm{d}_c, t^{N-1}\mathrm{d}t \otimes \mathfrak{m}_Z)$ 同构，其中 d_c 是利用 d_Z构造的锥度量。在 $1 < N < 2$的情形下，前述陈述中的刚性部分意味着空间 X要么是加权欧几里得半直线，要么是加权欧几里得直线。

我们强调，定理 1.4 并非可以直接从 [7], 中的结果推出；根据该结果，同样的结论适用于非塌缩空间类。事实上，具有 RCD$(0, N)$ 条件、满足 $1 < N < \infty$ 且具有欧几里得体积增长的空间未必是非塌缩的。一个简单的例子是加权欧几里得半直线（$[0, +\infty)$，d_{eu}，$t^{N-1}\mathrm{d}t$），其中 $N > 1$。

现在我们简要讨论定理 1.1 的证明策略。如上所述，欧几里得证明 [34, Example 21.3] 无法适用于我们的情形。与经典方法[25, 41], 一样，我们通过与利用变形性质的合适竞争者进行比较，来获得关于体积约束极小化者的信息；但我们的论证有所不同，更直接也简短得多。[25, 41] 的策略是先证明 E 有一个内点和一个外点，即 int$(E^{(1)}) \neq \varnothing$ 以及 int$(E^{(0)}) \neq \varnothing$（见[25, 定理 1]），然后推出 E 是一个 (Λ, r_0)-周长极小化者，最终得到 E 是开集。与此不同，我们直接证明：若 $x \in E^{(0)}$ 和 $y \in E^{(1)}$ 是任意两点，则 $x \in$ int$(E^{(0)})$ 且$y \in$ int$(E^{(1)})$。为此，我们不再像 [6, 25, 41], 那样推导 $\mathfrak{m}(B_r(y) \setminus E)$ 衰减的定量估计，而是采用一种更定性的处理方法。更准确地说，关键在于证明（见关键引理 3.7）：如果函数 $v(r) := \mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)$ 趋于零的速度比函数 $w(r) := \mathfrak{m}(B_r(y) \setminus E)$ 慢，那么 $x \in$ int$(E^{(0)})$（反之亦然，$y \in$ int$(E^{(1)})$）。这里“更慢”大致是指，对许多$r > 0$ 而言，$v(r) \geq w(r)$ 在测度论意义下成立（精确表述见引理 3.7）。不过，通过将 E 与其补集 X $\setminus E$互换，我们总能确保 $v(r)$ 比 $w(r)$ 趋于零的速度慢，从而推出 $x \in$ int$(E^{(0)})$。由对称性，同样可得 $y \in$ int$(E^{(1)})$。

我们指出，[25, 41] 的策略似乎无法推广到我们的情形，除非我们要求额外的假设——例如阿尔福斯正则性——而我们并不希望作出这样的要求（这样才能得到适用于整个坍缩 RCD(K, N) 空间类的结果）。这促使我们寻找拓扑结果的另一种证明。我们相信，即使在欧几里得情形下，这一证明也值得关注，因为它简化了 [25], 中的经典论证，同时仍然（必然）避免使用环境空间的光滑结构。

我们以明确提出以下开放问题作为引言的结尾。

问题 1.5. 设 (X, d $\mathfrak{m}$) 为长度 PI 空间，且 $E \subseteq$ X 是周长的体积约束极小化者。那么 $E^{(1)}$ 是开集吗?

致谢。 本研究的部分工作于2022年11月在多伦多的菲尔兹研究所进行，当时正值非光滑黎曼与洛伦兹几何专题项目期间。作者衷心感谢研究所的热情接待和令人振奋的学术氛围。作者感谢 Panu Lahti 指出了备注 3.6 中的例子。作者还感谢 Camillo Brena、Vesa Julin、Tapio Rajala 和 Daniele Semola 就本文主题展开的富有成效的讨论。作者也感谢审稿人认真细致地阅读本文，并指出了论文初稿中的一处错误。

2 预备知识

给定度量空间 (X, d)，我们用 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ 表示从 X 到 $\mathbb{R}$ 的所有局部利普希茨函数所构成的空间，即满足以下条件的函数 $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$：对于任意 $x \in \mathrm{X}$，都存在 $r_x > 0$，使得 f 在 $B_{r_x}(x)$ 上是利普希茨函数。函数 $f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ 的斜率 $\mathrm{lip}(f)\colon \mathrm{X} \to [0,+\infty)$ 定义为 $\mathrm{lip}(f)(x) := 0$，若 $x \in \mathrm{X}$ 是一个孤立点，则

$$\mathrm{lip}(f)(x) := \varlimsup_{y \to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{\mathsf{d}(x,y)} \qquad \text{if } x \in \mathrm{X} \text{ is an accumulation point.}$$

集合 $E \subseteq \mathrm{X}$ 的拓扑内部和拓扑边界分别记为 $\mathrm{int}(E)$ 和 ∂E。若对任意 $x \in \mathrm{X}$，都存在 $r_x > 0$，使得 $\mu(B_{r_x}(x)) < +\infty$，则称 X 上的博雷尔测度 $\mu \geq 0$ 是局部有限的；若当 $B \subseteq \mathrm{X}$ 为有界博雷尔集时，$\mu(B) < +\infty$，则称 μ 是有界有限的。显然，每个有界有限测度都是局部有限的；反之，例如当 (X, d) 是正规的时，结论也成立，即 X 的有界闭子集都是紧集。注意，完备可分度量空间上的局部有限博雷尔测度是 σ-有限的。

2.1 度量测度空间中的有限周长集

本文中，度量测度空间 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 指的是完备可分度量空间 (X, d)，并配备有界有限博雷尔测度 $\mathfrak{m} \geq 0$ 于 X 上。沿用 [35], 的定义，我们定义全变差 $|\mathbf{D}f|(B) \in [0,+\infty]$，对于给定函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ 在博雷尔集 $B \subseteq \mathrm{X}$ 上，定义如下：

$$|\mathbf{D}f|(B) := \inf_{B \subseteq \Omega \text{ open}} \inf \left\{ \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{lip}(f_n)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \;\middle|\; (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ f_n \to f \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \right\}.$$

若存在 X 的某个开覆盖 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|\mathbf{D}f|(\Omega_n) < +\infty$ 成立，则 $|\mathbf{D}f|$ 是 X 上的局部有限博雷尔测度。若博雷尔集 $E \subseteq \mathrm{X}$ 满足 $P(E,\cdot) := |\mathbf{D}\chi_E|$ 是局部有限测度，则称其具有局部有限周长；该测度称为 E 的周长测度。当 $P(E) := P(E,\mathrm{X}) < +\infty$ 时，我们称 E 具有有限周长。

注记2.1. 若 $E \subseteq \mathrm{X}$ 是一个局部有限周长集，且 $x \in \mathrm{X}$ 是给定的点，则$P(E, \partial B_r(x)) = 0$对除可数多个半径 $r > 0$之外的所有半径均成立。这是因为$\partial B_r(x) \cap \partial B_s(x) = \varnothing$只要 $0 < r < s$，并且 $P(E,\cdot)$ 是 σ- 有限的。■

对任意 $f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$，均有 $|\mathbf{D}f|$ 是局部有限测度，且 $|\mathbf{D}f| \leq \mathrm{lip}(f)\mathfrak{m}$。

定理 2.2（余面积公式 [35, 命题 4.2]）。设 $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间。固定任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$，使得 $|\mathbf{D}f|$ 是一个局部有限测度。固定一个博雷尔集 $E \subseteq \mathrm{X}$。则 $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(\{f < t\}, E) \in [0,+\infty]$ 是一个博雷尔可测函数，且有

$$|\mathbf{D}f|(E) = \int_{\mathbb{R}} P(\{f < t\}, E)\,\mathrm{d}t.$$

推论 2.3。设 (X, d 𝔪) 是一个度量测度空间。固定 $x \in$ X 和一个博雷尔集 $E \subseteq$ X。定义 f: (0, $+\infty$) $\to \mathbb{R}$ 为 $f(r) := |\mathrm{D}\mathsf{d}_x|(E \cap B_r(x))$，对每个 $r > 0$成立，其中记 $\mathsf{d}_x := \mathsf{d}(\cdot, x) \in$ LIP(X)。则函数 f 是局部绝对连续的，且有$f'(r) = P(B_r(x)\ E)$，对 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $r > 0$成立。

证明。由余面积公式可得，对于每个 $r > 0$，$f(r) = \int_{\mathbb{R}} P\big(\{\mathsf{d}_x < s\}, E \cap B_r(x)\big)\,\mathrm{d}s = \int_0^r P(B_s(x)\ E)\,\mathrm{d}s$，因此，对于每个 $r > \tilde{r} > 0$，有 $f(r) - f(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}}^r P(B_s(x)\ E)\,\mathrm{d}s$。于是，$f$局部绝对连续，并且对于 $s \mapsto P(B_s(x)\ E)$ 的每个 Lebesgue 点 r，都有 $f'(r) = P(B_r(x)\ E)$，因此对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $r > 0$，结论成立。 □

2.2 PI 空间

尽管有限周长集的一般理论在任意度量测度空间中都有意义，但在满足某种弱形式的 (1, 1)-庞加莱′不等式的倍增空间这一类空间中，可以使用更精细的微积分理论；我们将这类空间称为 PI 空间。下文将回顾本文采用的 PI 空间定义；关于该主题的全面介绍，参见例如 [12, 29] 。我们还将回顾 PI 空间中有限周长集的一些关键性质。

定义 2.4（PI 空间）。设 (X,d 𝔪) 是一个度量测度空间。那么：

- 如果存在函数 C_D: (0, $+\infty$) $\to$(0, $+\infty$)，使得……，则称 (X, d 𝔪) 一致局部倍增。

$$\mathfrak{m}\big(B_{2r}(x)\big) \le C_D(R)\,\mathfrak{m}\big(B_r(x)\big) \quad \text{for every } 0 < r < R \text{ and } x \in \mathrm{X}.$$

- 如果存在常数 $\lambda \ge 1$ 和函数 C_P: (0, $+\infty$) $\to$ (0, $+\infty$)，使得对任意函数 $f \in$ LIP$_{\mathrm{loc}}$(X)，都有……，则称 (X, d 𝔪) 支持弱局部 (1, 1)-Poincar´e 不等式。

$$\fint_{B_r(x)} \left| f - \fint_{B_r(x)} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \right| \mathrm{d}\mathfrak{m} \le C_P(R)\, r \fint_{B_{\lambda r}(x)} \mathrm{lip}(f)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \quad \text{for all } 0 < r < R \text{ and } x \in \mathrm{X}.$$

- (X,d 𝔪) 是 PI 空间，当且仅当它一致局部倍增且支持弱局部 (1,1)-Poincar´e 不等式。

我们指出，若 (X, d 𝔪) 是一致局部倍增空间，则 (X, d) 是正规的，因此 (X, d) 是局部紧的，并且 (X, d) 上的局部有限博雷尔测度是有界有限的。

注记 2.5. 设 (X, d 𝔪) 是一个 PI 空间，且 (X, d) 是长度空间，也就是说，X 中任意两点之间的距离等于连接它们的可求长曲线的长度下确界。此时，弱局部 (1, 1)-Poincar´e 不等式实际上是强不等式，即它以 $\lambda = 1$ 成立；例如参见 [26, 推论 9.5 和定理 9.7]。此外，(X, d) 的完备性和局部紧性保证了 (X, d) 也是测地空间。■

给定 PI 空间 (X, d 𝔪) 中的博雷尔集 $E \subseteq$ X，我们将其本质内部和本质外部分别定义为

$$E^{(1)} := \left\{ x \in \mathrm{X} \;\middle|\; \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(E \cap B_r(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} = 1 \right\}, \qquad E^{(0)} := \left\{ x \in \mathrm{X} \;\middle|\; \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{m}(E \cap B_r(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} = 0 \right\},$$

。 E 的本质边界定义为 $\partial^e E := \mathrm{X} \setminus (E^{(1)} \cup E^{(0)})$。注意，$E^{(1)}$、 $E^{(0)}$和 $\partial^e E$ 均为博雷尔集，且 $\partial^e E \subseteq \partial E$。由勒贝格微分定理（该定理适用于每个一致局部倍增度量测度空间，参见例如 [27, 定理 1.8]）可知， $\mathfrak{m}(E^{(1)} \Delta E) = 0$ 且 $\mathfrak{m}(E^{(0)} \Delta (\mathrm{X} \setminus E)) = 0$。此外，若 E 是有限周长集，则根据 [3, 定理 5.3]，我们知道 $P(E, \cdot)$ 集中在$\partial^e E$上。

命题 2.6. 设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 PI 空间。设 $E, F \subseteq \mathrm{X}$ 是具有局部有限周长的集合，且 $P(E, \partial^e F) = 0$。那么

$$P(E \cap F, \cdot) \leq P(E, \cdot) \llcorner F^{(1)} + P(F, \cdot) \llcorner E^{(1)}.$$

证明. 根据 [3, 定理 5.3]，我们知道，局部有限周长集合 $G \subseteq \mathrm{X}$ 的周长测度 $P(G, \cdot)$ 可写为 $P(G, \cdot) = \theta_G \mathcal{H}^h|_{\partial^e G}$，其中 θ_G 是一个 Borel 函数：$\mathrm{X} \to (0, +\infty)$，而 $\mathcal{H}^h$ 表示余维一豪斯多夫测度（见 [3,第 5] 节）。由于 $P(E \cap F, \cdot) \leq P(E, \cdot) + P(F, \cdot)$，且 $P(E, \cdot)|_{\mathrm{X} \setminus \partial^e E} = P(F, \cdot)|_{\mathrm{X} \setminus \partial^e F} = 0$，我们推得 $\theta_{E \cap F} \leq \theta_E$ 和 $\theta_{E \cap F} \leq \theta_F$ 分别在 $\partial^e E \setminus \partial^e F$ 和 $\partial^e F \setminus \partial^e E$ 上几乎处处（相对于 $\mathcal{H}^h$）成立。此外，由 $\int_{\partial^e F} \theta_E \mathrm{d}\mathcal{H}^h|_{\partial^e E} = P(E, \partial^e F) = 0$，我们推得 $\mathcal{H}^h(\partial^e E \cap \partial^e F) = 0$。鉴于 $\partial^e (E \cap F) = (\partial^e E \cap F^{(1)}) \sqcup (\partial^e F \cap E^{(1)})$ 除去一个 $\mathcal{H}^h$-零测集后成立，这一点例如可由 [6, 引理 2.5]，的证明得知，因此我们得出

$$\begin{aligned} P(E \cap F, \cdot) &= \theta_{E \cap F} \mathcal{H}^h|_{\partial^e (E \cap F)} = \theta_{E \cap F} \mathcal{H}^h|_{\partial^e E \cap F^{(1)}} + \theta_{E \cap F} \mathcal{H}^h|_{\partial^e F \cap E^{(1)}} \\ &\leq \theta_E \mathcal{H}^h|_{\partial^e E \cap F^{(1)}} + \theta_F \mathcal{H}^h|_{\partial^e F \cap E^{(1)}}, \end{aligned}$$

由此得到所述结论。 □

结合 [3], 备注 2.5 ，以下结论可直接由其中的研究得到。

定理 2.7（相对等周不等式 [3, 备注 4.4]）。设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为长度 PI 空间。则存在函数 $C_I = C_I(C_D, C_P) : (1, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$，使得以下性质成立：给定一个有限周长集合 $E \subseteq \mathrm{X}$、半径 $R > 0$ 和指数 $\alpha > \max\{\log_2(C_D(R)), 1\}$，有

$$\min\left\{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E), \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E)\right\} \leq C_I(\alpha, R) \left(\frac{r^\alpha}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} P\big(E, B_r(x)\big)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}},$$

对每个 $x \in \mathrm{X}$ 和 $r \in (0, R)$，均成立。

在下一个命题中，我们回顾一个众所周知的事实：在单位球的测度一致地有正下界的 PI 空间类中，小体积集合满足等周不等式。这样的结果本质上归功于 [23], ，继而由 [15, 20, 30] 得到。证明可参见 [19, 引理 V.2.1] 中的论证。

命题 2.8（小体积的等周不等式）。设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个长度 PI 空间。则存在常数 $\alpha > 1$, $C > 0$ ，使得以下结论成立。若 $v_0 := \inf_{x \in \mathrm{X}} \mathfrak{m}(B_1(x)) > 0$，那么对于所有满足 $\mathfrak{m}(E) < v_0/2$ 的 Borel 集合 $E \subseteq \mathrm{X}$，均有

$$P(E) \geq C v_0^{\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{m}(E)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}.$$

注 2.9。设 (X, d 𝔪) 是一个长度 PI 空间，且 $E \subseteq$ X 是一个有限周长集，并满足 𝔪(E) 𝔪(X $\setminus E$) > 0。那么，相对等周不等式保证 $P(E) \neq 0$。为证明这一点，任取 $x \in$ X，并注意到对于某个充分大的 $R > 0$，我们有 𝔪($B_R(x) \cap E$) 𝔪($B_R(x) \setminus E$) > 0，因此 $P(E) \geq P(E, B_R(x)) > 0$。■

引理 2.10. 设 (X, d 𝔪) 是一个长度 PI 空间。那么存在 $c = c(\inf C_D, \inf C_P) \in (0,1)$，使得

$$c\,\mathfrak{m} \leq |\mathbf{D}\mathsf{d}_x| \leq \mathfrak{m} \quad \text{for every } x \in \mathrm{X}, \tag{2.1}$$

其中记 $\mathsf{d}_x := \mathsf{d}(\cdot, x) \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$。特别地，有

$$\mathfrak{m}\big(\partial B_r(x)\big) = 0 \quad \text{for every } x \in \mathrm{X} \text{ and } r > 0. \tag{2.2}$$

证明。回顾一下，$|\mathbf{D}\mathsf{d}_x| \leq \mathrm{lip}(\mathsf{d}_x)\mathfrak{m}$。此外，由 [5, 公式 (4.5)] 可推得存在一个常数 $c = c(\inf C_D, \inf C_P) \in (0, 1)$，使得 $c\,\mathrm{lip}(\mathsf{d}_x)\mathfrak{m} \leq |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|$。为得到 (2.1)，注意到 $\mathrm{lip}(\mathsf{d}_x) \equiv 1$: 不等式 $\mathrm{lip}(\mathsf{d}_x) \leq 1$ 在任意度量空间中都成立，而反向不等式则直接由 (X, d) 是测地空间这一事实得出。最后，将 (2.1) 与余面积公式结合即可证明 (2.2)：我们可以估计

$$\mathfrak{m}\big(\partial B_r(x)\big) \leq \frac{1}{c}|\mathbf{D}\mathsf{d}_x|\big(\partial B_r(x)\big) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} P\big(B_s(x), \partial B_r(x)\big)\,\mathrm{d}s = 0,$$

其中，最后一个等式源于 $P(B_s(x), \cdot)$ 集中在 $\partial^e B_s(x) \subseteq \partial B_s(x)$ 上这一事实。

□

3 拓扑正则性

我们先给出周长体积约束极小化者的定义 r.

定义 3.1（体积约束极小化者）。设 (X, d 𝔪) 为度量测度空间。若局部有限周长集 $E \subseteq$X 满足以下性质，则称其为周长的体积约束极小化者：对于任意博雷尔集 $F \subseteq$X 和满足 𝔪($(E\Delta F)\setminus K$) $= 0$ 且 𝔪($E \cap K$) $=$ 𝔪($F \cap K$) 的紧集$K \subseteq$X，均有 $P(E, K) \leq P(F, K)$。

注意，E 是体积约束极小化者，当且仅当 X $\setminus E$ 是体积约束极小化者。

注 3.2. 等周集，即具有有限周长且满足 $0 <$ 𝔪(E) $< +\infty$ 的集 $E \subseteq$ X，若对任意满足 𝔪(F) $=$ 𝔪(E) 的博雷尔集 $F \subseteq$X，均有 $P(E) \leq P(F)$，则它是周长的体积约束极小化者。■

接下来，我们介绍具有变形性质的度量测度空间的定义，这将是本文其余部分始终采用的假设。

定义 3.3（变形性质）。设 (X, d 𝔪) 是一个度量测度空间，且 (X, d) 是正规的。若以下性质成立，则称 (X, d 𝔪) 具有变形性质：对于每个局部有限周长集 $E \subseteq$ X 及任意点 $x \in$ X，存在常数 $R \in (0, 1]$ 和 $C \geq 0$，使得

$$P(E \setminus B_r(y), B_{2R}(x)) \leq C\frac{\mathfrak{m}(B_r(y) \cap E)}{r} + P(E, B_{2R}(x)) \quad \forall y \in B_R(x),\, r \in (0, R), \tag{3.1a}$$

$$P(E \cup B_r(y), B_{2R}(x)) \leq C\frac{\mathfrak{m}(B_r(y) \setminus E)}{r} + P(E, B_{2R}(x)) \quad \forall y \in B_R(x),\, r \in (0, R), \tag{3.1b}$$

为方便起见，从现在起，我们将 $R_x(E) \in (0,1]$ 定义为使上述结论对某个 $C \geq 0$ 成立的最大 $R \in (0,1]$，并将 $C_x(E) \geq 0$ 定义为使 (3.1a) 和 (3.1b) 在 $R = R_x(E)$ 的条件下成立的最小常数。注意，由对称性可知，$R_x(E) = R_x(\mathrm{X} \setminus E)$ 且 $C_x(E) = C_x(\mathrm{X} \setminus E)$；这正是定义 3.3 要求 (3.1a) 和 (3.1b) 在相同常数 C 和 R 下都成立的原因。我们还注意到，若 $E \subseteq \mathrm{X}$ 是一个给定的有限周长集（分别为局部有限周长集），则 (3.1a) 等价于要求对于每个 $(y,r) \in B_R(x) \times (0,R)$ 以及每个满足 $B_{2R}(x) \subseteq S$ 的博雷尔集（分别为有界博雷尔集）$S \subseteq \mathrm{X}$，都有 $P(E \setminus B_r(y), S) \leq C\,\mathfrak{m}(B_r(y) \cap E)_r + P(E,S)$ 成立。(3.1b) 同理。我们经常会用到这一观察，而不再另行说明。此外：

$$\inf_{x \in B} R_x(E) > 0 \quad \text{for every bounded set } B \subseteq \mathrm{X}. \tag{3.2}$$

事实上，B 的闭包的紧性确保对于某些 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in B$，有 $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{R_{x_i}(E)/2}(x_i)$，从而得到 $R_x(E) \geq \delta := \min\left\{R_{x_i}(E)/2 : i = 1, \ldots\ldots, n\right\} > 0$ 对每个 $x \in B$ 都成立。同样的论证还表明，对于每个 $x \in B$，存在某些 R 和 C，使得 (3.1a) 和 (3.1b) 成立；这些量仅依赖于 B 和 E，例如取 $R := \delta$ 以及 $C := \max\left\{C_{x_i}(E) : i = 1, \ldots\ldots, n\right\}$ 即可。

注 3.4（具有变形性质的空间）。以下是一些具有变形性质的空间：

i) 欧几里得空间（例如参见 [25] 及其中的参考文献）。ii) 黎曼流形（例如，可以沿用 [6, 定理 1。1] 的证明，并利用里奇曲率局部有下界这一事实来证明）。iii) $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，其中 $K \in \mathbb{R}$ 且 $N \in [1,\infty)$（证明见 [6, 定理 1。1]，其证明以 [14, 定理 2。4] 中的高斯–格林公式为基础）。

我们指出，在上述情形中，变形性质有一个更强的版本：给定任意 $R > 0$，使变形性质对每个点 $x \in \mathrm{X}$ 以及每个 $0 < r < R$ 都成立的常数 $C_x(E)$，可以选取得与 E、x 无关，而仅依赖于 K、N、R。

研究是否还有其他具有变形性质的典型 PI 空间，将会很有趣。一个值得探究的自然类别是次黎曼流形，或者更具体地说，是 Carnot群。例如，在第一海森堡群中有次拉普拉斯比较定理。令 r 为从原点出发的 Carnot–Carath´eodory 距离，则在分布意义下有 $\Delta_{\mathrm{H}} r \leq 4/r$，其中 Δ_{H} 是水平拉普拉斯算子。关于更一般的次黎曼结构中的次拉普拉斯比较定理，参见 [11]；关于任意本质无分支MCP空间中的拉普拉斯比较定理，参见 [18, 推论 4.19]。接着，将这一结果与文献 [22], 中 Carnot群的 Gauss–Green公式结合起来，可以沿用 [6, 定理 2.32 和定理 1.1] 的思路，得出至少 $\mathbb{H}^1$，以及更一般地，所有属于本质无分支 $\mathrm{MCP}(K,N)$空间、满足 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in (1,\infty)$（参见 [10], [8]）的群，都具有变形性质。由于这超出了本文的讨论范围，而且还需要处理距离函数的一些正则性问题，我们在此不讨论这些例子，而将其留待未来研究。

我们提到，另一方面，等周集的拓扑正则性已经在 [32] Carnot群的情形中以及在 [24] 某一类次黎曼流形上得到证明。

■

注 3.5。存在变形性质不成立的 PI 空间。例如，固定一列两两充分分离的非空球 $B_n := B_{r_n}(x_n)$ in $\mathbb{R}^2$ such that$x_n \to 0$ and $\sum_n r_n < +\infty$。现在考虑密度函数 $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to [1,2]$，其定义为$\rho := \chi_E + 2\chi_{\mathbb{R}^2\setminus E}$，其中 $E := \bigcup_n B_n$。令 $\mathfrak{m} := \rho\mathcal{L}^2$，我们有 $\mathcal{L}^2 \le \rho\mathcal{L}^2 \le 2\mathcal{L}^2$，因此 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, \mathfrak{m})$ 是一个阿尔福斯正则测地 PI 空间。我们断言，对于原点 0 处的有限周长集 E，变形性质并不成立。为验证这一点，注意到对于任意$n \in \mathbb{N}$，都有 $P(B_n) = 2\pi r_n$，而 $P(B_{r_n+\varepsilon}(x_n)) = 4\pi(r_n + \varepsilon)$ 且 $\mathfrak{m}(B_{r_n+\varepsilon}(x_n) \setminus B_n) = 2\pi(2r_n\varepsilon + \varepsilon^2)$ 对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ 成立，其中某个 $\varepsilon_n > 0$ 充分小。因此，

$$\frac{P(E \cup B_{r_n+\varepsilon}(x_n)) - P(E)}{\mathfrak{m}(B_{r_n+\varepsilon}(x_n) \setminus E)/(r_n + \varepsilon)} = \frac{(2\pi r_n + 4\pi\varepsilon)(r_n + \varepsilon)}{2\pi(2r_n\varepsilon + \varepsilon^2)} \to +\infty \quad \text{as } \varepsilon \searrow 0,$$

这表明变形性质在原点处失效。然而，我们尚未发现任何这样的 PI 空间示例：对等周集进行检验时，变形性质会失效；也未发现任何这样的 PI 空间示例：某个等周集的本质内部不是拓扑开集。■

注3.6. 度量测度空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 上变形性质成立蕴含一个增长条件：给定 $x \in X$，存在 $C_x, r_x > 0$，使得

$$P(B_r(y)) \le C_x \frac{\mathfrak{m}(B_r(y))}{r} \quad \text{for every } y \in B_{r_x}(x) \text{ and } r \in (0, r_x). \tag{3.3}$$

前面的 (3.3) 只需在变形性质中取 $E := \varnothing$ 即可推出。我们知道，(3.3) 并不等价于变形性质（例如，注3.5中的例子满足性质 (3.3)）。不过，也存在 (3.3) 失效的 PI 空间示例。我们将要描述的这个例子是 Panu Lahti 提醒作者的。考虑 $\mathbb{R}$ 中的测度 $\mathfrak{m} := |x|^{-1/2}dx$。由于函数 $|x|^{-1/2}$ 是一个 A_1-Muckenhoupt 权重，我们知道 $(\mathbb{R}, |\cdot|, \mathfrak{m})$ 是一个 PI 空间（例如参见 [28]）。利用 $\mathfrak{m}(B_r(0)) = 2\int_0^r \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{\sqrt{r}} \to +\infty$ as $r \searrow 0$，可以很容易地验证单点集 $\{0\}$ 的余维一豪斯多夫测度发散，即 $\mathcal{H}^h(\{0\}) = +\infty$。由 [3,定理 5.3] 可知，当 $y \in (0, +\infty)$ 时，$B_{|y|}(y)$ 不是局部有限周长集。因此，(3.3) 对 $x = 0$ 失效。■

给定一个度量测度空间 $(X,d,\mathfrak{m})$、一个点 $x \in X$ 和一个博雷尔集 $E \subseteq X$，我们引入如下记号

$$v_{E,x}(r) := \mathfrak{m}(B_r(x) \cap E), \quad w_{E,x}(r) := \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E) \quad \text{for every } r > 0. \tag{3.4}$$

我们主定理 1.1 证明的核心包含在以下技术性结果中。

引理 3.7. 设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是具有变形性质的长度 PI 空间。设 $E \subseteq X$ 是周长的体积约束极小化者。任取 $x \in E^{(0)}$ 和 $y \in E^{(1)}$。定义函数 $v_{E,x}, w_{E,y}\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$，如 (3.4) 中所示。固定一个序列 $(r_n)_n \subseteq (0, 1)$，使得 $r_n \to 0$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们定义博雷尔集 $A^{x,y}_{E,r_n} \subseteq (0, r_n)$ 如下

$$A^{x,y}_{E,r_n} := \big\{ r \in (0, r_n) \;\big|\; v_{E,x}(r) \ge w_{E,y}(r) \big\}. \tag{3.5}$$

假设满足以下条件：

i) 存在 $\delta \in (0, R_y(E))$，使得 $B_\delta(x) \cap B_\delta(y) = \varnothing$, $v_{E,x}(\delta) > 0$，且 $w_{E,y}(\delta) > 0$。
ii) 不等式 $\mathcal{L}^1(A^{x,E^y}_{r_n}) \geq r_n/2$ 对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

于是有 $x \in \mathrm{int}(E^{(0)})$。

证明。我们用反证法：假设 $x \notin \mathrm{int}(E^{(0)})$。回想一下，$\mathfrak{m}(B_\delta(y) \setminus E) = w_{E,y}(\delta) > 0$，并注意到 $\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E) \to 0$ as $r \to 0$，我们可以抽取出一个（不重新标记的）子序列 $(r_n)_n$，使得

$$r_n < \delta, \qquad \mathfrak{m}(B_{r_n}(x) \cap E) < \mathfrak{m}(B_\delta(y) \setminus E), \qquad \mathcal{L}^1(A^{x,y}_{E,r_n}) \geq \frac{r_n}{2}, \tag{3.6}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。现在固定 $n \in \mathbb{N}$。我们断言，对于任意 $r \in A_n := A^{x,E^y}_{r_n}$，都存在 $s(r) \in [r, \delta)$，使得

$$v_{E,x}(r) = \mathfrak{m}(B_r(x) \cap E) = \mathfrak{m}(B_{s(r)}(y) \setminus E) = w_{E,y}(s(r)).$$

事实上，若 $w_{E,y}(r) = v_{E,x}(r)$，则可取 $s(r) := r$。若 $w_{E,y}(r) \neq v_{E,x}(r)$，则根据 A_n 的定义，$v_{E,x}(r) > w_{E,y}(r)$，因此 $w_{E,y}$ 的连续性（由 (2.2) 可知）保证对于某个 $s(r) > 0$，有 $w_{E,y}(s(r)) = v_{E,x}(r)$。由于 $w_{E,y}$ 非递减，我们推得$s(r) \geq r$。此外，(3.6) 中的第二个不等式意味着 $s(r) < \delta$。

给定任意 $r \in A_n$，我们将博雷尔集 $E_r \subseteq \mathbf{X}$ 定义为 $E_r := (E \setminus B_r(x)) \cup B_{s(r)}(y)$。(3.6) 中的第一个不等式保证了 $\bar{B}_r(x) \cap \bar{B}_{s(r)}(y) = \varnothing$，由此可得 $\mathfrak{m}\big(E_r \cap (\bar{B}_r(x) \cup \bar{B}_{s(r)}(y))\big) = \mathfrak{m}\big(E \cap (\bar{B}_r(x) \cup \bar{B}_{s(r)}(y))\big)$。为简便起见，记 $K := \bar{B}_{2\delta}(x) \cup \bar{B}_{2\delta}(y)$。假设 E 是周长的体积约束极小化者，则有 $P(E, K) \leq P(E_r, K)$。从现在起，为简化记号，我们将 $C_y(E)$ 简记为 C_y。根据命题 2.6、注记 2.1、变形性质以及 $s(r) \geq r$，我们推得对 $\mathcal{L}^1$- 几乎处处的 $r \in A_n$ 有

$$\begin{aligned}
P(E, K) &\leq P(E_r, K) \\
&\leq P\big(E \cup B_{s(r)}(y), B_r(x)^{(0)} \cap K\big) + P\big(B_r(x), (E \cup B_{s(r)}(y))^{(1)} \cap K\big) \\
&= P(E \cup B_{s(r)}(y), K) - P\big(E \cup B_{s(r)}(y), \partial^e B_r(x) \cup B_r(x)^{(1)}\big) + P(B_r(x), E^{(1)}) \\
&\leq P(E \cup B_{s(r)}(y), K) - P(E, B_r(x)) + P(B_r(x), E^{(1)}) \\
&\leq P(E, K) + C_y \frac{\mathfrak{m}(B_{s(r)}(y) \setminus E)}{s(r)} - P(E, B_r(x)) + P(B_r(x), E^{(1)}) \\
&= P(E, K) + C_y \frac{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)}{s(r)} - P(E, B_r(x)) + P(B_r(x), E^{(1)}) \\
&\leq P(E, K) + C_y \frac{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)}{r} - P(E, B_r(x)) + P(B_r(x), E^{(1)}).
\end{aligned}$$

注意，常数 C_y 取决于 y 和 E，但既不取决于 n，也不取决于 r。因此，我们证明了

$$P(E, B_r(x)) \leq C_y \frac{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)}{r} + P(B_r(x) E^{(1)}) \qquad \text{对于所有 } n \in \mathbb{N} \text{ 和 } \mathcal{L}^1\text{-几乎处处的 } r \in A_n. \tag{3.7}$$

现在固定任意 $\alpha > \max\{\log_2(C_D(\delta)) 1\}$。由相对等周不等式，即定理 2.7，我们知道

$$P(E, B_r(x)) \geq 2\tilde{C} \min\{v_{E,x}(r), w_{E,x}(r)\}^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N} \text{ and } r \in A_n, \tag{3.8}$$

其中我们定义 $\tilde{C} := 1/2C_I(\alpha,\delta)^{(\alpha-1)/\alpha}$。利用 $x \in E^{(0)}$ 这一事实，我们可以找到 $\bar{n} \in \mathbb{N}$，使得

$$v_{E,x}(r) < w_{E,x}(r), \qquad C_y\left(\frac{\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \tilde{C} \quad \text{for every } n \ge \bar{n} \text{ and } r \in A_n. \tag{3.9}$$

结合（3.7）、（3.8）和（3.9），我们推得，对于每个 $n \ge \bar{n}$ 以及 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $r \in A_n$，都有

$$\begin{aligned}
&2\tilde{C}\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \\
&\qquad \le P(B_r(x),E^{(1)}) + \mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}} C_y\left(\frac{\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \\
&\qquad \le P(B_r(x),E^{(1)}) + \tilde{C}\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r}.
\end{aligned}$$

重新整理各项后，我们推得

$$\tilde{C}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r}\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}} \le P(B_r(x),E^{(1)}) \quad \text{for every } n \ge \bar{n} \text{ and } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in A_n. \tag{3.10}$$

现在定义函数 $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 为 $f(r) := |\mathrm{D}\mathrm{d}_x|(B_r(x)\cap E^{(1)})$，对每个 $r > 0$均成立。推论 2.3 表明，f是局部绝对连续的，且对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $r > 0$，有 $f'(r) = P(B_r(x)\ E^{(1)})$。此外，引理 2.10 给出，对每个 $r > 0$，都有 $f(r) \le \mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)$。因此，由（3.10）可得

$$\tilde{C}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} f(r)^{1-\frac{1}{\alpha}} \le f'(r) \quad \text{for every } n \ge \bar{n} \text{ and } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in A_n. \tag{3.11}$$

利用 $x \notin \mathrm{int}(E^{(0)})$，即反证假设，并结合引理 2.10 可知 $f(r) \ge c\,\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E) > 0$ 对每个 $r > 0$均成立，因此我们可以将（3.11）两边除以$\alpha f(r)^{1-\frac{1}{\alpha}}$，从而得到

$$\frac{\tilde{C}}{\alpha}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \le \frac{f'(r)}{\alpha f(r)^{1-\frac{1}{\alpha}}} = (f^{\frac{1}{\alpha}})'(r) \quad \text{for every } n \ge \bar{n} \text{ and } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in A_n. \tag{3.12}$$

(3.6中的第三个不等式意味着 $\mathcal{L}^1([r_n/4,r_n]\cap A_n) \ge r_n/4$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，因此对 (3.12) 积分（并注意到 $(f^{1/\alpha})'(r) \ge 0$ 对 $\mathcal{L}^1$-几乎处处 $r > 0$成立），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{C}}{4\alpha}\mathfrak{m}(B_{r_n/4}(x))^{\frac{1}{\alpha}} &\le \frac{\tilde{C}}{\alpha}\frac{\mathfrak{m}(B_{r_n/4}(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r_n}\mathcal{L}^1([r_n/4,r_n]\cap A_n) \le \frac{\tilde{C}}{\alpha}\int_{[r_n/4,r_n]\cap A_n}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r}\,\mathrm{d}r \\
&\le \int_{[r_n/4,r_n]\cap A_n}(f^{\frac{1}{\alpha}})'(r)\,\mathrm{d}r \le \int_0^{r_n}(f^{\frac{1}{\alpha}})'(r)\,\mathrm{d}r \\
&= f(r_n)^{\frac{1}{\alpha}} \le \mathfrak{m}(B_{r_n}(x)\cap E)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

对每个 $n \ge \bar{n}$ 都成立。令 $C := C_D^{\ 1}(\delta)^2\left(\frac{C}{4\alpha}\right)^{\alpha}$，我们可以得出，对于每个 $n \ge \bar{n}$，$\mathfrak{m}(B_{r_n}(x)\cap E) \ge C\mathfrak{m}(B_{r_n}(x))$。这与 $x \in E^{(0)}$ 这一事实矛盾。因此，该命题的证明完成。

□

借助引理3.7，我们现在可以轻松证明定理1.1。

定理 1.1 的证明。由于 $E^{(1)} = (\mathrm{X} \setminus E)^{(0)}$，只需验证 $E^{(0)} = \mathrm{int}(E^{(0)})$。为证明这一点，我们用反证法：假设存在一点 $x \in E^{(0)} \setminus \mathrm{int}(E^{(0)})$。这意味着 $\mathfrak{m}(E) > 0$（否则 $E^{(0)} = \mathrm{X} = \mathrm{int}(E^{(0)})$）且 $\mathfrak{m}(\mathrm{X} \setminus E) > 0$（否则$E^{(0)} = \varnothing$），因此由注 2.9 可知 $P(E) \neq 0$。由于 $P(E, \cdot)$ 集中在$\partial^e E$上，我们可以找到一点 $z \in \partial^e E$。注意，对所有 $r > 0$，$\mathfrak{m}(B_r(z) \cap E) > 0$ 且 $\mathfrak{m}(B_r(z) \setminus E) > 0$。由于 $z \neq x$，我们可以固定某个半径 $\delta \in (0, R_x(E)) \cap (0, 2R_z(E)/3) \cap (0, \mathrm{d}(x, z)/3)$。利用 $\mathfrak{m}(B_{\delta/2}(z) \cap E) > 0$ 这一事实，我们可以找到一点 $y \in E^{(1)} \cap B_{\delta/2}(z)$。注意，$B_{\delta/2}(z) \setminus E \subseteq B_\delta(y) \setminus E$，因此 $\mathfrak{m}(B_\delta(y) \setminus E) \geq \mathfrak{m}(B_{\delta/2}(z) \setminus E) > 0$。$x \notin \mathrm{int}(E^{(0)})$ 这一事实还意味着 $\mathfrak{m}(B_\delta(x) \cap E) > 0$。因此，令 $v_{E,x}$, $w_{E,y}$ 如 (3.4) 中所定义，我们已证明 $v_{E,x}(\delta) > 0$ 且 $w_{E,y}(\delta) > 0$。根据我们的构造以及 $R_z(E)$ $R_y(E)$ 的定义，有 $2R_z(E)/3 \leq R_y(E)$，因此 $\delta \in (0, R_y(E))$。此外，不等式 $\delta < \mathrm{d}(x, z)/3$ 意味着 $\mathrm{d}(x, y) > 2\mathrm{d}(x, z)/3 > 2\delta$，这表示$\overline{\quad\quad} \; B_\delta(x) \cap B_\delta(y) = \varnothing$。总之，我们证明了引理 3.7 的 i) 项成立。因此，任取满足 $r_n \to 0$ 的序列 $(r_n)_n \subseteq (0, 1)$，根据假设 $x \notin \mathrm{int}(E^{(0)})$，我们推得引理 3.7 的 ii) 项不成立。令 $A^{x,y}_{E,r_n}$ 如 (3.5) 中所述，得到

$$\mathcal{L}^1(A^{x,y}_{E,r_n}) \geq \frac{r_n}{2} \quad \text{holds only for finitely many } n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

由于对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $A^{x,y}_{E,r_n} \cup A^{y,x}_{\mathrm{X}\setminus E,r_n} = (0, r_n)$，我们推断出 $\mathcal{L}^1(A^{y,x}_{\mathrm{X}\setminus E,r_n}) \geq r_n/2$ 对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$成立。鉴于 $v_{\mathrm{X}\setminus E,y}(\delta) = w_{E,y}(\delta) > 0$，且 $w_{\mathrm{X}\setminus E,x}(\delta) = v_{E,x}(\delta) > 0$，我们可以再次应用引理 3.7，从而得到 $y \in \mathrm{int}((\mathrm{X} \setminus E)^{(0)}) = \mathrm{int}(E^{(1)})$。这给出了某个 $\bar{r} > 0$，使得对于每个 $r \in (0, \bar{r})$，都有 $w_{E,y}(r) = 0$。另一方面，由 $x \notin \mathrm{int}(E^{(0)})$ 可知，对于所有 $r \in (0, \bar{r})$，都有 $v_{E,x}(r) > 0$。选取 $\bar{n} \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $n \geq \bar{n}$均有 $r_n < \bar{r}$，我们便得到：对于每个 $n \geq \bar{n}$，$A^{x,y}_{E,r_n} = (0, r_n)$，这与（3.13）矛盾。由此证明 $E^{(0)} = \mathrm{int}(E^{(0)})$。 □

注记 3.8（定理 1.1 的一些推广）。为了尽可能清晰地陈述定理1.1，我们决定不在其最一般的情形下给出证明。不过，下面我们将讨论我们结果的一些推广，这些推广只需对我们的论证稍作调整即可得到。我们始终假设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m})$ 是一个长度 PI 空间。

i) 检视引理 3.7 的证明可知，假设一种较弱的变形性质成立就已足够。具体而言，可以允许出现在（3.1a）、（3.1b）中的常数依赖于 y，并且只需要求体积约束极小化者 E 满足周长的变形性质。

ii) 定理 1.1 也有一个局部化版本：设 $E \subseteq \mathrm{X}$ 是某个开集 $\Omega \subseteq \mathrm{X}$ 中周长的体积约束极小化者（即定义 3.1 中的情形，但要求 $K \subseteq \Omega$ 且将 $P(\cdot)$ 替换为 $P(\cdot, \Omega)$），并满足 $P(E, \Omega) > 0$。那么 $E^{(1)} \cap \Omega$、$E^{(0)} \cap \Omega$ 是开集，且 $\partial E^{(1)} \cap \Omega = \partial E^{(0)} \cap \Omega = \partial^e E \cap \Omega$。

iii) 定理 1.1 可以推广到一类适当拟周长的体积约束极小化者。固定一个开集 $\Omega \subseteq \mathrm{X}$ 和一个泛函 $G\colon \mathscr{B}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ with$G(\varnothing) < +\infty$，它满足以下性质：对于任意 $U \Subset \Omega$ 开集，都存在常数$C = C(U) > 0$和 $\sigma = \sigma(U) \in \big(1 - \frac{1}{\text{最大}\{1,\text{对数}2(\text{下确界 } C_D)\}}, 1\big]$，使得

$$G(E) \leq G(F) + C\mathfrak{m}(E \Delta F)^\sigma \quad \text{whenever } E, F \in \mathscr{B}(\Omega) \text{ satisfy } E \Delta F \subseteq U.$$

接下来，我们将限制在 Ω 上的拟周长 $\mathscr{P}_G$ 定义为 $\mathscr{P}_G(E,\Omega) := P(E,\Omega) + G(E\cap\Omega)$，对每个 $E\in\mathscr{B}(\Omega)$ 均如此。于是，对前述论证稍作调整，即可得到以下结论：若 $E\subseteq X$ 是 Ω 中拟周长 $\mathscr{P}_G$ 的体积约束极小化者（即定义 3.1 中的情形，但要求 $K\subseteq\Omega$，并将$P(\cdot)$ 替换为 $\mathscr{P}_G(\cdot,\Omega)$），且满足 $P(E,\Omega)>0$，则 $E^{(1)}\cap\Omega$ 和 $E^{(0)}\cap\Omega$ 是开集，并且有 $\partial E^{(1)}\cap\Omega = \partial E^{(0)}\cap\Omega = \partial^e E\cap\Omega$。■

一旦我们知道周长的体积约束极小化者有一个开代表，就可以通过适当调整引理证明中的论证，得到以下预期的边界密度估计 3.7。

定理 3.9（边界密度估计）。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是具有变形性质的长度 PI 空间。设 $E\subseteq X$ 是周长的体积约束极小化者。设$B\subseteq X$ 是给定的有界集。则存在常数 $\bar r = \bar r(E,B,C_D,C_I) > 0$ 和 $C = C(E,B,C_D,C_I) > 1$，使得

$$\frac{1}{C}\le\frac{\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\le 1-\frac{1}{C},\qquad \frac{1}{C}\le\frac{rP(E,B_r(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\le C, \tag{3.14}$$

对每个 $x\in\partial^e E\cap B$ 和 $r\in(0,\bar r)$ 均成立。

特别地，存在常数 $\tilde C = \tilde C(C,C_D(\bar r/2))\ge 1$，使得

$$P(E,B_{2r}(x))\le\tilde C\,P(E,B_r(x))\quad \text{for every } x\in\partial^e E\cap B \text{ and } r\in(0,\bar r/2). \tag{3.15}$$

证明。若 $\partial^e E$ 仅含一个点，则 (3.14) 中第一个结论由定义 $\partial^e E$ 得出，第二个结论则由 [3, 定理 5.4] 得出。因此，我们可以假设 $\partial^e E$ 至少包含两个不同的点 z 和 $\tilde z$，否则无须证明。特别地，令 $\rho := \min\{R_z(E), R_{\tilde z}(E), \tfrac{1}{5}\mathsf{d}(z,\tilde z)\}$，便可找到两个点 $y\in B_{\rho/2}(z)\cap E^{(1)}$ 和$\tilde y\in B_{\rho/2}(\tilde z)\cap E^{(1)}$。事实上，定理 1.1 保证 $y,\tilde y\in \mathrm{int}(E^{(1)})$，因此存在$r_0\in(0,\rho)$，使得

$$\mathfrak{m}(B_{r_0}(y)\setminus E) = \mathfrak{m}(B_{r_0}(\tilde y)\setminus E) = 0. \tag{3.16}$$

注意到 $\mathfrak{m}(B_\rho(y)\setminus E)\ge\mathfrak{m}(B_{\rho/2}(z)\setminus E)>0$，类似地 $\mathfrak{m}(B_\rho(\tilde y)\setminus E)>0$。倍增假设确保 K 的闭包 B 是紧的，因此应用狄尼定理可得存在 $r_1>0$，使得

$$\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E) < \min\left\{\mathfrak{m}(B_\rho(y)\setminus E), \mathfrak{m}(B_\rho(\tilde y)\setminus E)\right\}\quad \text{for every } x\in K \text{ and } r\in(0,r_1). \tag{3.17}$$

由 (3.2)，我们还可以找到 $r_2>0$，使得对每个 $x\in K$，$r_2<R_y(E)$、$r_2<R_{\tilde y}(E)$ 和 $r_2<R_x(\varnothing)$ 均成立。现在定义 $\bar r_0 := \min\{r_0,r_1,r_2\}>0$。固定 $x\in\partial^e E\cap B$。我们对 $\bar r_0$ 的选择确保 $B_\rho(x)$ 与 $B_\rho(y)$ 和 $B_\rho(\tilde y)$ 中至少一个不相交。将 y 和 $\tilde y$ 重新标记后，不妨设 $B_\rho(x)\cap B_\rho(y)=\varnothing$。给定任意 $r\in(0,\bar r_0)$，由 (3.16)、(3.17) 以及 $s\mapsto\mathfrak{m}(B_s(y)\setminus E)$ 的连续性可推出，存在 $s(r)\in(\bar r_0,\rho)$，使得 $\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E) = \mathfrak{m}(B_{s(r)}(y)\setminus E)$。定义博雷尔集 $E_r\subseteq X$ 为 $E_r := (E\setminus B_r(x))\cup B_{s(r)}(y)$。根据关于 E 的极小性假设，仿照引理 3.7 证明中的论证，我们得到

$$P(E,B_r(x))\le\max\{C_z,C_{\tilde z}\}\frac{\mathfrak{m}(B_r(x)\cap E)}{\bar r_0} + P(B_r(x),E^{(1)}), \tag{3.18}$$

对任意 $x \in \partial^e E \cap B$ 以及几乎处处的 $r \in (0, \bar{r}_0)$，均成立。对任意 $x \in \partial^e E \cap B$，定义 $A_x(E) := \{r > 0 : |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E) \le |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \setminus E)\}$。固定 $\alpha > \max\{\log_2(C_D(\rho)), 1\}$。对 (3.18) 左端应用相对等周不等式，并利用引理 2.10，可推出

$$\begin{aligned} &2C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ &\qquad = 2C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \min\left\{|\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E), |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \setminus E)\right\}^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ &\qquad \le 2C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \min\left\{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E), \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E)\right\}^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ &\qquad \le P(B_r(x), E^{(1)}) + \frac{\max\{C_z, C_{\tilde{z}}\}}{c^{1-\frac{1}{\alpha}}} \frac{r}{\bar{r}_0} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

对几乎处处的 $\mathcal{L}^1$， $r \in (0, \bar{r}_0) \cap A_x(E)$ 成立，其中为简便起见，我们记 $C_0 := 1/\left(2\, C_I(\alpha, \rho)^{(\alpha-1)/\alpha}\right)$。因此，若令

$$\bar{r} := \min\left\{\frac{c^{1-\frac{1}{\alpha}} C_0 \bar{r}_0}{\max\{C_z, C_{\tilde{z}}\}}, \bar{r}_0\right\} \in (0, \bar{r}_0],$$

那么我们由（3.19）推得

$$C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E)^{1-\frac{1}{\alpha}} \le P(B_r(x), E^{(1)}) \quad \text{for } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in (0, \bar{r}) \cap A_x(E). \tag{3.20}$$

这也　证明了（考虑 $\mathrm{X} \setminus E$ 而非 E），在适当缩小 $\bar{r} > 0$ 后，　t

$$C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \setminus E)^{1-\frac{1}{\alpha}} \le P(B_r(x), E^{(0)}) \quad \text{for } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in (0, \bar{r}) \cap A_x(\mathrm{X} \setminus E). \tag{3.21}$$

现在定义函数 $f_x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 如下

$$f_x(r) := \min\left\{|\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E^{(1)}), |\mathbf{D}\mathsf{d}_x|(B_r(x) \cap E^{(0)})\right\} \quad \text{for every } r > 0.$$

推论 2.3 保证 f_x 是局部绝对连续的，并且

$$f_x'(r) = \begin{cases} P(B_r(x), E^{(1)}) & \text{for } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in A_x(E), \\ P(B_r(x), E^{(0)}) & \text{for } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in A_x(\mathrm{X} \setminus E). \end{cases}$$

注意， $A_x(E) \cup A_x(\mathrm{X} \setminus E) = (0, +\infty)$。仿照引理 3.7中的论证，由式（3.20）和式（3.21）可推出

$$\frac{C_0}{\alpha} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \le (f_x^{\frac{1}{\alpha}})'(r) \quad \text{for } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } r \in (0, \bar{r}). \tag{3.22}$$

给定任意 $r \in$ （0， $\bar{r}$），我们可以在区间 $[r/2, r]$上对不等式（3.22）进行积分，从而得到

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{2\alpha\, (C_D(\bar{r}/2))^{\frac{1}{\alpha}}} \mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}} &\le \frac{C_0}{\alpha} \frac{\mathfrak{m}(B_{r/2}(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \frac{r}{2} \le \frac{C_0}{\alpha} \int_{r/2}^{r} \frac{\mathfrak{m}(B_s(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{s}\, \mathrm{d}s \\ &\le \int_0^r (f_x^{\frac{1}{\alpha}})'(s)\, \mathrm{d}s = f_x(r)^{\frac{1}{\alpha}} \le \min\left\{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E), \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

由此可知，对于每个 $x \in \partial^e E \cap B$ and $r \in (0, \bar{r})$，都有 $\mathfrak{m}(B_r(x)) \le C_1 \mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)$，其中我们定义 $C_1 := C_D(\bar{r}/2)\left(\frac{2\alpha}{C_0}\right)^{\alpha}$。

固定 $x \in \partial^e E \cap B$ 和 $r \in (0, \bar{r})$。由于 $\mathfrak{m}(B_r(x)) \le C_1 \min\left\{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E)\ \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E)\right\}$，由 (3.23)，利用相对等周不等式，并回忆 $2C_0 = 1/C_I(\alpha, \rho)^{(\alpha-1)/\alpha}$，我们得到

$$\frac{2C_0}{C_1^{1-\frac{1}{\alpha}}} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r} \le 2C_0 \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{r} \min\left\{\mathfrak{m}(B_r(x) \cap E), \mathfrak{m}(B_r(x) \setminus E)\right\}^{1-\frac{1}{\alpha}} \le P(E, B_r(x)).$$

另一方面，经过适当缩小 $\bar{r}$（仅取决于 B），我们可以找到一个常数 $C_2 > 0$（仅取决于 B），使得 $P(B_{\tilde{r}}(x)) \le C_2\, \mathfrak{m}(B_{\tilde{r}}(x))$ $\tilde{r}$对每个 $\tilde{r} \in$ ~~$(0, \bar{r})$~~ 均成立；回忆 (3.2) 后的讨论。于是

$$\begin{aligned} P(E, B_r(x)) &\le P(E, B_{\tilde{r}}(x)) \le \max\{C_z, C_{\tilde{z}}\} \frac{\mathfrak{m}(B_{\tilde{r}}(x) \cap E)}{\tilde{r}} + P(B_{\tilde{r}}(x), E^{(1)}) \\ &\le \max\{C_z, C_{\tilde{z}}\} \frac{\mathfrak{m}(B_{\tilde{r}}(x))}{\tilde{r}} + P(B_{\tilde{r}}(x)) \le \left(\max\{C_z, C_{\tilde{z}}\} + C_2\right) \frac{\mathfrak{m}(B_{\tilde{r}}(x))}{\tilde{r}}, \end{aligned}$$

对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $\tilde{r} \in (r, \bar{r})$，由 (3.18) 和变形性质可得。因此，$^{rP}(E,\ B_r(x)$ ~~$\mathfrak{m}(B_r(x)$~~ $\le$ $\max\{C_z, C_{\tilde{z}}\} + C_2$ 对所有 $x \in \partial^e E \cap B$ 和 $r \in (0, \bar{r})$ 均成立。取

$$C := \max\left\{C_1, C_1^{(\alpha-1)/\alpha}/(2C_0), \max\{C_z, C_{\tilde{z}}\} + C_2\right\},$$

由此可得 (3.14) 成立。最后，应用 (3.14)，可得对于每个 $x \in \partial^e E \cap B$和 $r \in (0, \bar{r}/2$，都有

$$\frac{P(E, B_{2r}(x))}{P(E, B_r(x))} \le \frac{C\mathfrak{m}(B_{2r}(x))}{2r} \frac{Cr}{\mathfrak{m}(B_r(x))} \le \frac{C^2 C_D(\bar{r}/2)}{2},$$

这证明了 (3.15) 成立。因此，命题得证。 □

最后，我们对体积约束极小化者所满足的其他极小性作一点评述。通过复现一些众所周知的论证，可以推出这类性质，例如参见 [6, 注 3.23、定理 3.24], 利用定理1.1 和变形性质。

注 3.10. 设 (X, d $\mathfrak{m}$) 是具有变形性质的长度 PI 空间。设$E \subsetneq$X 是周长的体积约束极小化者。利用定理 1.1，并采用与定理 3.9 证明中类似的论证，可以证明，对于任意紧集 $K \subseteq$ X，存在 $\Lambda, r_0 > 0$，使得 E 是 K 上的 (Λ, r_0)-周长极小化者；也就是说，只要对于某个 $x \in K$ 和 $r < r_0$ 有 $F\Delta E \subseteq B_r(x)$，就有 $P(E, B_r(x)) \le P(F, B_r(x)) + \Lambda\, \mathfrak{m}(E\Delta F)$。

此外，对于任意给定的紧集 $K \subseteq$ X，都存在常数 $L, r_0 > 0$，使得 E 在 K 上是 (L, r_0)-拟极小的；也就是说，只要对于某些 $x \in K$ 和 $r < r_0$，有 $F\Delta E \subseteq B_r(x)$，就有 $P(E, B_r(x)) \le L\, P(F, B_r(x))$。拟极小集这一类对象已有研究，例如见 [31]。

值得指出的是，一旦我们知道周长的体积约束极小化者是（L，r_0）-拟极小集，定理 3.9 便可直接由 [31, 定理 4.2 和引理 5.1]得出。不过，我们仍选择对定理 3.9给出一个自包含的证明，该证明利用了体积约束极小化者的开性。■

4 等周集的有界性

在最后这一节中，我们证明满足变形性质且单位球体积具有一致下界的长度 PI 空间中等周集的有界性（定理 1.2）。论证运用了我们的主要结果定理 1.1所给出的拓扑正则性。

定理 *1.2* 的证明。 反设 E 没有有界代表元，即$\mathfrak{m}(E \setminus B_R(x)) > 0$ 对所有 $R > 0$ 以及 $x \in \mathrm{X}$均成立。 特别地，X 是无界的，并且由于

$$v_0 := \inf_{x\in \mathrm{X}} \mathfrak{m}(B_1(x)) > 0,$$

我们有 $\mathfrak{m}(\mathrm{X}) = \infty$ 以及 $\mathfrak{m}(\mathrm{X} \setminus E) > 0$。于是 $P(E) > 0$，并且按照定理 1.1 的证明，我们可以找到 $y \in E^{(1)}$和 $\rho \in (0, R_y(E))$，使得 $\delta := \mathfrak{m}(B_\rho(y) \setminus E) > 0$。由定理 1.1 可知 $y \in \mathrm{int}(E^{(1)})$，即存在 $r_0 > 0$使得 $\mathfrak{m}(B_{r_0}(y) \setminus E) = 0$.我们考虑函数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$f(R) := |\mathbf{D}\mathrm{d}_y|(E^{(1)} \setminus B_R(y)) = |\mathbf{D}\mathrm{d}_y|(E^{(1)}) - |\mathbf{D}\mathrm{d}_y|(E^{(1)} \cap B_R(y)),$$

并注意到 $|\mathrm{D}\mathrm{d}_y|(E^{(1)}) \le \mathrm{lip}(\mathrm{d}_y)\mathfrak{m}(E^{(1)}) = \mathfrak{m}(E) < +\infty$. 根据推论 2.3，函数$f$局部绝对连续，并满足 $f'(r) = -P(B_R(x)\ E^{(1)})$ 对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $R > 0$。由引理 2.10 以及由于 $\mathfrak{m}(E^{(1)} \Delta E) = 0$，还存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$0 < c\,\mathfrak{m}(E \setminus B_R(y)) \le f(R) \le \mathfrak{m}(E \setminus B_R(y)), \quad \forall\, R > 0. \tag{4.1}$$

注意到，由于 $\mathfrak{m}(E) < +\infty$，因此 $\mathfrak{m}(E \setminus B_R(y)) \to 0$当 $R \to +\infty$时成立。于是，当 $R \to +\infty$时， $f(R) \to 0$，因此我们可以找到 $R_0 > \rho$，使得对所有 $R \ge R_0.$，都有 $f(R) < \min\{\delta, v_0/2\}$。由连续性可知，对于每个 $R \ge R_0$，都存在 $r(R) \in (0, \rho)$，使得

$$\mathfrak{m}(B_{r(R)}(y) \setminus E) = \mathfrak{m}(E \setminus B_R(y)). \tag{4.2}$$

对于每个 $R \ge R_0$，我们定义集合 $F_R := (E \cup B_{r(R)}(y)) \cap B_R(y)$，由 (4.2) 可知它满足 $\mathfrak{m}(F_R) = \mathfrak{m}(E)$，且 $r(R) < R$。因此，根据极小性，对于每个 $R \ge R_0$，都有 $P(E) \le P(F_R)$。此外，利用命题 2.6 和变形性质，对于 $\mathcal{L}^1$- 几乎处处的 $R \ge R_0$，我们有

$$\begin{aligned}
P(E) \le P(F_R) &= P((E \cup B_{r(R)}(y)) \cap B_R(y)) \\
&\le P(E \cup B_{r(R)}(y), B_R(y)^{(1)}) + P(B_R(y), (E \cup B_{r(R)}(y))^{(1)}) \\
&\le P(E \cup B_{r(R)}(y)) - P(E \cup B_{r(R)}(y), B_R(y)^{(0)}) + P(B_R(y), E^{(1)}) \\
&\le P(E) + C_y(E)\frac{\mathfrak{m}(B_{r(R)}(y) \setminus E)}{r_0} - P(E, B_R(y)^{(0)}) + P(B_R(y), E^{(1)}) \\
&\le P(E) + C_y(E)\frac{\mathfrak{m}(B_{r(R)}(y) \setminus E)}{r_0} - P(E \setminus B_R(y)) + 2P(B_R(y), E^{(1)}) \\
&\le P(E) + C_y(E)\frac{\mathfrak{m}(E \setminus B_R(y))}{r_0} - C v_0^{\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{m}(E \setminus B_R(y))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + 2P(B_R(y), E^{(1)}),
\end{aligned}$$

取 $C > 0$， $\alpha > 1$ 且常数与 R 无关，其中第五行再次使用了命题 2.6 ，最后一行使用了命题 2.8 中的小体积的等周不等式（回忆一下， $\mathfrak{m}(E \setminus B_R(y)) < v_0/2$）。结合（4.1）可得

$$2f'(R) \le C_y(E)c^{-1}r_0^{-1}f(R) - C v_0^{\frac{1}{\alpha}} f(R)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \le -C_1 f(R)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \quad \text{for a.e. } R \ge R_1,$$

其中某个常数 $R_1 \geq R_0$ 足够大，且 $C_1 > 0$ 是与 R 无关的常数。注意，在最后一个不等式中，我们用到了当 $R \to +\infty$ 时，$f(R) \to 0$，以及 $\alpha > 1$.。由于对所有 $R > 0$，$f(R) > 0$，这表明

$$(f^{\frac{1}{\alpha}})'(R) \leq -\frac{C_1}{2\alpha}, \quad \text{for a.e. } R \geq R_1,$$

这与对于任意 $R > 0$，$f(R)$ 均严格为正这一事实相矛盾。 □

参考文献

[1] V. Agostiniani, M. Fogagnolo, and L. Mazzieri, 非负里奇曲率流形中闭超曲面的尖锐几何不等式，《数学发明》，222（2020年），第1033–1101页。[2] F. J. Almgren, Jr., 带约束椭圆变分问题解的几乎处处存在性与正则性，《美国数学会回忆录》，4（1976年），第viii+199页。[3] L. Ambrosio, 倍增度量测度空间中有限周长集的精细性质，《集值分析》，10（2002年），第111–128页。[4] L. Ambrosio, 度量测度空间中的微积分、热流与曲率-维数界，载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》。第一卷：大会报告，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2018年，第301–340页。[5] L. Ambrosio, A. Pinamonti, and G. Speight, Cheeger能量的张量化、空间$H^{1,1}$以及图的面积公式，《数学进展》，281（2015年），第1145–1177页。[6] G. Antonelli, E. Pasqualetto, and M. Pozzetta, 里奇曲率下界空间中的等周集，《非线性分析》，220（2022年），第112839页。[7] G. Antonelli, E. Pasqualetto, M. Pozzetta, and D. Semola, 里奇曲率下界非塌缩空间上的渐近等周不等式。《数学年刊》（2023年）。https://doi.org/10.1007/s00208-023-02674-y[8] Z. Badreddine and L. Rifford, 二步解析次黎曼结构与Lipschitz嘉当群的测度收缩性质，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），70（2020年），第2303–2330页。[9] Z. M. Balogh and A. Kristály, 非负里奇曲率且具有欧几里得体积增长的空间中的尖锐几何不等式，《数学年刊》385，1747–1773（2023年）。
[10] D. Barilari and L. Rizzi, 广义H型嘉当群的尖锐测度收缩性质，《当代数学通讯》，20（2018年），第1750081号，24页。[11] F. Baudoin, E. Grong, K. Kuwada, and A. Thalmaier, 全测地黎曼叶状结构上的次拉普拉斯比较定理，《Calc. Var. Partial Differential Equations》，58（2019年），第130号论文，38页。[12] A. Björn and J. Björn, 度量空间上的非线性位势理论，EMS数学专著丛书第17卷，欧洲数学会（EMS），苏¨黎世，2011年。[13] S. Brendle （2023年），非负曲率流形上的索博列夫不等式，《纯粹与应用数学通讯》，76：2192–2218。[14] E. Bruè, E. Pasqualetto and D. Semola, RCD(K,N)空间上有限周长集约化边界的可求长性，《欧洲数学会杂志》，25（2023年），第2期，第413–465页。[15] P. Buser, 关于等周常数的注记，《高等师范学校科学年刊》（第4辑），15（1982年），第213–230页。

[16] F. Cavalletti and D. Manini, 非紧MCP空间中的等周不等式，美国数学会会刊，150（2022年），第3537–3548页。[17] ——, 非负里奇曲率下等周不等式的刚性。预印本，arXiv:2207.03423，2022年。[18] F. Cavalletti and A. Mondino, 距离函数拉普拉斯算子的新公式及其应用，《分析与偏微分方程》，13（2020年），第2091–2147页。[19] I. Chavel, 等周不等式，剑桥数学专著丛书第145卷，剑桥大学出版社，剑桥，2001年。
[20] I. Chavel and E. A. Feldman, 黎曼流形中的修正等周常数与长时间热扩散，《杜克数学杂志》，64（1991年），第473–499页。[21] E. Cinti and A. Pratelli, $\varepsilon - \varepsilon^{\beta}$ 性质、具有密度的 $\mathbb{R}^N$中等周集的有界性及其若干应用，《纯粹与应用数学杂志》，728（2017年），第65–103页。
[22] G. E. Comi and V. Magnani, 分层群上的高斯–格林定理，《数学进展》，360（2020年），第106916号，85页。[23] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, 无穷远处等距的黎曼流形，《伊比利亚美洲数学杂志》，11（1995年），第687–726页。[24] M. Galli and M. Ritoré, 接触次黎曼流形中等周区域的存在性，《数学分析及其应用杂志》，397（2013年），第697–714页。
[25] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini, 带体积约束的周长极小集的边界正则性，《印第安纳大学数学杂志》，32（1983年），第25–37页。[26] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev遇见Poincar´e，《美国数学会回忆录》，145（2000年）。[27] J. Heinonen, 度量空间上的分析讲义，Universitext丛书，施普林格出版社，纽约，2001年。[28] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, 退化椭圆方程的非线性位势理论，纽约州米尼奥拉，第xii+404页。多佛出版社，2006年。[29] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson, 度量测度空间上的Sobolev空间，新数学专著丛书第27卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015年。[30] M. Kanai, 黎曼流形的粗等距与抛物性，《日本数学会杂志》，38（1986年），第227–238页。
[31] J. Kinnunen, R. Korte, A. Lorent, and N. Shanmugalingam, 度量空间中具有拟极小边界曲面的集合的正则性，《几何分析杂志》，23（2013年），第1607–1640页。
[32] G. P. Leonardi and S. Rigot, Carnot群上的等周集，《休斯敦数学杂志》，29（2003年），第609–637页。[33] J. Lott and C. Villani, 通过最优传输定义度量测度空间的里奇曲率，《数学年刊》（第2辑），169（2009年），第903–991页。[34] F. Maggi, 有限周长集与几何变分问题，剑桥高等数学研究丛书第135卷，剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[35] M. Miranda Jr., “良好”度量空间上的有界变差函数，《纯粹与应用数学杂志》，82（2003年），第975–1004页。
[36] F. Morgan, 黎曼流形中等周超曲面的正则性，《美国数学会汇刊》，355（2003年），第5041–5052页。

[37] J. Pozuelo，次芬斯勒幂零群中等周区域的存在性。预印本，arXiv:2103.06630，2021年。[38] A. Pratelli and G. Saracco，双重密度等周问题中的 $\varepsilon - \varepsilon^{\beta}$ 性质及等周集的正则性，《Adv. Nonlinear Stud.》，20（2020），第539–555页。[39] T. Rajala，度量空间上由稳定曲率条件导出的局部庞加莱不等式，《Calc. Var. Partial Differential Equations》，44（2012），第477–494页。[40] K.-T. Sturm，论度量测度空间的几何。II，《Acta Math.》，196（2006），第133–177页。[41] Q. Xia，带体积约束的拟周长极小化子的正则性，《Interfaces Free Bound.》，7（2005），第339–352页。